

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VIỆN TOÁN HỌC**



MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ HÌNH OLYMPIAD

NGƯỜI VIẾT : Ths LÊ QUÂN HỮU

CHỨC VỤ : **GIÁO VIÊN**

QUAN VỰC CÔNG TÁC : **TRƯỜNG THPT QUAN HOÁ, TỈNH THANH HOÁ**

MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ HÌNH OLYMPIAD

(Mathscope.org)

Những kiến thức sau đây gồm một số kiến thức cơ sở để khám phá hình học olympiad hoặc là những kết quả đẹp nổi tiếng :hornytoro:.Bài viết này được soạn ra nhằm đáp ứng nhu cầu tra cứu ,học hỏi của nhiều bạn đọc.

Nó sẽ cần sự chung tay của nhiều thành viên !.

Đầu tiên mình sẽ giới thiệu mục lục và nếu ai biết phần kiến thức ấy thì có thể post lên , nhưng để đảm bảo cho tính hệ thống , chặt chẽ và dễ theo dõi của bài viết ,mình xin nêu một số quy ước như sau:

1) Mỗi bài viết đều phải vẽ hình minh họa.

2) Mỗi bài viết chỉ đề cập đến 1 đề mục kiến thức.

3) Phải đảm bảo thứ tự nêu trong mục lục.

4) Chúng tôi chỉ giữ lại những trao đổi có ích kể từ sau khi hoàn thành mục lục, điều đó có nghĩa là những trao đổi chen giữa không bị xóa lúc này nhưng sẽ bị xóa khi mục lục được hoàn tất..

Bây giờ sẽ là nội dung chính 😊

A/ MỤC LỤC

I/ Một số định nghĩa ,định lí , điểm và đường đặc biệt không duy nhất :

I.1)Định lí Menelaus

I.2)Mở rộng định lí Menelaus theo diện tích

I.3)Định lí Menelaus cho tứ giác

I.4)Định lí Ceva

I.5)Định lí Ceva dạng sin

I.6)Định lí Desargues

I.7)Định lí Pappus

I.8)Một trường hợp đặc biệt của định lí Pappus qua góc nhìn hình xạ ảnh.

I.9)Đẳng thức Ptolemy

I.10)Bất đẳng thức Ptolemy

I.11)Định lí Pascal

I.12)Định lí Brianchon

I.13)Định lí Miquel

I.14)Công thức Carnot

I.15)Định lí Carnot

I.16)Định lí Brokard

I.17)Định lí Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác

I.18)Định lí Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tứ giác

(Định lí Fuss)

I.19)Định lí Casey

I.20)Định lí Stewart

I.21)Định lí Lyness

I.22)Định lí Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama)

I.23)Định lí Thébault

I.24)Công thức Jacobi liên quan đến tâm tỉ cự,định lí Leibnitz

I.25)Định lí Newton cho tứ giác ngoại tiếp

I.26)Định lí Breichneider

I.27)Định lí con nhím

I.28)Định lí Gergonne -Euler

I.29)Định lí Peletier

I.30)Định lí Miobiut

- I.31) Định lý Viviani
- I.32) Công thức Lagrange mở rộng
- I.33) Đường thẳng Simson
- I.34) Đường thẳng Steiner
- I.35) Điểm Anti-Steiner (Định lý Collings)
- I.36) Định lý Napoleon
- I.37) Định lý Morley
- I.38) Định lý con bướm với đường tròn
- I.39) Định lý con bướm với cặp đường thẳng
- I.40) Điểm Blaikie
- I.41) Định lý chùm đường thẳng đồng quy
- I.42) Đường tròn Apollonius
- I.43) Định lý Blanchet
- I.44) Định lý Blanchet mở rộng
- I.45) Định lý Jacobi
- I.46) Định lý Kiepert
- I.47) Định lý Kariya
- I.48) Cực trục giao
- I.49) Khái niệm tam giác hình chiếu , công thức Euler về diện tích tam giác hình chiếu
- I.50) Khái niệm hai điểm đẳng giác
- I.51) Khái niệm tứ giác toàn phần.
- I.52) Đường thẳng Droz-Farny
- I.53) Đường tròn Droz-Farny
- I.54) Định lý Van Aubel về tứ giác và các hình vuông dựng trên cạnh
- I.55) Hệ thức Van Aubel
- I.56) Định lý Pithot
- I.57) Định lý Johnson
- I.58) Định lý Eyeball
- I.59) Bổ đề Haruki
- I.60) Bài toán Langley
- I.61) Định lý Paul Yiu về đường tròn bàng tiếp.
- I.62) Định lý Maxwell
- I.63) Định lý Brahmagupta về tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc.
- I.64) Định lý Schooten
- I.65) Định lý Bottema
- I.66) Định lý Pompeiu
- I.67) Định lý Zaslavsky
- I.68) Định lý Archimedes
- I.69) Định lý Urquhart
- I.70) Định lý Mairon Walters
- I.71) Định lý Poncelet về bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp trong tam giác vuông.
- I.72) Định lý Hansen
- I.73) Định lý Steinbart suy rộng
- I.74) Định lý Monge & d'Alembert I
- I.75) Định lý Monge & d'Alembert II
- I.76) Định lý Steiner về bán kính các đường tròn.
- I.77) Định lý Bellavitis
- I.78) Định lý Feuerbach-Luchterhand:

II/Một số điểm và đường đặc biệt được xác định duy nhất với tam giác và tứ

giác,tứ điểm:

Ở đây nếu không giải thích gì thêm thì yếu tố được hiểu là trong tam giác.

- II.1) Đường thẳng Euler của tam giác
- II.2)Đường tròn và tâm Euler
- II.3)Đường đối trung, điểm Lemoine
- II.4)Điểm Gergone,điểm Nobb, đường thẳng Gergone
- II.5)Điểm Nagel
- II.6)Điểm Brocard
- II.7)Điểm Schiffler
- II.8)Điểm Feuerbach
- II.9)Điểm Kosnita
- II.10)Điểm Musselman,định lí Paul Yiu về điểm Musselman
- II.11)Khái niệm vòng cực của tam giác.
- II.12)Điểm Gibert
- II.13)Trục Lemoine
- II.14)Tâm Morley
- II.15) Tâm Spieker và đường thẳng Nagel
- II.16)Hai điểm Fermat
- II.17)Điểm Parry reflection.
- II.18)Đường tròn Taylor ,tâm Taylor
- II.19)Điểm Bevan
- II.20)Điểm Vecten
- II.21)Điểm Mittenpunkt
- II.22)Điểm Napoleon
- II.23)Đường tròn Adam
- II.24)Tam giác Fuhrmann ,đường tròn Fuhrmann
- II.25)Hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ nhất
- II.26)Hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ hai
- II.27)Điểm Euler của Tứ giác nội tiếp
- II.28)Đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần
- II.29)Đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần.
- II.30) Điểm Miquel của tứ giác toàn phần
- II.31)Đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần
- II.32)Hình bình hành Varignon của tứ giác .
- II.33)Điểm Poncelet của tứ giác.

III/Một số mảng kiến thức quan trọng.

- III.1)Ti số kép, phép chiếu xuyên tâm
- III.2)Hàng điểm điều hòa và một số hệ thức liên quan ,
- III.3)Chùm điều hòa, tứ giác điều hòa
- III.4)Góc giữa đường thẳng và đường tròn, giữa hai đường tròn, đường tròn trực giao
- III.5) Cực và đối cực

IV/Một số định lí không chứng minh

Ở đây sẽ giới thiệu một số định lý rất hay và dễ hiểu (nhưng cách chứng minh mà mình biết là phức tạp) tuy nhiên rất vui nếu ai đó sẽ giới thiệu những chứng minh của nó:hornytoro:

IV.1) Định lý Aiyer

IV.2) Đường tròn Lester

IV.3) Tâm Eppstein

IV.4) Đường tròn Neuberg-Mineur của tứ giác

IV.5) Paracevian perspector

B/MỘT SỐ KHÁI NIỆM, ĐỊNH LÝ.

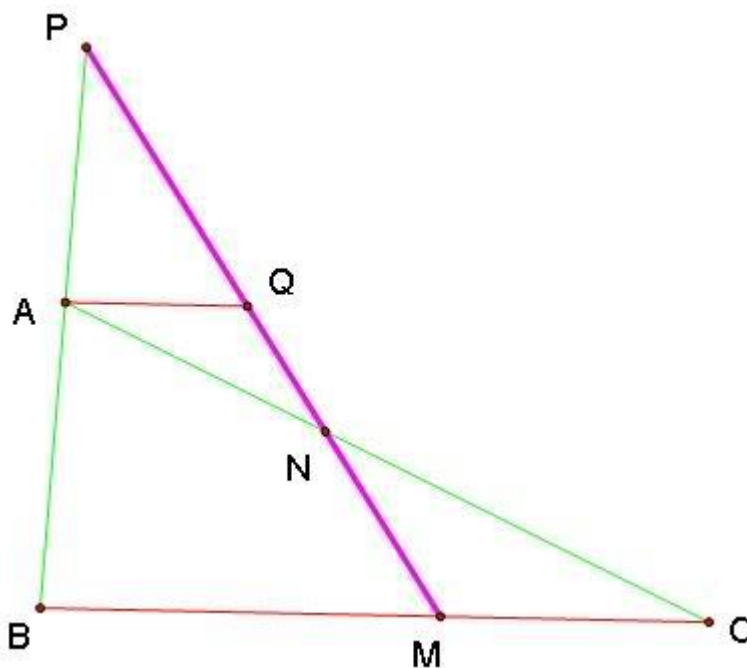
I.1) Định lý Menelaus

Định lý: Cho tam giác ABC và 3 điểm M,N,P lần lượt thuộc BC,CA,AB.

Khi đó M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \quad (1)$$

Chứng minh:



a) Khi M,N,P thẳng hàng.

Trên MN lấy 1 điểm Q sao cho AQ//BC

Theo Thales ;

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{QA}}$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{MB}}$$

Từ đó dễ có đẳng thức (1) trên.

b) Ngược lại, khi có (1):
 Giả sử PN cắt BC tại M'.
 Theo phần trước ta có:

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

Kết hợp với (1) suy ra

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}$$

Do đó M trùng M' tức là M, N, P thẳng hàng.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

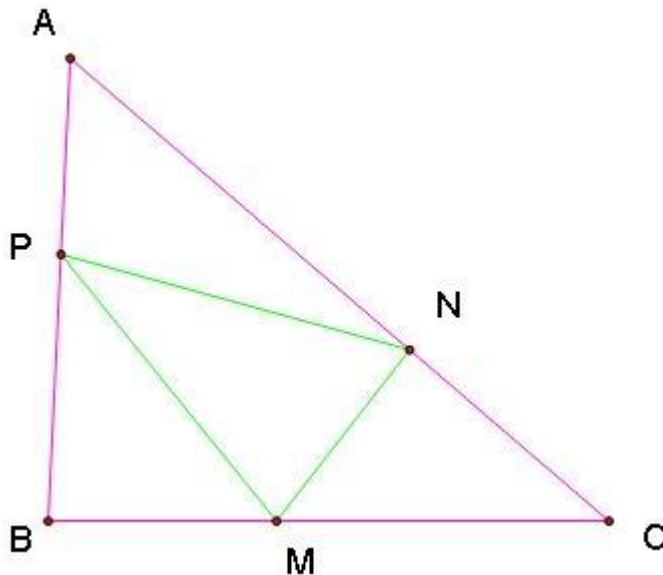
(Xem thêm : [eeg-11.bdf](#); [ge_G1.bdf](#); [6-concur-solns.bdf](#))

I.2) Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích

Định lý: Cho tam giác ABC và 3 điểm M, N, P lần lượt nằm trên BC, CA, AB. Khi đó ta có:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}$$

Chứng minh : (thamtuhoctro post)



Gọi e_1, e_2, e_3 là vector chỉ phương của BC, CA, AB .

Ta có:

$$S[ABC] = S[MAB] + S[MCA]$$

$$\Rightarrow S[ABC] = S[PMA] + S[PBM] + S[NMC] + S[NAM]$$

$$\Rightarrow S[ABC] = S[MNP] + S[BMP] + S[CNM] + S[APN]$$

mặt khác :

$$\frac{S[BMP]}{S[ABC]} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP} \cdot \sin(e_1; e_2)}{\overline{BC} \cdot \overline{BA} \cdot \sin(e_1; e_2)} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}$$

tương tự:

$$\frac{S[CNM]}{S[ABC]} = \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}$$

$$\frac{S[APN]}{S[ABC]} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

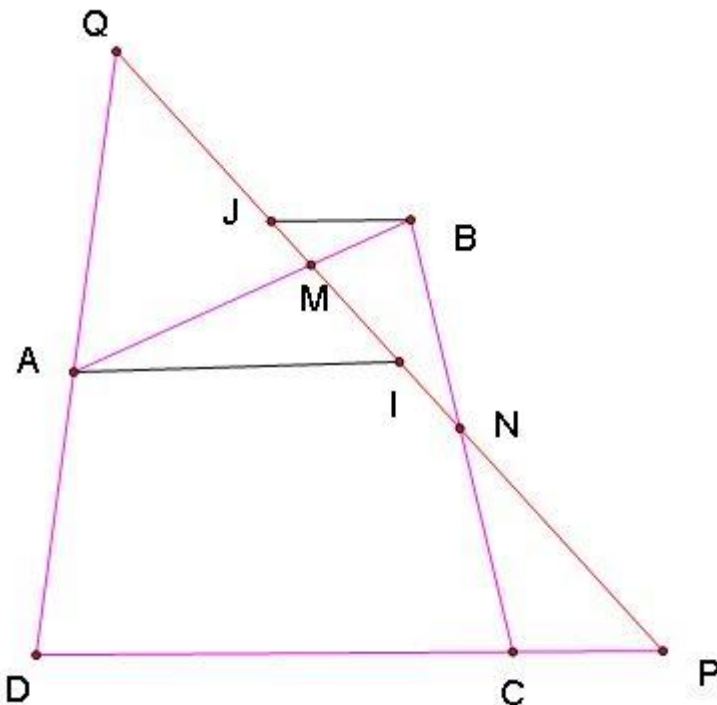
Ta suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{S[MNP]}{S[ABC]} &= 1 - \frac{S[BMP]}{S[ABC]} - \frac{S[CNM]}{S[ABC]} - \frac{S[APN]}{S[ABC]} \\ \Rightarrow \frac{S[MNP]}{S[ABC]} &= 1 - \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} - \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\ \Rightarrow \frac{S[MNP]}{S[ABC]} &= \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}} \end{aligned}$$

I.3) Định lí Menelaus cho tứ giác:

Định lí: Cho tứ giác ABCD và một đường thẳng d cắt AB, BC, CD, DA lần lượt ở M, N, P, Q. Khi đó ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$



Chứng minh:

Ta sẽ làm giống cách chứng minh ở tam giác 😊

Trên d lấy hai điểm I, J sao cho AI//BJ//CD

Theo Thales ta có:

$$\begin{aligned}\frac{MA}{MB} &= \frac{IA}{IB} \\ \frac{NB}{NC} &= \frac{JB}{IC} \\ \frac{OD}{OA} &= \frac{PD}{IA}\end{aligned}$$

Từ đó dễ có điều cần chứng minh.

*Chú ý

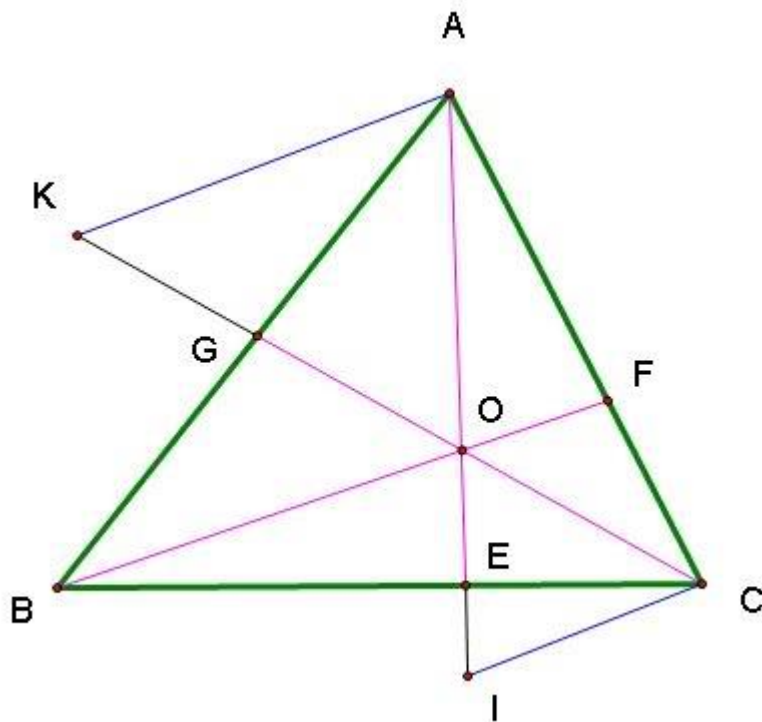
- 1) Khi áp dụng cho tứ giác, định lý Menelaus chỉ phát biểu dạng thuận bởi dạng đảo nói chung không đúng!
- 2) Các bạn thử suy nghĩ xem với dạng thuận như thế này thì có thể mở rộng cho đa giác được không? - Một vấn đề khá thú vị 😊

I.4) Định lý Ceva

Định lý:

Cho tam giác ABC. Gọi E, F, G là ba điểm tương ứng nằm trên BC, CA, AB. Ba đường thẳng AE, BF, CG cắt nhau tại một điểm O khi và chỉ khi:

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$



Chứng minh:

Phần thuận:

Giả sử ba đường thẳng AE, BF, CG cắt nhau tại một điểm O. Từ A và C, kẻ các đường song song với BF, chúng lần lượt cắt CG và AE tại K, I tương ứng.

Ta có: $\frac{CF}{FA} = \frac{CO}{OK}$ và $\frac{CI}{IK} = \frac{CO}{OK}$ (Sử dụng định lý Thales)

$\Rightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CI}{IK}$. Các cặp tam giác đồng dạng IEC và OEB, AKG và BOG: $\frac{BE}{EC} = \frac{BO}{OI}$ và $\frac{AG}{GB} = \frac{AK}{KB}$

Do đó: $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{BO}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{AK}} = 1$

Phần đảo:

Giả sử ta có: $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$

Qua giao điểm của các đường thẳng AE và BF, kẻ đường thẳng CC_1 với C_1 nằm trên cạnh AB. Khi đó, theo chứng minh phần thuận:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1 = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1$$

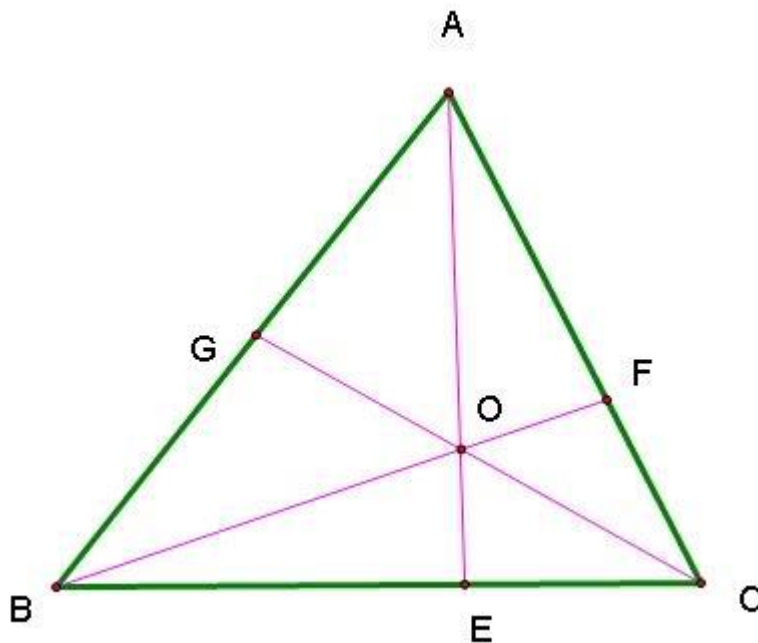
Suy ra $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}$, hay $C_1 \equiv G$, ta có điều phải chứng minh

I.5) Định lý Ceva sin

Định lý:

Gọi E, F, G là ba điểm tương ứng nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác ABC. Ba đường thẳng AE, BF, CG cắt nhau tại một điểm O khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin \angle ABF}{\sin \angle CBF} \cdot \frac{\sin \angle BCG}{\sin \angle ACG} \cdot \frac{\sin \angle CAE}{\sin \angle BAE} = 1$$



Chứng minh:

Phần thuận: Giả sử AE, BF, CG đồng quy tại O. Khi đó hai tam giác ABE và ACE có cùng chiều cao hạ từ đỉnh A.

$$\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{S_{ABE}}{S_{ACE}} = \frac{AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE}{AC \cdot AE \cdot \sin \angle CAE} = \frac{AB \cdot \sin \angle BAE}{AC \cdot \sin \angle CAE}$$

$$\text{Tương tự } \frac{CF}{FA} = \frac{BC \cdot \sin \angle CBF}{BA \cdot \sin \angle ABF}$$

$$\text{Và } \frac{AG}{GB} = \frac{CA \cdot \sin \angle ACG}{CB \cdot \sin \angle BCG}$$

$$\text{Nhân từng vế ba đẳng thức trên được: } \frac{\sin \angle ABF}{\sin \angle CBF} \cdot \frac{\sin \angle BCG}{\sin \angle ACG} \cdot \frac{\sin \angle CAE}{\sin \angle BAE} = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1$$

(Theo định lý Ceva)

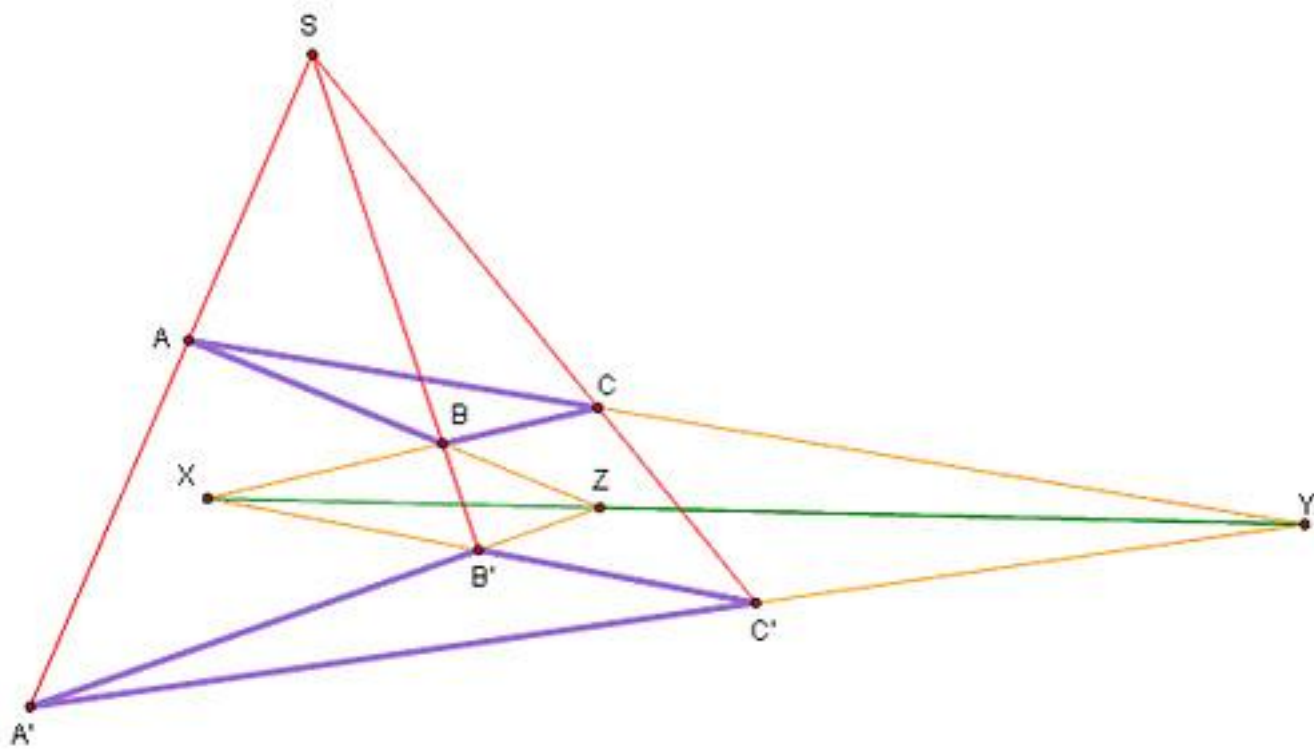
Từ đó suy ra đpcm.

Phần đảo: CM tương tự phần đảo ở mục 4.

I.6) Định lý Desargues

Định lý:

Cho tam giác ABC và tam giác A'B'C'. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi các giao điểm của BC và B'C', CA và C'A', AB và A'B' thẳng hàng.



Chứng minh:

Gọi X, Y, Z là lần lượt là các giao điểm của các cặp cạnh BC và B'C', CA và C'A', AB và A'B'.

Phần thuận:

Giả sử các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại S. Ta chứng minh X, Y, Z thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SBC với cát tuyến XB'C' ta có:

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{C'C}{C'S} \cdot \frac{B'S}{B'B} = 1 \quad \text{hay} \quad \frac{XB}{XC} = \frac{SC'}{SB'} \cdot \frac{BB'}{CC'}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{YC}{YA} = \frac{SA'}{SC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \quad \text{và} \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{SB'}{SA'} \cdot \frac{AA'}{BB'}$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên lại với nhau, và theo định lý Menelaus suy ra X, Y, Z

thẳng hàng.

Phản đảo:

Giả sử các điểm X, Y, Z thẳng hàng. Ta chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Gọi S là giao điểm của AA' và BB' . SC cắt đường thẳng AC' tại C'' .

Xét 2 tam giác ABC và $A'B'C''$ có các đường nối các đỉnh tương ứng đồng quy, do đó theo phân thuận giao điểm của các cạnh tương ứng cũng đồng quy.

Ta thấy AB cắt $A'B'$ tại Z , AC cắt $A'C''$ tại Y (do A', C', C'' thẳng hàng), suy ra giao điểm X' của BC và $B'C''$ phải thuộc YZ . Tức là X' là giao của YZ và BC nên X' trùng với X .

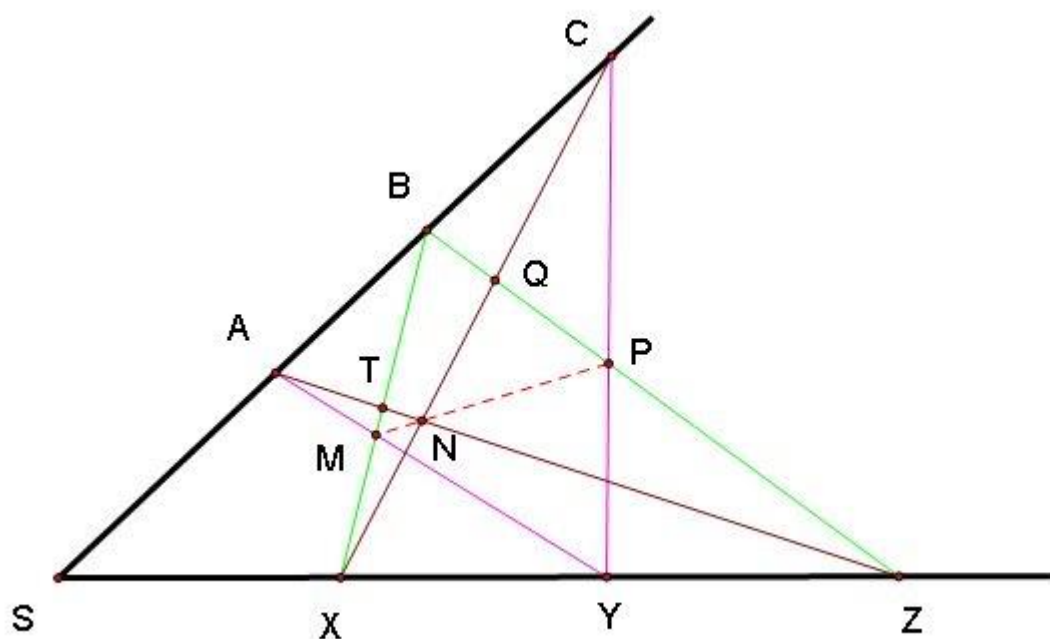
Suy ra C'' trùng với C' , hay AA', BB', CC' đồng quy.

I.7) Định lý Pappus

Định lý: Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng a , X, Y, Z nằm trên đường thẳng b . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (AY, BX) , (AZ, CX) , (CY, BZ) .

Khi đó M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh:



Định lý này có một cách chứng minh dùng Menelaus, nếu có điều kiện mình sẽ post lên, còn sau đây là một cách dựa trên kiến thức cơ sở về tỉ số kép và phép chiếu xuyên tâm.

Ta có bổ đề sau được chứng minh dễ dàng nhờ những hiểu biết ban đầu về tỉ số kép và phép chiếu xuyên tâm:

Bổ đề: Cho góc xOy và các điểm A, B, C thuộc Ox ; D, E, F thuộc Oy .

Khi đó AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi: $(OABC) = (ODEF)$.

Bỏ đề trên bạn đọc tự chứng minh, bây giờ ta sẽ trở lại bài toán.

Kí hiệu F_E là phép chiếu xuyên tâm E.

Gọi T, Q lần lượt là giao điểm của BX và AZ; CX và BZ.

Sử dụng bỏ đề trên thì ta sẽ cần chứng minh: $(BTMX) = (BZPQ)$

+) Trường hợp a//b bạn đọc hãy chứng minh nhờ Thales

+) Khi a không song song với b. Gọi S là giao của a và b.

Ta thấy:

Với $F_A: (BTMX) = (SZYX)$

Với $F_C: (SZYX) = (BZPQ)$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

I.8) Một trường hợp đặc biệt của định lý Pappus qua góc nhìn hình xạ ảnh.

Ở phần này chúng tôi chỉ dùng hình xạ ảnh để dẫn dắt đến kết quả còn nội dung định lý và cách chứng minh thì hoàn toàn phù hợp với kiến thức hình THCS!

Ta có kết quả sau liên quan đến hình xạ ảnh: Các đường thẳng song song với nhau thì gặp nhau tại một điểm ở vô cực và ngược lại.

Vận dụng vào định lý Pappus ở trên, cho các điểm A, B, C ra vô cực thì theo kết quả về hình xạ ảnh ta có

$YM // ZN$ (Vì YM, ZN cùng đi qua một điểm (A) ở vô cực) Tương tự thì

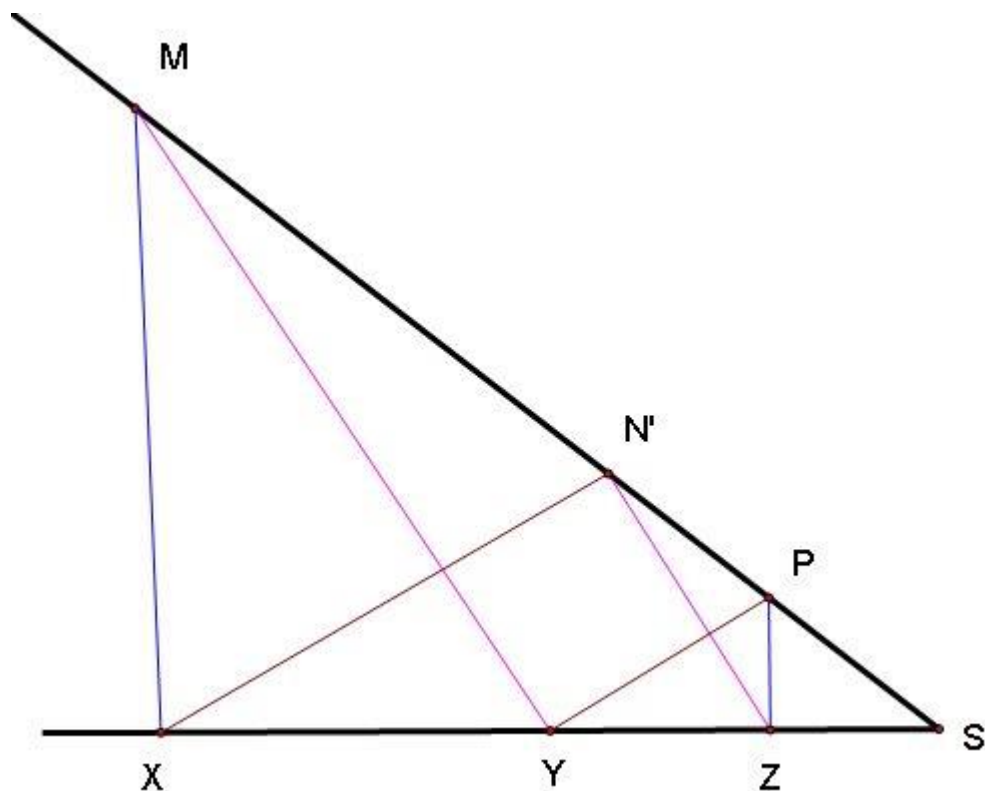
$: XN // YP, XM // ZP$.

Và khi ấy M, N, P vẫn thẳng hàng. Ta phát biểu lại được một định lý đơn giản và hữu dụng sau đây:

Định lý: Trên mặt phẳng cho ba điểm X, Y, Z thẳng hàng và ba điểm M, N, P thỏa mãn $XN // YP, YM // ZN, XM // ZP$.

Khi đó ta cũng có M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh:



Trường hợp $MP \parallel XYZ$ thì đơn giản, bạn đọc tự chứng minh.

Ta sẽ xét khi MP không song song với XYZ .

Gọi S là giao điểm của MP với XYZ .

Đường thẳng qua X song song với YP cắt MP ở N' . Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được rằng $ZN' \parallel YM$ (Vì khi ấy N' trùng N).

Thật vậy, chú ý $YP \parallel XN'$, $ZP \parallel XM$ nên theo Thales ta có:

$$\frac{SY}{SZ} = \frac{SY}{SX} \cdot \frac{SX}{SZ} = \frac{SP}{SN'} \cdot \frac{SM}{SP} = \frac{SM}{SN'}$$

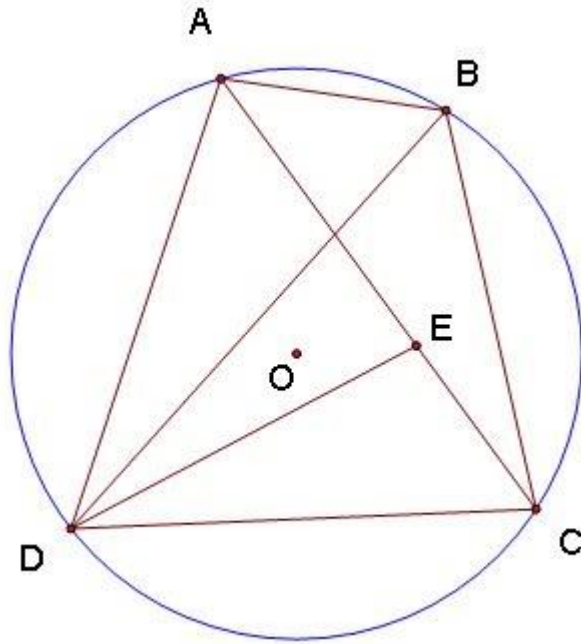
Đến đây theo Thales đảo ta suy ra $ZN' \parallel YM$. Chứng minh được hoàn tất.!

I.9)Đẳng thức Ptolemy

Định lí Với tứ giác nội tiếp $ABCD$ thì:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Chứng minh:



Lấy điểm E thuộc AC sao cho $\widehat{DEC} = \widehat{ADB}$

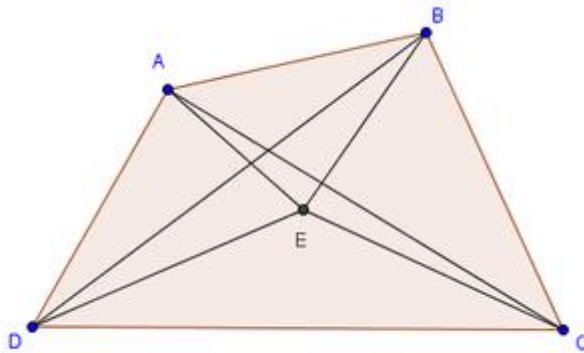
$$\rightarrow \triangle ADB \text{ đồng dạng } \triangle DEC \rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{EC} \rightarrow AB \cdot DC = EC \cdot DB$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự } \triangle ADE \text{ đồng dạng } \triangle BDC &\rightarrow AE \cdot BD = AD \cdot BC \\ \rightarrow AD \cdot BC + AB \cdot CD &= BD(EA + EC) = BD \cdot AC \text{ (DPCM)} \end{aligned}$$

I.10) Bất đẳng thức Ptolemy

Định lý:

Cho tứ giác ABCD. Khi đó có $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$



Chứng minh:

Lấy E nằm trong tứ giác ABCD sao cho

$$\widehat{EDC} = \widehat{ADB} \text{ và } \widehat{ECD} = \widehat{ABD}$$

$$\text{Khi đó } \triangle ABD \sim \triangle ECD \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{EC}{DC} \text{ hay } AB \cdot DC = EC \cdot BD.$$

$$\text{Hơn nữa } \triangle ADE \sim \triangle BDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CB} \text{ hay } AD \cdot CB = BD \cdot AE.$$

$$\text{Vậy ta có } AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD(EA + EC) \geq BD \cdot AC \text{ (đpcm).}$$

KHÁM PHÁ ĐỊNH LÝ PTÔ-LÊ-MÊ

tác giả:Zai zai

I. Mở đầu:

Hình học là một trong những lĩnh vực toán học mang lại cho người yêu toán nhiều điều thú vị nhất và khó khăn nhất. Nó đòi hỏi ta phải có những suy nghĩ sáng tạo và tinh tế. Trong lĩnh vực này cũng xuất hiện ko ít những định lí, phương pháp nhằm nâng cao tính hiệu quả trong quá trình giải quyết các bài toán, giúp ta chinh phục những đỉnh núi ngồ ghề và hiểm trở . Trong bài viết này zaizai xin giới thiệu đến các bạn một vài điều cơ bản nhất về định lí Ptô-lê-mê trong việc chứng minh các đặc tính của hình học phẳng. Dù đã rất cố gắng nhưng bài viết sẽ không thể tránh khỏi những thiếu sót mong rằng các bạn sẽ cùng zaizai bổ sung và phát triển nó.

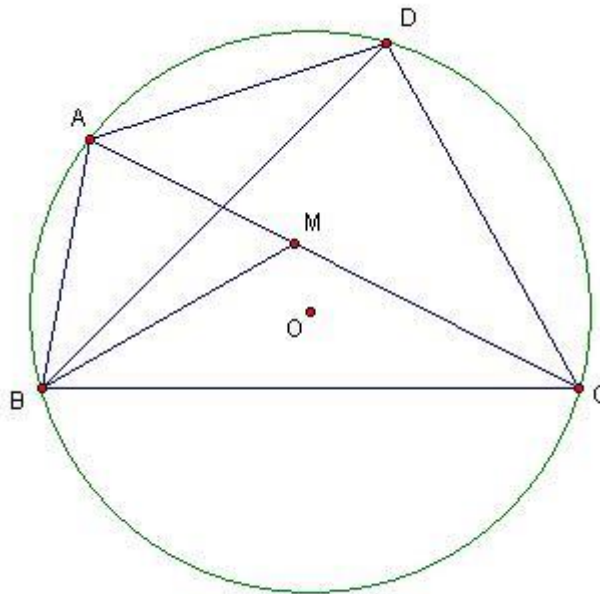
II, Nội dung - Lí thuyết:

1. Định thức Ptô-lê-mê:

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Khi đó:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Hình minh họa (hình 1)



Chứng minh:

Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$.

Khi đó xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có: $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}, \widehat{ADB} = \widehat{MCB}$.
Nên $\triangle ABD$ đồng dạng với $\triangle MBC$ (g.g).

Do đó ta có:

$\frac{AD}{BD} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = BD \cdot MC$ (1). Lại có: $\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC}$ và $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$ nên $\triangle ABM \sim \triangle DBC$ (g.g). Suy ra $\frac{AB}{AM} = \frac{BD}{CD}$ hay

$$AB.CD = AM.BD(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AD.BC + AB.CD = BD.MC + AM.BD = AC.BD$$

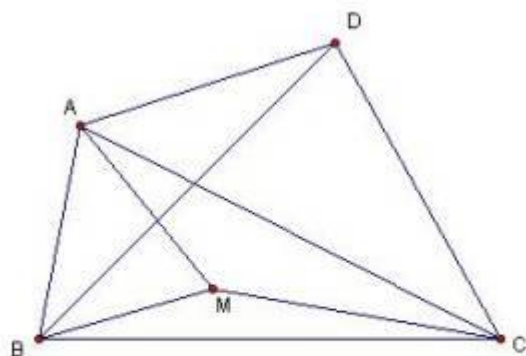
Vậy đẳng thức Ptô-lê-mê được chứng minh.

2, Bất đẳng thức Ptô-lê-mê:

Đây có thể coi là định lý Ptô-mê-lê mở rộng bởi vì nó không giới hạn trong lớp tứ giác nội tiếp.

Định lý: Cho tứ giác $ABCD$. Khi đó:
 $AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$

Hình minh họa (hình 2)



Chứng minh:

Trong $\widehat{ABC}$ lấy điểm M sao cho:

$$\widehat{ABD} = \widehat{MBC}, \widehat{ADB} = \widehat{MCB}$$

Dễ dàng chứng minh:

$$\triangle BAD \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{AD}{MC} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow BD.CM = AD.CB$$

Cũng từ kết luận trên suy ra:

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác và các điều trên ta có:

$$AD.BC + AB.DC = BD(AM + CM) \geq BD.AC$$

Vậy định lý Ptô-lê-mê mở rộng đã được chứng minh.

3, Định lý Ptô-lê-mê tổng quát:

Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_0A_1...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O) . M là một điểm thuộc cung A_0A_{2n} (Không chứa $A_1;...;A_{2n-1}$)
 Khi đó:

Trong đó:

$$A_{-1} = A_{2n}, A_{-2} = A_{2n-1}, A_{2n+1} = A_0, A_{2n+2} = A_1$$

Đây là một định lý ko dễ dàng chứng minh được bằng kiến thức hình học THCS. Các bạn có thể tham khảo phép chứng minh trong bài viết Định lý Ptô-lê-mê tổng quát của Tiến sĩ Nguyễn Minh Hà, ĐHSP, Hà Nội thuộc Tuyển tập 5 năm Tạp chí toán học và tuổi trẻ.

III, Ứng dụng của định lý Ptô-lê-mê trong việc chứng minh các đặc tính hình học:

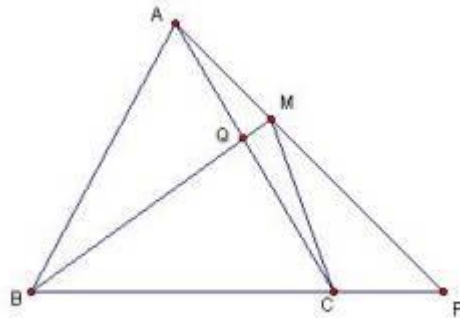
1, Chứng minh quan hệ giữa các đại lượng hình học:

Mở đầu cho phần này chúng ta sẽ đến với 1 ví dụ điển hình và cơ bản về việc ứng dụng định lý Ptô-lê-mê.

Bài toán 1: Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng $a (a > 0)$. Trên AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho $AQ \cdot BP = a^2$. Gọi M là giao điểm của BQ và AP . Chứng minh rằng: $AM + MC = BM$

(Đề thi vào trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, thị xã Đông Hà, tỉnh Quảng Trị, năm học 2005-2006)

Hình minh họa (hình 3)



Chứng minh:

Từ giả thiết $AQ \cdot BP = a^2$ suy ra $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BP}$.
Xét $\triangle ABQ$ và $\triangle BPA$ có:

Lại có $\widehat{ABQ} + \widehat{MBP} = 60^\circ$ (2)
Từ:

Suy ra tứ giác $AMCB$ nội tiếp được đường tròn.

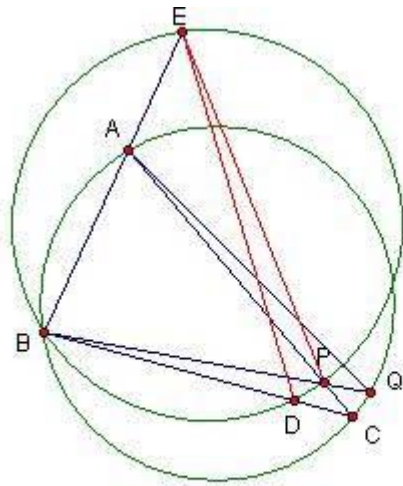
Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho tứ giác $AMCB$ nội tiếp và giả thiết $AB = BC = CA$ ta có:

$$AB \cdot MC + BC \cdot AM = BM \cdot AC \Rightarrow AM + MC = BM \text{ (đpcm)}$$

Đây là 1 bài toán khá dễ và tất nhiên cách giải này ko được đơn giản lắm. Vì nếu muốn sử dụng đẳng thức Ptô-lê-mê trong 1 kì thi thì có lẽ phải chứng minh nó dưới dạng bổ đề. Nhưng điều chú ý ở đây là ta chẳng cần phải suy nghĩ nhiều khi dùng cách trên trong khi đó nếu dùng cách khác thì lời giải có khi lại ko mang vẻ tường minh.

Bài toán 2: Tam giác ABC vuông có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC , E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho E, B, D, P nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $AQ + CQ = BP$
(Đề thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham dự IMO 2000, HongKong TST 2000)

Hình minh họa: (hình 4)



Chứng minh:

Xét các tứ giác nội tiếp $AB C Q$ và $B E P D$ ta có:

$$\widehat{C A Q} = \widehat{C B Q} = \widehat{D E P}$$

(cùng chắn các cung tròn)

$$\text{Mặt khác } \widehat{A Q C} = 108^\circ - \widehat{A B C} = \widehat{E P D}$$

Xét $\triangle A Q C$ và $\triangle E P D$ có:

(do $A C = B D$)

$$\frac{A C}{E D} = \frac{Q C}{P D} \Rightarrow E D . Q C = A C . P D = B E . P D (2)$$

(do $A C = B E$)

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $B E P D$ ta có:

$$E P . B D + B E . P D = E D . B P$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

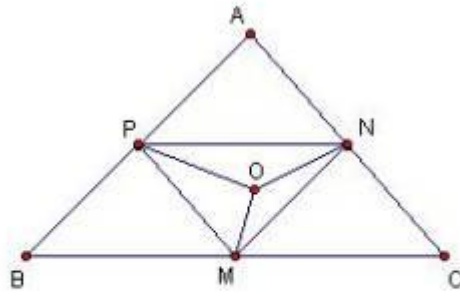
$$A Q . E D + Q C . E D = E D . B P \Rightarrow A Q + Q C = B P \text{ (đpcm)}$$

Có thể thấy rằng bài 1 là tư tưởng đơn giản để ta xây dựng cách giải của bài 2. Tức là dựa vào các đại lượng trong tam giác bằng nhau theo giả thiết ta sử dụng tam giác đồng dạng để suy ra các tỉ số liên quan và sử dụng phép thế để suy ra điều phải chứng minh. Cách làm này tỏ ra khá là hiệu quả và minh họa rõ ràng qua 2 ví dụ mà zaizai đã nêu ở trên. Để làm rõ hơn phương pháp chúng ta sẽ cùng nhau đến với việc chứng minh 1 định lí bằng chính Ptô-lê-mê.

Bài toán 3: (Định lí Carnot)

Cho tam giác nhọn $A B C$ nội tiếp trong đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r) . Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng: $x + y + z = R + r$

Hình minh họa (hình 5)



Chứng minh:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Giả sử $x = OM, y = ON, z = OP, BC = a, CA = b, AB = c$.

Tứ giác $OMBP$ nội tiếp, theo đẳng thức Ptolemy ta có:

$$OB \cdot PM = OP \cdot MB + OM \cdot PB$$

$$\text{Do đó: } R \cdot \frac{b}{2} = z \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{c}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có :

$$R \cdot \frac{c}{2} = y \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{b}{2} \quad (2)$$

$$R \cdot \frac{a}{2} = y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2} \quad (3)$$

Mặt khác:

$$r \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right) = S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = x \cdot \frac{a}{2} + y \cdot \frac{a}{2} + z \cdot \frac{c}{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có:

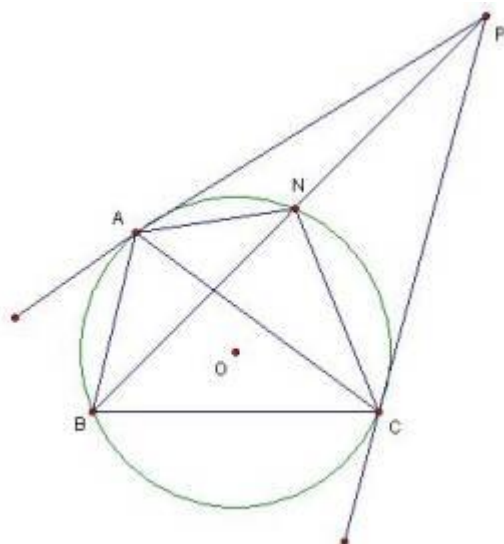
$$(R+r) \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = (x+y+z) \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \Rightarrow R+r = x+y+z$$

Đây là 1 định lý khá là quen thuộc và cách chứng minh khá đơn giản. Ứng dụng của định lý này như đã nói là dùng nhiều trong tính toán các đại lượng trong tam giác. Đối với trường hợp tam giác đó không nhọn thì cách phát biểu của định lý cũng có sự thay đổi.

2, Chứng minh các đặc tính hình học:

Bài toán 1: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau ở P . Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC .

Hình minh họa (hình 6)



Chứng minh:

Gọi giao điểm của BP với đường tròn là N . Nối AN, NC .

Xét $\triangle NPC$ và $\triangle CPB$ có: $\widehat{PCN} = \widehat{PBC}$, $\widehat{P}$ chung
 $\Rightarrow \triangle NPC \sim \triangle CPB (g.g) \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{NC}{BC} (1)$

Tương tự ta cũng có $\triangle PAN \sim \triangle PBA (g.g) \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AN}{AB} (2)$

Mặt khác $PA = PC$ (do là 2 tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau)

Nên từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{NC}{BC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow NC \cdot AB = BC \cdot AN (3)$

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ABCN$ ta có:

$$AN \cdot BC + AB \cdot NC = AC \cdot BN$$

Từ (3) $\Rightarrow 2AB \cdot NC = AC \cdot BN = 2AB \cdot BN \Rightarrow NC = BN$.

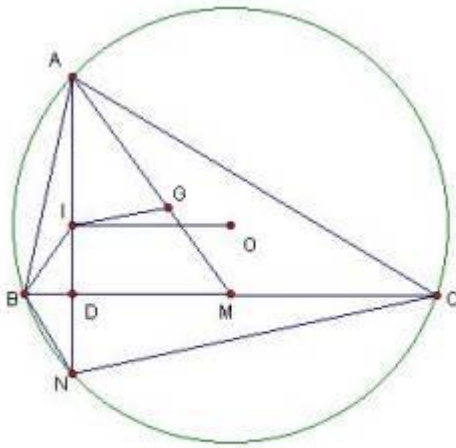
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đây có lẽ là một trong những lời giải khá là ngắn và ấn tượng của bài này. Chỉ cần qua vài quá trình tìm kiếm các cặp tam giác đồng dạng ta đã dễ dàng đi đến kết luận của bài toán. Tư tưởng ban đầu khi làm bài toán này chính là dựa vào lý thuyết trong cùng một đường tròn hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau. Do có liên quan đến các đại lượng trong tứ giác nội tiếp nên việc chứng minh rất dễ dàng.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường

tròn ngoại tiếp và trọng tâm G . Giả sử rằng . Chứng minh rằng IG song song với BC .

Hình minh họa (hình 7)



Kéo dài AI cắt (O) tại N . Khi đó N là điểm chính giữa cung BC (không chứa A).

Ta có: $BN = NC(1)$. Lại có :

$$\widehat{IBN} = \widehat{BIN} \Rightarrow BN = IN(2)$$

Do $OI \perp AE$ suy ra $IA = IN = \frac{1}{2}$ số đo cung $BC(3)$

$$\text{Từ (1),(2),(3)} \Rightarrow BN = NC = IN = IA(4)$$

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ABNC$ ta có:

$$BN.AC + AB.NC = BC.AN$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow BN(AC + AB) = 2BN.BC \Rightarrow AC + AB = 2BC(5)$$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và (5) ta có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BD+CD}$$

$$= \frac{AB+AC}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{IA}{ID} = 2(6)$$

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác suy ra $\frac{AG}{GM} = 2(7)$

$$\text{Từ (6),(7)} \Rightarrow \frac{IA}{ID} = 2 = \frac{AG}{GM}$$

Suy ra IG là đường trung bình của tam giác ADM hay IG song song với BC .

Đây là một bài toán khá là hay ít nhất là đối với THCS và với cách làm có vẻ "ngắn gọn" này ta đã phần nào hình dung được vẻ đẹp của các định lý.

Bài toán 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , CM là trung tuyến. Các tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau ở D . Chứng minh rằng:

$$\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$$

Hình minh họa hình 8)

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC} = \frac{AM}{CK} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{BK}{BC}$$

Mặt khác dễ thấy rằng $\widehat{ABK} = \widehat{MBC}$, từ đó $\triangle ABK \sim \triangle MBC$ dẫn đến $\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM} \quad (2)$.

Cũng từ $\triangle BMA \sim \triangle BCK$ ta có:

$$\widehat{CKN} = \widehat{BAM} = \widehat{NAC}.$$

suy ra tứ giác $ANCK$ nội tiếp đường tròn.

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác $ABCK$ ta có:

$$AC.NK = AN.CK + CN.AK \quad (3)$$

Nhưng từ (1) và (2) thì :

$$CK = \frac{AM.BC}{BM}, AK = \frac{AB.CM}{BM}, BK = \frac{AB.BC}{BM}$$

Nên ta có đẳng thức (3)

Đây là 1 trong những bài toán khá là cổ điển của IMO Shortlist. Ta vẫn có thể giải quyết bài toán theo một hướng khác nhưng dài và phức tạp hơn đó là sử dụng bổ đề: Nếu M, N là các điểm thuộc cạnh BC của $\triangle ABC$ sao cho

$\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ thì $AM.AN = AB.AC - \sqrt{BM.BN.CM.CN}$. Đây là một bổ đề mà các bạn cũng nên ghi nhớ.

Bài toán 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{AC}{BD} = \frac{BC.CD + AB.BD}{BC.BA + DC.DA}$$

Hình minh họa hình 10)

Chứng minh:

Lấy E và F thuộc đường tròn sao cho:

$$\widehat{CDB} = \widehat{ADE}, \widehat{BDA} = \widehat{DCF}$$

$$\text{Khi đó: } AE = BC, FD = AB, EC = AB, BF = AD$$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp AECD và BCDF ta có:

$$AC.ED = AE.CD + AD.EC = BC.CD + AD.AB \quad (1)$$

$$BD.CF = BC.DF + BF.CD = BC.AB + AD.CD \quad (2)$$

Mặt khác:

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDB} + \widehat{BDE} = \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = \widehat{ADB} = \widehat{FCD}$$

Do đó:

$$\widehat{FDC} = \widehat{FDE} + \widehat{EDC} = \widehat{FCE} + \widehat{FCD} = \widehat{ECD}$$

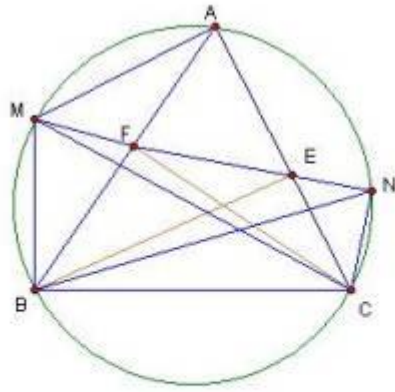
$$\text{Suy ra: } ED = FC \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM}$$

Hình minh họa (hình 11)



Chứng minh:

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp $AMBC$ và $ANCB$ ta có:
 $a \cdot AM + b \cdot BM = c \cdot CM$ (1)

$a \cdot AN + a \cdot CN = b \cdot BN$ (2) Từ (1) và (2) ta được:

$$a(AM + AN) = b(BN - BM) + c(CM - CN) \quad (3)$$

Mặt khác ta lại có:

$$\triangle ANF \sim \triangle NBF (g.g) \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{NF}{BF} \quad (4)$$

Tương tự :

$$\triangle ANF \sim \triangle MBF (g.g) \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AF}{MF} \quad (5)$$

Từ (4), (5) và tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AM \cdot AN}{BM \cdot BN} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a} \quad (6)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{AM \cdot AN}{CM \cdot CN} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a} \quad (7)$$

Từ (3), (6), (7) ta có điều phải chứng minh.

Có thể dễ dàng nhận ra nét tương đồng giữa cách giải của 3 bài toán đó là vận dụng cách vẽ hình phụ tạo ra các cặp góc bằng các cặp góc cho sẵn từ đó tìm ra các biểu diễn liên quan. Một đường lối rất hay được sử dụng trong các bài toán dạng này.

4. Chứng minh bất đẳng thức và giải toán cực trị trong hình học:

Bài toán 1: (Thi HSG các vùng của Mỹ, năm 1987)

Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng a, b, c, d và các đường chéo

bằng p, q . Chứng minh rằng:

$$pq \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Chứng minh:

Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp thì $ac + bd = pq$

Vậy ta cần chứng minh $p^2 q^2 = (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

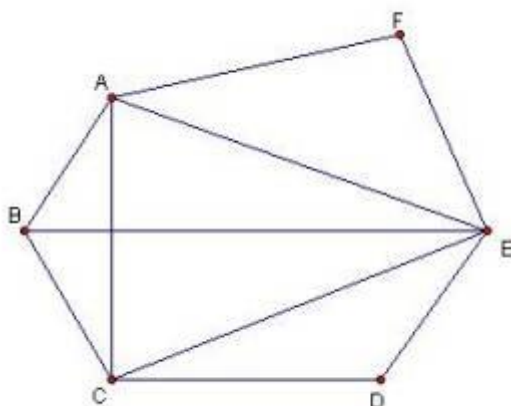
Bất đẳng thức này chính là một bất đẳng thức rất quen thuộc mà có lẽ ai cũng biết đó là bất đẳng thức Bunhiacopxki-BCS. Vậy bài toán được chứng minh.

Một lời giải đẹp và vô cùng gọn nhẹ cho 1 bài toán tưởng chừng như là khó. Ý tưởng ở đây là đưa bất đẳng thức cần chứng minh về 1 dạng đơn giản hơn và thuần đại số hơn. Thật thú vị là bất đẳng thức đó lại là BCS.

Bài toán 2:

Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn điều kiện $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Chứng minh rằng:

HÌNH MINH HỌA (hình 12)



Chứng minh:

Đặt $AC = a, CE = b, AE = c$. Áp dụng định lý Ptô-lê-mê mở rộng cho tứ giác $ACEF$ ta có: $AC \cdot EF + CE \cdot AF \geq AE \cdot CF$. Vì $EF = AF$ nên suy ra:

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}, \frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}$$

Từ đó suy ra

Bất đẳng thức đã qui về dạng chính tắc **SOS** :

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Dễ thấy:

$$2(a+c)(b+c) \leq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}$$

Như vậy $S_c \geq 0$, đánh giá tương tự ta cũng dễ dàng thu được kết quả $S_a, S_b \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Tức là khi ABCDEF là một lục giác đều nội tiếp.

Đây là một bài toán do zaizai phát triển từ một bài toán quen thuộc. Nó cũng xuất phát từ bài Stronger than Nesbit inequality của mình. :lol:

Cơ sở khi giải bài toán này là sử dụng phương pháp **SOS** để làm mạnh bài toán.

Với bước chuyển từ việc chứng minh 1 bất đẳng thức hình học sang bất đẳng thức đại số ta dễ dàng tìm ra 1 lời giải đẹp. Nếu chuẩn hóa bất đẳng thức này ta cũng có kết quả rất thú vị.

Bài toán 3:

Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn điều kiện $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ và tổng độ dài ba cạnh AC, CE, AE bằng 3

Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{21}{16} + \frac{27(AC^3 + CE^3 + AE^3)}{16(AC + CE + AE)^3}$$

Lời giải:

Ta chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{21}{16} + \frac{27(a^3 + b^3 + c^3)}{16(a+b+c)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{21}{16} + \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{16}$$

Bằng cách sử dụng phương pháp hệ số bất định ta dễ dàng tìm được bất đẳng thức phụ đúng:

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{9a + a^3 - 2}{16}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2 - a + 6) \geq 0$$

Tương tự với các phân thức còn lại ta có điều phải chứng minh.

Khi định hướng giải bài này chắc hẳn bạn sẽ liên tưởng ngay đến **SOS** nhưng thật sự thì nó ko cần thiết trong bài toán này bởi chỉ làm phức hóa bài toán. Dùng phương pháp hệ số bất định giúp ta tìm ra 1 lời giải ngắn và rất đẹp. Tuy nhiên lời giải này ko dễ hiểu lắm đối với THCS.

Thực ra cách làm mới bài toán này cũng cực kì đơn giản vì xuất phát điểm của dạng chuẩn là bất đẳng thức Nesbit quen thuộc vì vậy dễ dàng thay đổi giả thiết để biến đổi bài toán. Mà cách thay đổi điều kiện ở đây chính là bước chuẩn hóa trong chứng minh bất đẳng thức đại số. Nói chung là dùng để đồng bậc bất đẳng thức thuần nhất. Với tư tưởng như vậy ta hoàn toàn có thể xây dựng các kết quả mạnh hơn và thú vị hơn qua một vài phương pháp như SOS, hệ số bất định, dồn biến và chuẩn hóa. Đặc biệt sau khi chuẩn hóa ta có thể dùng 3 phương pháp còn lại để chứng minh.

Bài toán 4::

Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao cho $AB + AC$ lớn nhất.

Lời giải:

Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC .

Đặt $DB = DC = a$ không đổi. Theo định lí Ptô-lê-mê ta có:

$$AD \cdot BC = AB \cdot DC + AC \cdot BD = a(AB + AC) \Rightarrow AB + AC = \frac{BC}{a} \cdot AD$$

Do BC và a ko đổi nên $AB + AC$ lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm đối xứng của D qua tâm O của đường tròn.

IV. Bài tập:

Bài 1 CMO 1988, Trung Quốc)

$ABCD$ là một tứ giác nội tiếp với đường tròn ngoại tiếp có tâm O và bán kính R . Các tia AB, BC, CD, DA cắt $(O, 2R)$ lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng:

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'A' \geq 2(AB + BC + CD + DA)$$

Bài 2:

Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để $AB + 2AC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng:

$$BB' \cdot AC = AA' \cdot BC + CC' \cdot AB$$

Bài 4:

Cho lục giác ABCDEF có các cạnh có độ dài nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong ba đường chéo AD, BE, CF có ít nhất một đường chéo có độ dài nhỏ hơn 2.

Bài 5:

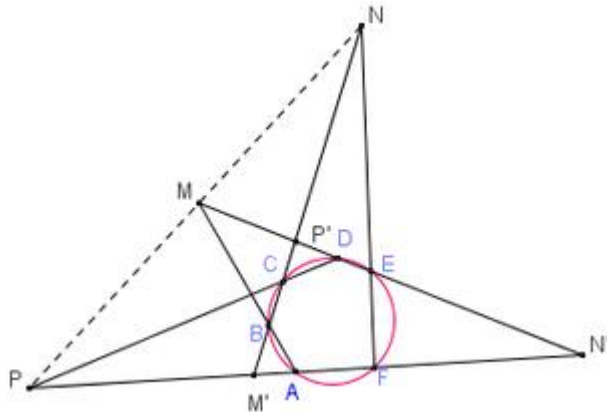
Cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính của đường tròn này gấp đôi bán kính của đường tròn kia. ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB, BC, CD, DA lần lượt cắt đường tròn lớn tại A', B', C', D'.

Chứng minh rằng: chu vi tứ giác A'B'C'D' lớn hơn 2 lần chu vi tứ giác ABCD.

I.11) Định lý Pascal

Định lý:

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó các giao điểm của các cặp cạnh AB và DE, BC và EF, CD và FA thẳng hàng.



Chứng minh:

Gọi P, M, N lần lượt là giao điểm của AF và CD, AB và DE, BC và EF. Gọi P', M', N' lần lượt là giao điểm của BC và DE, BC và AF, DE và AF.

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle P'M'N'$ với cát tuyến PCD:

$$\frac{CP'}{CM'} \cdot \frac{DN'}{DP'} \cdot \frac{PM'}{PN'} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{PM'}{PN'} = \frac{CM'}{CP'} \cdot \frac{DP'}{DN'}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{NP'}{NM'} = \frac{FN'}{FM'} \cdot \frac{EP'}{EN'} \text{ và } \frac{MN'}{MP'} = \frac{AN'}{AM'} \cdot \frac{BP'}{BP'}$$

Nhân các biểu thức trên lại kết hợp với các biểu thức phương tích sau:

$$\frac{BM'}{CM'} \cdot \frac{CM'}{AM'} = \frac{AM'}{FM'} \cdot \frac{FM'}{AN'}$$

$$\frac{EN'}{DN'} \cdot \frac{DN'}{FN'} = \frac{FN'}{AN'} \cdot \frac{AN'}{BP'}$$

$$CP' \cdot BP' = DP' \cdot EP'$$

Ta có:

$$\frac{\overline{NP'}}{\overline{NM'}} \cdot \frac{\overline{MN'}}{\overline{MP'}} \cdot \frac{\overline{PM'}}{\overline{PN'}} = 1$$

Áp dụng định lý Menelaus đảo ta có đpcm.

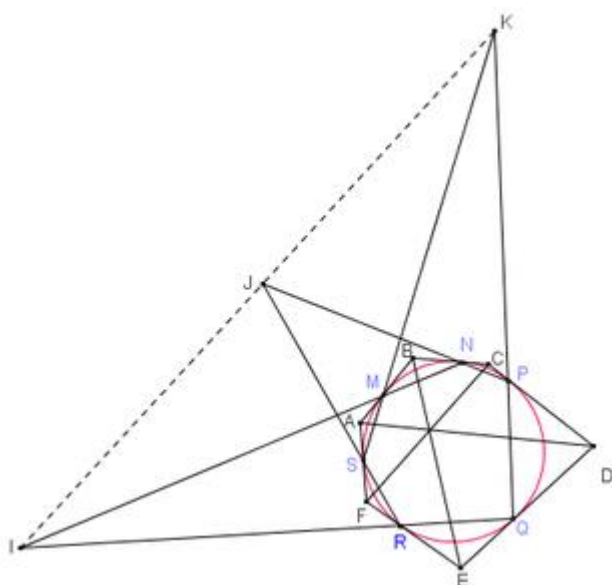
Các bạn có thể vào đây xem

thêm: http://www.math.ust.hk/mathematical...bur/v10_n3.pdf

I.12) Định lý Brianchon

Định lý:

Cho lục giác ABCDEF ngoại tiếp (O). Chứng minh rằng ba đường chéo lớn AD, BE, CF đồng quy.



Chứng minh:

Ta kí hiệu các tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DE, EF, FA lần lượt là M, N, P, Q, R, S. Xét cực và đối cực đối với (O). Gọi K, I, J lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (SM, PQ), (MN, QR), (NP, RS). Vì SM và PQ là đường đối cực của A và D nên AD là đường đối cực của K. Tương tự BE và FC lần lượt là đường đối cực của I và J.

Dùng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp MNPQRS ta có I, J, K thẳng hàng. Nên ta có các đường đối cực của I, J, K (lần lượt là BE, CF, AD) cùng đi qua cực của đường thẳng này (đường thẳng đi qua I, J, K) nên AD, BE, CF đồng quy (đpcm).

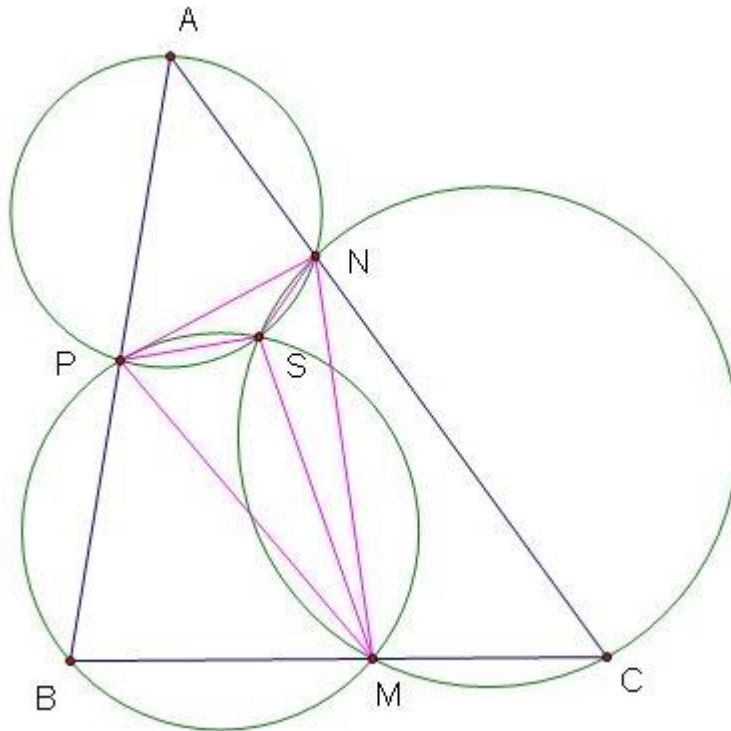
Tương tự ngược lại có thể chứng minh định lý pascal thông qua Brianchon và cực đối cực (xem thêm cực đối cực ở mục III.5 hoặc xem

<http://mathscope.org/forum/showthread.php?t=5024>).

I.13) Định lý Miquel

Định lý: Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P lần lượt nằm trên BC, CA, AB. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APN, BPM và CMN đồng quy.

Chứng minh:



Gọi S là giao điểm của (BPM) và (CMN). Ta sẽ chứng minh S nằm trên (APN).

Thật vậy:

$$(SN, SP) \equiv (SN, SM) + (SM, SP) \equiv (CN, CM) + (BM, BP) \equiv (CA, CB) + (BC, BA) \equiv (CA, BA) \equiv (AN, AP) \pmod{\pi}$$

Suy ra điều cần chứng minh.!

I.14) Công thức Carnot

Định lý:

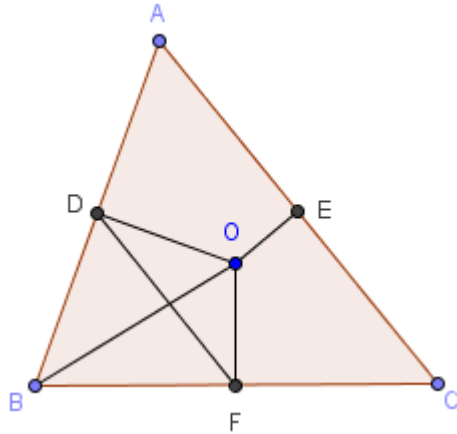
Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O,R). Gọi x,y,z lần lượt là khoảng cách từ O đến BC,AC,AB. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

a) Nếu $\triangle ABC$ nhọn thì công thức carno là $x+y+z = R+r$.

b) Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$ thì công thức carno là $y+z-x = R+r$

Chứng minh:

a) Nếu $\triangle ABC$ nhọn



Gọi F, E, D lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Như vậy ta có $OF = x, OE = y, OD = z$. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$.

Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác nội tiếp OFBD ta có:

$$OB \cdot DF = OF \cdot DB + FB \cdot OD \text{ hay } R \cdot \frac{b}{2} = z \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{c}{2}$$

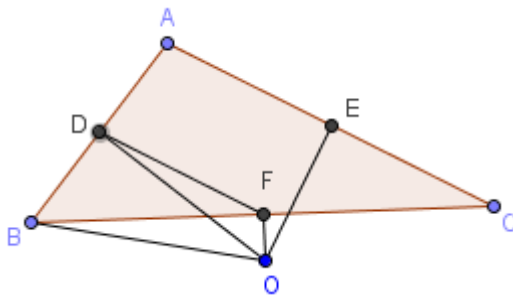
$$\text{Tương tự ta có } R \cdot \frac{c}{2} = y \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{b}{2} \text{ và } R \cdot \frac{a}{2} = y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2}$$

$$\text{ta lại có } r \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{c}{2} \right) = S_{ABC} = S_{OBC} + S_{AOC} + S_{ABO} = x \cdot \frac{a}{2} + y \cdot \frac{b}{2} + z \cdot \frac{c}{2}$$

Cộng bốn biểu thức trên lại ta có

$$(r+R) \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = (x+y+z) \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \Rightarrow R+r = x+y+z$$

b) Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$ chứng minh tương tự.

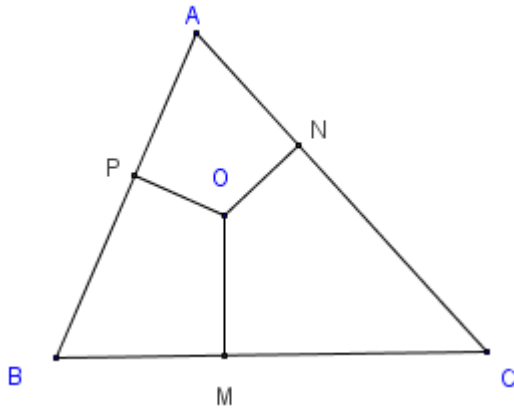


Viết dưới dạng lượng giác, công thức Carnot chính là hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$. Chú ý hệ thức này đúng với mọi tam giác.

I.15) Định lí Carnot

Định lý:

Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC, AC, AB . d_M, d_N, d_P lần lượt là các đường thẳng đi qua M, N, P và vuông góc với BC, AC, AB . d_M, d_N, d_P đồng quy khi và chỉ khi $MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$



Chứng minh:

a) Phần thuận:

Gọi d_M, d_N, d_P đồng quy tại O.

ĐPCM $\Leftrightarrow$

$$MB^2 + OM^2 + NC^2 + ON^2 + PA^2 + OP^2 = MC^2 + OM^2 + NA^2 + ON^2 + PB^2 + OP^2$$

$$\Leftrightarrow OB^2 + OC^2 + OA^2 = OB^2 + OC^2 + OA^2$$

Đẳng thức này đúng nên ta có điều phải chứng minh.

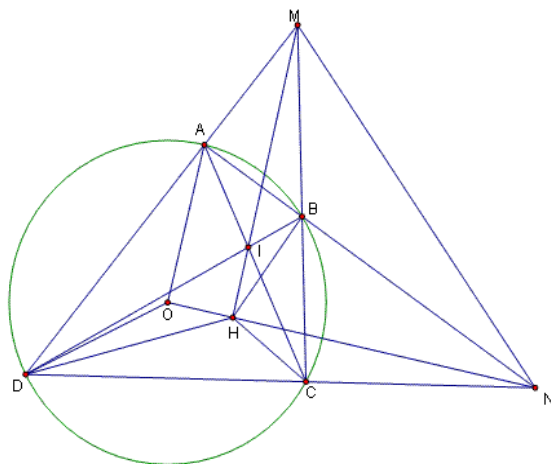
b) Phần đảo

Gọi giao điểm của d_M, d_N tại O. Qua O hạ đường vuông góc xuống AB tại P'. Áp dụng định lý thuận ta có $MB^2 + NC^2 + P'A^2 = MC^2 + NA^2 + P'B^2 \Rightarrow P'$ trùng với P $\Rightarrow d_M, d_N, d_P$ đồng quy.

I.16/Định lý Brokard

Định lý:

Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. AD giao BC tại M, AB giao CD tại N, AC giao BD tại I. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác MIN.



Chứng minh:

Gọi H là giao thứ 2 của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID, BIC.

Xét tứ giác DOHC, ta có:

$$\widehat{DHC} = 360^\circ - \widehat{DHI} - \widehat{CHI} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC} = \widehat{DOC}$$

Từ đó suy ra tứ giác DOHC nội tiếp. Tương tự ta cũng suy ra tứ giác AOHB nội tiếp.

Dễ thấy $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = \overline{NC} \cdot \overline{ND}$ suy ra N nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(AIHD)$, $(BIHC)$ $\rightarrow O, H, N$ thẳng hàng.

Ta có:

$$\widehat{IHO} = \widehat{IHD} - \widehat{OHD} = \widehat{ADC} + \widehat{ACD} - \widehat{OCD} = \widehat{OCA} + \widehat{ODA} + \widehat{ODC} = 90^\circ$$

Từ đó suy ra $IM \perp ON$

Tương tự ta có: $IN \perp OM$

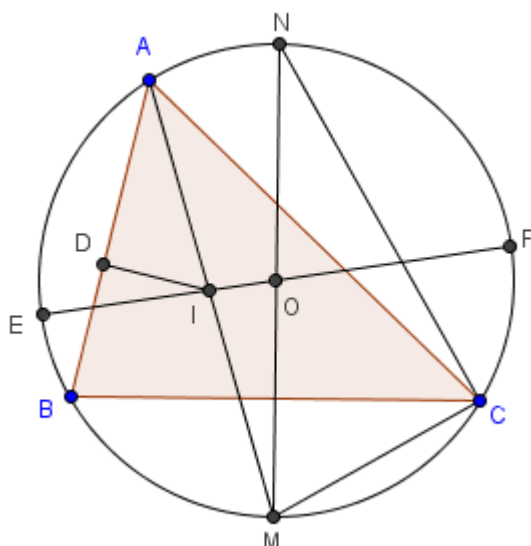
Suy ra O là trực tâm tam giác MIN (đpcm)

I.17) Định lí Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác

Định lý:

Cho tam giác ABC nội tiếp (O;R) và ngoại tiếp (I;r). Chứng minh rằng

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$



Chứng minh:

Kéo dài AI cắt (O) tại M. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O).

Hạ $ID \perp AB$. Kéo dài OI cắt (O) tại E và F. Ta có $\triangle AID \sim$

$$\triangle NMC (g.g) \Rightarrow \frac{ID}{MC} = \frac{AI}{MN} \Rightarrow 2Rr = ID \cdot MN = AI \cdot MC$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh $MC = MI \Rightarrow 2Rr = IA \cdot IM$

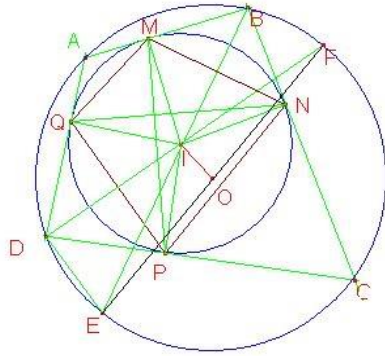
Lại có $IA \cdot IM = IE \cdot IF = R^2 - OI^2$ nên ta có điều phải chứng minh.

I.18) Định lí Euler về khoảng cách giữa tâm hai đường tròn nội ngoại tiếp tứ giác! (Định lí Fuss)

Định lí: Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp (O,R) vừa ngoại tiếp (I,r). Đặt $d=OI$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Chứng minh



Gọi tiếp điểm của (I) trên AB,BC,CD,DA lần lượt là M,N,P,Q.

BI,CI cắt (O) lần lượt ở E,F .

Ta
thấy:

$$(DE,DF) \equiv (DE,DC) + (DC,DF) \equiv (BE,BC) + (DC,DF) \equiv \frac{(BA,BC) + (DC,DA)}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

Do đó E,O,F thẳng hàng ,nên O là trung điểm của EF.

Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác IEF ta có:

$$d^2 = IO^2 = \frac{IE^2}{2} + \frac{IF^2}{2} - \frac{EF^2}{4} = \frac{IE^2}{2} + \frac{IF^2}{2} - R^2$$

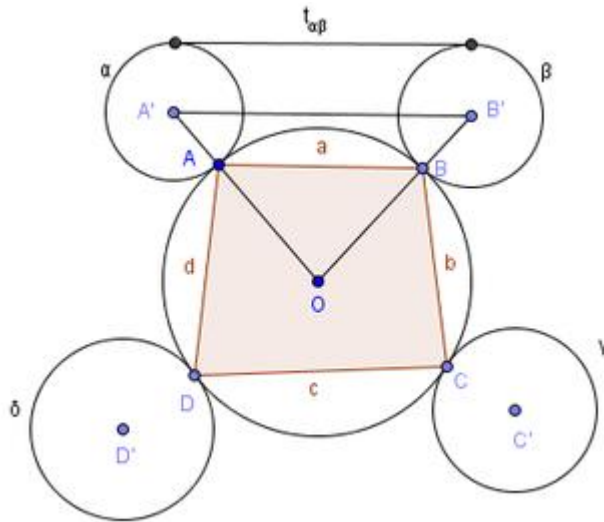
Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{2(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2} = \frac{IE^2+IF^2}{(PI/O)^2} = \frac{IE^2}{(PI/O)^2} + \frac{IF^2}{(PI/O)^2} = \frac{IE^2}{(IE \cdot IB)^2} + \frac{IF^2}{(IF \cdot ID)^2} = \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{(\frac{IM}{\sin \frac{B}{2}})^2} + \frac{1}{(\frac{IP}{\sin \frac{D}{2}})^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$(\text{vì } \frac{B}{2} + \frac{D}{2} = 90)$$

I.19) Định lí Casey (Định lí Ptolemy mở rộng)

Định lí : Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O,R). Đặt các đường tròn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các đường tròn tiếp xúc với (O) tại các đỉnh A,B,C,D. Đặt $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung của hai đường tròn α, β . Trong đó $t_{\alpha\beta}$ là độ dài tiếp tuyến chung ngoài nếu hai đường tròn α, β cùng tiếp xúc trong hoặc cùng tiếp xúc ngoài với (O), và là độ dài đoạn tiếp xúc trong nếu trong trường hợp còn lại. Các đoạn $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}, \dots$ được xác định tương tự. Khi đó ta có:
 $t_{\alpha\beta} \cdot t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} \cdot t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma} \cdot t_{\beta\delta}$



Chứng minh

Ta chứng minh trường hợp $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cùng tiếp xúc ngoài với (O). Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Lần lượt đặt tâm các đường tròn trên là A', B', C', D' và bán kính lần lượt là x, y, z, t .

Đặt $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=m, BD=n$.

Áp dụng định lý Pythagore:

$$(t_{\alpha\beta})^2 = A'B'^2 - (x-y)^2$$

Mặt khác lại có: (theo định lý hàm số cos)

$$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)\cos(\widehat{A'OB'})$$

$$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)\left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right)$$

$$A'B'^2 = (R+x)^2 - 2(R+x)(R+y) + (R+y)^2 + (R+x)(R+y) \cdot \frac{a^2}{R^2}$$

$$A'B'^2 = (x-y)^2 + \frac{a^2}{R^2} \cdot (R+x)(R+y)$$

$$\Rightarrow t_{\alpha\beta} = \frac{a}{R} \cdot \sqrt{(R+x)(R+y)}$$

Tương tự với $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}, \dots$

Ta có

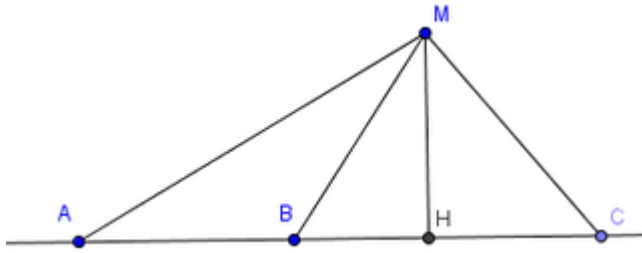
$$t_{\alpha\beta} \cdot t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} \cdot t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma} \cdot t_{\beta\delta} \Leftrightarrow a \cdot c + b \cdot d = m \cdot n \quad (\text{định lý Ptolemy})$$

Ngược lại ta thấy định lý Ptolemy là một trường hợp đặc biệt của định lý Casey khi $x=y=z=t=0$.

I.20) Hệ thức Stewart

Định lý: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Và một điểm M bất kì. Ta luôn có hệ thức

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$



Chứng minh

Qua M hạ $MH \perp AC$.

Ta có:

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \\ = (\overline{MH}^2 + \overline{HA}^2) \cdot \overline{BC} + (\overline{MH}^2 + \overline{HB}^2) \cdot \overline{CA} + (\overline{MH}^2 + \overline{HC}^2) \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$$

$$= \overline{MH}^2 (\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) + (\overline{HA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{HB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{HC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB})$$

$$= 0 + \overline{HA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{HB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{HC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$$

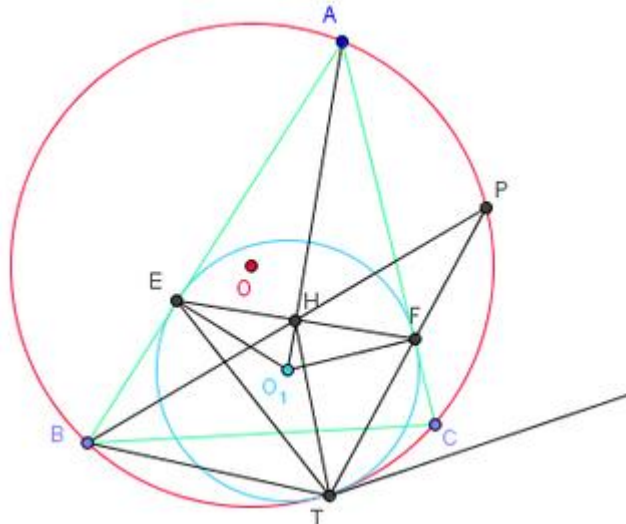
(Đưa về trường hợp hệ thức Stewart cho 4 điểm thẳng hàng (khi M nằm trên đường thẳng chứa A, B, C))

$$\overline{HA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{HB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{HC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \\ = \overline{HA}^2 (\overline{HC} - \overline{HB}) + \overline{HB}^2 (\overline{HA} - \overline{HC}) + \overline{HC}^2 (\overline{HB} - \overline{HA}) + (\overline{HC} - \overline{HB}) (\overline{HA} - \overline{HC}) (\overline{HB} - \overline{HA}) = 0$$

Ta có đpcm.

I.21) Định lý Lyness

Định lý: Nếu đường tròn tâm O tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại T và tiếp xúc với các cạnh AB, AC của tam giác lần lượt tại E và F thì tâm đường tròn nội tiếp của tam giác nằm trên EF.



Chứng minh:

Để chứng minh định lý này ta cần chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1: AB là dây của một đường tròn tâm (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với dây AB tại K và tiếp xúc trong với (O) tại T. Chứng minh I là trung điểm của cung AB không chứa T và $LA^2 = LK \cdot LT$

Bổ đề 2: Điểm M là trung điểm cung BC không chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Điểm I thuộc đoạn MA sao cho $MI=MB$. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Việc chứng minh 2 bổ đề này là khá đơn giản.

Ta tiếp tục quay trở lại với việc chứng minh định lý Lyness.

Kẻ TF giao (O) tại P; BP cắt EF tại H.

Theo bổ đề 1 ta có BP là phân giác của góc B.

Ta có: $\widehat{HET} = \widehat{HBT} (= \widehat{FTx}) \Rightarrow \widehat{HEBT}_{nt} \Rightarrow \widehat{THB} = \widehat{TEB}$

Mà $\widehat{TEB} = \widehat{TFE} \Rightarrow \widehat{TFE} = \widehat{THB}$

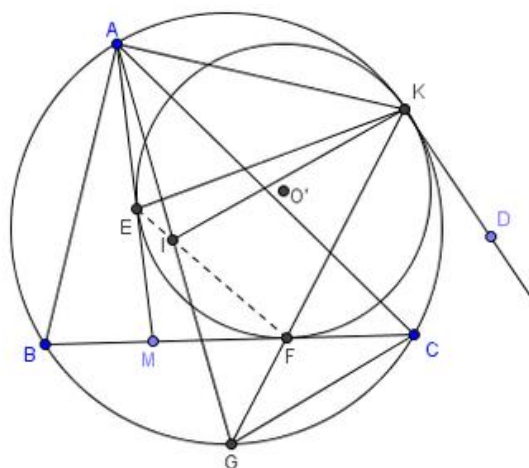
$\Rightarrow \Delta PHF \sim \Delta PTH \Rightarrow PH^2 = PF \cdot PT$

Theo bổ đề 1 ta lại có $PC^2 = PF \cdot PT \Rightarrow PC = PH$

Theo bổ đề 2 ta được H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (ĐPCM)

I.22) Định lý Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama)

Định lý: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc BC (Có cách phát biểu khác là: cho tứ giác ABDC và M là giao của BC và AD; nhưng hai cách phát biểu này là tương đương). Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh MA và MC tại E và F đồng thời tiếp xúc với cả đường tròn (O) tại K. Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.



Chứng minh

KF cắt đường tròn (O) tại G. Áp dụng bổ đề 1 tại bài viết của chu t tung về định lý Lyness ở trên, ta có G là điểm chính giữa cung BC. Gọi I là giao của AG với EF. Ta có

$\widehat{IEK} = \widehat{IAK} = \widehat{FKD} \Rightarrow AEIK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{EFK} = \widehat{AEK}$

$\Rightarrow \Delta EFK \sim \Delta IAK (g.g) \Rightarrow \widehat{EKA} = \widehat{GKI} = \widehat{GIF}$

$\Rightarrow \Delta GIF \sim \Delta GKI (g.g) \Rightarrow GI^2 = GF \cdot GK$

Lại cũng theo bổ đề 1 ta có $GC^2 = GF \cdot GK \Rightarrow GC = GI \Rightarrow I$ là tâm nội tiếp của ΔABC (theo bổ đề 2)

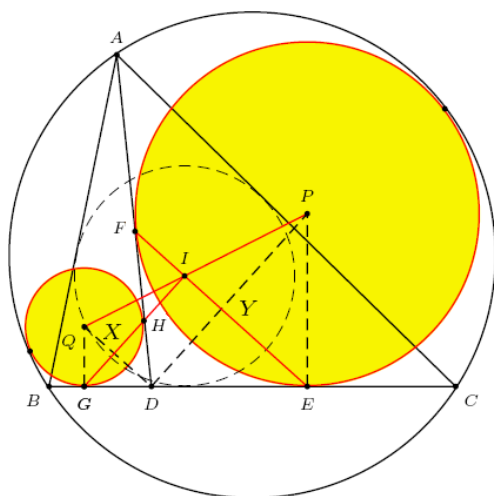
Xem thêm các hệ quả của định lý Lyness tại báo toán tuổi thơ 2 số 42 và 43

I.23) Định lý Thébault

Định lý: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm nằm trên

cạnh BC . Đường tròn tâm P tiếp xúc với 2 đoạn AD, DC và tiếp xúc trong với (O) . Đường tròn tâm Q tiếp xúc với 2 đoạn AD, DB và tiếp xúc trong với (O) . Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Ta có: P, I, Q thẳng hàng.

Chứng minh



Gọi G, H lần lượt là tiếp điểm của (Q) với DB, AD . Gọi I là giao điểm của EF và GH . Theo **định lý lyness mở rộng** (đã có trong bài của trung anh), I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Vậy ta chỉ cần chứng minh P, I, Q thẳng hàng. Thật vậy, gọi X, Y lần lượt là giao điểm của GH và DQ ; EF và DP . Áp dụng định

lí **Thales** ta có: $\frac{IX}{PD} = \frac{YD}{PD} = \frac{QX}{QD}$. Vậy, P, I, Q thẳng hàng (dpcm)

I.24) Công thức Jacobi liên quan đến tâm tỉ cự, định lí Lebnitz

1) Công thức Jacobi:

Nếu I là tâm tỉ cự của hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ứng với các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì với mọi điểm M trên mặt phẳng ta đều có:

$$\sum_{i=1}^n a_i M A_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i I A_i^2 + (a_1 + \dots + a_n) M I^2$$

Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n a_i M A_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_i})^2 = (a_1 + \dots + a_n) M I^2 + 2 \overrightarrow{MI} \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{IA_i} \right) + \sum_{i=1}^n a_i I A_i^2$$

$$= (a_1 + \dots + a_n) M I^2 + \sum_{i=1}^n a_i I A_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{IA_i} = 0$$

(do I là tâm tỉ cự của hệ điểm nên $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \overrightarrow{IA_i} = 0$)
 $\rightarrow$ dpcm.

2) Định lí Lebnitz Đây là trường hợp đặc biệt của công thức trên khi $n=3$

3) Hệ quả khác:

$$\sum_{i=1}^n a_i M A_i^2$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức (với các kí hiệu như phần trên) đạt được khi $M \equiv I$.

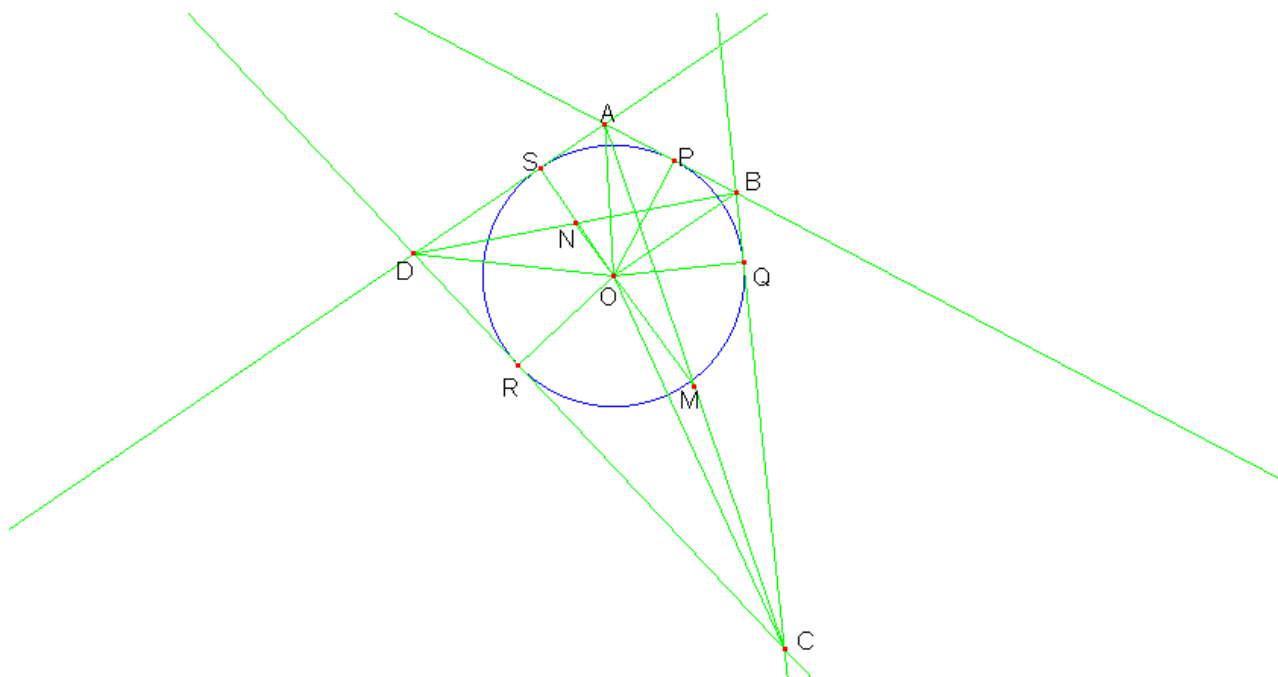
(phần này thuần về tính toán nên chắc không cần vẽ hình phải không anh ma29?)

I.25) Định lí Newton cho tứ giác ngoại tiếp

Định lý

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn O. Khi đó trung điểm hai đường chéo AC, BD và tâm O thẳng hàng.

Hình: (vẽ bằng Cabri hơi xấu): rokeyrulez:



Chứng minh

Gọi P, Q, R, S lần lượt là các tiếp điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA đối với đường tròn (O).

Đặt $SA = AP = a, BP = BQ = b, CQ = CR = c, DR = DS = d$. Áp dụng định lý con nhím cho tứ giác ABCD ta có:

$$(a+b)\overrightarrow{OP} + (b+c)\overrightarrow{OQ} + (c+d)\overrightarrow{OR} + (d+a)\overrightarrow{OS} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a+b) \left[\frac{b}{a+b} \overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OB} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+d)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (a+c)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+d)\overrightarrow{OM} + (a+c)\overrightarrow{ON} = 0$$

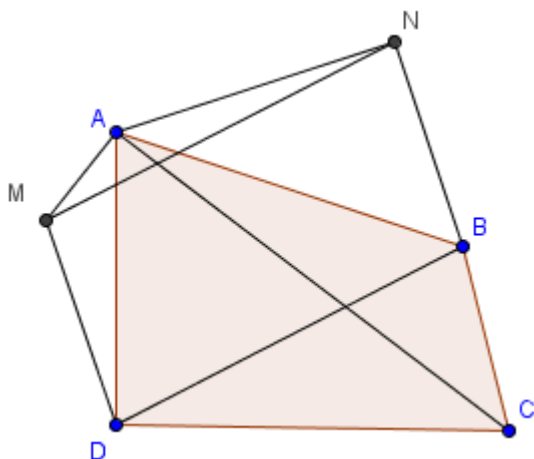
Từ đó suy ra hai vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng phương $\rightarrow O, M, N$ thẳng hàng (đpcm)

I.26) Định lí Breichneider (định lý hàm số cos cho tứ giác)

Định lý

Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d và độ dài hai đường chéo AC, BD là m, n. Khi đó ta có:

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A+C)$$



Chứng minh

Trên cạnh AB ra phía ngoài dựng tam giác ABN đồng dạng với tam giác CAD, và dựng ra phía ngoài cạnh AD tam giác ADM đồng dạng với tam giác CAB. Khi đó dễ thấy: $AN = \frac{ac}{m}, AM = \frac{bd}{m}, NB = DM = \frac{ad}{m}$ và BDMN là hình bình hành.

Đồng thời có $\widehat{NAM} = \widehat{A} + \widehat{C}$

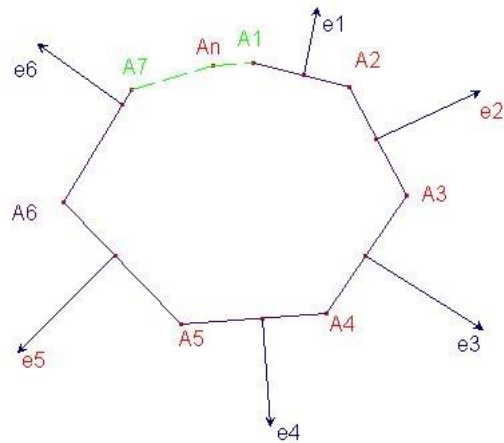
Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác NAM, ta có

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{ac}{m}\right) \cdot \left(\frac{bd}{m}\right) \cdot \cos(A+C) \\ \Leftrightarrow m^2 n^2 &= a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A+C) \end{aligned}$$

I.27) Định lí con nhím:

Định lý: Cho đa giác lồi $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ và các vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ là các vectơ có độ dài bằng các cạnh $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$, tương ứng vuông góc với các cạnh ấy và hướng ra phía ngoài đa giác. Thế thì :

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_n = \vec{0}$$



Chứng minh:

Không giảm tính tổng quát, giả sử đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ có hướng dương.

Xét phép quay vectơ:

$$Q_{\frac{\pi}{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_n) = Q_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_1 + Q_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_2 + ... + Q_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_n = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$$

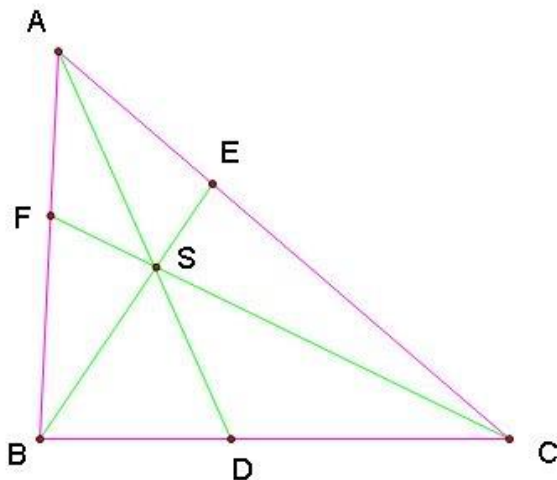
Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

I.28) Định lí Gergone-Euler.

Định lí: Xét tam giác ABC và một điểm S trong mặt phẳng. AS, BS, CS lần lượt cắt BC, CA, AB ở D, E, F. Khi đó ta có:

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{SE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = 1$$

Chứng minh:



Kí hiệu $S[.]$ chỉ diện tích đại số của đa giác.

Ta thấy :

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} = \frac{S[SBD]}{S[ABD]} = \frac{S[SDC]}{S[ADC]} = \frac{S[SBD]+S[SDC]}{S[ABD]+S[ADC]} = \frac{S[SBC]}{S[ABC]} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

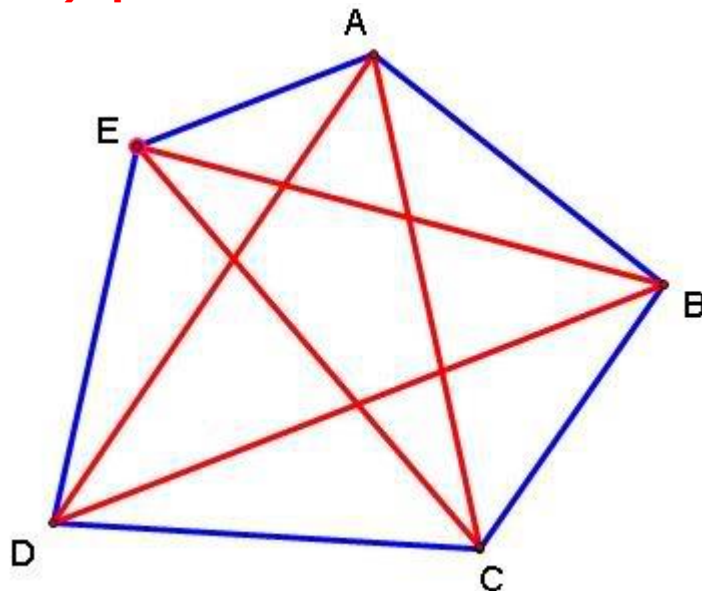
$$\frac{\overline{SE}}{\overline{BE}} = \frac{S[SCA]}{S[BCA]} \quad (2)$$

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = \frac{S[SAB]}{S[CAB]} \quad (3)$$

Cộng theo vế (1),(2) và (3) ta có điều cần chứng minh.

I.29) Định lí Peletier

I.30) Định lí Miobiut



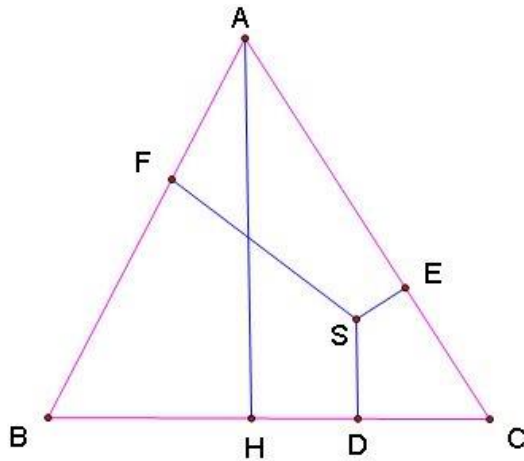
Định lí: Cho ngũ giác lồi

Chứng minh:

I.31) Định lí Viviani

Định lí: Trong tam giác đều ABC ta lấy 1 điểm S. Ta sẽ có tổng các khoảng cách từ điểm S tới ba cạnh sẽ có độ dài bằng 1 đường cao của tam giác.

Chứng minh:



Kẻ SD, SE, SF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB.

Đặt độ dài cạnh tam giác ABC là a, độ dài đường cao AH là b.

Ta có :

$$BC \cdot AH = a \cdot b = 2S_{ABC} = 2(S_{SBC} + S_{SCA} + S_{SAB}) = SD \cdot BC + SE \cdot CA + SF \cdot AB = a(SD + SE + SF)$$

Giản ước hai vế cho a ta có điều cần chứng minh.

I.32) Công thức Lagrange mở rộng.

Định lý:

Gọi I là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, \dots, A_n\}$ ứng với các hệ số $a_1, \dots, a_n$ thì với mọi điểm M:

$$\sum_{i=1}^n a_i M A_i^2 = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j A_i A_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i} + \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) M I^2$$

Chứng minh:

Từ hệ thức Jacobi (có thể xem ở mục I.24) thì ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j A_i A_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i} = \sum_{i=1}^n a_i I A_i^2$$

Do I là tâm tỉ cự của hệ điểm nên:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{IA_i} \right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 I A_i^2 + 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \overrightarrow{IA_i} \cdot \overrightarrow{IA_j} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 I A_i^2 + \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j (I A_i^2 + I A_j^2 - A_i A_j^2) \right] = 0$$

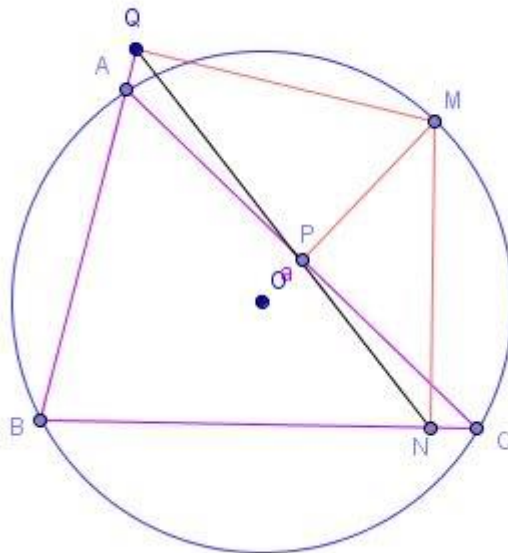
$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot IA_i^2 \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i \cdot a_j \cdot A_i A_j^2 = 0 \\
 & \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i \cdot a_j \cdot A_i A_j^2}{\sum_{i=1}^n a_i} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot IA_i^2
 \end{aligned}$$

(đpcm)

I.33) Đường thẳng Simson

Định lý: Cho $\triangle ABC$ và điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tâm O của tam giác. Gọi N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB thì chúng cùng thuộc một đường thẳng (đây gọi là đường thẳng Simson).

Chứng minh:



Dùng góc định hướng

Ta có:

$$\begin{aligned}
 (PN, PQ) &\equiv (PN, PM) + (PM, PQ) \pmod{\pi} \\
 &\equiv (CN, CM) + (AM, AQ) \pmod{\pi} \\
 &\equiv (BC, MC) + (MA, BA) \pmod{\pi} \\
 &\equiv 0 \pmod{\pi}
 \end{aligned}$$

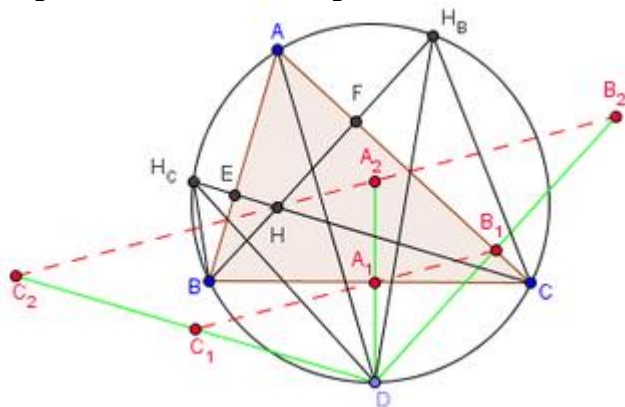
Vậy N, P, Q thẳng hàng.

(Xem thêm [riegelmj\[1\].bdf](#); [00045.bdf](#))

I.34) Đường thẳng Steiner

Định lý: Cho $\triangle ABC$ và điểm D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tâm O của tam giác. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với của D qua các đường thẳng

BC, CA, AB thì chúng cùng thuộc một đường thẳng và đường thẳng này đi qua trực tâm H của tam giác ABC. Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng Steiner ứng với điểm D của tam giác ABC. Còn điểm D được gọi là điểm anti Steiner.



Chứng minh:

Dễ thấy nếu gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của D xuống ba cạnh của tam giác ABC thì C_1 là trung điểm của đoạn DC_1 và tương tự ta có A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

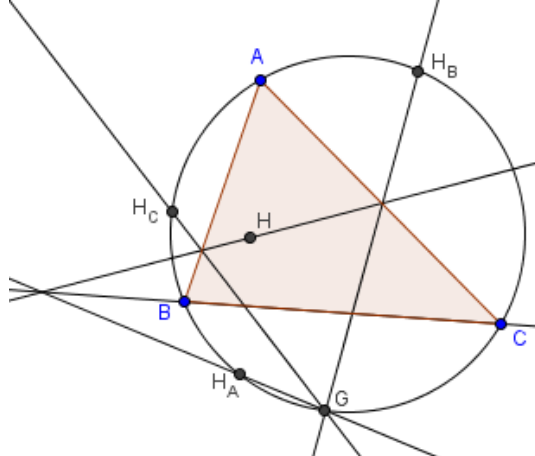
$$\begin{aligned} (HC_2, HB_2) &\equiv (HC_2, HB) + (HB, HC) + (HC, HB_2) \\ &\equiv (\overline{H_C D}, \overline{H_C B}) + (\overline{H F}, \overline{H E}) + (\overline{H_B C}, \overline{H_B D}) \\ &\equiv (\overline{A D}, \overline{A B}) + (\overline{A B}, \overline{A C}) + (\overline{A C}, \overline{A D}) \\ &\equiv 0 \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng Steiner đi qua H.

Từ đó ta có được tính chất rằng đường thẳng Simson ứng với điểm D đi qua trung điểm của đoạn DH.

I.35) Điểm Anti Steiner (Định lý Collings)

Định lý: Cho $\triangle ABC$ và đường thẳng d đi qua H trực tâm của tam giác ABC. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là đường thẳng đối xứng của d qua BC, AC, AB. Các đường thẳng đó đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (điểm anti Steiner của d). Và d được gọi là đường thẳng Steiner của điểm đó (gọi là G).



Chứng minh:

Gọi H_A, H_B, H_C lần lượt là hình chiếu của H qua ba cạnh $\rightarrow$ ba điểm này thuộc (O) ngoại tiếp tam giác ABC và H_A, H_B, H_C lần lượt thuộc d_a, d_b, d_c
 $(d_a, d_b) \equiv (d_a, BC) + (BC, CA) + (CA, d_b) \equiv (BC, d) + (BC, CA) + (d, CA) \equiv 2(BC, CA) \equiv (CH_A, CH_B) \pmod{\pi}$

Vậy nếu gọi giao điểm của d_a, d_b là G thì G thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tương tự ta có đpcm

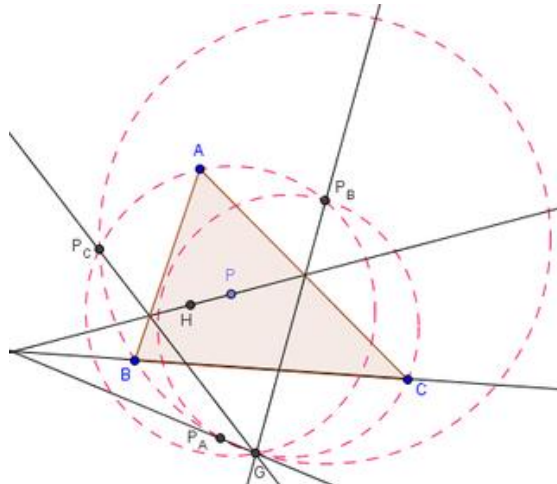
Theo hình của bài đường thẳng Steiner ta dễ thấy HCD đối xứng với HC_2 , HB_2D đối xứng với HB_2

Vậy ta có d đúng là đường thẳng Steiner của G.

Ta có một tính chất khác của điểm Anti Steiner như sau:

Định lý 2:

Gọi P là một điểm thuộc đường thẳng d. P_A, P_B, P_C lần lượt là điểm đối xứng với P qua các cạnh của tam giác ABC. Ta có các đường tròn $(A, P_C, P_B), (B, P_C, P_A), (C, P_A, P_B)$ cùng đi qua điểm G



Chứng minh :

Dễ thấy

$$(AP_C; AP_B) \equiv 2(AB, AC) \pmod{\pi}$$

Lại có theo chứng minh trên có:

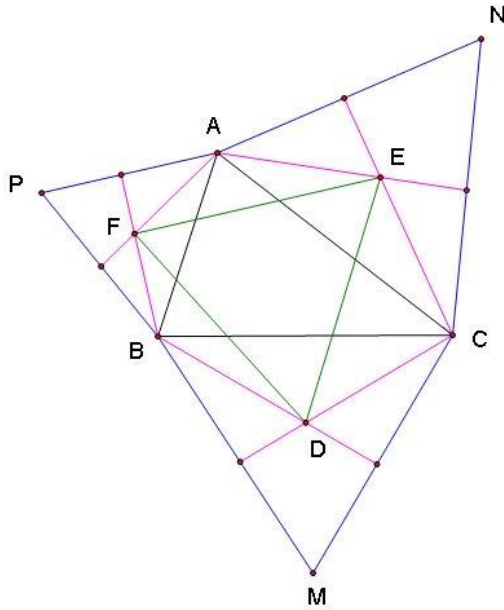
$$(d_c, d_b) \equiv (GP_C, GP_B) \equiv 2(AB, AC) \pmod{\pi}$$

Suy ra G thuộc (A, P_C, P_B) . Tương tự có đpcm

I.36) Định lý Napoleon

Định lý: Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BMC, CNA, APB và gọi D, E, F lần lượt là tâm của ba tam giác ấy. Khi đó ta có tam giác DEF đều.

Chứng minh:



Bài này có nhiều cách giải, nếu thuận lợi mình sẽ giới thiệu ,tuy nhiên ở đây mình sẽ trình bày một chứng minh ngắn gọn dựa trên phép quay vecto như sau:

$$Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{DE}) = \frac{1}{3}Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}(Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{MC}) + Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{CN}) + Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{BA})) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{DF}$$

Từ đó có điều cần chứng minh.

Napoleon's Theorem, Two Simple Proofs

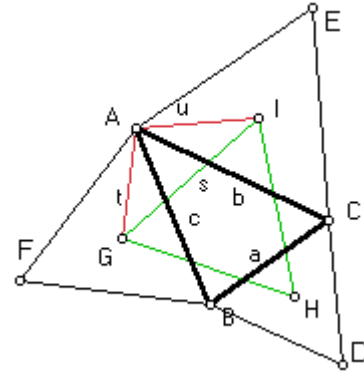
On each side of a triangle, erect an equilateral triangle, lying exterior to the original triangle. Then the segments connecting the centroids of the three equilateral triangles themselves form an equilateral triangle.

By Dr. Scott Brodie, M.D., Ph.D.

Mount Sinai School of Medicine, NY

Proof #1 ("Hammer and Tongs" trigonometry)

In the following, we use [standard notations](#): in the $\triangle ABC$, A denotes both the vertex A and the corresponding $\angle A$, a is both BC and its length. In addition, let G denote the centroid of the equilateral triangle on side AB , and I denote the centroid of the equilateral triangle on side AC , etc. Let s denote the length of segment GI , t the length of segment AG , and u the length of segment AI . ([Geometer's SketchPad illustration.](#))



Since $\angle IAC = \angle GAB = 30^\circ$, we may apply the Law of Cosines to compute

$$s^2 = u^2 + t^2 - 2ut \cdot \cos(A + 60^\circ). \quad (1)$$

Since the centroid of a triangle lies along each median, $2/3$ of the distance from the vertex to the midpoint of the opposite side, we have

$$t = (2/3) \cdot \sqrt{3}/2 \cdot c = c/\sqrt{3}$$

$$u = (2/3) \cdot \sqrt{3}/2 \cdot b = b/\sqrt{3},$$

and (1) becomes

$$3 \cdot s^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A + 60^\circ). \quad (2)$$

Expanding⁽³⁾ the cosine of the sum, and recalling that $\cos(60^\circ) = 1/2$; $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$, we have

$$\cos(A + 60^\circ) = \cos(A)/2 - \sin(A) \cdot \sqrt{3}/2. \quad (3)$$

Substituting (3) into (2) yields

$$3 \cdot s^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos(A) + \sqrt{3} \cdot bc \cdot \sin(A). \quad (4)$$

Now apply the Law of Cosines to $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A). \quad (5)$$

and recall (as in the derivation of the Law of Sines):

$$2 \cdot \text{Area}(\triangle ABC) = bc \cdot \sin(A). \quad (6)$$

Substituting (5) and (6) into (4) gives

$$3 \cdot s^2 = (1/2)(a^2 + b^2 + c^2) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{Area}(\triangle ABC). \quad (7)$$

Since (7) is symmetrical in a , b , and c , it follows that the triangle connecting the three centroids is equilateral, QED.



(*)

Michael Lambrou has suggested a different way to proceed after obtaining (2).

Apply the Law of Cosines to triangles ABE and BCE to express the side BE in two different ways:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C + 60^\circ)$$

By (2), the left hand side equals 3 times GI. Similarly, the right hand side equals 3 times IH, wherefrom $GI = IH$. Considering triangles ACD and ABD instead, we also obtain $IH = HG$, which furnishes the proof.

As a bonus, we get $AD = BE = CF$.



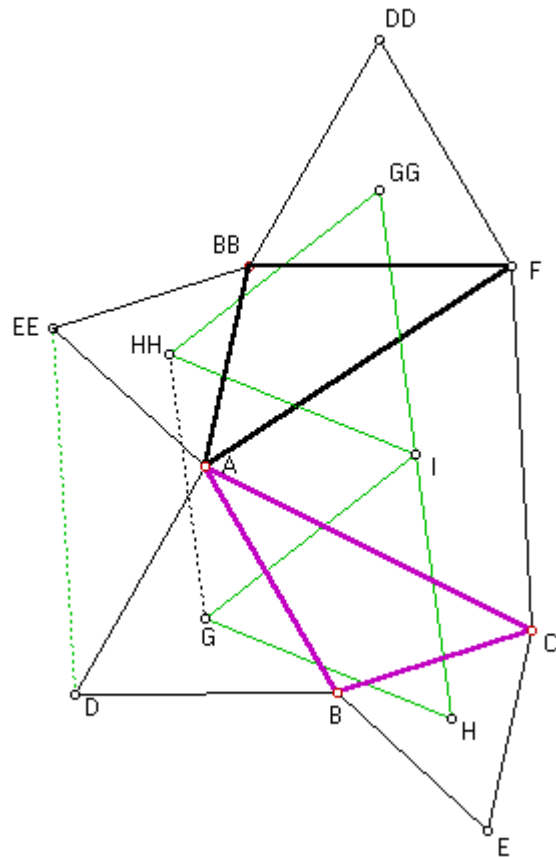
Proof #2 (an argument by symmetrization)

Notations are the same as before: let $\triangle ABC$ be the original triangle. Choose D , E , and F exterior to $\triangle ABC$ so that $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, and $\triangle AFC$ are equilateral triangles, with centroids G , H , and I , respectively. ([Geometer's SketchPad illustration.](#)) We proceed to show that $\angle HIG = 60^\circ$.

Fix I as a center of rotation, and rotate the entire figure by 120° , and superimpose the rotated copy on the original figure. Under the rotation, the $\triangle CAF$ maps to itself (C maps to A , A to F , F to C , while I maps into itself.) Denote by BB' , DD' , EE' , GG' , and HH' the images of points B , D , E , G , and H , respectively.

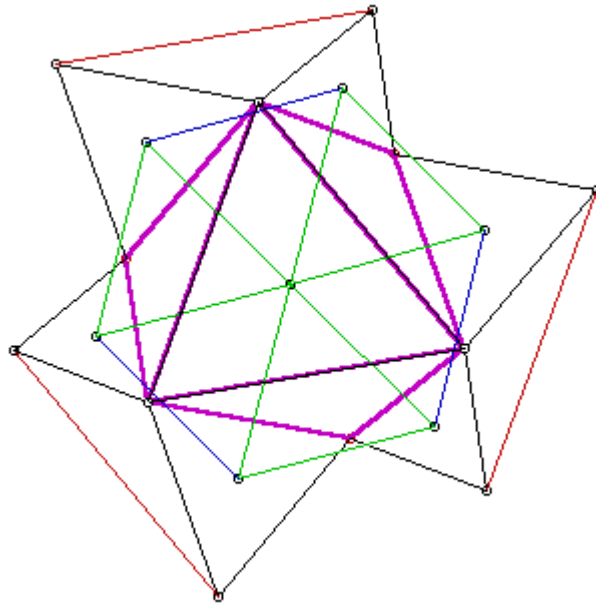
Connect D to EE' and G to HH' . By the *rigidity* of the rotation, $\triangle GHI = \triangle GG'HH'$. In particular, $GH = GG'$. ([Geometer's SketchPad illustration.](#))

Now consider the six triangles that converge on point A . Three of them ($\triangle ABD$, $\triangle ACF$, and $\triangle AEE'$) are equilateral. Recall that the angles of a triangle sum to 180° , while the angles around a point sum to 360° . Since $\angle BB'A.F$ is a copy of $\angle BCA$, it follows that $\angle$



$\angle D.A.EE = \angle ABC$. Finally, $\triangle D.A.EE = \triangle ABC$, and the pentagon $A.BB.EE.D.B$ is congruent to the pentagon $BECAD$. It follows that $G.HH = GH$. And thus $G.HH = GH = GG.HH$.

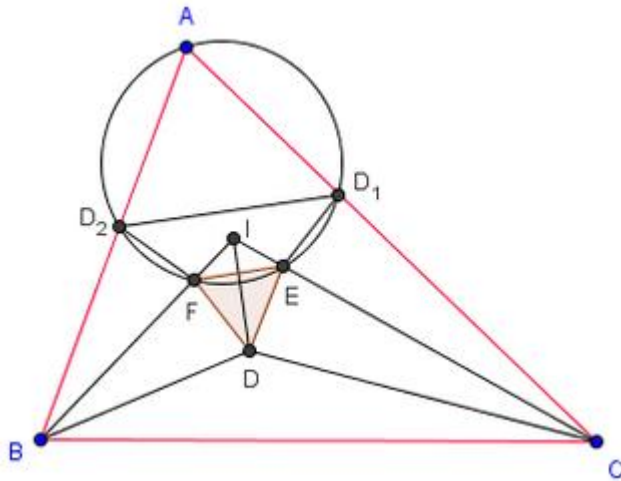
Repeating the rotation by 120° once more, and connecting the tips of the equilateral triangles as above, we obtain the figure on the right. ([Geometer's SketchPad illustration.](#)) Arguing as above, it is clear that the central hexagon is equilateral, and that the six triangles which meet at the center of rotation are congruent. Therefore, $6 \cdot \angle HIG = 360^\circ$, and $\angle HIG = 60^\circ$. Since (among the points G, H, I) the choice of the centroid I was arbitrary, we have shown that $\triangle GHI$ is equiangular, hence equilateral, QED.



I.37) Định lí Morley

Định lí:

Trong tam giác ABC . D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường chia ba góc trong và cùng kề các cạnh tam giác ABC . Khi đó ta có tam giác DEF đều và được gọi là tam giác Morley.



Chứng minh:

Để ngắn gọn ta đặt $\widehat{A} = 3a$ và tương tự với các góc kia $\Rightarrow a + b + c = 60^\circ$ Như hình vẽ kẻ các đường chia trong ở B và C và lần lượt cắt tại D, I. Để thấy ID là phân giác của góc $\widehat{BIC}$. Tại D dựng góc $\widehat{EDF} = 60^\circ$ sao cho Di là phân giác của góc DEF và E thuộc CI và F thuộc BI $\Rightarrow \Delta DEF$ đều.

Lấy D_1 và D_2 lần lượt là điểm đối xứng với D qua CI và BI $\Rightarrow D_1 \in AC, D_2 \in AB$ và dễ dàng c/m được $D_1 E F D_2$ là hình thang cân với $D_1 E = EF = D_2 F$

Vì định lý Morley chỉ có một trường hợp nên em xin phép chỉ sử dụng góc thường cho nó đơn giản:

$$\widehat{DEC} = 180^\circ - 60^\circ - \widehat{FEI} = 120^\circ - (b + c) = 60^\circ + a$$

$$\widehat{ED_1 D_2} = 180^\circ - \widehat{D_1 E F} = 180^\circ - (360^\circ - 60^\circ - 2\widehat{DEC}) = 2a$$

Ta lại có $D_1 E F D_2$ là hình thang cân và $D_1 E = D_2 F = EF \Rightarrow$ trong đường

tròn ngoại tiếp $D_1 E F D_2$ thì số $\widehat{D_1 D_2} = 3a \Rightarrow A$ thuộc đường tròn $(D_1 E F D_2)$. Từ đó ta có đpcm

Định lý Morley có thể mở rộng các đường chia trong thành các đường chia ngoài, và có thể là giao của đường chia trong với đường chia ngoài (mỗi trường hợp này lại cho ta một tam giác Morley khác nhau và theo thống kê có 36 tam giác Morley như vậy). Sau đó bài toán còn được phát triển và tương ứng được đặt thêm nhiều định nghĩa mới như "góc lũng", "tam giác ngoại lai", "tập hợp đẳng cấu", ...

Sau đây là bài toán mở rộng nhất định lý Morley:

Nếu chia n (n nguyên dương, $n \geq 3$) tất cả các góc của một đa giác m cạnh, thì tất cả các giao của các đường thẳng là các đỉnh phân biệt của một hệ

$\frac{1}{2}m(m-1)n(n-1)^2$ đa giác n cạnh đều, có thể phân chia làm $\frac{1}{2}m(m-1)$ họ, mỗi

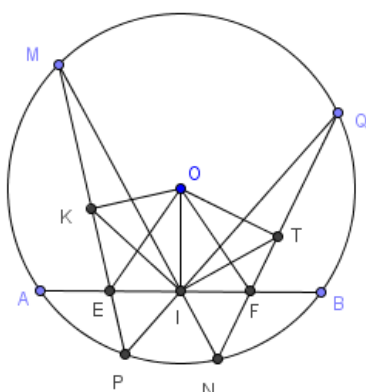
họ có $n(n-1)^2$ đa giác có tâm thẳng hàng.

Cách chứng minh và các khái niệm liên quan xin xem thêm tại sách "Lãng mạn toán học" tác giả Hoàng Quý nhà xuất bản giáo dục (Ai có ebook của quyển này up lên thì tốt quá.

I.38) Định lý con bướm với đường tròn

Định lý:

Cho đường tròn (O) và dây cung AB. I là trung điểm của AB. Qua I vẽ hai dây cung tùy ý MN và PQ sao cho MP và NQ cắt AB tại E, F. Khi đó I là trung điểm của EF.



Chứng minh:

Gọi K, T là trung điểm MP và NQ. Nên OIEK, OIFT là tứ giác nội tiếp

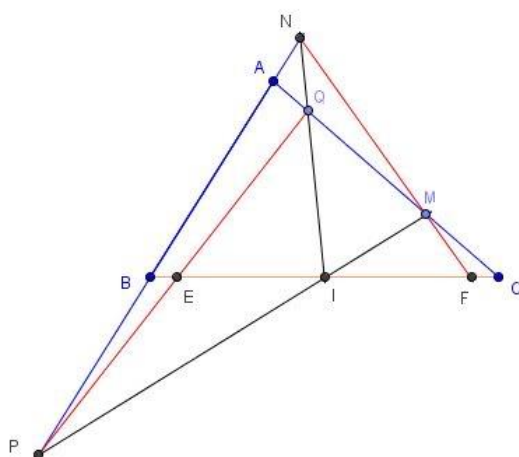
$$\Rightarrow (OE, OI) \equiv (KE, KI) \pmod{\pi}; (OF, OI) \equiv (TF, TI) \pmod{\pi}$$

Ta lại có $\Delta MIP \sim \Delta QIN \Rightarrow (TF, TI) \equiv (KE, KI) \pmod{\pi} \Rightarrow \Delta EOF$ cân tại O $\Rightarrow I$ là trung điểm EF

I.39) Định lí con bướm với cặp đường thẳng

Định lí: Cho tam giác ABC . Lấy I là trung điểm của BC . Qua I kẻ các đường thẳng Δ cắt AB, AC tại N, Q , đường thẳng Δ' cắt AB, AC tại P, M . Gọi MN, PQ cắt BC tại F, E . Khi đó ta có I là trung điểm của EF

Chứng minh:



Áp dụng định lí menelaus trong tam giác ABC ta có các hệ thức sau:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

$$\frac{FC}{FB} \cdot \frac{NB}{NA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1$$

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 1 \quad (2)$$

từ (1) và (2) ta có:

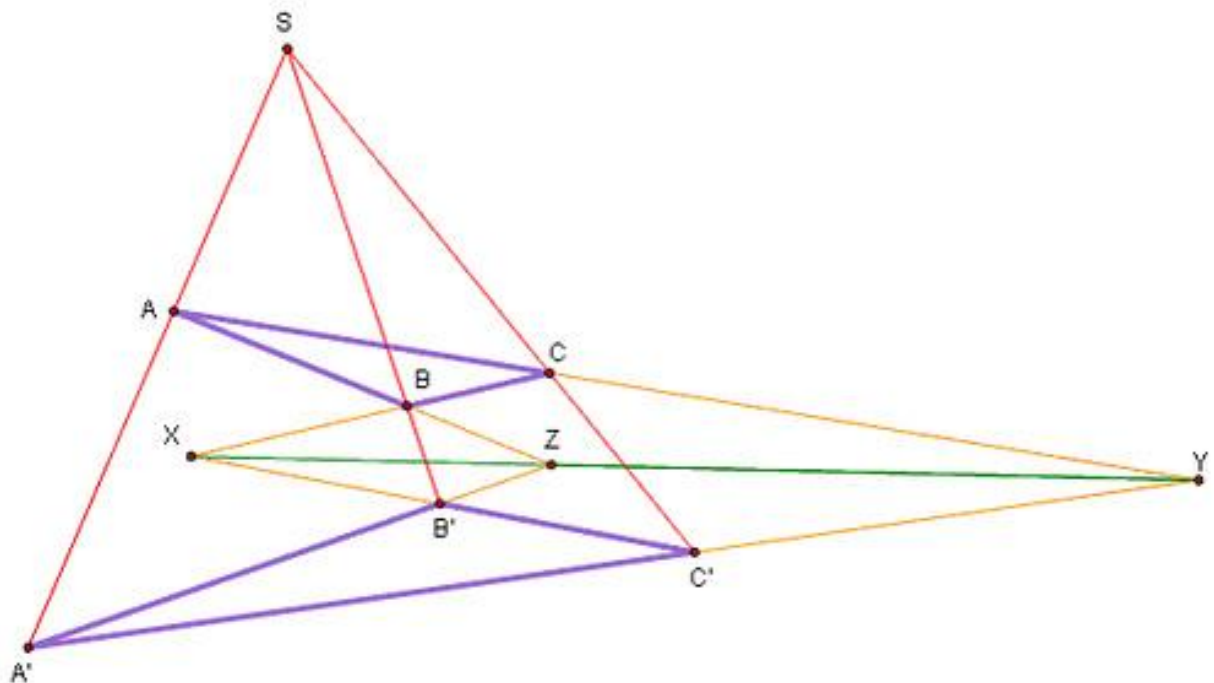
$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \Rightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}$$

Vậy I là trung điểm của EF . (ĐPCM)

I.6) Định lý Desargues

Định lý:

Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó AA' , BB' , CC' đồng quy khi và chỉ khi các giao điểm của BC và $B'C'$, CA và $C'A'$, AB và $A'B'$ thẳng hàng.



Chứng minh:

Gọi X , Y , Z là lần lượt là các giao điểm của các cặp cạnh BC và $B'C'$, CA và $C'A'$, AB và $A'B'$.

Phần thuận:

Giả sử các đường thẳng AA' , BB' , CC' đồng quy tại S . Ta chứng minh X , Y , Z thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SBC với cát tuyến $XB'C'$ ta có:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}} \cdot \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} = 1 \quad \text{hay} \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SB'}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{YC}{YA} = \frac{SA'}{SC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \text{ và } \frac{ZA}{ZB} = \frac{SB'}{SA'} \cdot \frac{AA'}{BB'}$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên lại với nhau, và theo định lí Menelaus suy ra X, Y, Z thẳng hàng.

Phần đảo:

Giả sử các điểm X, Y, Z thẳng hàng. Ta chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Gọi S là giao điểm của AA' và BB' . SC cắt đường thẳng AC' tại C'' .

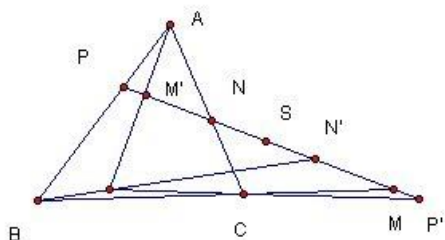
Xét 2 tam giác ABC và $A'B'C''$ có các đường nối các đỉnh tương ứng đồng quy, do đó theo phần thuận giao điểm của các cạnh tương ứng cũng đồng quy.

Ta thấy AB cắt $A'B'$ tại Z , AC cắt $A'C''$ tại Y (do A', C', C'' thẳng hàng), suy ra giao điểm X' của BC và $B'C''$ phải thuộc YZ . Tức là X' là giao của YZ và BC nên X' trùng với X .

Suy ra C'' trùng với C' , hay AA', BB', CC' đồng quy.

I.40 Định Lí Blaikie

Định lí: Cho tam giác ABC và đường thẳng d sao cho d cắt BC, CA, AB lần lượt ở M, N, P . Gọi S là 1 điểm bất kì trên d . Gọi M', N', P' lần lượt là điểm đối xứng của M, N, P qua S . Khi đó AM', BN', CP' đồng quy tại một điểm P và ta gọi P là điểm Blaikie của d và S đối với tam giác ABC .



Chứng Minh :

Có thể cho S nằm giữa N, M .

Giả sử AM' cắt BN' tại I . Ta chứng minh I, C, P thẳng hàng.

Xét tam giác $BN'M$ với 3 điểm I, C, P . Ta cần cm :

$$\frac{IB}{IN'} \cdot \frac{P'N'}{P'M} \cdot \frac{CM}{CB} = 1$$

Xét tam giác PBN' với 3 điểm thẳng hàng A, I, M' trên 3 cạnh :

$$\frac{AP}{AB} \cdot \frac{IB}{IN'} \cdot \frac{M'N'}{M'P} = 1 \quad (1)$$

Xét tam giác MBP với 3 điểm thẳng hàng C, A, N trên 3 cạnh :

$$\frac{CM}{CB} \cdot \frac{AB}{AP} \cdot \frac{PN}{MN} = 1 \quad (2)$$

Nhân 2 vế (1), (2) và rút gọn, chú ý $MN = M'N'$ ta được :

$$\frac{IB}{IN'} \cdot \frac{NP}{M'P} \cdot \frac{CM}{CB} = 1$$

Chú ý là $NP = P'N'$ và $P'M = M'P$ nên ta có đpcm.

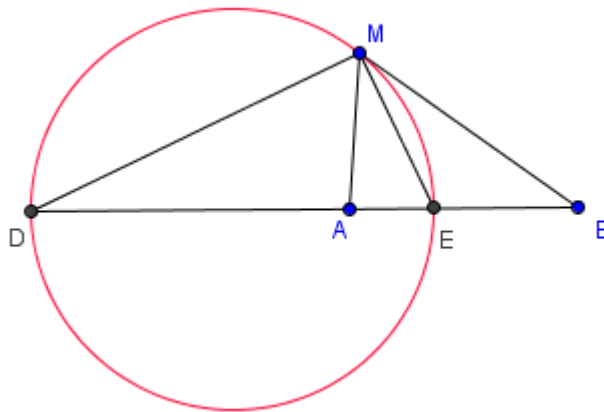
I.41) Định lí chùm đường thẳng đồng quy.

Định lí 1: Ba đường thẳng đồng quy thì định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tỉ lệ.

Chứng minh:

I.42) Đường tròn Apollonius

Định lí: Cho hai điểm A và B cố định. Khi đó quỹ tích điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k (k \neq 1)$ là một đường tròn cố định được gọi là đường tròn Apollonius.



Chứng minh:

Lấy D, E thuộc đường thẳng AB sao cho $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = k$
 $\Rightarrow (DEAB) = -1$

a) Phần thuận

Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{EA}{EB} = k \Rightarrow$ ME là phân giác của $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{EMD} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính DE.

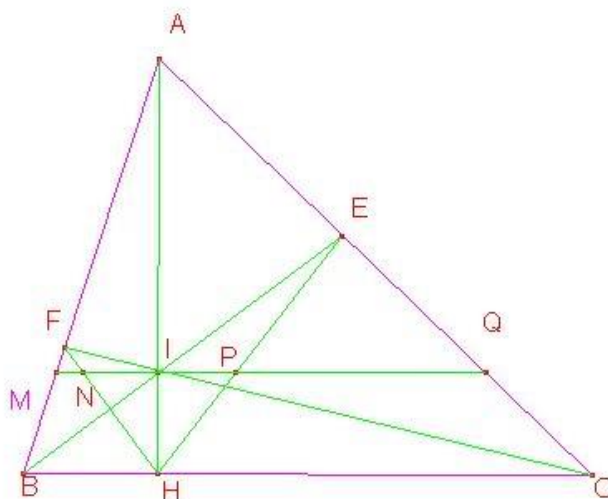
b) Phần đảo

Lấy M' thuộc đường tròn đường kính DE $\Rightarrow \widehat{EM'D} = 90^\circ$.

Lại có $(DEAB) = -1 \Rightarrow$ ME là phân giác của $\widehat{AMB} \Rightarrow$ đpcm

I.43) Định lí Blanchet

Định lí: Cho tam giác ABC có AH là đường cao ứng với cạnh BC. Gọi I là một điểm tùy ý thuộc đoạn AH. các đoạn thẳng BI, CI cắt các cạnh tam giác tại E và F. Chứng minh rằng HA là phân giác của góc EHF



Chứng minh:

Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, HF, HE, AC lần lượt tại M, N, P, Q.

Ta chỉ cần chứng minh $IN = IP$ là xong !!

Theo Thales:

$$\frac{IN}{IM} = \frac{CH}{CB}$$

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{BH}{BC}$$

Do đó :

$$\frac{IN}{IP} \cdot \frac{IQ}{IM} = \frac{CH}{BH}$$

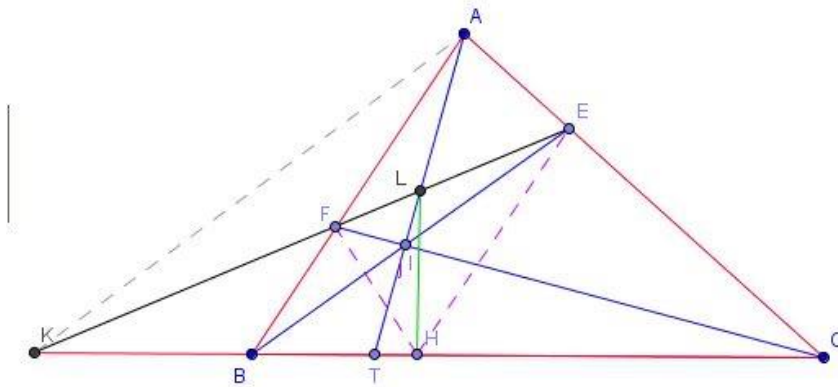
$$\text{Hiển nhiên } \frac{IQ}{IM} = \frac{CH}{BH}$$

Nên $IN = IP$ -----> dpcm

I.44) Mở rộng của định lí Blanchet

Định lí: Cho tam giác ABC, lấy T, E, F lần lượt thuộc các đoạn BC, CA, AB sao cho 3 đường thẳng AT, BE, CF đồng quy tại một điểm. Gọi L là giao điểm của AT và EF . Gọi H là hình chiếu của L xuống BC . Chứng minh rằng HL là phân giác của $\widehat{EHF}$

Chứng minh:



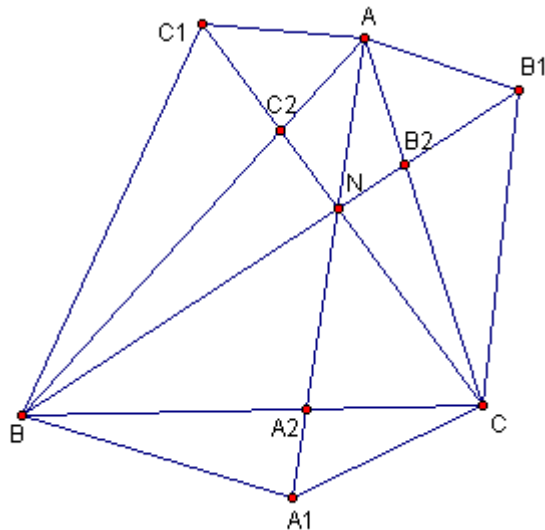
Sử dụng Ceva và Menelaus ta chứng minh được $(KTBC) = -1$
 Theo định lý về chùm điều hòa ta lại có $(KLFE) = -1$
 $\widehat{LHK} = 90^\circ \rightarrow$ đpcm (hệ quả của chùm điều hòa)

I.45) Định lý Jacobi:

Định lý:

Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 trên mặt phẳng sao

cho: $\widehat{BAC_1} = \widehat{CAB_1} = \alpha$, $\widehat{ABC_1} = \widehat{CBA_1} = \beta$, $\widehat{BCA_1} = \widehat{ACB_1} = \gamma$. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Jacobi N.



Chứng minh:

Do AA_1, BA_1, CA_1 đồng quy tại A_1 và tương tự cho A_2, A_3 nên áp dụng định lý Ceva dạng Sin ta có:

$$\frac{\sin CBA_1 \cdot \sin BAA_1 \cdot \sin ACA_1}{\sin ABA_1 \cdot \sin CAA_1 \cdot \sin BCA_1} = 1$$

$$\frac{\sin \beta \cdot \sin \widehat{BAA_1} \cdot \sin(\widehat{ACB} + \gamma)}{\sin(\widehat{ABC} + \beta) \cdot \sin \widehat{CAA_1} \cdot \sin \gamma} = 1$$

Xây dựng hai đẳng thức tương tự cho A_2, A_3 rồi nhân 3 đẳng thức trên với nhau ta được:

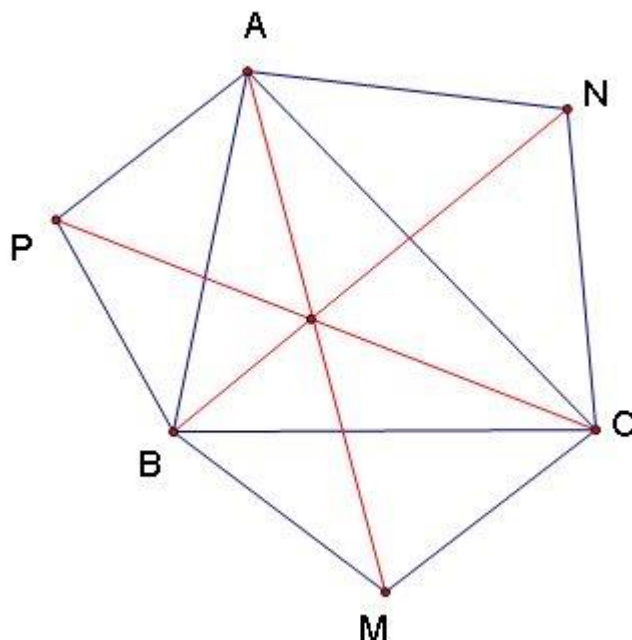
$$\frac{\sin \widehat{BAA_1} \cdot \sin \widehat{ACC_1} \cdot \sin \widehat{CBB_1}}{\sin \widehat{CAA_1} \cdot \sin \widehat{BCC_1} \cdot \sin \widehat{ABB_1}} = 1$$

Như vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy theo định lý Ceva dạng Sin.

I.46) Định lý Kiepert

Định lý: Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác cân đồng dạng BCM, CAN, ABP (Cân ở M, N, P). Khi ấy ta có AM, BN, CP đồng quy

Chứng minh



Do các tam giác BCM, CAN, ABP cân và đồng dạng nên dễ thấy:

$$\widehat{MBC} = \widehat{PBA}; \widehat{PAB} = \widehat{NAC}; \widehat{NCA} = \widehat{MCB}$$

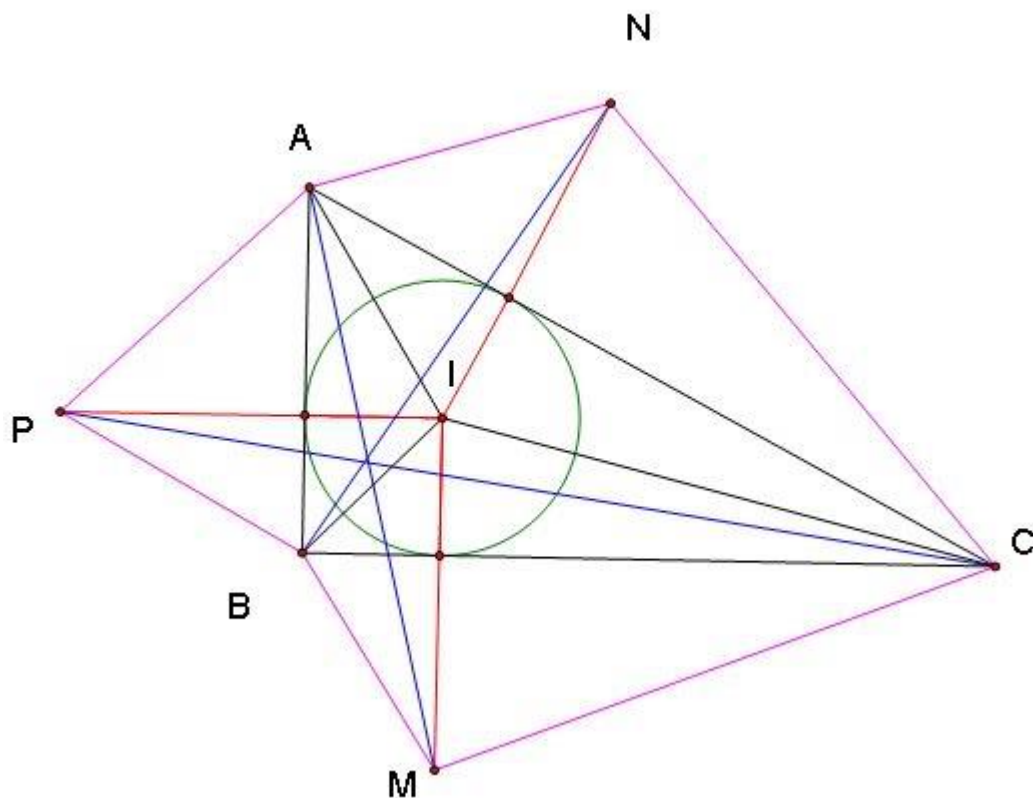
Theo định lý Jacobi ta có điều cần chứng minh.

I.47) Định lý Kariya

Định lý :

Cho tam giác ABC nhận (I) là đường tròn nội tiếp. Ở phía ngoài tam giác lấy các điểm M, N, P sao cho $IM = IN = IP$ và IM, IN, IP tương ứng vuông góc BC, CA, AB. Khi đó ta có AM, BN, CP đồng quy.

Chứng minh:



Từ giả thiết bài toán dễ suy ra:

$$\triangle BIM = \triangle BIP \text{ (c.g.c)}$$

Do đó:

$$\widehat{IBM} = \widehat{IBP}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{PBA}$$

Tương tự:

$$\widehat{PAB} = \widehat{NAC}; \widehat{NCA} = \widehat{MCB}$$

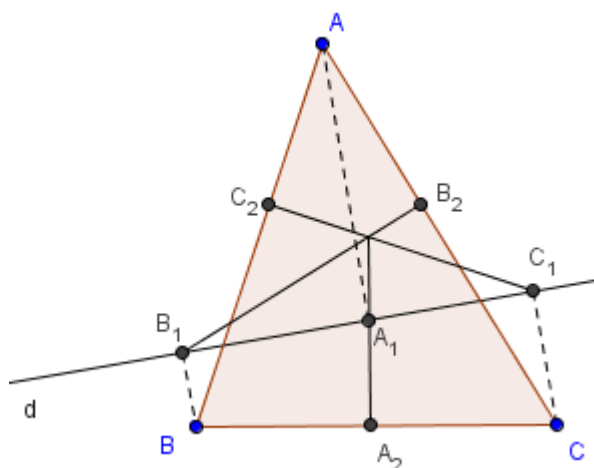
Theo định lý Jacobi ta có điều cần chứng minh.

I.48) Cực trực giao

Đây là một khái niệm mở rộng kết quả về trực tâm tam giác.

Định lý:

Cho tam giác ABC. d là một đường thẳng bất kì trong mặt phẳng. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên d. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên BC, CA, AB. Khi đó A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm gọi là cực trực giao của đường thẳng d đối với $\triangle ABC$.



Chứng minh:

Áp dụng định lý Carnot ta có đpcm $\Leftrightarrow$

$$(A_2B^2 - A_2C^2) + (B_2C^2 - B_2A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1B^2 - C_1B^2) + (B_1C^2 - A_1C^2) + (C_1A^2 - B_1A^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1B_1^2 - C_1B_1^2) + (B_1C_1^2 - A_1C_1^2) + (C_1A_1^2 - B_1A_1^2) = 0 \quad (\text{hiển nhiên đúng})$$

Trục tâm là trường hợp khi d trùng với một trong ba cạnh của $\triangle ABC$

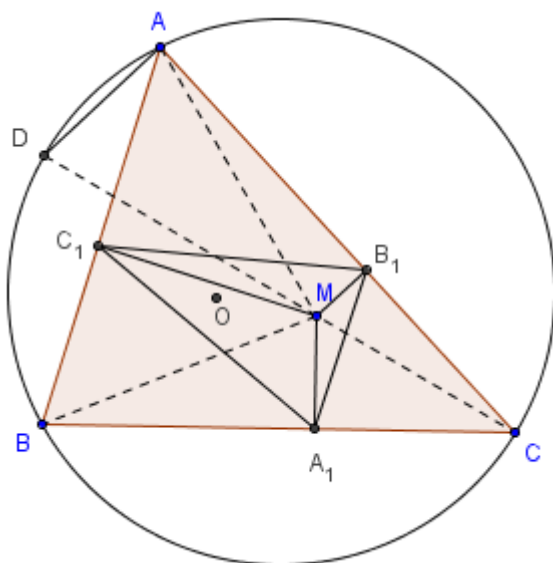
(Xem thêm [FG200406.bdf](#))

I.49) Khái niệm tam giác hình chiếu, công thức Euler về diện tích tam giác hình chiếu

Định lý:

Cho (O, R) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Cho điểm M nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên ba cạnh BC, AC, AB. Khi đó ta gọi $\triangle A_1B_1C_1$ là tam giác hình chiếu của điểm M đối với tam giác ABC. Ta có công thức Euler về diện tích của tam giác hình chiếu:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2}$$



Chứng minh:(Mashimaru)

Ta có tứ giác MA_1CB_1 nội tiếp đường tròn đường kính MC nên
 $\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{MC \sin C}$, tương tự thì $\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{MA \sin A}$.

Gọi D là giao điểm của MC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có:

$$\widehat{MB_1A_1} = \widehat{MCA_1} = \widehat{BAD} \text{ và } \widehat{C_1B_1M} = \widehat{C_1AM}.$$

Mặt khác:

$$\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{MB_1A_1} + \widehat{MB_1C_1} = \widehat{DAB} + \widehat{MAC_1} = \widehat{MAD}$$

Xét tam giác ADM , theo định lý sin ta có:

$$\frac{AM}{\sin \widehat{ADM}} = \frac{DM}{\sin \widehat{MAD}} = \frac{DM}{\sin \widehat{A_1B_1C_1}}$$

Suy ra: $AM \sin \widehat{A_1B_1C_1} = DM \sin \widehat{ADM}$. Từ đó ta có:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} B_1A_1 \cdot C_1B_1 \cdot \sin \widehat{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} MC \sin C \cdot MA \sin A \cdot \sin \widehat{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} MC \cdot MD \cdot \sin A \sin B \sin C$$

Mặt khác, ta lại có: $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ và

$$MC \cdot MD = P_{M/(O)} = |OM^2 - R^2| \text{ nên:}$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left| \frac{R^2 - OM^2}{4R^2} \right|$$

(Xem thêm [pedal\(2\).bdf](#))

I.50) Khái niệm hai điểm đẳng giác

Định lí:

Cho tam giác ABC . M là một điểm nằm trong tam giác.

1/Khi đó các đường thẳng đối xứng với AM, BM, CM qua tia phân giác đồng quy tại M' . M' được gọi là điểm đẳng giác của M .

2/Lần lượt đặt D, E, F và D', E', F' là chân các đường cao hạ từ M và M' xuống BC, AC, AB .

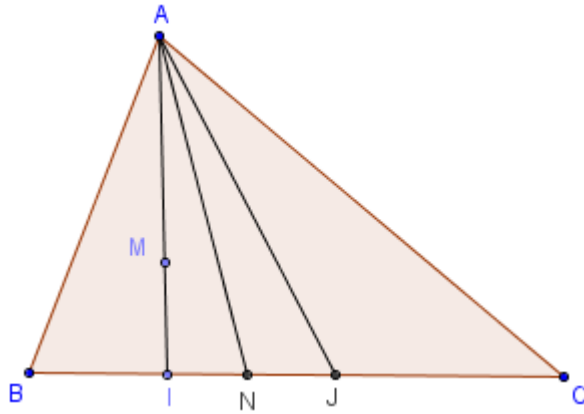
a/Khi đó D, E, F, D', E', F' cùng thuộc một đường tròn tâm O . Và O là trung điểm của MM' .

b/Khi đó cũng có $AM' \perp EF, BM' \perp FD, CM' \perp DE$.

Và $AM \perp E'F', BM \perp F'D', CM \perp D'E'$

Chứng minh:

1/(hình 1)



$$\frac{S_{ABI}}{S_{ACJ}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AI} \cdot \sin(\angle BAI)}{\overline{AC} \cdot \overline{AJ} \cdot \sin(\angle CAJ)}$$

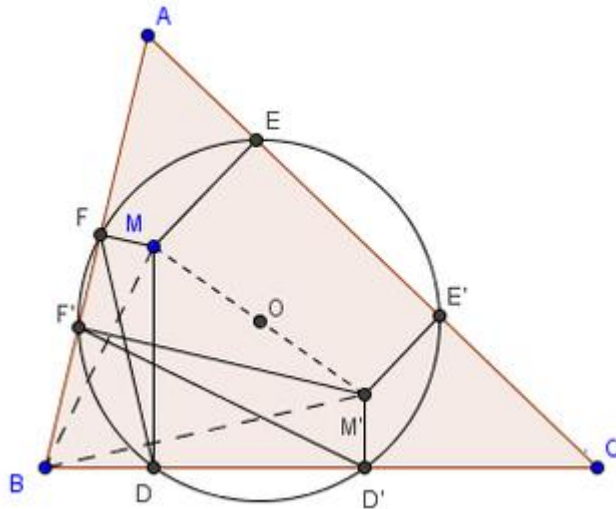
$$\frac{S_{ABJ}}{S_{ACI}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AI} \cdot \sin(\angle BAI)}{\overline{AC} \cdot \overline{AJ} \cdot \sin(\angle CAJ)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} \cdot \frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Tương tự áp dụng định lí Ceva thuận và đảo ta có đpcm1

2/

a/(hình 2)



$$(\angle BAF; \angle BMA) \equiv (\angle BM'F; \angle BMC) \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\angle DFF'; \angle DMM') \equiv (\angle F'M'D'; \angle F'D'M') \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\angle DFF'; \angle DMM') + 90^\circ \equiv (\angle F'M'D'; \angle F'D'M') + 90^\circ \pmod{\pi}$$

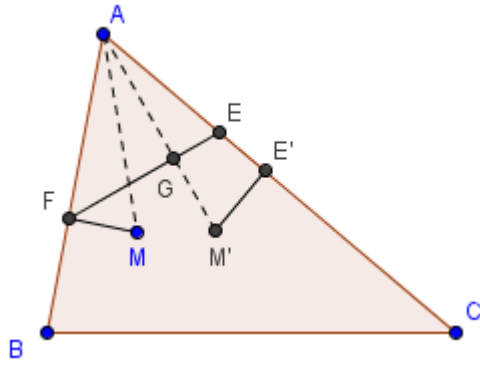
$$\Leftrightarrow (\angle DFF'; \angle DMM') + (\angle DMM'; \angle DDM') \equiv (\angle F'M'D'; \angle F'D'M') + (\angle F'M'D'; \angle F'D'M') \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\angle DFF'; \angle DDM') \equiv (\angle F'M'D'; \angle F'D'M') \pmod{\pi}$$

$\Rightarrow F, F', D', D$ nội tiếp. Trung trực FF' và DD' gặp nhau tại trung điểm O của MM' (t/c đường trung bình hình thang) $\Rightarrow F, F', D', D$ thuộc đường tròn tâm O .

Tương tự ta có đpcm.

b/(hình 3)



$$\widehat{MAF} = \widehat{M'AE}$$

lại có $\widehat{AMF} = \widehat{AEM'} \Rightarrow \Delta AMF \sim \Delta AEM' \text{ (g.g)}$

$$\Rightarrow \widehat{AGE} = \widehat{AE'M'} = 90^\circ \Rightarrow$$

Tương tự ta có đpcm

Trường hợp M là trọng tâm thì M' là điểm đối trung (AM, BM, CM lần lượt được gọi là các đường đối trung) có tính chất rằng: $(M'E'^2 + M'F'^2 + M'D'^2)_{\min}$

I.51) Khái niệm tứ giác toàn phần .

Khái niệm:

Một tứ giác toàn phần là một hình được tạo nên bởi bốn đường thẳng, từng đôi một cắt nhau nhưng không có ba đường nào đồng qui. Một hình tứ giác toàn phần có 4 cạnh là 4 đường thẳng ấy, có 6 đỉnh là 6 giao điểm của chúng và 3 đường chéo là 3 đoạn đi qua đỉnh đối diện (chú ý hai đỉnh này không cùng thuộc một cạnh).

Chúng ta có một kết quả cơ bản và thú vị về tứ giác này như sau:

Định lý : Trong hình tứ giác toàn phần cặp đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại lập thành một hàng điểm điều hòa.

Định lí:

Đặt C là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. C_a là đường tròn ngoại tiếp HXX' và H_a là điểm đối xứng với H qua BC . Tương tự với các đường tròn khác.

64

C_a, H_a nằm trên đường tròn này $\Rightarrow H_a$ là giao của C và C_a và $HH_a \perp BC$.
 Áp dụng định lý Collings (trong bài viết điểm Anti-Steiner) với đường thẳng XYZ đi qua H, ta có $H_a X, H_b Y, H_c Z$ đồng quy tại N trên C. Áp dụng định lý Miquel cho tam giác XNY với các điểm $H_a, H_b, H \Rightarrow C, C_a, C_b$ cùng đi qua M. Tương tự C_c cũng đi qua M.

Như vậy C_a, C_b, C_c cùng đi qua H và M (đồng trục). Nên tâm của chúng thẳng hàng.

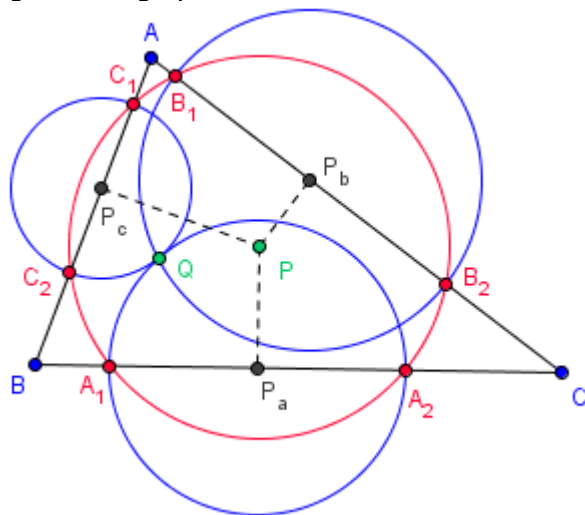
Các tài liệu có liên quan:

(Xem thêm [FG200426.bdf](#); [FG200427.bdf](#))

I.53) Đường tròn Droz-Farny

Định lý:

Cho điểm P bất kì và tam giác ABC. Điểm Q là điểm đẳng giác với P đối với tam giác ABC. Chân các đường vuông góc với các cạnh BC, AC, AB của P là P_a, P_b, P_c . Lấy P_a làm tâm vẽ đường tròn đi qua Q cắt BC tại A_1, A_2 . B_1, B_2, C_1, C_2 định nghĩa tương tự. Khi đó $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc đường tròn tâm P.



Chứng minh:

O là trung điểm của PQ

Ta đã biết O cách đều $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$

Mà :

$$PC_2^2 = PP_c^2 + P_c C_2^2 = PP_c^2 + QP_c^2 = \frac{PQ^2}{2} + 2P_c O^2 \quad (\text{công thức đường trung tuyến})$$

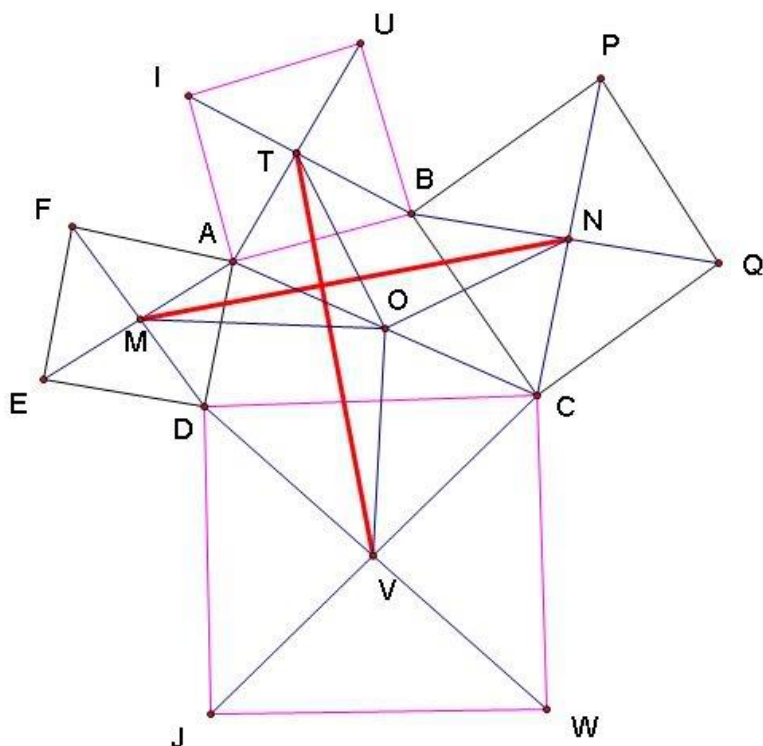
Hoàn toàn tương tự ta sẽ có các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cách đều P (điều cần chứng minh).

I.54) Định lý Van Aubel về tứ giác và các hình vuông dựng trên cạnh.

Định lý: Về phía ngoài tứ giác ABCD ta dựng các hình vuông

ABUI, BCQP, CDJW, DAFE với các tâm tương ứng là T, N, V, M. Khi đó ta có TV và MN vuông góc với nhau.

Chứng minh:



Gọi O là trung điểm đoạn AC.

Ta thấy: $F_C^{45^\circ, \sqrt{2}}: N \rightarrow B$

$F_A^{45^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}}: B \rightarrow T$

Do vậy: $F = F_C^{45^\circ, \sqrt{2}} \circ F_A^{45^\circ, \frac{1}{\sqrt{2}}}: N \rightarrow T$

Chú ý F là phép đồng dạng góc 90° với tỉ số 1 có O là điểm bất động tức là F là phép quay tâm O góc 90° . (1)

Như vậy: $F: N \rightarrow T$ (2)

Tương tự ta có: $F: M \rightarrow V$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có điều cần chứng minh.

I.2 Mở rộng định lí Menelaus theo diện tích.

Định lí: Cho tam giác ABC và 3 điểm M, N, P lần lượt nằm trên BC, CA, AB. Khi đó ta có:

$$\frac{S[MNP]}{S[ABC]} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}$$

Chứng minh

Gọi e_1, e_2, e_3 là vector chỉ phương của BC, CA, AB .

Ta có:

$$\begin{aligned}
S[ABC] &= S[MAB] + S[MCA] \\
\Rightarrow S[ABC] &= S[PMA] + S[PBM] + S[NMC] + S[NAM] \\
\Rightarrow S[ABC] &= S[MNP] + S[BMP] + S[CNM] + S[APN]
\end{aligned}$$

một khác :

$$\frac{S[BMP]}{S[ABC]} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP} \cdot \sin(e_1; e_2)}{\overline{BC} \cdot \overline{BA} \cdot \sin(e_1; e_2)} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}$$

tương tự:

$$\frac{S[CNM]}{S[ABC]} = \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}$$

$$\frac{S[APN]}{S[ABC]} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

Ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\frac{S[MNP]}{S[ABC]} &= 1 - \frac{S[BMP]}{S[ABC]} - \frac{S[CNM]}{S[ABC]} - \frac{S[APN]}{S[ABC]} \\
\Rightarrow \frac{S[MNP]}{S[ABC]} &= 1 - \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} - \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\
\Rightarrow \frac{S[MNP]}{S[ABC]} &= \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}
\end{aligned}$$

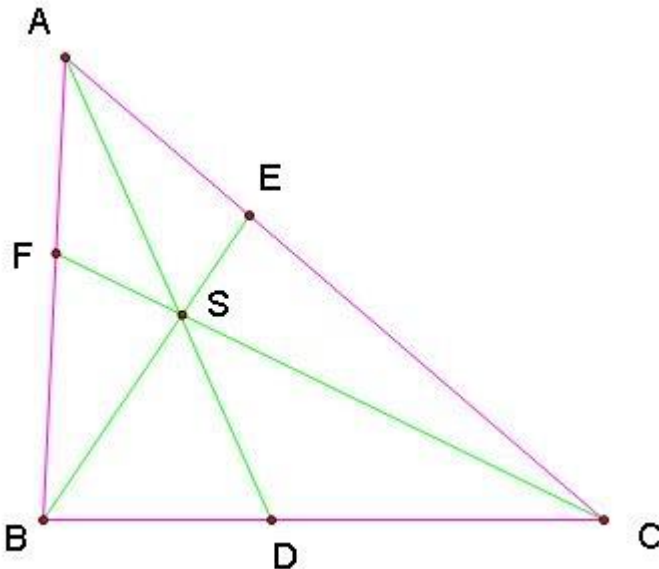
I.55) Hệ thức Van Aubel

Định lí: Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy ở S. Khi đó ta có:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

Và 2 hệ thức tương tự.

Chứng minh:



Cách chứng minh dưới đây rất độc đáo mình đọc trong một file của anh Darij Grinberg (xem cuối bài). Chúng ta sử dụng định lí Gergonne - Euler (mục I.28) cho điểm A với tam giác SBC. Ta có:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} - 1 = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

(Xem thêm [GergonneEuler.bdf](#))

I.56) Định lí Pithot

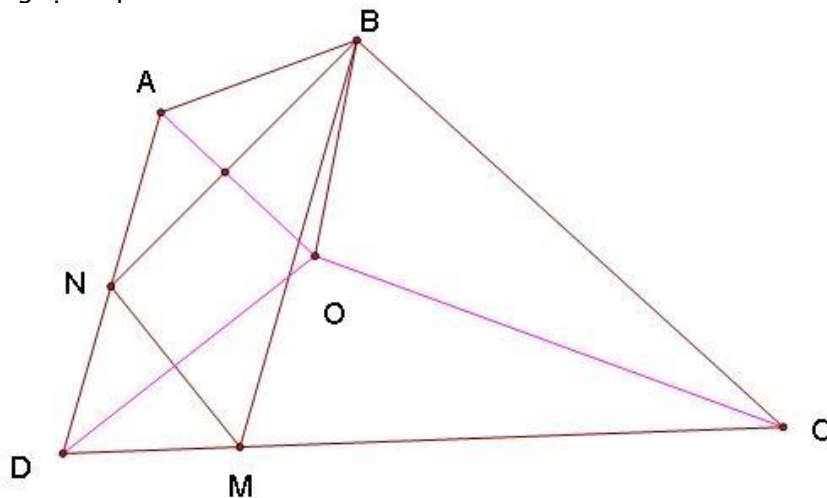
Định lí: Tứ giác lồi ABCD là tứ giác ngoại tiếp khi và chỉ khi : $AB+CD = BC+DA$

Chứng minh:

+) Chiều thuận: ABCD là tứ giác ngoại tiếp thì: $AB+CD=BC+DA$

Phần này chứng minh hoàn toàn đơn giản xin dành cho bạn đọc.

+) Chiều đảo: Nếu tứ giác lồi ABCD thỏa mãn : $AB+CD=BC+DA$ (*) thì nó là tứ giác ngoại tiếp.



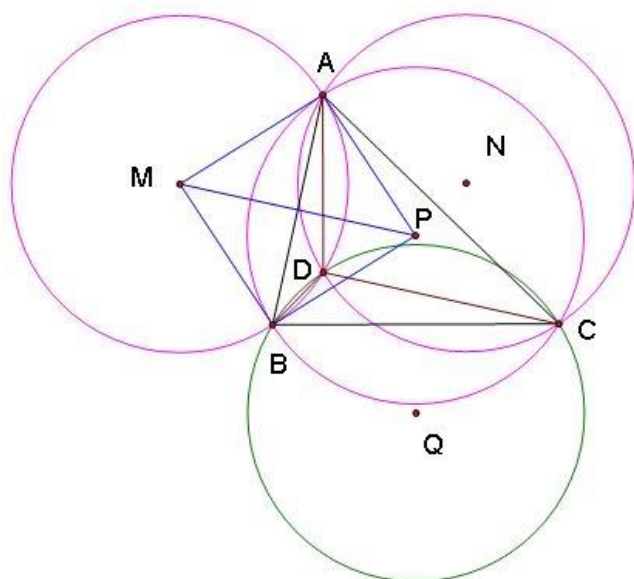
Không giảm tổng quát giả sử : $AB \leq AD$, khi ấy từ (*) cũng suy ra: $BC \leq CD$.
 Khi ấy trên AD, DC tương ứng tồn tại hai điểm N, M sao cho: $AN=AB, CM=CB$.
 Từ (*) sẽ có: $DN=DM$.

Do đó các đường phân giác của các góc tại đỉnh A, D, C sẽ là ba đường trung trực của tam giác BMN nên chúng đồng quy tại một điểm (mà ta kí hiệu là O).
 Nhận thấy O cách đều 4 cạnh tứ giác nên ta có điều cần chứng minh.

I.57) Định lí Johnson

Định lí: Cho ba đường tròn có cùng bán kính R với tâm lần lượt là M, N, P và cùng đi qua một điểm A. Khi ấy ba giao điểm khác A của ba đường tròn ấy cùng nằm trên một đường tròn có bán kính là R.

Chứng minh:



Mình gặp định lý này và không hề biết chứng minh của nó, ở đây mình trình bày một phép chứng minh mà mình nghĩ ra như sau mà theo mình nó là một chứng minh dài.

Chúng ta kí hiệu các giao điểm khác A là B, C, D như hình vẽ và gọi Q là tâm (BCD).

Ta thấy: $PA = PB = MA = MB$ nên MAPB là hình thoi

$\Rightarrow M$ là điểm đối xứng của P qua AB.

Chú ý bán kính của (P) và (M) là bằng nhau nên suy ra (P) và (M) đối xứng với nhau qua AB. (1)

Tương tự (P) và (N) đối xứng với nhau qua AC (2).

(P) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (3)

Từ (1), (2) và (3) ta sẽ suy ra D là trực tâm tam giác ABC.

Đến đây công việc còn lại đã rất đơn giản.....

I.58) Định lý Eyeball

Định lý: Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau. Hai tiếp tuyến kẻ từ O tới (O') cắt (O') tại C, D. Hai tiếp tuyến kẻ từ O' tới (O) cắt (O) tại A, B. Khi đó ta có: $AB = CD$.

Chứng minh:

Chúng ta kí hiệu các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

OM, O'N tương ứng là các tiếp tuyến của (O') và (O).

AD cắt lại (O') ở P.

Ta thấy:

$$\widehat{MPC} = \widehat{OMC} \quad (1)$$

$$\widehat{MCP} = \widehat{CMO'} \quad (2)$$

$\widehat{MPC} + \widehat{MCP} = \widehat{OMO'} = 90^\circ$
Do đó CP là đường kính của (O').

Hoàn toàn tương tự ta cũng có các đẳng thức góc khác nên sẽ có ABCD là hình chữ nhật $\Rightarrow AB=CD$.

Bổ đề: Cho AB và CD là hai dây cung không cắt nhau của cùng một đường tròn và P là một điểm bất kì trên cung AB không chứa CD của đường tròn ấy. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của PC, PD với AB. Thế thì giá trị biểu thức sau là không đổi:

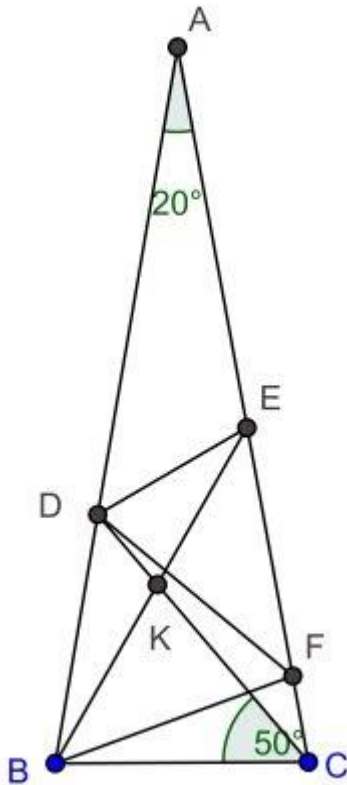
A geometric diagram featuring two intersecting green circles. Points are labeled as follows: A and C are on the left circle; B and G are on the right circle; E is at the intersection of the two circles; P is on the upper arc of the left circle; D is on the lower arc of the right circle; F is located between the two circles. Lines connect the following pairs of points: A-E, E-C, C-D, D-P, P-E, E-F, F-B, B-G, D-F, and D-G. The segment E-F is highlighted in pink. A small red dot is positioned near the center of the left circle.

(Xem them [FG200809.bdf](#))

I.60) Bài toán Langley

Bài toán: Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Trên cạnh AB, AC lấy điểm D, E sao cho $\widehat{BCD} = 50^\circ, \widehat{CBE} = 60^\circ$. Tính $\widehat{BED}$?

Lời giải:



Đặt $\widehat{BED} = x$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $BF = BC$. Khi đó $\triangle BCF$ cân tại B

$\Rightarrow BF = BC$

Mặt khác $\triangle BCD$ cân tại B (do $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 50^\circ$)

$\Rightarrow BD = BC$

Suy ra $BF = BD$

Do đó $\triangle BDF$ đều ($\widehat{DBF} = 60^\circ$)

$\Rightarrow DF = BF$

Lại có $\triangle BFE$ cân tại F

$\Rightarrow EF = BF$

Ta suy ra $EF = DF$

$\Rightarrow \triangle DEF$ cân tại F

$$\Rightarrow (x + 40^\circ) = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2}$$

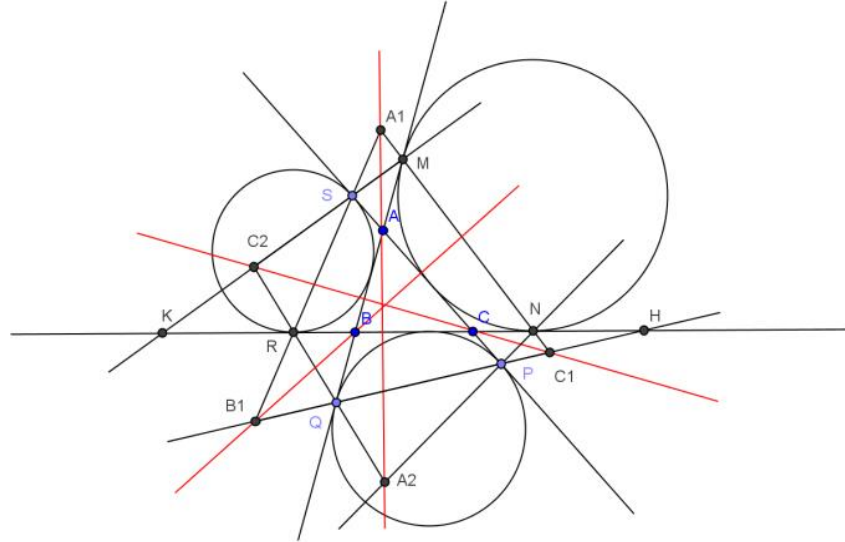
$$\Rightarrow x = 30^\circ$$

I.61) Định lý Paul Yiu về đường tròn bàng tiếp

Định lý: Cho $\triangle ABC$ các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tiếp xúc với 3 cạnh lần

lượt tại M, N, P, Q, R, S . Các đường thẳng qua MN, PQ, RS giao nhau tại A_1, B_1, C_1 . Các đường thẳng qua NP, QS, MS giao nhau tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng các bộ ba điểm $(A, A_1, A_2), (B, B_1, B_2), (C, C_1, C_2)$ thẳng hàng và các đường thẳng qua chúng đồng quy.

Chứng minh:



a) Gọi H, K là giao điểm của PQ và MS với BC .

Áp dụng định lí Menelaus cho bộ 3 điểm (C_2, R, Q) tương ứng với $\triangle MBK$ và bộ 3 điểm (Q, C_1, H) tương ứng với $\triangle BMN$ ta được:

$$\frac{QB}{QM} \cdot \frac{C_1M}{C_1N} \cdot \frac{HN}{HB} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{C_2K}{C_2M} \cdot \frac{QM}{QB} \cdot \frac{RB}{RK} = 1 \quad (2)$$

Nhân (1) và (2) cho ta:

$$\frac{C_1M}{C_1N} \cdot \frac{C_2K}{C_2M} \cdot \frac{RB}{RK} \cdot \frac{HN}{HB} = 1$$

Mặt khác

Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ABC$ với bộ 3 điểm (M, S, K) và (Q, P, H) ta được:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{KB}{KC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{HC}{HB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1 \quad (4)$$

Nhân (1) với (2) ta được:

$$\frac{KB}{KC} = \frac{HC}{HB}$$

$$\Rightarrow KB \cdot (HC + CB) = HC \cdot (KB + BC)$$

$$\Rightarrow HC = BK$$

$$\Rightarrow HB = CK$$

$$\Rightarrow HN = RK \quad (NC = BR)$$

Ta suy ra:

$$\Rightarrow \frac{\overline{C_2K}}{\overline{C_2M}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_1N}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{CK}} = 1$$

Vậy 3 điểm C, C_1, C_2 thẳng hàng

Các bộ 3 điểm còn lại chứng minh tương tự.

b) Chứng minh 3 đường thẳng đồng quy

Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của MN, RS với AC, AB

Như chứng minh ở trên ta có:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = \frac{(p-c)}{(p-b)}$$

tương tự với X, Y thì:

$$\frac{\overline{XC}}{\overline{XA}} = \frac{(p-a)}{(p-c)}$$

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \frac{(p-b)}{(p-a)}$$

Ta suy ra:

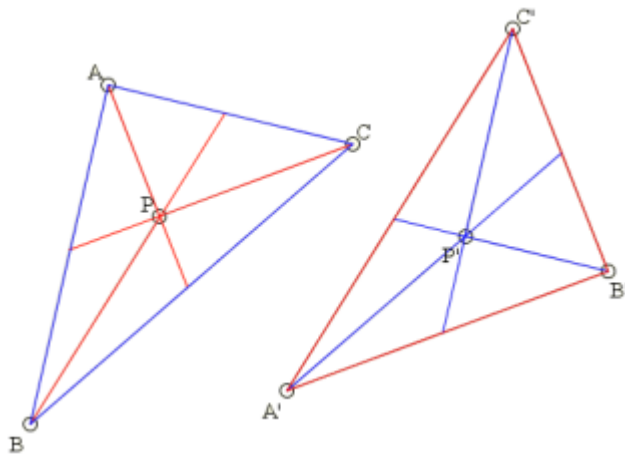
$$\frac{\overline{XC}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = 1$$

Do đó H, X, Y thẳng hàng

Mặt khác theo định lý Desargues thì các đường thẳng $(AA_1), (BB_1), (CC_1)$ đồng quy. Ta suy ra đpcm

I.62) Định lý Maxwell

Định lý: Cho $\triangle ABC$ và một điểm P , các cạnh của $\triangle A'B'C'$ song song với các đường thẳng đi qua một đỉnh $\triangle ABC$ và điểm P . Qua A', B', C' kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của $\triangle ABC$. Khi đó ta có các đường thẳng này đồng quy tại một điểm P' .



Chứng minh:

Dễ dàng c/m được các góc $\widehat{ABP} = \widehat{A'C'P'}$ và $\widehat{CBP} = \widehat{P'A'C'}$. Tương tự áp dụng định lý Ceva Sin ta có đpcm.

Projective Proof of Maxwell's Theorem

Maxwell's theorem links the sides and cevians in one triangle to the cevians and side lines in another:

Given two triangles ABC and MNP. Assume that the cevians in ΔABC parallel to the sides of ΔMNP are concurrent. Then the cevians in ΔMNP parallel to the sides of ΔABC are also concurrent.

Michel Cabart came up with a generalization that shows that Maxwell's theorem is of projective nature. The main tool is the projective reformulation of Ceva's theorem.



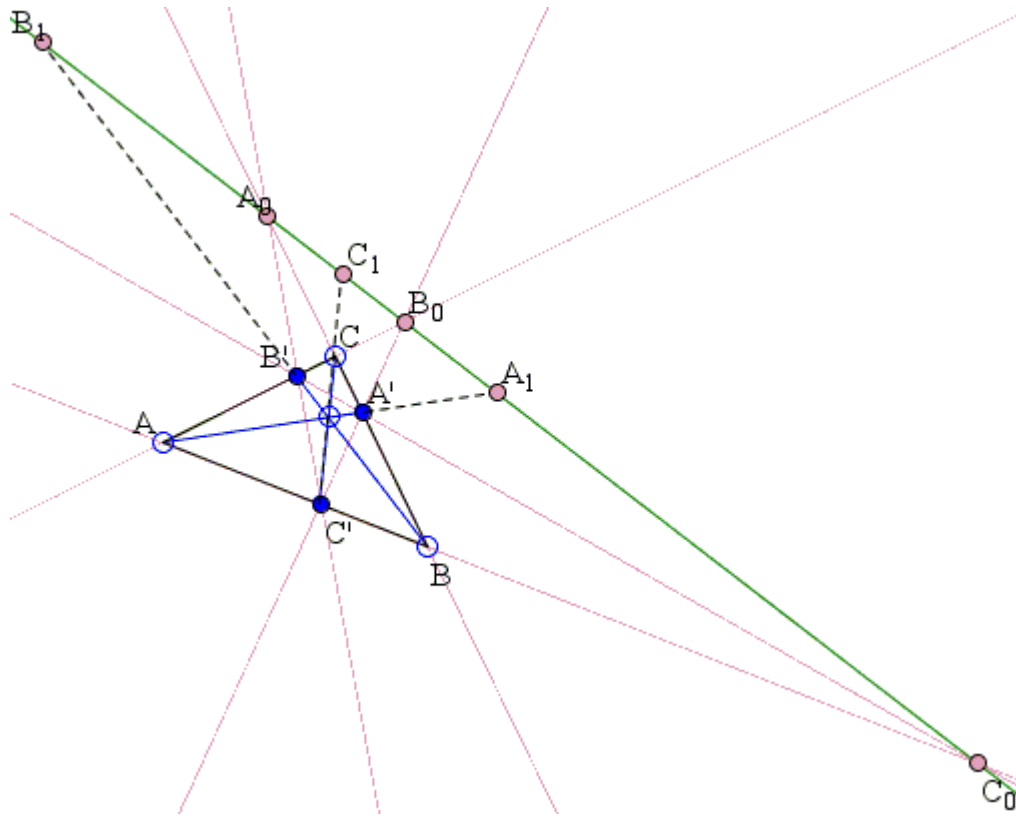
By Michel Cabart

9 May, 2008

Recollect the [projective formulation](#) of [Ceva's theorem](#): Given an arbitrary line L, the cevians in ΔABC concur iff

$$(1) \quad R = (CBA'A_0) \cdot (ACB'B_0) \cdot (BAC'C_0) = -1$$

where (WXYZ) denotes the [cross-ratio](#) $YW/YX : ZW/ZX$ and the points A', B', C', A₀, B₀, C₀ are defined as in the diagram below, where L is an arbitrary straight line.



In addition, let A_1, B_1, C_1 be the intersection with L of the cevians $AA', BB',$ and $CC'.$

Projection from A to the line L [send](#) the first quadruple in [\(1\)](#) onto $B_0, C_0, A_1, A_0:$

$$(CBA'A_0) = A(B_0C_0A_1A_0)$$

Similarly,

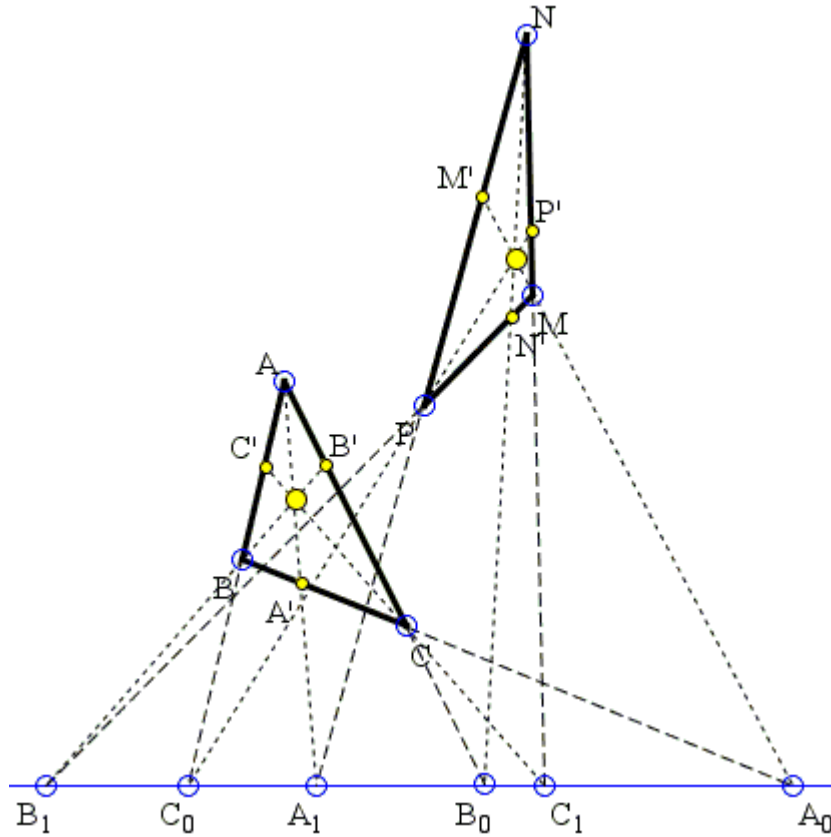
$$(ACB'B_0) = B(C_0A_0B_1B_0),$$

$$(BAC'C_0) = C(A_0B_0C_1C_0)$$

Thus the condition [\(1\)](#) can be written (cross-ratios being unchanged):

$$(2) \quad R = (A_0B_0C_1C_0) \cdot (B_0C_0A_1A_0) \cdot (C_0A_0B_1B_0) = -1$$

Proof of Maxwell's theorem



Assume there are two triangles ABC and MNP and two triples of points on L such that A_0 , B_0 , C_0 are intersections of L with sides of $\triangle ABC$ and also with cevians of $\triangle MNP$; A_1 , B_1 , C_1 are intersections of L with sides of $\triangle MNP$ and also with cevians of $\triangle ABC$.

For $\triangle ABC$, we calculate

$$R_0 = (A_0B_0C_1C_0) \cdot (B_0C_0A_1A_0) \cdot (C_0A_0B_1B_0).$$

For $\triangle MNP$, we calculate

$$R_1 = (A_1B_1C_0C_1) \cdot (B_1C_1A_0A_1) \cdot (A_1B_1C_0C_1)$$

We have the identity $R_0 \cdot R_1 = 1$ (as can be seen by developing cross-ratios). Hence $R_0 = -1$ iff $R_1 = -1$, or: the cevians in $\triangle ABC$ concur iff the cevians in $\triangle MNP$ concur. Choosing the infinite line as line L gives Maxwell's theorem as a particular case. The case where sides and cevians in $\triangle MNP$ are taken perpendicular (or in fact any angle) to $\triangle ABC$ is straightforward via an homography (in projective terms) or a rotation (in Euclidean terms).

Note: a [dynamic illustration](#) is available on a separate page.

Maxwell Theorem via the Center of Gravity

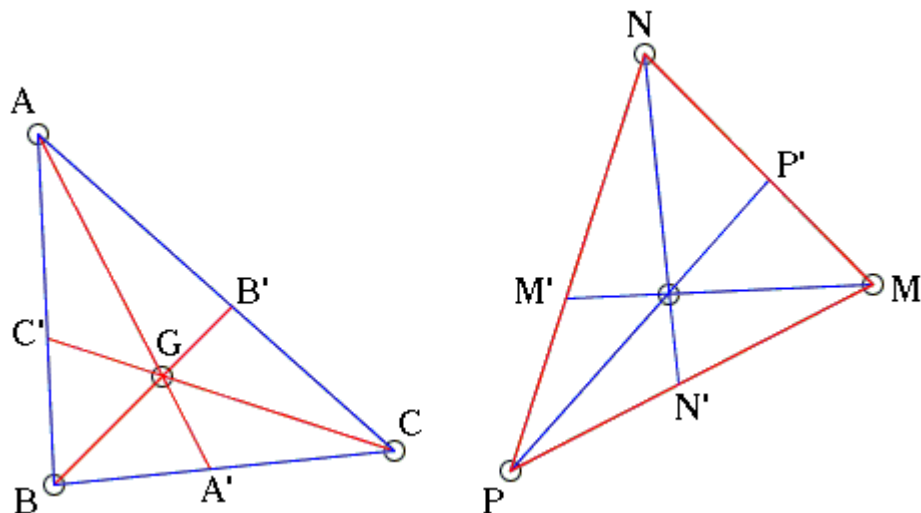
Michel Cabart

30 April, 2008

Below we offer a proof of [Maxwell's theorem](#) that is based on the notion of [barycenter](#).

Maxwell's theorem states the following fact:

Given $\triangle ABC$ and a point G , the sides of $\triangle MNP$ are parallel to the cevians in $\triangle ABC$ through G . Then the cevians in $\triangle MNP$ parallel to the sides of $\triangle ABC$ are concurrent.



Below, the vector joining point A to B will be written in bold, so that, for example, $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$.

In $\triangle ABC$ with A' , B' , C' on sides opposite the vertices A, B, and C, the fact that the [cevians](#) AA' , BB' , CC' concur in point G is equivalent to either of the two conditions:

There is a triple of real numbers (a, b, c) , unique up to a non-zero factor, such that

$$(1) \quad a\mathbf{GA} + b\mathbf{GB} + c\mathbf{GC} = 0$$

There is a triple of real numbers (a, b, c) , unique up to a non-zero factor, such that

$$\begin{aligned} A' &= Z(B, b; C, c) \\ (2) \quad B' &= Z(A, a; C, c) \\ C' &= Z(A, a; B, b), \end{aligned}$$

where $Z(X, x; Y, y)$ denotes the [barycenter](#) of two *material points* X and Y with masses x at X and y at Y .

Let's suppose lines AA' , BB' and CC' intersect.

Step 1: NP , PM , MN are parallel to GA , GB , GC means there exists x, y, z such that $NP = xGA$, $PM = yGB$, $MN = zGC$. As $NP + PM + MN = 0$, $xGA + yGB + zGC = 0$. A comparison with (1) shows that (x, y, z) is a multiple of (a, b, c) . We can assume $(x, y, z) = (a, b, c)$. Thus $NP = aGA$, $PM = bGB$, $MN = cGC$.

Step 2: MM' , NN' , PP' are parallel to BC , AC , AB meaning there is (m, n, p) such that $MM' = mBC$, $NN' = nAC$, $PP' = pAB$. The first equality yields

$$MM' = m(GC - GB) = (m/c)MN + (m/b)MP$$

so that

$$M' = Z(N, 1/c; P, 1/b) = Z(N, b; C, c)$$

by multiplying by bc . Similarly,

$$\begin{aligned} N' &= Z(M, a; P, c) \text{ and} \\ P' &= Z(M, a; N, b). \end{aligned}$$

This proves the theorem thanks to (2).

Maxwell's Theorem

The applet suggests the following theorem [[Prasolov](#), 11.48, [Pedoe](#), 6.1, 8.3, 28.4]:

Given $\triangle ABC$ and a point P , the sides of $\triangle A'B'C'$ are parallel to the

cevians in $\triangle ABC$ through P . Prove that the cevians in $\triangle A'B'C'$ parallel to the sides of $\triangle ABC$ are concurrent.

A similar statement is true if the lines are taken to be perpendicular, instead of parallel. Furthermore, the two are clearly equivalent. We'll prove the latter.

Triangles $A'B'C'$ with sides parallel to the given set of cevians are all similar. It therefore sufficient to establish the theorem for any one of those triangles. Consider the circumcenters O_A , O_B , and O_C , of triangles PBC , PAC , PAB , respectively. The circumcircles of triangles PBC and PAC share chord PC , so that $O_A O_B$ is perpendicular to PC . Similarly, $O_A O_C \perp PB$ and $O_B O_C \perp PA$, which means that $\triangle O_A O_B O_C$ is one of the family $A'B'C'$. The lines through its vertices perpendicular to the sides of $\triangle ABC$ are exactly the perpendicular bisectors of the latter, which are known to meet at a point.

Two triangles ABC and $A'B'C'$ are said to be *orthologic* if perpendiculars from A , B , C to $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ are concurrent. The point of concurrency is known as the *orthologic center* of $\triangle ABC$ with respect to $\triangle A'B'C'$. Maxwell's theorem justifies the symmetry of the definition: if the perpendiculars from the vertices of one of the triangle to the sides of the other are concurrent, then the perpendiculars from the vertices of the latter to the sides of the former are also concurrent. [As an example](#), in any triangle, the associated [medial](#) and [contact](#) triangles are orthologic.

We can use [complex variables](#) and the [real product](#) [Andreescu, 4.1] of complex numbers to easily establish the perpendicular case of Maxwell's theorem. For two complex numbers u and v define the real product as

$$u \cdot v = (uv^* + vu^*)/2,$$

where the asterisk denotes the complex conjugate. Assuming $u = u_1 + iu_2$ and $v = v_1 + iv_2$,

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

In other words, the real product of two complex numbers is exactly the [scalar product](#) of the 2D-vectors represented by these complex numbers. It follows that for four complex numbers u , U , v , V the lines joining them pairwise are perpendicular iff

$$(U - u) \cdot (V - v) = 0.$$

Assume now the complex coordinates of the vertices of triangles ABC and A'B'C' are a, b, c and a', b', c'. The perpendicular from A to B'C' has the equation

$$(1) \quad (z - a) \cdot (c' - b') = 0.$$

Similarly the perpendiculars from B and C are given by the equations

$$(2) \quad \begin{aligned} (z - b) \cdot (a' - c') &= 0 \text{ and} \\ (z - c) \cdot (b' - a') &= 0. \end{aligned}$$

Adding the three up eliminates z:

$$(3) \quad a \cdot (c' - b') + b \cdot (a' - c') + c \cdot (b' - a') = 0,$$

which is the condition for the perpendiculars from A, B, C to B'C', A'C', A'B' to be concurrent. Indeed, if (3) holds then, for any z,

$$(4) \quad (z - a) \cdot (c' - b') + (z - b) \cdot (a' - c') + (z - c) \cdot (b' - a') = 0.$$

Now let's see if we can choose z the right way. First, for any z on the perpendicular from a to b'c', the first term in (4) vanishes. The choice of z as the intersection of the perpendiculars from a and b, eliminates the first two terms, which makes the third term also 0.

Importantly, (3) can be regrouped into

$$(3') \quad a' \cdot (c - b) + b' \cdot (a - c) + c' \cdot (b - a) = 0,$$

in which the triangles switched the roles. (3') is the condition for the concurrency of the perpendiculars from A', B', C' onto the sides of triangle ABC. Q.E.D.



As an example, the [pedal triangle](#) of any point [is orthologic](#) to the base triangle. Also, [Gergonne and medial triangles](#) associated with the given one are orthologic.

Remark 1

The theorem bears name of [James Clerk Maxwell](#), a famous physicist. His proof is different from anything above yet beautifully simple. He drew 4 pairwise intersecting circles centered at A, B, C and P. Taken by three, the circles define 4 [radical centers](#). Let A' be the radical center of the circle centered at B, C, P. B', C', P' are defined cyclically. Then, say, A' and P' lie on the common chord of the circles B and C, which makes A'P' perpendicular to BC, etc.

Remark 2

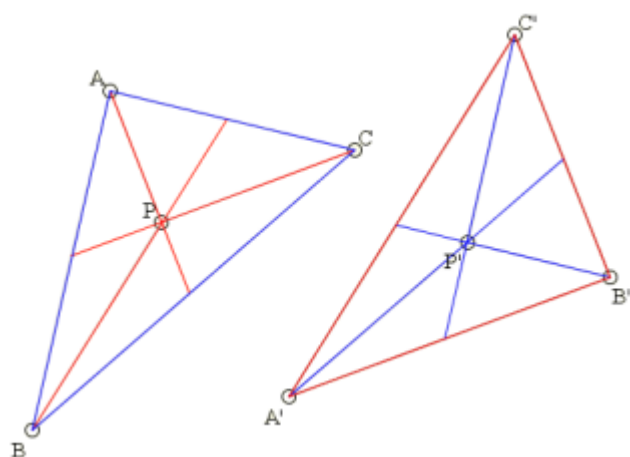
There is [another proof](#) of Maxwell's theorem based on the notion of [barycenter](#) and [another one](#) of a generalization that shows surprisingly the projective nature of the theorem.

References

1. T. Andreescu, D. Andrica, [Complex Numbers From A to ... Z](#), Birkhäuser, 2006
2. D. Pedoe, [Geometry: A Comprehensive Course](#), Dover, 1970
3. V. V. Prasolov, *Problems in Planimetry*, v 1, Nauka, Moscow, 1986 (Russian)

I.62) Định lí Maxwell

Định lí: Cho $\triangle ABC$ và một điểm P, các cạnh của $\triangle A'B'C'$ song song với các đường thẳng đi qua một đỉnh $\triangle ABC$ và điểm P. Qua A', B', C' kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của $\triangle ABC$. Khi đó ta có các đường thẳng này đồng quy tại một điểm P' .



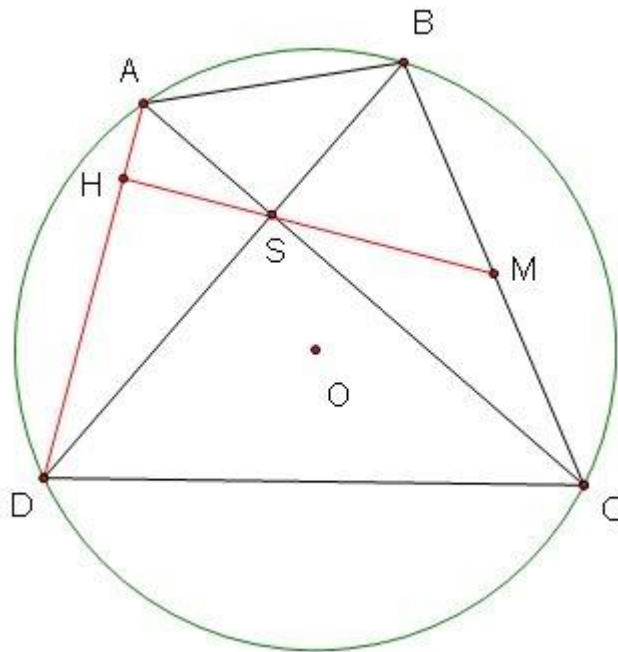
Chứng minh:

Dễ dàng c/m được các góc $\widehat{ABP} = \widehat{A'C'P'}$ và $\widehat{CBP} = \widehat{P'A'C'}$. Tương tự áp dụng định lí Ceva Sin ta có đpcm.

I.63) Định lí Brahmagupta về tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc.

Định lí: Cho tứ giác nội tiếp ABCD có AC vuông góc với BD tại S. Khi đó đoạn nối trung điểm một cạnh với S sẽ vuông góc với cạnh đối diện.

Chứng minh:



Ta chứng minh đại diện, chẳng hạn gọi M là trung điểm BC ta cần chứng minh MS vuông góc với AD.

Thật vậy, MS cắt AD ở H.

Ta có: $\widehat{BSC} = 90^\circ$, M là trung điểm BC nên $MS = MC$.

Do đó:

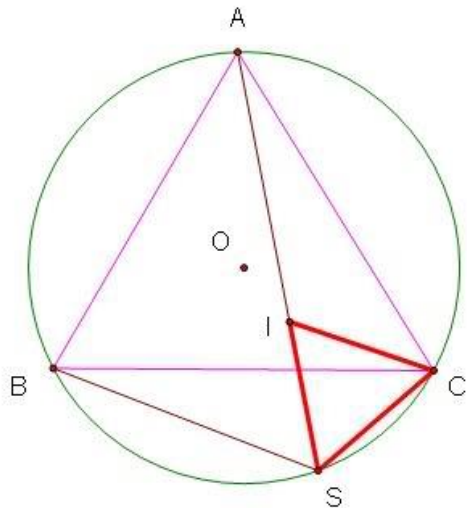
$$(\widehat{DA}, \widehat{DB}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv (\widehat{SC}, \widehat{SM}) \equiv (\widehat{SA}, \widehat{SH}) \pmod{\pi}$$

Để $\Rightarrow$ dpcm

I.64) Định lí Schooten

Định lí: Cho tam giác đều ABC nhận (O) là đường tròn ngoại tiếp. Khi đó với mọi điểm S nằm trên (O) thì một trong 3 đoạn SA, SB, SC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại.

Chứng minh:



Không giảm tổng quát ,giả sử S thuộc cung BC nhỏ.

Ta sẽ chứng minh $SA = SB + SC$. Thật vậy:

Gọi I là một điểm trên đoạn SA sao cho $SI = SC$.

Đến đây công việc của chúng ta là chứng minh $AI = SB$ (*) mà điều này thì khá đơn giản ,chỉ cần để ý một chút:

Để thấy tam giác SIC đều nên $\widehat{CI} = \widehat{CS}$ (1)

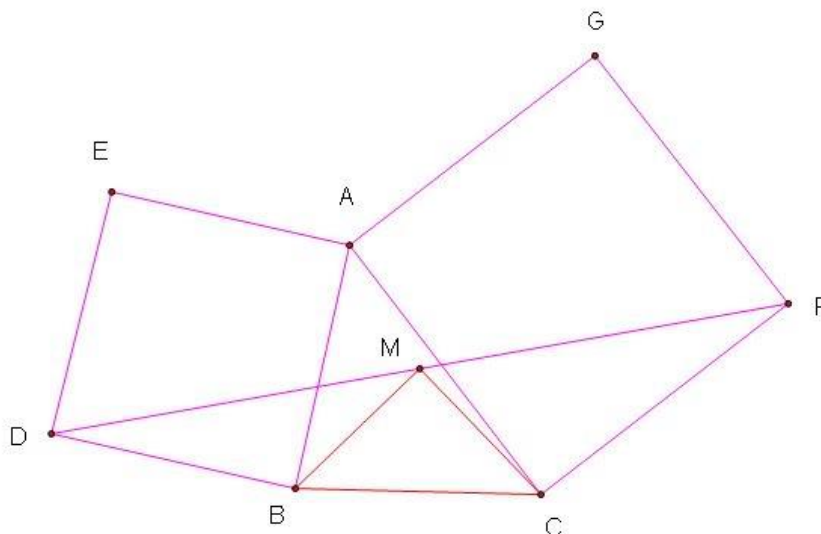
Mà: $CA = CB$ (2) và $\widehat{ACI} = \widehat{ACS} - \widehat{ICS} = \widehat{ACS} - 60^\circ = \widehat{ACS} - \widehat{ACB} = \widehat{BCS}$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta dễ suy ra (*)

I.65) Định lí Bottema

Định lí: Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai hình vuông ABDE, ACFG. Gọi M là trung điểm DF. Thế thì Vị trí điểm M không phụ thuộc vào vị trí điểm A và tam giác MBC vuông cân tại M.

Chứng minh:



Chúng ta sẽ chứng minh ý hai bởi từ điều đó cũng suy ra ngay ý một.

Vậy công việc của chúng ta là chứng minh tam giác MBC vuông cân tại M.

Bài này có nhiều cách giải, ở đây ma 29 xin trình bày bằng pp phép biến hình 🤔

Kí hiệu: R_S^α là chỉ phép quay tâm S góc quay α , giả sử chiều dương là ngược chiều kim đồng hồ.

Ta thấy:

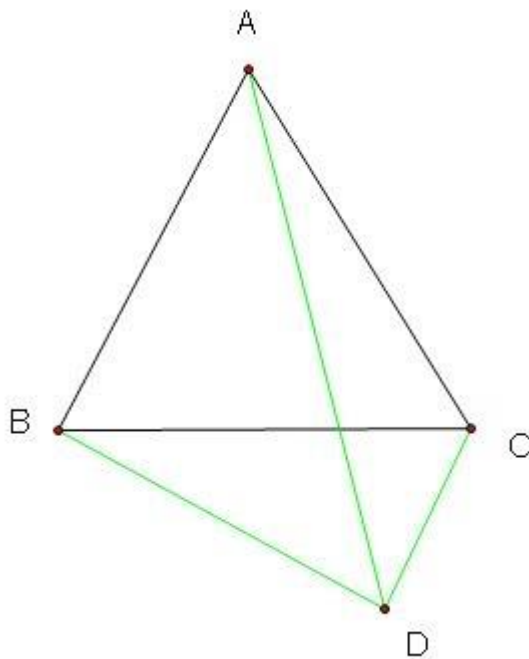
$$R_C^{90^\circ}: F \rightarrow A; R_B^{90^\circ}: A \rightarrow D \\ \Rightarrow F = R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ}: F \rightarrow D$$

Mà F là phép quay với góc quay $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tâm phép quay này chính là M . Dựa vào cách xác định tâm của tích hai phép quay ta dễ có đpcm

I.66) Định lí Pompeiu

Định lí; Cho tam giác ABC đều, và một điểm D trên mặt phẳng tam giác. Khi đó luôn tồn tại một tam giác với độ dài các cạnh là DA, DB, DC.

Chứng minh:



Chúng ta sẽ dùng bất đẳng thức Ptolemy (Xem mục I.10) để giải quyết bài này

một cách cực kì nhanh gọn! 🤔

Bây giờ, theo nguyên lí khởi đầu cực trị trong ba đoạn DA, DB, DC sẽ có một đoạn có độ dài lớn nhất.

Không giảm tổng quát, giả sử đó là DA.

Đến đây ta chỉ cần chứng minh $DB + DC \geq DA$ (\$) là xong.

Kí hiệu a là độ dài cạnh tam giác đều ABC

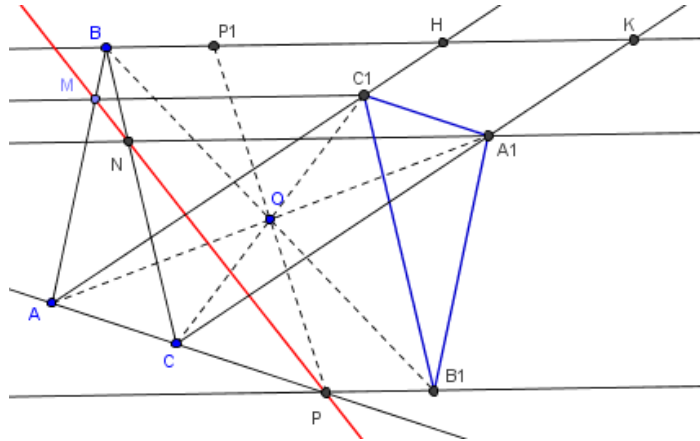
Sử dụng bất đẳng thức Ptolemy ta có:

$$DB \cdot AC + DC \cdot AB \geq DA \cdot BC \Rightarrow a \cdot DB + a \cdot DC \geq a \cdot DA$$

Đến đây thì thấy tiền (\$) rồi

I.67) Định lí Zaslavsky

Định lí: Cho tam giác ABC và điểm O . Tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng tâm O . Từ A_1, B_1, C_1 kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt BC, CA, AB tại N, P, M . Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.



Chứng minh:

Từ B kẻ đường thẳng song song với C_1M cắt AC_1, CA_1, A_1C_1 tại H, K, P_1 .

Vì $(BK), (A_1C_1)$ là ảnh của $(B_1P), (AC)$ qua phép đối xứng tâm O

nên P_1 là ảnh của P qua phép đối xứng tâm O

suy ra $\overrightarrow{P_1C_1} = -\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{P_1A_1} = -\overrightarrow{PA}$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{MB}{MA} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} \\ &= \frac{C_1H}{C_1A} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{A_1C}{A_1K} \\ &= \frac{C_1H}{A_1K} \cdot \frac{PA}{PC} \\ &= \frac{P_1C_1}{P_1A_1} \cdot \frac{PA}{PC} = 1 \end{aligned}$$

Ta suy ra dpcm