

**SỞ GD VÀ ĐT HÀ TĨNH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN**

THI THỬ L1 THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2017-2018

MÔN: TOÁN
(Thời gian làm bài 90 phút)

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Mã đề thi 209

Câu 1: [2D1-1] Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{-x+2}$ có phương trình lần lượt là

A. $x=1; y=2$.

B. $x=2; y=1$.

C. $x=2; y=\frac{1}{2}$.

D. $x=2; y=-1$.

Câu 2: [2D4-1] Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là

A. $1+2i$.

B. $-1-2i$.

C. $2-i$.

D. $-1+2i$.

Câu 3: [2D2-1] Phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 4: [2D3-1] Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e-1$.

B. $\frac{1}{e}-1$.

C. $\frac{e-1}{e}$.

D. $\frac{1}{e}$.

Câu 5: [2H3-1] Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

A. $y+z=0$.

B. $z=0$.

C. $x=0$.

D. $y=0$.

Câu 6: [2H2-1] Một mặt cầu có diện tích 16π thì bán kính mặt cầu bằng

A. 2.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 4.

Câu 7: [2D1-1] Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2+2$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 8: [2H1-1] Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ này bằng

A. $2a^3$.

B. a^3 .

C. $3a^3$.

D. $6a^3$.

Câu 9: [2D1-1] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 1)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. **D. $(-2; 0)$.**

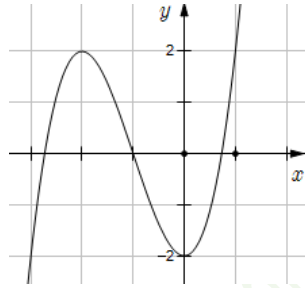
Câu 10: [2D3-1] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

- A. $S = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$. B. $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$. **C. $S = \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.** D. $S = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

Câu 11: [2H3-1] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z+1=0$. Vector nào sau đây không là vector pháp tuyến của mặt phẳng α ?

- A. $\vec{n}_4(4; 2; -2)$. B. $\vec{n}_2(-2; -1; 1)$. **C. $\vec{n}_3(2; 1; 1)$.** D. $\vec{n}_1(2; 1; -1)$.

Câu 12: [2D1-1] Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$ **B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.** C. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Câu 13: [2D3-1] Họ nguyên hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

- A. $\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số).** B. $-\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số).
C. $\sin 3x + C$ (C là hằng số). D. $-\sin 3x + C$ (C là hằng số).

Câu 14: [2H3-2] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(-3; 0; -1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $x - y + z - 3 = 0$. **B. $2x + y + 1 = 0$.** C. $x - y + z + 3 = 0$. D. $2x + y - 1 = 0$.

Câu 15: [1D4-1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. **D. $-\frac{1}{2}$.**

Câu 16: [1D2-1] Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.** B. $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$.
C. $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$. D. $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Câu 17: [2D2-1] Hàm số $y = \log_3(3-2x)$ có tập xác định là

- A. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.** C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $\emptyset$.

Câu 18: [2D4-2] Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm của phương trình $2z^2 + 6z + 5 = 0$ trong đó z_2 có phần ảo âm. Phần thực và phần ảo của số phức $z_1 + 3z_2$ lần lượt là

- A. $-6; 1$. B. $-1; -6$. **C. $-6; -1$.** D. $6; 1$.

Câu 19. [2H2-2] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$; V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 20. [2D3-3] Biết $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

- A. 13. B. 5. C. 4. D. 10.

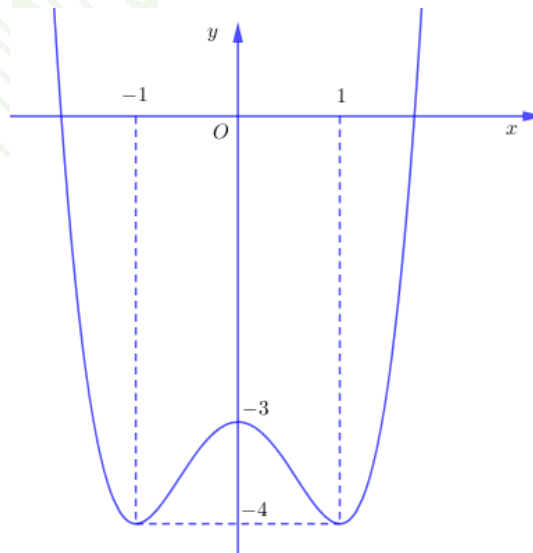
Câu 21: [2H3-3] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3; 2; 0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

- A. $(-1; 0; 4)$. B. $(7; 1; -1)$. C. $(2; 1; -2)$. D. $(0; 2; -5)$.

Câu 22: [2H3-2] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Oz và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có phương trình là

- A. $x + y = 0$. B. $x + 2y = 0$. C. $x - y = 0$. D. $x + y - 1 = 0$.

Câu 23: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.



- A. $2021 \leq m \leq 2022$. B. $2021 < m < 2022$. C. $\begin{cases} m \geq 2022 \\ m \leq 2021 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 2022 \\ m < 2021 \end{cases}$.

Câu 24: [2D1-2] Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3; 5]$. Khi đó $M - m$ bằng

A. $\frac{7}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3}{8}$.

Câu 25: [1D5-2] Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ có hệ số góc bằng

A. -4.

B. $\frac{47}{12}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $-\frac{17}{4}$.

Câu 26: [2H1-3] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: [1H3-2] Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $ADC = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60° .

B. 75° .

C. 30° .

D. 45° .

Câu 28: [1H3-3] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{165}}{30}$.

B. $\frac{a\sqrt{165}}{45}$.

C. $\frac{a\sqrt{165}}{15}$.

D. $\frac{2a\sqrt{165}}{15}$.

Câu 29: [1D2-2] Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số $1, 2, 3, 4, \dots, 9$. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số chẵn.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{5}{18}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{13}{18}$.

Câu 30: [2H3-3] Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(1; 0; -1)$, $C(2; -1; 2)$. Điểm D thuộc tia Oz sao cho độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ có tọa độ là

A. $(0; 0; 1)$.

B. $(0; 0; 3)$.

C. $(0; 0; 2)$.

D. $(0; 0; 4)$.

Câu 31: [2D1-2] Cho hàm số $y = x - \ln(1+x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 32: [1D2-3] Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A. $n = 10$.

B. $n = 5$.

C. $n = 9$.

D. $n = 11$.

Lời giải

Câu 33: [2D1-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1.

B. 5.

C. 0.

D. 4.

- Câu 34. [2D3-3]** Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Tính $P = a - 3b$.
- A. $P = -3$. B. $P = -2$. C. $P = -4$. D. $P = -1$.
- Câu 35. [1D3-2]** Cho 4 số thực a, b, c, d là 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Biết tổng của chúng bằng 4 và tổng các bình phương của chúng bằng 24. Tính $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.
- A. $P = 64$. B. $P = 80$. C. $P = 16$. D. $P = 79$.
- Câu 36. [1D1-3]** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 37. [2D3-3]** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng
- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{6\pi}{5}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{5\pi}{6}$.
- Câu 38. [2H1-3]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , mặt phẳng (SAG) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối tứ diện $ACGS$ bằng
- A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.
- Câu 39. [2D2-3]** Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?
- A. 35. B. 36. C. 34. D. 33.
- Câu 40. [2D2-2]** Ông A đầu tư 150 triệu đồng vào một công ti với lãi 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm số tiền lãi ông A rút về gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này ông A không rút tiền ra và lãi không thay đổi?
- A. 54.073.000 đồng. B. 54.074.000 đồng. C. 70.398.000 đồng. D. 70.399.000 đồng.
- Câu 41. [2D1-3]** Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $m^2 \in (5; 7)$. B. $m^2 \in (3; 5)$. C. $m^2 \in (1; 3)$. D. $m^2 \in (0; 1)$.
- Câu 42. [2H2-3]** Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.
- A. $P = 6$. B. $P = 0$. C. $P = 3$. D. $P = 9$.
- Câu 43. [2D4-3]** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 10$. Tính $P = a - b$.
- A. $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 44: [1H3-3] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Câu 45: [2D4-3] Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\bar{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.

- A. $\sqrt{13}-3$. B. $\sqrt{17}-3$. C. $\sqrt{17}+3$. D. $\sqrt{13}+3$.

Câu 46: [2D3-3] Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

- A. $y=2x+2$. B. $y=4x-6$. C. $y=2x-6$. D. $y=4x-2$.

Câu 47: [1D2-3] Trong một lớp có n học sinh gồm ba bạn Chuyên, Hà, Tĩnh cùng $n-3$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Hà bằng trung bình cộng số ghế của Chuyên và số ghế của Tĩnh là $\frac{13}{675}$. Khi đó n thỏa mãn

- A. $n \in [35; 39]$. B. $n \in [40; 45]$. C. $n \in [30; 34]$. D. $n \in [25; 29]$.

Câu 48: [2H3-3] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$

- A. $P=4$. B. $P=0$. C. $P=2$. D. $P=5$.

Câu 49: [2D3-4] Biết $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$.

- A. $P=8$. B. $P=10$. C. $P=6$. D. $P=12$.

Câu 50: [2D1-4] Cho phương trình:

$$\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	D	C	C	A	B	D	D	C	C	B	A	B	D	A	B	C	D	A	A	A	B	B	D

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	C	D	B	D	B	B	A	A	C	D	A	C	D	C	D	A	C	B	D	D	D	A	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: [2D1-1] Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{-x+2}$ có phương trình lần lượt là

A. $x = 1; y = 2$.

B. $x = 2; y = 1$.

C. $x = 2; y = \frac{1}{2}$.

D. $x = 2; y = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng là $x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang là $y = 1$

Câu 2: [2D4-1] Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

A. $1 + 2i$.

B. $-1 - 2i$.

C. $2 - i$.

D. $-1 + 2i$.

Lời giải

Chọn A.

Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là $\bar{z} = 1 + 2i$.

Câu 3: [2D2-1] Phương trình $2^{2x^2+5x+4} = 4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $2^{2x^2+5x+4} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $-\frac{5}{2}$.

Câu 4: [2D3-1] Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e - 1$.

B. $\frac{1}{e} - 1$.

C. $\frac{e-1}{e}$.

D. $\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{e-1}{e}.$

Câu 5: [2H3-1] Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

- A. $y + z = 0.$ B. $z = 0.$ C. $x = 0.$ D. $y = 0.$

Lời giải

Chọn C.

Mặt phẳng (Oyz) qua gốc tọa độ O và nhận vector $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0.$

Câu 6: [2H2-1] Một mặt cầu có diện tích 16π thì bán kính mặt cầu bằng

- A. 2. B. $4\sqrt{2}.$ C. $2\sqrt{2}.$ D. 4.

Lời giải

Chọn A.

Diện tích mặt cầu bán kính R là $S = 4\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 2.$

Câu 7: [2D1-1] Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-

Vậy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 8: [2H1-1] Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $3a^2$, độ dài cạnh bên bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ này bằng

- A. $2a^3.$ B. $a^3.$ C. $3a^3.$ D. $6a^3.$

Lời giải

Chọn D.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = 3a^2.2a = 6a^3.$

Câu 9: [2D1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 1)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào BBT.

Câu 10. [2D3-1] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$, đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

- A. $S = \int_0^{\pi} \cos x \, dx$. B. $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$. C. $S = \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$. D. $S = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

Lời giải

Chọn C.

Lý thuyết.

Câu 11: [2H3-1] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 1 = 0$. Vector nào sau đây không là vector pháp tuyến của mặt phẳng α ?

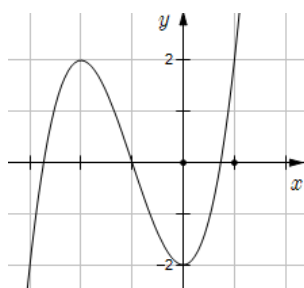
- A. $\vec{n}_4(4; 2; -2)$. B. $\vec{n}_2(-2; -1; 1)$. C. $\vec{n}_3(2; 1; 1)$. D. $\vec{n}_1(2; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn C.

Mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 1 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1(2; 1; -1)$, mà $\vec{n}_2(-2; -1; 1) = -\vec{n}_1$, $\vec{n}_4(4; 2; -2) = 2\vec{n}_1$ nên $\vec{n}_2$ và $\vec{n}_4$ cũng là các vector pháp tuyến của mặt phẳng α .

Câu 12: [2D1-1] Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$ B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$ C. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$ D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta có:

Đồ thị trong hình là của hàm số bậc 3, có hệ số $a > 0$.

Đồ thị hàm số đạt cực trị tại các điểm $A(-2; 2); B(0; -2)$.

Vậy chọn đáp án **B**.

Câu 13: [2D3-1] Họ nguyên hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

A. $\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số).

B. $-\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số).

C. $\sin 3x + C$ (C là hằng số).

D. $-\sin 3x + C$ (C là hằng số).

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

Câu 14: [2H3-2] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$ và $B(-3; 0; -1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x - y + z - 3 = 0$.

B. $2x + y + 1 = 0$.

C. $x - y + z + 3 = 0$.

D. $2x + y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B.

Trung điểm của đoạn AB là $M(-1; 1; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 0)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của AB .

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là $2(x+1) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 0$.

Câu 15: [1D4-1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0 .

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}-1}{2+\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$.

Câu 16: [1D2-1] Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

B. $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$.

C. $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$.

D. $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Vì A, B là hai biến cố xung khắc nên $A \cap B = \emptyset$. Từ đó suy ra $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Câu 17: [2D2-1] Hàm số $y = \log_3(3-2x)$ có tập xác định là

A. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

D. $\square$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y = \log_3(3-2x)$ xác định khi và chỉ khi $3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 18. [2D4-2] Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm của phương trình $2z^2 + 6z + 5 = 0$ trong đó z_2 có phần ảo âm. Phần thực và phần ảo của số phức $z_1 + 3z_2$ lần lượt là

A. $-6; 1$.

B. $-1; -6$.

C. $-6; -1$.

D. $6; 1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $2z^2 + 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$. Suy ra $z_1 + 3z_2 = -6 - i$

Vậy Phần thực và phần ảo của số phức $z_1 + 3z_2$ lần lượt là $-6; -1$.

Câu 19. [2H2-2] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$; V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khi đó

Ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{12}$; $V_2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{4}$ suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 20. [2D3-3] Biết $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A. 13.

B. 5.

C. 4.

D. 10.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x = t - 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow t = 1 \\ x = 1 \Leftrightarrow t = 2 \end{cases}$

Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{2(t-1)^2 + 3(t-1) + 3}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{2t^2 - t + 2}{t^2} dt = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(2t - \ln t - \frac{2}{t} \right) \Big|_1^2 = 3 - \ln 2.$$

Suy ra $P = 3^2 + 2^2 = 13$.

Câu 21: [2H3-3] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3; 2; 0)$.

Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

- A.** $(-1; 0; 4)$. **B.** $(7; 1; -1)$. **C.** $(2; 1; -2)$. **D.** $(0; 2; -5)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình của mặt phẳng (P) là: $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d , khi đó $H = d \cap (P)$

Suy ra $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$, mặt khác $H \in (P) \Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0 \Rightarrow t=2$. Vậy $H(1; 1; 2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d , khi đó H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-1; 0; 4)$.

Câu 22: [2H3-2] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Oz và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có phương trình là

- A.** $x + y = 0$. **B.** $x + 2y = 0$. **C.** $x - y = 0$. **D.** $x + y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn A.

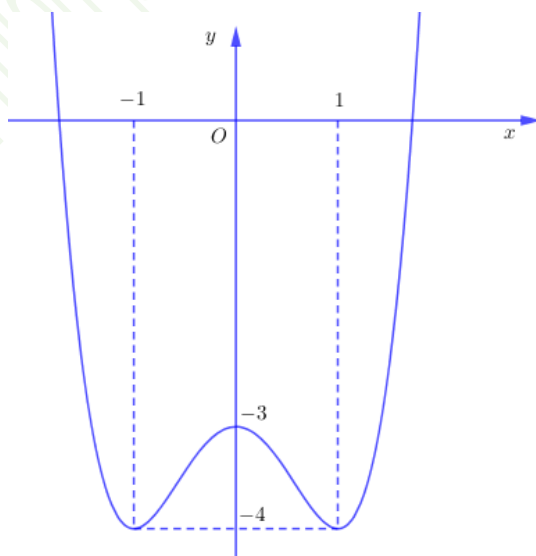
Mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 2)$

Trên trục Oz có vec tơ đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Mặt phẳng chứa trục Oz và vuông góc với mặt phẳng (α) là mặt phẳng qua O và nhận

$[\vec{n}_\alpha; \vec{k}] = (-1; -1; 0)$ làm vec tơ pháp tuyến. Do đó có phương trình $-x - y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$.

Câu 23: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.



A. $2021 \leq m \leq 2022$.

B. $2021 < m < 2022$.

C. $\begin{cases} m \geq 2022 \\ m \leq 2021 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m > 2022 \\ m < 2021 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = 2018 - m$ (d vuông góc với Oy).

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì d cắt (C) tại 4 điểm phân biệt $-4 < 2018 - m < -3 \Leftrightarrow 2021 < m < 2022$.

Câu 24: [2D1-2] Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3; 5]$. Khi đó $M - m$ bằng

A. $\frac{7}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in [3; 5]$ do đó:

$$M = \max_{[3; 5]} f(x) = f(3) = 2; m = \min_{[3; 5]} f(x) = f(5) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } M - m = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 25: [1D5-2] Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ có hệ số góc bằng

A. -4 .

B. $\frac{47}{12}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $-\frac{17}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2x - 1$. Suy ra $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}$.

Câu 26: [2H1-3] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

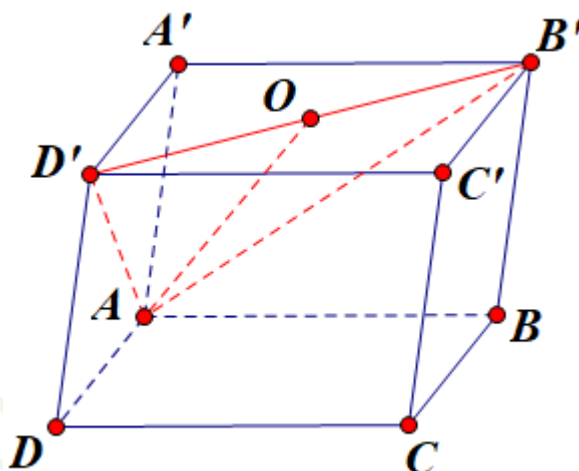
B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên tam giác $AB'D'$ là tam giác đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$ là $AO = \frac{(a\sqrt{2})\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 27: [1H3-2] Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\angle ADC = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

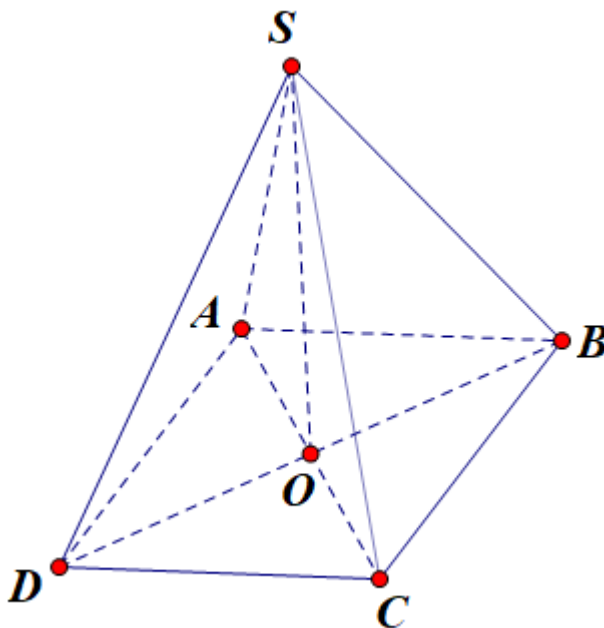
A. 60° .

B. 75° .

C. 30° . D. 45° .

Lời giải

Chọn C.



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\angle ADC = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều và

$$OD = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là SDO và $\tan SDO = \frac{SO}{DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra

$$SDO = 30^\circ.$$

Câu 28: [1H3-3] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{165}}{30}$.

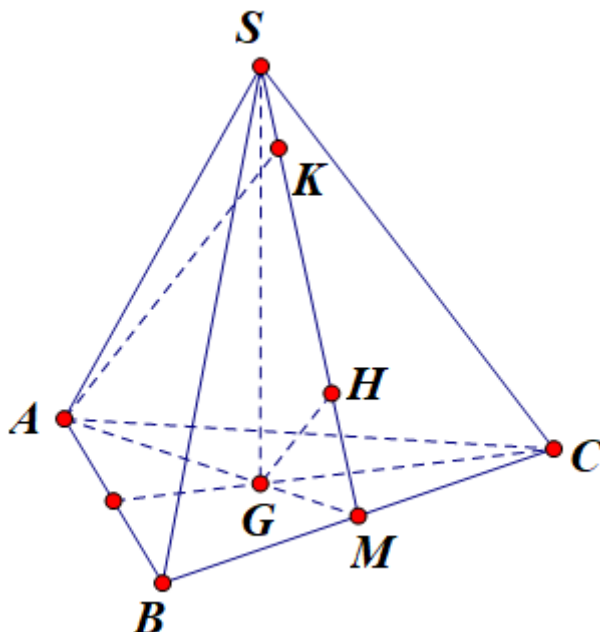
B. $\frac{a\sqrt{165}}{45}$.

C. $\frac{a\sqrt{165}}{15}$.

D. $\frac{2a\sqrt{165}}{15}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Do hình chóp $S.ABC$ đều nên
 $SO \perp (ABC)$

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}; \quad GM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$d(A, (SBC)) = 3d(G, (SBC)) = \frac{3SG \cdot GM}{\sqrt{SG^2 + GM^2}} = \frac{a\sqrt{165}}{15}.$$

Câu 29: [1D2-2] Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số $1, 2, 3, 4, \dots, 9$. Rút ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số chẵn.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{5}{18}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn D.

Có bốn thẻ chẵn $\{2; 4; 6; 8\}$ và 5 thẻ lẻ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Rút ngẫu nhiên hai thẻ, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^2 = 36$

Gọi A là biến cố “tích nhận được là số chẵn”, số phần tử của biến cố A là

$$n(A) = C_4^2 + C_4^1 \cdot C_5^1 = 26$$

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

Câu 30: [2H3-3] Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(1; 0; -1)$, $C(2; -1; 2)$. Điểm D

thuộc tia Oz sao cho độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ có

tọa độ là

A. $(0; 0; 1)$.

B. $(0; 0; 3)$.

C. $(0; 0; 2)$.

D. $(0; 0; 4)$.

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $B(1;0;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-10; -4; 2) = -2(5; 2; -1).$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $5x + 2y - z - 6 = 0$.

Độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh $D(0;0;d)$ của tứ diện $ABCD$ bằng $d(D, (ABC))$.

$$\text{Theo bài ra ta có } \frac{|-d-6|}{\sqrt{25+4+1}} = \frac{3\sqrt{30}}{10} \Leftrightarrow |-d-6| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -15 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Do D thuộc tia Oz nên $D(0;0;3)$.

Câu 31. [2D1-2] Cho hàm số $y = x - \ln(1+x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = (-1; +\infty)$

$$\text{Ta có: } y = x - \ln(1+x) \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x+1}, y' = 0 \Rightarrow x = 0.$$

x	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 32. [1D2-3] Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

- A. $n=10$. B. $n=5$. C. $n=9$. D. $n=11$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$0 = (1-1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + \dots - C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\text{Suy ra } 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}) = 2^{2n+1} \Rightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$$

$$\text{Do đó } 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow n = 5.$$

Câu 33. [2D1-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 1. B. 5. C. 0. D. 4.

Lời giải

Chọn B.

$$y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x \Rightarrow y' = 2m-3 + (3m+1)\sin x.$$

$$\text{Hàm số } y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow (3m+1)\sin x \geq 3-2m \quad (1) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

+ Với $m = -\frac{1}{3}$ ta có (1) $\Leftrightarrow 0 \cdot \sin x \geq 3 + \frac{2}{3}$ (vô lý). Do đó $m = -\frac{1}{3}$ không thỏa mãn.

+ Với $m > -\frac{1}{3}$ ta có (1) $\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{3-2m}{1+3m}$ luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-2m}{1+3m} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{4+m}{1+3m} \leq 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{4+m}{1+3m} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m < -\frac{1}{3}.$$

+ Với $m < -\frac{1}{3}$ ta có (1) $\Leftrightarrow \sin x \leq \frac{3-2m}{1+3m}$ luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-2m}{1+3m} \geq 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{2-5m}{1+3m} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \leq \frac{2}{5}.$$

Mặt khác $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; -1; -2; -3; -4\}$

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn bài ra.

Câu 34. [2D3-3] Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Tính $P = a - 3b$.

A. $P = -3$.

B. $P = -2$.

C. $P = -4$.

D. $P = -1$.

Lời giải

Chọn A.

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}.$$

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{2} \Big|_0^m - \int_0^m e^{2x} dx = \frac{(2m-1)e^{2m}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^m = me^m - e^{2m} + 1$$

$$I < m \Leftrightarrow me^{2m} - e^{2m} + 1 < m \Leftrightarrow (m-1)(e^{2m}-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Suy ra $a = 0, b = 1 \Rightarrow a - 3b = -3$.

Câu 35. [1D3-2] Cho 4 số thực a, b, c, d là 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Biết tổng của chúng bằng 4 và tổng các bình phương của chúng bằng 24. Tính $P = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

A. $P = 64$.

B. $P = 80$.

C. $P = 16$.

D. $P = 79$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} a+d = b+c \\ a+b+c+d = 4 \end{cases} \Rightarrow a+d = b+c = 2.$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= (a+d)^2 + (b+c)^2 - 2(ad+bc) \\ \Rightarrow ad+bc &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a+d)^2 - (b+c)^2 = -8. \\ P &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (a+d)(a^2 - ad + d^2) + (b+c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ad - bc) = 64. \end{aligned}$$

- Câu 36. [1D1-3]** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. **C. 0.** D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0)$.

Ta có $I(m; 2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x - y = 0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

- Câu 37. [2D3-3]** Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng
- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{6\pi}{5}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. **D. $\frac{5\pi}{6}$.**

Lời giải

Chọn D.

Hình phẳng đã cho được chia làm 2 phần sau:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

Khi quay trục Ox phần 1 ta được khối tròn xoay có thể tích $V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Phần 2 : Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Khi quay trục Ox phần 2 ta được khối tròn xoay có thể tích

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \cdot \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 38. [2H1-3] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , mặt phẳng (SAG) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối tứ diện $ACGS$ bằng

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

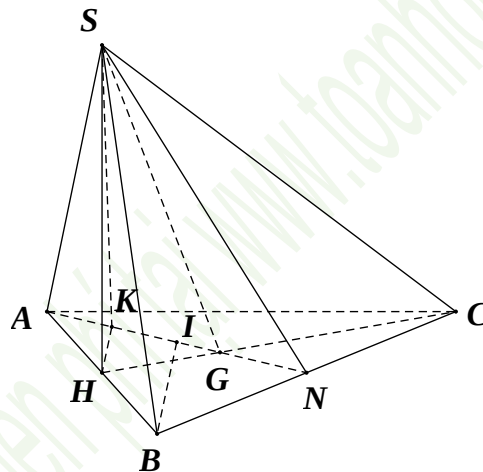
B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = a^2 \Rightarrow S_{\triangle ACG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{3}$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi N là trung điểm của BC , I là trung điểm của AN và K là trung điểm của AI .

Ta có $AB = BN = a \Rightarrow BI \perp AN \Rightarrow HK \perp AN$.

Do $AG \perp (SHK)$ nên góc giữa (SAG) và đáy là $SKH = 60^\circ$.

Ta có: $BI = \frac{1}{2} AN = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HK = \frac{1}{2} BI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $SH = SK \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $V = V_{ACGS} = V_{S.ACG} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ACG} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

Câu 39. [2D2-3] Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?

A. 35.

B. 36.

C. 34.

D. 33.

Lời giải

Chọn C.

$$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 + m > 0 \\ \log_7 [7(x^2 + 2x + 2)] > \log_7 (x^2 + 6x + 5 + m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 6x - 5 \\ 6x^2 + 8x + 9 > m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \max_{(1;3)} f(x) \\ m < \min_{(1;3)} g(x) \end{cases}, \text{ với } f(x) = -x^2 - 6x - 5; g(x) = 6x^2 + 8x + 9$$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

○ $f'(x) = -2x - 6 < 0, \forall x \in (1; 3) \Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$

$$\Rightarrow \max_{(1;3)} f(x) = f(1) = -12$$

○ $g'(x) = 12x + 8 > 0, \forall x \in (1; 3) \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; 3)$

$$\Rightarrow \min_{(1;3)} g(x) = g(1) = 23$$

Khi đó $-12 < m < 23$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-11; -10; \dots; 22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. [2D2-2] Ông A đầu tư 150 triệu đồng vào một công ti với lãi 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm số tiền lãi ông A rút về gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này ông A không rút tiền ra và lãi không thay đổi?

A. 54.073.000 đồng. B. 54.074.000 đồng. C. 70.398.000 đồng. D. 70.399.000 đồng.

Lời giải

Chọn D.

Sau một năm số tiền gốc lẫn lãi của ông A là: $150 + 150.8\% = 150(1 + 8\%)$ triệu.

Sau hai năm số tiền gốc lẫn lãi của ông A là: $150(1 + 8\%)(1 + 8\%) = 150(1 + 8\%)^2$ triệu.

...

Sau năm năm số tiền gốc lẫn lãi của ông A là: $150(1 + 8\%)^5$ triệu.

Số tiền lãi ông A rút về là: $150.(1 + 8\%)^5 - 150 \approx 70,399...$ triệu.

Vậy số tiền lãi ông A rút về sau 5 năm gần với số tiền 70.399.000 đồng.

Câu 41. [2D1-3] Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2 \in (5; 7)$. B. $m^2 \in (3; 5)$. C. $m^2 \in (1; 3)$. D. $m^2 \in (0; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

$$y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$-\frac{41}{4}$	-10	$-\frac{41}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = m^2 \geq 0$ luôn phía trên trục hoành. Nên nó luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B .

Gọi $A(\sqrt{a}; m^2)$ và $B(-\sqrt{a}; m^2)$ là giao điểm của hai đồ thị đã cho, với $a > 0$

Ta có

$$O \in (C) \Leftrightarrow a^2 - a - 10 = m^2 \quad (1)$$

$$O \text{ Tam giác } OAB \text{ cân tại } O \text{ nên tam giác } OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^4 = a \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow m^8 - m^4 - m^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - t - 10 = 0$, với $t = m^2 > 0$.

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 3t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2 \in (1; 3).$$

Câu 42. [2H2-3] Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

A. $P = 6$.

B. $P = 0$.

C. $P = 3$.

D. $P = 9$.

Lời giải

Chọn D.

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên

$$d(I, (Oyz)) = d(I, (Ozx)) = d(I, (Oxy)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases}$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a = -b = c$ thì phương trình $AI = d(I, (Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a = -b = c$ thì $I(a; -a; a)$

$$AI = d(I, (Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó $P = a - b + c = 9$.

Câu 43: [2D4-3] Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 10$. Tính

$P = a - b$.

A. $P = 4$.

B. $P = -4$.

C. $P = -2$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z \cdot \bar{z} = 10$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = 5 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 5 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 5 \\ (2b+5)^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases} \text{ (loại). Vậy } P = 4.$$

Câu 44: [1H3-3] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

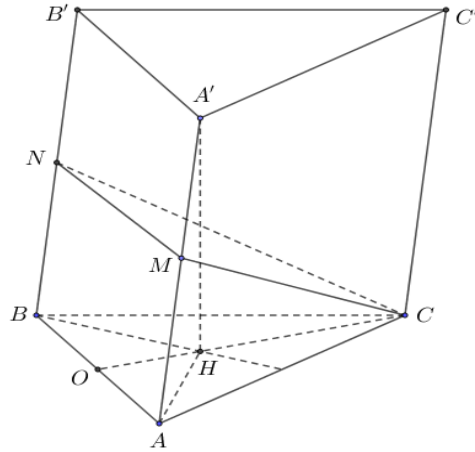
B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi O là trung điểm của AB . Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right), B\left(-\frac{1}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right), A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có $\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\vec{n}_1 = (0;0;1)$.

$$M \text{ là trung điểm } AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right), N \text{ là trung điểm } BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\overline{MN} = (-1;0;0), \overline{CM} = \left(\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow (CMN) \text{ có vtpt } \vec{n}_2 = \left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0;2\sqrt{2};5)$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Câu 45: [2D4-3] Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\bar{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.

A. $\sqrt{13}-3$.

B. $\sqrt{17}-3$.

C. $\sqrt{17}+3$.

D. $\sqrt{13}+3$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+iy$ thì M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=1$.

$N(x';y')$ biểu diễn số phức $w=x'+iy'$ thì N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;-3)$, bán kính $R_2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$ chính là giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Ta có $\overline{I_1I_2} = (1;-4) \Rightarrow I_1I_2 = \sqrt{17} > R_1+R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

$$\Rightarrow MN_{\min} = I_1I_2 - R_1 - R_2 = \sqrt{17}-3$$

Câu 46. [2D3-3] Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

A. $y=2x+2$.

B. $y=4x-6$.

C. $y=2x-6$.

D. $y=4x-2$.

Lời giải

Chọn D.

Từ $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ (*), cho $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ f(0) + 2f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2$

Lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được $4f'(2x) - 2f'(1-2x) = 24x$, cho $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$ ta được

$$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 4.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x=1$ là

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x - 2.$$

Câu 47. [1D2-3] Trong một lớp có n học sinh gồm ba bạn Chuyên, Hà, Tĩnh cùng $n-3$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý các học sinh này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n mỗi học sinh ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Hà bằng trung bình cộng số ghế của Chuyên và số ghế của Tĩnh là $\frac{13}{675}$. Khi đó n thỏa mãn

A. $n \in [35; 39]$. **B.** $n \in [40; 45]$. **C.** $n \in [30; 34]$. **D.** $n \in [25; 29]$.

Lời giải

Chọn D.

Số cách xếp n học sinh vào n ghế là $n!$, do đó $n(\Omega) = n!$

Gọi A là biến cố xếp các bạn học sinh sao cho số ghế của Hà bằng trung bình cộng số ghế của Chuyên và số ghế của Tĩnh.

* Nếu n là số lẻ:

Chọn ba số trong n số để ba số đó lập thành cấp số cộng: có $n-2 + n-4 + \dots + 1 = \frac{(n-1)^2}{4}$.

Xếp ba bạn Chuyên, Hà, Tĩnh vào ba ghế có ba số đã chọn thỏa bài toán: có 2 cách.

Xếp $n-3$ bạn còn lại vào ghế: có $(n-3)!$ cách.

$$\text{Do đó số phần tử của } A \text{ là } n(A) = \frac{2 \cdot \frac{(n-1)^2}{4} \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{n-1}{2n(n-2)}.$$

$$\text{Theo đề ta có } \frac{n-1}{2n(n-2)} = \frac{13}{675} \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n = 27$$

* Nếu n là số chẵn:

Chọn ba số trong n số để ba số đó lập thành cấp số cộng: có $n-2 + n-4 + \dots + 2 = \frac{n(n-2)}{4}$.

Xếp ba bạn Chuyên, Hà, Tĩnh vào ba ghế có ba số đã chọn thỏa bài toán: có 2 cách.

Xếp $n-3$ bạn còn lại vào ghế: có $(n-3)!$ cách.

$$\text{Do đó số phần tử của } A \text{ là } n(A) = \frac{2 \cdot \frac{n(n-2)}{4} \cdot (n-3)!}{n!} = \frac{1}{2(n-1)}.$$

$$\text{Theo đề ta có } \frac{1}{2(n-1)} = \frac{13}{675} \text{ (vô nghiệm trên } \mathbb{N} \text{)}.$$

Vậy lớp có 27 học sinh.

- Câu 48. [2H3-3]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$
- A.** $P=4$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi I là trung điểm của AB , suy ra $I(1;1;1)$; $\overline{AB}=(4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của $AB: (\alpha): 2x+y-3=0$.

Vì $(2.3+1.2-3).(2.5+1.3-3)=50>0$ nên B, C nằm về một phía so với (α) , suy ra A, C nằm về hai phía so với (α) .

Điểm M thỏa mãn $MA=MB$ khi $M \in (\alpha)$. Khi đó $MB+MC=MA+MC \geq AC$.

$MB+MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M=AC \cap (\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AC: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=1+2t \end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=1+2t \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}. \text{ Do đó } M(1;1;3), a+b+c=5.$$

- Câu 49: [2D3-4]** Biết $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$.

- A.** $P=8$. **B.** $P=10$. **C.** $P=6$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn A.

Xét tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x=0$ thì $t=\pi$.

Khi $x=\pi$ thì $t=0$.

Ta có $I = -\int_{\pi}^0 \frac{(\pi-t) \sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t) + \cos^{2018}(\pi-t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x) \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx - I.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

Xét tích phân $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 0$.

Khi $x = \pi$ thì $u = \frac{\pi}{2}$.

Nên $J = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - u \right)}{\sin^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) + \cos^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - u \right)} du = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Vì hàm số $f(x) = \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Như vậy $a = 2$, $b = 4$. Do đó $P = 2a + b = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.

Câu 50: [2D1-4] Cho phương trình:

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}.$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3} \right)$?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} &= 3\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} \\ \Leftrightarrow \sin x(1 + 2 \sin^2 x) &= 2(2 \cos^3 x + m + 2)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} + \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3 x + \sin x = 2\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right)^3 + \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bởi vậy:

$$(1) \Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m + 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m + 2} \quad (2)$$

Với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ thì

$$(2) \Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m + 2$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x - 1 = m \quad (3)$$

Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m \quad (4)$

Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$. Do đó,

để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4)

có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 - 1$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	-1	$-\frac{28}{27}$	-1	-4	

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ khi và chỉ khi

$$-4 \leq m < -\frac{28}{27}.$$

Hay, các giá trị nguyên của m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ là:

$$\{-4; -3; -2\}.$$