



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2017
Số 477

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự: (04) 35121606

Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com Website: <http://www.nxbgd.vn/toanhocuoitre>

ĐỊNH LÝ VAN DER WAERDEN VỀ CẤP SỐ CỘNG

Giả sử k và l là các số tự nhiên tùy ý. Khi đó tồn tại một số tự nhiên $n(k, l)$ sao cho với việc phân chia một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có độ dài $n(k, l)$ theo phương pháp tùy ý thành k lớp (trong số các lớp đó có thể có lớp rỗng) thì có ít nhất một trong số các lớp đó ta luôn tìm được một cấp số cộng có độ dài l .



NHỚ NGƯỜI THẦY VỚI NHỮNG Ý TƯỞNG SÂU SẮC VỀ GIÁO DỤC

NGUYỄN VIỆT HẢI

(Nguyên Trưởng ban Biên tập Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*)

GS.TSKH *Nguyễn Cảnh Toàn*, nguyên Tổng biên tập Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* đã từ trần ngày 8.2.2017, hưởng thọ 92 tuổi. Thầy đã đi xa nhưng những kỉ ức, hình ảnh về người thầy nhiệt huyết với khoa học, với giáo dục, với thể hệ trẻ yêu toán vẫn còn in đậm mãi trong tâm trí các học trò.

Lần đầu tiên tôi được tiếp xúc với Thầy là ở giảng đường Trường ĐHSP Hà Nội năm 1961, thời đó Thầy đang làm Chủ nhiệm Khoa Toán. Thầy thuyết trình môn *Cơ sở hình học* như đã thuộc lòng, viết và biên đối công thức mà không cần giáo án, giọng Thầy vang xa, rõ ràng, mạch lạc. Quyển sách *Cơ sở hình học* của Thầy đã giúp chúng tôi lần đầu hiểu rõ hơn về Tiên đề đường thẳng song song, về Hình học Euclid và phi Euclid,...

Năm 1964 trong hoàn cảnh máy bay Mỹ ném bom miền Bắc, mọi thứ đều khan hiếm, đặc biệt là sách báo, thì tờ báo *Toán học và Tuổi trẻ* do thầy *Nguyễn Cảnh Toàn* làm Tổng biên tập, ra số đầu tiên (tháng 10.1964) là tài liệu quý đối với giáo viên toán. Những bài viết mở rộng hơn toán học phổ thông của Thầy *Toàn* và các nhà toán học khác trên báo *Toán* là cánh cửa mở ra cho giáo viên toán chúng tôi tiếp cận với bao kiến thức mới, giúp nâng cao hiệu quả giảng dạy. Từ năm 1992 tôi được nhiều lần làm việc cùng với thầy *Toàn* khi ở Hội đồng biên tập Tạp chí TH&TT, và sau đó từ năm 1998 khi tôi về làm việc thường xuyên ở Tạp chí TH&TT.

Tôi đã học hỏi thầy *Toàn* nhiều điều đáng quý, trước hết là tinh thần say mê toán, say sưa làm việc. Thầy đã công bố 8 bài báo về Hình học trên các tạp chí toán có uy tín quốc tế của Việt Nam và Hungari. Thầy đã viết hoặc chủ biên 26 cuốn sách và khoảng 650 bài báo về giáo dục, quyền Trùng

tập các công trình toán học và giáo dục của *Nguyễn Cảnh Toàn* dày 900 trang.

Thầy làm việc không ngừng đến khi mất mờ chân chậm ở tuổi ngoài tám mươi. Thầy quan tâm nhiều nhất đến việc đổi mới



GS. *Nguyễn Cảnh Toàn* (1926 - 2017)

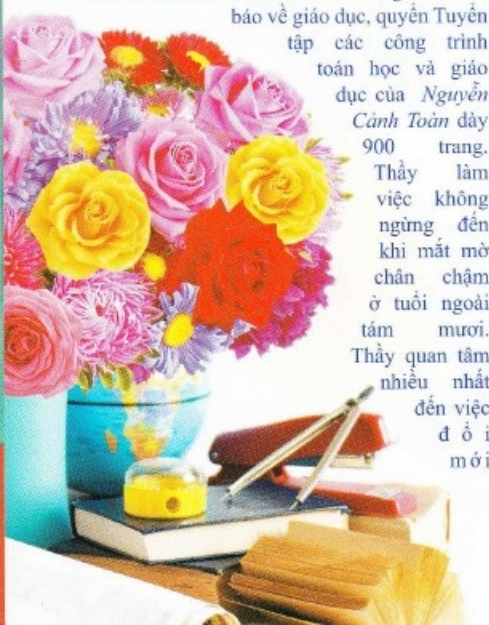
phương pháp dạy và học trong và ngoài nhà trường. Qua báo TH&TT và báo chí, hoặc trên cương vị là người quản lí giáo dục (Hiệu trưởng Trường ĐHSP Hà Nội, Thứ trưởng Bộ Giáo dục) Thầy phát động phong trào tự học, tự nghiên cứu không chỉ cho giáo viên mà cả học sinh. Thầy yêu cầu học sinh tự mò mẫm, dự đoán, nhìn các khái niệm toán học dưới các góc độ khác nhau, nâng cao năng lực phát hiện vấn đề. Thầy *Toàn* đã tổng kết thành 5 cách học: *Học mọi nơi, Học mọi lúc, Học mọi người, Học bằng mọi cách, Học qua mọi nội dung*.

Bản thân Thầy là một điển hình của người tự học, tự nghiên cứu mà thành tài trong điều kiện những năm 1954 - 1970 thiếu thầy, thiếu tài liệu. GS. *Lê Văn Thiêm* kể lại: "*Hồi ở Pháp, tôi cũng nghĩ như anh, cứ tưởng phải đọc thiên kinh vạn quyển rồi mới nghiên cứu được. Nhưng rồi, ông thầy tôi bảo rằng, nếu bỏ anh chờ tìm hiểu hết con gái trên đời mới lấy vợ thì chẳng bao giờ sinh ra anh*". Nghe GS. *Thiêm* nói vậy, thầy *Toàn* lại yên tâm miệt mài với các đề tài nghiên cứu của mình trong thư viện nghèo nàn, ... để rồi ông gửi báo cáo sang Liên Xô, là một trong hai người Việt Nam đầu tiên bảo vệ thành công luận án Phó tiến sĩ Toán - Lý vào tháng 6.1958 với đề tài *Các đường và mặt bậc hai trong không gian elliptic*. Tiếp tục tự nghiên cứu thầy *Toàn* lại bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ Toán - Lý vào năm 1963 (các học vị Phó tiến sĩ, Tiến sĩ sau năm 1998 theo Luật GD được gọi tương ứng là Tiến sĩ, Tiến sĩ khoa học) với đề tài *Lý thuyết đối hợp bộ n*. Đến năm 1969 không gian trong đề tài này đã được khái quát hóa thành *Các không gian có cái tuyệt đối di động*, sau đổi tên là *Hình học siêu phi Euclid* (Sách *Ultra non Euclidian Geometry*, tác giả *Nguyễn Cảnh Toàn*, được xuất bản năm 1999, dày 270 trang).

Thầy *Toàn* luôn trăn trở và phát động phong

trào cải tiến phương pháp dạy học theo hướng biến quá trình đào tạo thành quá trình tự đào tạo. Thầy cho rằng: Thầy giáo không hẳn quyết định chất lượng giáo dục, mà sự nỗ lực cố gắng của người học mới quyết định chất lượng giáo dục. Thầy viết: "*Trao cho người khác kiến thức thì không bằng trao cho họ cách tìm ra kiến thức*", "*Người thầy dở là người chỉ đem lại kiến thức cho học trò, người thầy giỏi là người biết đem đến cho họ cách tự tìm ra kiến thức*". Những năm 1960 - 1970 trong điều kiện nước ta có quá ít người có học vị Tiến sĩ (chỉ bảo vệ luận án ở nước ngoài) thầy *Nguyễn Cảnh Toàn*, Hiệu trưởng Trường ĐHSP Hà Nội (1966 - 1976), đã tổ chức nhiều hội thảo khoa học, động viên các đồng nghiệp nghiên cứu, và đề xuất cho phép bảo vệ luận án Tiến sĩ trong nước. Đến tháng 4 năm 1970 ba giảng viên Khoa Sinh Trường ĐHSP Hà Nội đã bảo vệ thành công luận án Phó tiến sĩ đầu tiên ở Việt Nam. Trên cương vị Thứ trưởng Bộ Giáo dục (1976 - 1989), GS. *Nguyễn Cảnh Toàn* đã đề nghị và xây dựng phương pháp giáo dục từ xa nhằm kịp thời đào tạo cán bộ, giáo viên cho ngành giáo dục. Thầy mong muốn xây dựng một "xã hội học tập", đồng thời với việc thanh tra, kiểm tra chất lượng của các trung tâm đào tạo để tránh việc học chạy theo thành tích, học không thực chất mà chỉ nhằm lấy bằng cấp để có địa vị xã hội. Là Tổng biên tập của Tạp chí TH&TT hơn 40 năm, từ số báo đầu tiên đến số 336, sau đó tiếp tục làm Cố vấn khoa học cho Tạp chí, Thầy *Toàn* thường chỉ đạo, nhắc nhở các cán bộ Tòa soạn luôn đòi hỏi để nội dung Tạp chí phong phú, hình thức trình bày đẹp, hấp dẫn hơn. Thầy *Toàn* đề xuất mục *Tiếng Anh qua các bài toán*, mong muốn có sự giao lưu với các tạp chí toán sơ cấp của nước ngoài, giới thiệu Tạp chí TH&TT với các nước. Trải qua hơn 50 năm, Tạp chí TH&TT đã được Đảng và Nhà nước tặng thưởng nhiều danh hiệu cao quý: Nhiều *Bằng khen* của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT và của Thủ tướng Chính phủ, hai *Huân chương Lao động hạng Nhì* năm 1984, 1995, *Huân chương Lao động hạng Nhất* năm 2004, trong đó có công lao đóng góp to lớn của GS. *Nguyễn Cảnh Toàn*.

Bây giờ Thầy đã đi xa, vài nét nêu trên chưa thể nói hết những đóng góp, những công lao của Thầy, nhiều điều đã làm được theo ý tưởng của Thầy và còn nhiều điều chưa thực hiện được, nhưng những lời dặn dò của Thầy về sự phát triển của Tạp chí TH&TT, những quan điểm sâu sắc của Thầy về đổi mới phương pháp dạy và học, về giáo dục vẫn còn giữ mãi trong tâm khảm bao học trò của Thầy, các thế hệ sau sẽ phải cố gắng tiếp bước trên con đường Thầy đã khai phá, mở mang.





TRUNG HỌC CƠ SỞ

Ta thấy phương trình đa biến khi giải trên tập số thực thực thì rất khó có thể giải được, đôi khi ta bế tắc, nhưng sự kì diệu là với các phương trình đa biến đó trên tập số nguyên thì ta lại dễ dàng giải được. Nguyên lí kẹp là một công cụ hữu hiệu để giải phương trình nghiệm nguyên.

1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Cho $x, y, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó ta có:

- $x < y < x + 2 \Rightarrow y = x + 1$.
- $x^n < y^n < (x + 2)^n \Rightarrow y^n = (x + 1)^n$.
- $x(x + 1) < y(y + 1) < (x + 2)(x + 3) \Rightarrow y = x + 1$.

2. NHẬN DẠNG BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Những phương trình nghiệm nguyên đa biến và đồng bậc hoặc có thể đưa về đồng bậc thì có thể áp dụng nguyên lí kẹp để giải.

Sau đây là những ví dụ minh họa.

3. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^4 - y^4 = 3y^2 + 1 \quad (1)$$

Lời giải. PT (1) $\Leftrightarrow x^4 = y^4 + 3y^2 + 1$

$$\Leftrightarrow (x^2)^2 = (y^2)^2 + 3y^2 + 1.$$

- Xét hiệu: $x^4 - (y^2 + 1)^2$

$$= y^4 + 3y^2 + 1 - y^4 - 2y^2 - 1 = y^2 \geq 0 \quad (2)$$

- Xét hiệu: $(y^2 + 2)^2 - x^4$

$$= y^4 + 4y^2 + 4 - y^4 - 3y^2 - 1 = y^2 + 3 > 0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $(y^2 + 1)^2 \leq x^4 < (y^2 + 2)^2$,

kết hợp với $x, y \in \mathbb{Z}$ ta được $x^4 = (y^2 + 1)^2$.

Khi đó ta có phương trình: $(y^2 + 1)^2 = y^4 + 3y^2 + 1$

$$\Leftrightarrow y^4 + 2y^2 + 1 = y^4 + 3y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Vậy nghiệm (x, y) của phương trình là:

$$(1; 0) \text{ và } (-1; 0).$$

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0 \quad (*).$$

Lời giải. PT (*) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 10 = y^2 - y$

$$= y(y - 1) > x^2(x^2 + 1) \quad (1)$$

Xét hiệu: $(x^2 + 3)(x^2 + 4) - y(y - 1)$

$$= 6x^2 + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y(y - 1) < (x^2 + 3)(x^2 + 4) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$x^2(x^2 + 1) < y(y - 1) < (x^2 + 3)(x^2 + 4),$$

kết hợp với $x, y \in \mathbb{Z}$ ta được:

$$\begin{cases} (y - 1)y = (x^2 + 2)(x^2 + 1) \\ (y - 1)y = (x^2 + 2)(x^2 + 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 + 10 = x^4 + 3x^2 + 2 \\ x^4 + x^2 + 10 = x^4 + 5x^2 + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

- Với $x = \pm 2$ thì $y = 6$ hoặc $y = -5$.

- Với $x = \pm 1$ thì $y = 4$ hoặc $y = -3$.

Vậy nghiệm (x, y) của PT(*) là:

$$(\pm 2; 6); (\pm 2; -5); (\pm 1; 4); (\pm 1; -3).$$

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$y^3 = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Lời giải. Ta thấy $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x$ mà

$$y^3 = x^3 + x^2 + x + 1 \text{ suy ra } x^3 < y^3 \quad (1)$$

Xét hiệu $(x + 2)^3 - y^3 = 5x^2 + 11x + 7$

$$= 5 \left[\left(x + \frac{11}{10} \right)^2 + \frac{19}{100} \right] > 0, \quad \forall x$$

$$\Rightarrow (x+2)^3 > y^3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x^3 < y^3 < (x+2)^3$, mà x, y là các số nguyên nên suy ra $y = x+1$. Từ đó ta có:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)^3$$

ta thu được $x = 0, y = 1$ hoặc $x = -1, y = 0$.

Vậy nghiệm (x, y) là: $(0; 1); (-1; 0)$.

Bài 4. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^4.$$

Lời giải. Khai triển và rút gọn phương trình ta thu được: $8x^3 + 8x = y^4$. Ta xét các trường hợp đối với x :

- TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = 0$.

- TH2: Nếu $x \geq 1$ thì $8x^3 + 8x > 8x^3$

$$\text{hay } y^4 > (2x)^3.$$

Xét hiệu: $(2x+1)^3 - y^3 = 12x^2 - 2x + 1 > 0$ với mọi $x \geq 1$, suy ra: $y^3 < (2x+1)^3$.

Vậy $(2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ mà x, y là các số nguyên nên không tồn tại y .

- TH3: Nếu $x \leq -1$ thì đánh giá hoàn toàn tương tự ta thu được:

$$(2x-1)^3 < y^3 < (2x)^3$$

ta cũng suy ra không tồn tại y .

Vậy $(x, y) = (0; 0)$.

Bài 5. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

Lời giải. $(*) \Leftrightarrow x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = y^4$

$$\Leftrightarrow (x^2 + z^2)^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = y^4 = (y^2)^2$$

$$\Rightarrow y^4 > (x^2 + z^2)^2 \quad (1)$$

Xét hiệu: $(x^2 + z^2 + 2)^2 - y^4 = x^2 + 3 > 0, \forall x$

$$\Rightarrow y^4 < (x^2 + z^2 + 2)^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $(x^2 + z^2)^2 < y^4 < (x^2 + z^2 + 2)^2$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + z^2 + 1.$$

Từ $(*)$ ta có:

$$x^2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow x = 0, z = 0 \text{ và } y = \pm 1.$$

Vậy nghiệm (x, y, z) của PT $(*)$ là:

$$(0, 1, 0); (0, -1, 0).$$

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Lời giải

- Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 1$.

- Nếu $x \neq 0$ thì PT đã cho tương đương với

$$4y^2 = 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 > (2x^2 + x)^2 \quad (1)$$

Ta lại có: $4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

$$= (2x^2 + x + 2)^2 - 5x^2$$

$$\Rightarrow 4y^2 < (2x^2 + x + 2)^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$(2x^2 + x)^2 < 4y^2 < (2x^2 + x + 2)^2$$

$$\Rightarrow 4y^2 = (2x^2 + x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = 4x^4 + x^2 + 1 + 4x^3 + 4x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3.$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Với $x = 3 \Rightarrow y = \pm 11$.

Nghiệm của phương trình là: $(-1, \pm 1), (3, \pm 11)$.

Bài 7. Chứng minh với $x \in \mathbb{Z}^+$, không tồn tại

$k \in \mathbb{Z}$ để $x(x+1) = k(k+2)$.

Lời giải. Giả sử tồn tại $x \in \mathbb{Z}^+$ và $k \in \mathbb{Z}$ mà $x(x+1) = k(k+2)$ (1). Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x = k^2 + 2k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = k^2 + 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = (k+1)^2.$$

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}^+$ nên

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > x^2 \\ x^2 + x + 1 < (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow k+1 \in \emptyset.$$

Do đó điều giả sử là sai. Suy ra đpcm.

Bài 8. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $x^4 - x^3 + 1$ là số chính phương.

Lời giải. Giả sử $x^4 - x^3 + 1 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$) $(*)$.

- Nếu $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1$ (đúng).

- Nếu $x = -1 \Rightarrow y^2 = 3$ (sai).

- Nếu $x = 1 \Rightarrow y^2 = 1$ (đúng).

- Nếu $x \geq 2$ từ (*) có: $4y^2 = 4x^4 - 4x^3 + 4$

$$\Rightarrow (2x^2 - x - 1)^2 < (2y^2)^2 < (2x^2 - x + 1)^2$$

$$\Rightarrow (2y^2)^2 = (2x^2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^3 + 4 = 4x^4 - 4x^3 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2, \text{ kết hợp điều kiện ta được } x = 2.$$

- Nếu $x \leq -2$, đặt $t = -x \geq 2$, khi đó (*) trở thành $t^4 + t^3 + 1 = y^2$ ($t \geq 2$)

$$\Rightarrow 4y^2 = 4t^4 + 4t^3 + 4$$

$$\Rightarrow (2t^2 + t - 1)^2 < (2y)^2 < (2t^2 + t + 1)^2$$

$$\Rightarrow (2y)^2 = (2t^2 + t)^2 \Leftrightarrow 4t^4 + 4t^3 + 4 = 4t^4 + 4t^3 + t^2$$

$$\Rightarrow t = 2. \text{ Khi đó } x = -2, y = 5 \text{ (đúng).}$$

Vậy $x = 0; 1; 2$ là các giá trị thỏa mãn đầu bài.

Bài 9. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$ là số chính phương.

Lời giải. Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$) ta có:

$$y^2 = (x^2 + x)^2 + x^2 + x + 3 > (x^2 + x)^2 \quad (1)$$

(do $x^2 + x + 3 > 0$). Xét hiệu

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 2)^2 - y^2 &= x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x \\ &\quad - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x - 3 \\ &= 3x^2 + 3x + 1 > 0 \Rightarrow y^2 < (x^2 + x + 2)^2 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(x^2 + x)^2 < y^2 < (x^2 + x + 2)^2$

$$\Rightarrow y^2 = (x^2 + x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$$

$$= x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy $x \in \{1; -2\}$.

Bài 10. Cho p là số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước của p^4 là số chính phương.

Lời giải. Tập các ước của p^4 là

$$\{1, p, p^2, p^3, p^4\}.$$

Đặt $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Ta có:

$$4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$$

$$\Rightarrow p^2 + 4p^3 + 4p^4 < 4n^2 < 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 + 5p^2$$

$$\Leftrightarrow (2p^2 + p)^2 < 4n^2 < (2p^2 + p + 2)^2$$

$$\Rightarrow 4n^2 = (2p^2 + p + 1)^2.$$

$$\text{Vậy } 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4p^4 + p^2 + 1 +$$

$$4p^3 + 4p^2 + 2p \Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$$

(vì p là số nguyên tố).

Bài 11. Cho $x, y \in \mathbb{Z}; x, y > 1$ thỏa mãn $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x = y$.

Lời giải. Từ đầu bài suy ra $x, y \geq 2$.

$$\text{Xét hiệu: } (4x^2y^2 - 7x + 7y) - (4x^2y^2 - 4xy + 1)$$

$$= 4xy - 7(x - y) - 1 = x(4y - 7) + (7y - 1) > 0$$

$$\Rightarrow 4x^2y^2 - 7x + 7y$$

$$> 4x^2y^2 - 4xy + 1 = (2xy - 1)^2 \quad (1)$$

Chứng minh tương tự:

$$4x^2y^2 + 7y - 7x < (2xy + 1)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy)^2$

$$\Rightarrow 7x^2/y \Rightarrow x = y \text{ (đpcm).}$$

Bài 12. Chứng minh $D = n(n+1)(n+2)(n+3)$ không là số chính phương, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Ta có: $D = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2)$

$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n)$$

$$\Rightarrow (n^2 + 3n)^2 < D < (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Mà $(n^2 + 3n)^2$ và $(n^2 + 3n + 1)^2$ là 2 số chính phương liên tiếp $\Rightarrow D$ không là số chính phương.

Bài 13. Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh A không là số chính phương.

Lời giải. Ta có: $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

$$= n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2).$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n > 1 \text{ thì: } \begin{cases} n^2 - 2n + 2 > (n-1)^2 \\ n^2 - 2n + 2 < n^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2.$$

Mà $(n-1)^2$ và n^2 là 2 số chính phương liên tiếp nên số $n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Vậy A không thể là số chính phương.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM HỌC 2016 - 2017

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh)

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 2 (2 điểm). Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2$$

($x > 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{\sqrt{x}} > 3$.

Câu 3 (2 điểm). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m+1)x - 2y = -1 \\ x + my = 5 \end{cases}, \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $5x + y$ lớn nhất.

Câu 4 (3 điểm). Cho nửa đường tròn (O) có tâm là

O và đường kính $AB = 2R$ (R là một số dương cho trước). Gọi M, N là hai điểm di động trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung $\widehat{AN}$ và tổng khoảng cách từ A và B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng AN và BM ; K là giao điểm của các đường thẳng AM và BN .

a) Chứng minh rằng bốn điểm K, M, I, N cùng nằm trên một đường tròn (C) .

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN và bán kính đường tròn (C) theo R .

c) Xác định vị trí của M, N sao cho tam giác KAB có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R .

Câu 5 (1 điểm). Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình

$$x^4 + 3x^3 - mx^2 + 9x + 9 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Giải phương trình khi $m = -2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương.

Câu 2 (3 điểm). a) Giải phương trình

$$3x^2 - 4x\sqrt{4x-3} + 4x - 3 = 0.$$

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$.

Câu 3 (1 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 9.$$

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm BC , AM cắt (O) tại điểm D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B .

a) Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng

dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

c) Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N . Phân giác của các góc $\widehat{CEN}$ và $\widehat{BFN}$ lần lượt cắt CN, BN tại P và Q . Chứng minh rằng PQ song song với BC .

Câu 5 (1 điểm). Tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 3n-1; 3n\}$ (n là số nguyên dương) được gọi là tập hợp **cân đối** nếu có thể chia A thành n tập hợp con $A_1, A_2, \dots, A_n$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gồm ba số phân biệt và có một số bằng tổng của hai số còn lại.

ii) Các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ đôi một không có phần tử chung.

a) Chứng minh rằng tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 92; 93\}$ không là tập hợp **cân đối**.

b) Chứng minh rằng tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 830; 831\}$ là tập hợp **cân đối**.

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) giới thiệu

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN THPT CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 476, tháng 2 năm 2017)

VÒNG 1

Bài 1. a) Với $x > 0, x \neq 1$ thì:

$$P = \frac{x\sqrt{x} + x - 2 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$: \frac{1}{x(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x}(x-1) + (x-1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x} - 1)}{1}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x} - 1)}{1} = x^2 - x.$$

b) Ta có: $P = 2$ khi

$$x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

c) Ta có: $P = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$

(vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x > 0, x \neq 1$).

$$\min P = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bài 2. a) Đáp số: $m = 4$.

b) PT hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 - 2x + m - 3 = 0$$

(P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A và B

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì x_1 và x_2 là hai nghiệm của PT(*).

Theo định lý Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m - 3 & (2) \end{cases}$

Vì $A, B \in (P)$ nên $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$.

Theo giả thiết: $y_1 = 9y_2 \Leftrightarrow x_1^2 = 9x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \pm 3x_2$.

• Nếu $x_1 = 3x_2$ thì từ (1) ta có: $4x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}.$$

Từ (2) ta có: $m = \frac{15}{4}$ (thỏa mãn).

• Nếu $x_1 = -3x_2$ thì từ (1) ta có: $-2x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 3.$$

Từ (2) ta có: $m = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \left\{0; \frac{15}{4}\right\}$.

Bài 3. a) Xét PT: $x^2 - 2x - 2 - 2\sqrt{2} = 0$.

Ta có: $\Delta' = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{2} + 1.$$

Vậy PT có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} - 1 = -\sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}.$$

b) Xét: $\begin{cases} y^2 + y(x-4) + x+1 = 0 \\ (x+1)^2 + (x^2 + y^2 + 2xy - 8)y^2 = 0 \end{cases}$

Từ PT thứ nhất của hệ ta có

$$x + 1 = -y(x + y - 4),$$

thay vào PT thứ hai của hệ được:

$$y^2(x + y - 4)^2 + (x^2 + y^2 + 2xy - 8)y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2[(x + y)^2 - 8(x + y) + 16 + (x + y)^2 - 8] = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2[2(x + y)^2 - 8(x + y) + 8] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(x + y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = 2 - x.$$

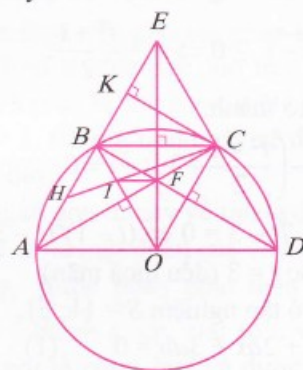
Hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là:

$$(-1; 0); (1; 1).$$

Bài 4. a) Từ $AB = BC = a \Rightarrow AB = BC = CD = a$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} \Rightarrow \text{sđ}\widehat{AB} = \text{sđ}\widehat{BC} = \text{sđ}\widehat{CD} = 60^\circ.$$

Từ đó dễ thấy $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 60^\circ \Rightarrow \triangle EAD$ đều.



b) Ta có $OA = OB = OC = OD = AB = BC = CD = a$ và $AD = 2a$.

Do H là trung điểm của AB nên $HA = HB = \frac{a}{2}$.

$$\text{Vì } BC \parallel AD \Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Tứ giác $ABCO$ là hình thoi

$$\Rightarrow AB \parallel OC \text{ hay } HB \parallel OC \Rightarrow \frac{IB}{IO} = \frac{HB}{OC} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4): $\frac{FB}{FD} = \frac{IB}{IO} \Rightarrow IF \parallel OD \Rightarrow IF \parallel AD$.

c) Tứ giác $BCDO$ là hình thoi nên $BD \perp OC$.

Vì $\triangle EAD$ đều, nên $OE \perp AD$.

Từ $AD \parallel BC \Rightarrow OE \perp BC$.

Do đó điểm F là trực tâm của $\triangle OBC$ (đpcm).

d) Kẻ $CK \perp BE$ ($K \in BE$).

Vì $BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EAD} = 60^\circ$;

$$\widehat{ECB} = \widehat{EDA} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle EBC$ đều $\Rightarrow EB = EC = BC = a$

$$\Rightarrow KE = KB = \frac{BE}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ta có: $HK = HB + KB = a$.

Theo định lý Pythagore:

$$HC^2 = HK^2 + KC^2 = a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Tứ giác $ABCO$ là hình thoi nên BI là tia phân giác của $\widehat{HBC}$.

$$\text{Ta có: } \frac{IH}{IC} = \frac{HB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow HI = \frac{1}{3}HC = \frac{a\sqrt{7}}{6}.$$

Bài 5. Ta có:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2(1+x+y+z).$$

Bài 1. 1) ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-1} \geq 0 \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}.$$

PT đã cho trở thành:

$$\frac{5(t^2+1)}{2} - \left(\frac{t^2+1}{2} + 3 \right) t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 7t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t-3) = 0$$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$ (đều thỏa mãn).

PT đã cho có tập nghiệm $S = \{1; 5\}$.

2) Xét: $x^2 + 2ax + 3ab = 0$ (1)

$$x^2 + 2bx - 8ab = 0$$
 (2)

(1) có $\Delta'_1 = a^2 - 3ab$; (2) có $\Delta'_2 = b^2 + 8ab$

$$\Rightarrow 2\Delta'_1 + \Delta'_2 = 2a^2 - 6ab + b^2 + 8ab$$

$$= a^2 + (a+b)^2 \geq 0, \forall a, b.$$

Suy ra: $2\Delta'_1 \geq 0$ hoặc $\Delta'_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \Delta'_1 \geq 0$ hoặc $\Delta'_2 \geq 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 2. 1) Ta có: $9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 = 0$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x(y-1) + (y-1)^2 + 2y^2 + 4y - 36 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2y + xy^2 + xyz) + (xyz + y^2z + yz^2) + (zx^2 + z^2x + xyz) \geq 3 + 2(x+y+z) \text{ (vì } xyz = 1)$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)(x+y+z) \geq 3 + 2(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(xy + yz + zx)(x+y+z)}{xyz(x+y+z)} \geq \frac{3 + 2(x+y+z)}{1 \cdot (x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{x+y+z} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{3}{x+y+z} + 2 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt{\frac{1}{xyz}} = 3.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\geq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{x+y+z} + \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{3}{x+y+z} + 2.$$

BĐT (*) đúng.

Vậy $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2(1+x+y+z)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

PHẦN 2

$$\Leftrightarrow (3x+y-1)^2 = -2[(y+1)^2 - 19] \quad (*)$$

$$\text{Vi } (3x+y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -2[(y+1)^2 - 19] \geq 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 \leq 19.$$

Mà $(y+1)^2$ là số chính phương (vì $y \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow (y+1)^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16\}$$

$$\Rightarrow -2[(y+1)^2 - 19] \in \{38; 36; 30; 20; 6\}.$$

Do $(3x+y-1)^2$ là số chính phương nên từ (*)

suy ra $-2[(y+1)^2 - 19]$ phải là số chính phương. Từ đó: $-2[(y+1)^2 - 19] = 36$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -2.$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -2.$$

$$\bullet \text{ Với } y = 0 \text{ thì từ } (*): (3x-1)^2 = 36 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{-5}{3} \text{ (đều loại).}$$

$$\bullet \text{ Với } y = -2 \text{ thì từ } (*): (3x-3)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -1.$$

Trường hợp này có hai cặp số nguyên $(x; y)$

thỏa mãn là $(3; -2), (-1; -2)$.

2) Đặt $Q(x) = P(x) - x - 1 \Rightarrow Q(x)$ là đa thức

bậc ba có hệ số cao nhất là 1.

Ta có: $Q(2016) = P(2016) - 2016 - 1 = 0$
 và $Q(2017) = P(2017) - 2017 - 1 = 0$
 suy ra $x = 2016$ và $x = 2017$ là hai nghiệm của
 đa thức $Q(x)$.

Mặt khác $Q(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số cao
 nhất là 1 nên: $Q(x) = (x - 2016)(x - 2017)(x - a)$,
 trong đó $x = a$ là nghiệm còn lại của $Q(x)$.

$$\Rightarrow P(x) = (x - 2016)(x - 2017)(x - a) + x + 1.$$

$$\text{Vậy: } -3P(2018) + P(2019)$$

$$= -3[2(2018 - a) + 2019] + 6(2019 - a) + 2020$$

$$= 6(2019 - a - 2018 + a) - 3 \cdot 2019 + 2020$$

$$= -4031.$$

Bài 3. Đặt $a = 2x^2$, $b = x + y$, $c = x + 2y$ ($a, a + b$
 và $c \geq 0$) $\Rightarrow 9x - 2x^2 + 19y = 10c - a - b$.

$$\text{PT thứ hai trở thành: } \sqrt{a+b} + 2\sqrt{c} = \sqrt{10c - a - b}$$

$$\Leftrightarrow a + b + 4c + 4\sqrt{(a+b)c} = 10c - a - b$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{(a+b)c} - 3c = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+b} - \sqrt{c})(\sqrt{a+b} + 3\sqrt{c}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{c}$$

$$\text{hoặc } \sqrt{a+b} + 3\sqrt{c} = 0.$$

$$\bullet \text{ Nếu } \sqrt{a+b} = \sqrt{c} \text{ thì } a + b = c \text{ hay } y = 2x^2.$$

Thay $2x^2 = y$ vào PT thứ nhất ta được:

$$y^3 + \sqrt{2y^2 - 2y} = y^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y^2 - 4 + \sqrt{2y^2 - 2y} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) \left(y^2 + y + 2 + \frac{2(y + 1)}{\sqrt{2y^2 - 2y} + 2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2. \text{ Với } y = 2 \text{ thì } x = \pm 1.$$

Trường hợp này hệ đã cho có hai nghiệm (x, y)

là $(1; 2)$, $(-1; 2)$.

$$\bullet \text{ Nếu } \sqrt{a+b} + 3\sqrt{c} = 0 \text{ thì } a + b = c = 0$$

(vì $\sqrt{a+b} \geq 0$ và $3\sqrt{c} \geq 0$). Hay

$$\begin{cases} 2x^2 + x + y = x + 2y \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + 4x) = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = -\frac{1}{4}, y = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Trường hợp này hệ đã cho không có nghiệm.

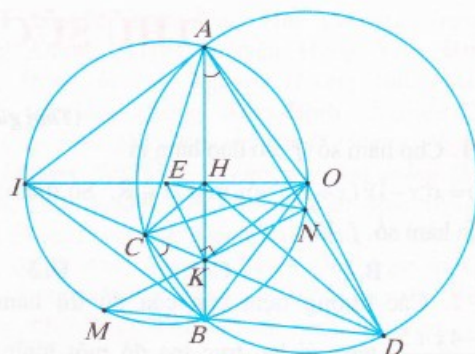
Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x, y) là:

$(1; 2)$, $(-1; 2)$.

Bài 4. 1) Xét $\triangle IAC$ và $\triangle IDA$ có: $\widehat{AIC}$ chung;

$$\widehat{IAC} = \widehat{IDA} \Rightarrow \triangle IAC \sim \triangle IDA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{IC}{IA} \quad (1). \text{ Tương tự } \frac{BC}{BD} = \frac{IC}{IB} \quad (2).$$



$$\text{Mà } IA = IB, \text{ nên từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

2) Ta thấy bốn điểm I, A, O, B cùng thuộc
 đường tròn tâm E , đường kính IO . Đường
 vuông góc với EK tại K cắt (E) tại M và N , ta có
 $KM = KN$. Từ $\triangle KAN \sim \triangle KMB$ (g.g)

$$\Rightarrow KA \cdot KB = KM \cdot KN = KN^2.$$

Theo định lý Pythagore:

$$EK^2 = EN^2 - KN^2 = EN^2 - KA \cdot KB$$

$$\Rightarrow KA \cdot KB = EN^2 - EK^2. \text{ Mà } EN = EO,$$

$$\text{nên } KA \cdot KB = EO^2 - EK^2 \text{ (đpcm).}$$

3) Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp
 $ACBD$, ta có: $AC \cdot BD + AD \cdot BC = AB \cdot CD$.

Mà $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ (theo câu a) và $AB = 2AH$

$$\text{nên } 2AD \cdot BC = 2AH \cdot CD \Rightarrow \frac{CB}{CD} = \frac{AH}{AD}, \text{ kết hợp}$$

$$\text{với } \widehat{BCD} = \widehat{HAD} \Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle AHD \text{ (c.g.c).}$$

$$\text{Từ đó } \widehat{ADH} = \widehat{CDB} \text{ hay } \widehat{ADH} = \widehat{IDB} \text{ (đpcm).}$$

Bài 5. Ta có:

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 52 + 2x^2 + y^2 \geq 52 + 2 + 1 = 55$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 11 \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có $(x - 1)(y - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow xy + 1 \geq x + y.$$

$$\text{Tương tự: } yz + 1 \geq y + z; \quad zx + 1 \geq z + x.$$

Cộng vế với vế ba BĐT ở trên rồi nhân hai vế
 với 2, ta được:

$$2xy + 2xz + 2yz + 6 \geq 4(x + y + z) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có: $(x + y + z)^2 + 6 \geq 11 + 4(x + y + z)$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 4(x + y + z) - 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z + 1)(x + y + z - 5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z \geq 5.$$

Vậy $\min F = 5$ khi $x = y = 1, z = 3$.

TRẦN NGỌC ĐẠI

(GV THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, Thái Bình)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 7

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho hàm số f có đạo hàm là

$f'(x) = x(x-1)^2(x+2)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số f là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 2. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi m bằng

- A. 0. B. 1. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ có tâm đối xứng là điểm

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.
C. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty, 1)$ và $(1, +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty, 1)$ và $(1, +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
D. Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$.

Câu 6. Đường thẳng $y = 6x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

- A. -3 hoặc 1. B. 1 hoặc 3.
C. -1 hoặc 3. D. -3 hoặc -1.

Câu 7. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi

- A. $m = -1$ hoặc $m = 3$. B. $m < -1$ hoặc $m > 3$.
C. $-1 < m < 3$. D. $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 8. Hàm số $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ có tập giá trị là

- A. $[-1, 1]$. B. $[1, \sqrt{2}]$. C. $[0, 1]$. D. $[-1, \sqrt{2}]$.

Câu 9. Đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + m$ đi qua điểm $M(3, -1)$ khi m bằng

- A. 1. B. -1. C. 0. D. một giá trị khác.

Câu 10. Phương trình $|\sin x - \cos x| + \sin 2x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$. B. $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{5}{4}$.

- C. $1 \leq m \leq \frac{5}{4}$. D. $m = 1$ hoặc $m = \frac{5}{4}$.

Câu 11. Số điểm có tọa độ nguyên nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{3x+7}{2x-1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 12. Cho $n > 1$ là một số nguyên. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \dots + \frac{1}{\log_n n!}$ bằng

- A. 0. B. n . C. $n!$. D. 1.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\log(x-1)^2 = 2$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. một số khác.

Câu 14. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 15. Bất phương trình $\max\{\log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x\} < 3$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty, 27)$. B. $(8, 27)$. C. $\left(\frac{1}{8}, 27\right)$. D. $(27, +\infty)$.

Câu 16. Phương trình

$\log_2 x \log_4 x \log_6 x = \log_2 x \log_4 x + \log_2 x \log_6 x + \log_4 x \log_6 x$
có tập nghiệm là

- A. $\{1\}$. B. $\{2, 4, 6\}$. C. $\{1, 12\}$. D. $\{1, 48\}$.

Câu 17. Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ là

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_3 \frac{2x+1}{x-1} \right) \geq 0$ có

tập nghiệm là

- A. $(-\infty, -2] \cup (4, +\infty)$. B. $(-\infty, -2) \cup [4, +\infty)$.
C. $[4, +\infty)$. D. $(-2, 1) \cup (1, 4)$.

Câu 19. Nếu $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$ thì $(\log_2 x)^2$ bằng

- A. 3. B. $3\sqrt{3}$. C. 27. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$ lần lượt là

- A. 2 và $2\sqrt{2}$. B. 2 và 3.
C. $\sqrt{2}$ và 3. D. $2\sqrt{2}$ và 3.

Câu 21. Nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

- A. 2^9 . B. 2^{18} . C. 8. D. 2.

Câu 22. Nếu $\int_0^a x e^x dx = 1$ thì giá trị của a bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. e .

Câu 23. Nếu $\int_0^{\pi} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 24. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx$ bằng

- A. -1. B. 1. C. e . D. 0.

Câu 25. Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$. Đạo hàm của $G(x)$ là

- A. $G'(x) = 2x \cos |x|$. B. $G'(x) = 2x \cos x$.
C. $G'(x) = x \cos x$. D. $G'(x) = 2x \sin x$.

Câu 26. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = e$ là

- A. 0. B. 1. C. e . D. $\frac{1}{e}$.

Câu 27. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y^2 = 4x$ và đường thẳng $x = 1$ bằng S . Giá trị của S là

- A. 1. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 16.

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhánh đường cong $y = x^2$ với $x \geq 0$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành bằng

- A. 2. B. $\frac{7}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 29. Phương trình $z^2 + iz + 1 = 0$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}i, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}i \right\}$. B. $\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}i, \frac{1+\sqrt{5}}{2}i \right\}$.
C. $\left\{ \frac{-1-i\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{5}}{2} \right\}$. D. $\left\{ \frac{1-i\sqrt{5}}{2}, \frac{1+i\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Câu 30. Cho a, b, c là các số thực và $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giá trị của $(a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz)$ bằng

- A. $a+b+c$. B. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.
C. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$. D. 0.

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương

trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 32. Nếu số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $|z| = 1$ thì phần thực của $\frac{1}{1-z}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 2. D. một giá trị khác.

Câu 33. Cho $P(z)$ là một đa thức với hệ số thực. Nếu số phức z thỏa mãn $P(z) = 0$ thì

- A. $P(|z|) = 0$. B. $P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.

- C. $P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$. D. $P(\bar{z}) = 0$.

Câu 34. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Câu 35. Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.
B. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \leq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.
C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \geq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.
D. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \neq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

Câu 36. Nếu ba kích thước của một khối hộp chữ nhật được tăng lên (hoặc giảm đi) lần lượt k_1, k_2, k_3 lần nhưng thể tích vẫn không thay đổi thì

- A. $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. B. $k_1 k_2 k_3 = 1$.
C. $k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 = 1$. D. $k_1 + k_2 + k_3 = k_1 k_2 k_3$.

Câu 37. Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng a, b, c . Thể tích của khối hộp đó là

$$A. V = \sqrt{\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8}}.$$

$$B. V = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8}.$$

$$C. V = abc.$$

$$D. V = a + b + c.$$

Câu 38. Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S . Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

$$A. \frac{nV}{S}. \quad B. \frac{V}{nS}. \quad C. \frac{3V}{S}. \quad D. \frac{V}{3S}.$$

Câu 39. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a , góc nhọn 60° và đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Thể tích khối hộp đó là

$$A. a^3. \quad B. a^3\sqrt{3}. \quad C. \frac{a^3\sqrt{3}}{2}. \quad D. \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 40. Một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b . Thể tích của khối chóp đó là

$$A. \frac{a^2}{4}\sqrt{3b^2 - a^2}. \quad B. \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

$$C. \frac{a^2}{6}\sqrt{3b^2 - a^2}. \quad D. \frac{a^2}{3}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Câu 41. Một hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh bên bằng b và tạo với mặt phẳng đáy một góc α . Thể tích của khối chóp có đáy là đáy của lăng trụ và đỉnh là một điểm bất kì trên đáy còn lại là

$$A. \frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\sin\alpha. \quad B. \frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\sin\alpha.$$

$$C. \frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\cos\alpha. \quad D. \frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\cos\alpha.$$

Câu 42. Một hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh a , các mặt bên tạo với đáy một góc α . Thể tích của khối chóp đó là

$$A. \frac{a^3}{2}\sin\alpha. \quad B. \frac{a^3}{2}\tan\alpha.$$

$$C. \frac{a^3}{6}\cot\alpha. \quad D. \frac{a^3}{6}\tan\alpha.$$

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích của khối chóp đó bằng

$$A. \frac{a^3\sqrt{3}}{3}. \quad B. \frac{a^3\sqrt{2}}{4}. \quad C. \frac{a^3\sqrt{2}}{2}. \quad D. \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 44. Cho bốn điểm $A(a, -1, 6)$, $B(-3, -1, -4)$, $C(5, -1, 0)$, $D(1, 2, 1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là

$$A. 1. \quad B. 2. \quad C. 2 \text{ hoặc } 32. \quad D. 32.$$

Câu 45. Cho $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$, điểm D nằm trên trục Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là

$$A. (0, -7, 0). \quad B. (0, -7, 0) \text{ hoặc } (0, 8, 0).$$

$$C. (0, 8, 0). \quad D. (0, 7, 0) \text{ hoặc } (0, -8, 0).$$

Câu 46. Cho hai điểm $M(-2, 3, 1)$, $N(5, 6, -2)$. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm

A. Điểm A chia đoạn thẳng MN theo tỉ số

$$A. 2. \quad B. -2. \quad C. -\frac{1}{2}. \quad D. \frac{1}{2}.$$

Câu 47. Cho $A(5, 1, 3)$, $B(-5, 1, -1)$, $C(1, -3, 0)$, $D(3, -6, 2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là

$$A. (-1, 7, 5). \quad B. (1, 7, 5).$$

$$C. (1, -7, -5). \quad D. (1, -7, 5).$$

Câu 48. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxy) có PT là

$$A. \begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases} \quad B. \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t+t \\ z=0 \end{cases} \quad D. \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$$

Câu 49. Cho hai điểm $A(3, 3, 1)$, $B(0, 2, 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

$$A. \begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases} \quad B. \begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases} \quad D. \begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$$

Câu 50. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x=2-2t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}. \text{ Mặt phẳng cách đều hai đường}$$

thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

$$A. x + 5y + 2z + 12 = 0. \quad B. x + 5y - 2z + 12 = 0.$$

$$C. x - 5y + 2z - 12 = 0. \quad D. x + 5y + 2z - 12 = 0.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

1C	2B	3A	4C	5C	6D	7C	8D	9A	10B	11D	12B	13A	14B	15D	16D	17D
18A	19B	20B	21C	22C	23D	24D	25A	26C	27B	28C	29C	30A	31C	32B	33D	34D
35A	36B	37A	38B	39A	40A	41B	42A	43A	44C	45A	46C	47C	48D	49B	50D	

Câu 1. Đây là dạng đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương, hệ số của x^4 dương, các hệ số của x^4 và x^2 trái dấu. Chọn C.

Câu 2. Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}. \text{ Hàm số nghịch biến trên các}$$

khoảng. Chọn B.

Câu 7. Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 9$. Giải được hai pt tiếp tuyến: $y = 9x - 8$ và $y = 9x + 24$, loại đường $y = 9x + 24$ vì trùng với đường đã cho.

Câu 8. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt suy ra $m > 0$.

Khi đó 3 điểm cực trị là

$$A(-\sqrt{m}; 2 - m^2), B(\sqrt{m}; 2 - m^2), C(0; 2).$$

$$S_{ABC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot CH = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{m} \cdot m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 10. Đặt $BD = x, x \in [0; 40] \Rightarrow CD = \sqrt{100 + x^2}$.

Từ giả thiết suy ra: $F = 3(40 - x) + 5\sqrt{100 + x^2}$ nhỏ nhất.

$$F' = -3 + \frac{5x}{\sqrt{100 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \text{ do } x \in [0; 40].$$

Suy ra giá trị cần tìm là: $\frac{65}{2}$ km.

Câu 15. ĐK $\begin{cases} -x^2 + 2x > 0 \\ -x^2 + 2x \neq 1 \end{cases}$. Chọn D.

Câu 16. Kiểm tra thấy A, B, C đều không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Ta có: } y = \log_2(2^x + 1) \Rightarrow y' = \frac{2^x}{2^x + 1} > 0 \forall x.$$

Chọn D.

Câu 21. Sau t giờ có 10^t lá bào (đầy hồ).

Sau n giờ có 10^n lá bào ($\frac{1}{3}$ hồ).

$$\text{Suy ra: } 10^n = \frac{1}{3} \cdot 10^t \Rightarrow n = t - \log 3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 24. $v(t) = -5t + 20 = 0 \Rightarrow t = 4$.

Lúc canô dừng hẳn:

$$S = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right) \Big|_0^4 = 40(\text{m}).$$

Câu 34

$$\begin{aligned} |z - 1| &= |z - 2 + 3i| \Leftrightarrow |x + yi - 1| = |x + yi - 2 + 3i| \\ \Leftrightarrow |x - 1 + yi| &= |x - 2 + (y + 3)i| \Leftrightarrow x - 3y - 6 = 0. \end{aligned}$$

Chọn D.

Câu 37. Gọi M là trung điểm BC thì $\widehat{AMA'} = 60^\circ$.

Khi đó:

$$V_{S_{ABC}} = S_{ABC} \cdot h = S_{ABC} \cdot AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} a^3.$$

Chọn A.

Câu 38. Trong tam giác SAB , hạ AH vuông góc với SB thì AH là khoảng cách từ A đến (SBC) .

$$\text{Ta có: } \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn B.

Câu 41. Gọi I là trung điểm SC thì I là tâm khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

$$R = IA = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2197}{6} \pi. \text{ Chọn B.}$$

Câu 42. Khối lượng bê tông cần đổ là:

$$\pi h(R^2 - r^2) = \pi \cdot 200 \cdot (30^2 - 20^2) = \pi \cdot 100000 (\text{cm}^3) = 0,1\pi (\text{m}^3). \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 45. Ta có: } \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{-5}. \text{ Chọn A.}$$

(Xem tiếp trang 26)



GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ DỰA VÀO BẤT ĐẲNG THỨC

PHẠM TRỌNG THU

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Hững năm gần đây, hầu như trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán cũng như đề thi chọn HSG cấp THPT thường có câu giải hệ phương trình (HPT) hai ẩn. Đó là câu tương đối hay trong đề thi, tạo nhiều hứng thú cho những HS yêu thích môn toán bởi tính phong phú, đa dạng của nó; đồng thời cũng gây không ít khó khăn cho HS trong quá trình giải chúng bởi lẽ có một số bài toán giải HPT ta không thể giải được bằng những phương pháp thông thường đã học, chẳng hạn phương pháp cộng, phương pháp thế, phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp lượng giác hóa, phương pháp hàm số,... Để giải được chúng HS không những cần nắm được các phương pháp trên mà còn phải biết cách phối hợp chúng với một hoặc nhiều phương pháp khác, trong đó có phương pháp (PP) đánh giá dựa vào bất đẳng thức (BĐT).

Do phạm vi bài báo, chúng tôi chỉ đề cập một số dạng toán thường gặp về HPT được giải bằng PP đánh giá dựa vào BĐT thông qua một loạt thí dụ minh họa và bài tập tự luyện với hy vọng sẽ giúp ích cho HS một phần nào trong việc rèn luyện kỹ năng giải toán cũng như phát triển tư duy để làm dạng toán này.

1. Giải HPT hai ẩn mà trong đó có một PT phải dựa vào BĐT

Thí dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{14-y} + \sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} = 12 \\ x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 2\sqrt{y-4} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} 1-2\sqrt{3} \leq x \leq 1+2\sqrt{3} \\ 4 \leq y \leq 14 \end{cases} (*)$

$$\text{Ta có } (x-1)\sqrt{14-y} \leq \frac{(x-1)^2 + 14 - y}{2};$$

$$\sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} \leq \frac{(y-2) + (11+2x-x^2)}{2}$$

Cộng hai BĐT trên lại vế theo vế, ta được

$$(x-1)\sqrt{14-y} + \sqrt{(y-2)(11+2x-x^2)} \leq 12 \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y-2 = 11+2x-x^2 \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào PT thứ hai của hệ ta được

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 5x + 4 + 2(1 - \sqrt{9+2x-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4) \left(x^2 + x - 1 + \frac{2(x+2)}{1+\sqrt{9+2x-x^2}} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Do } x \geq 1, \text{ nên } x^2 + x - 1 + \frac{2(x+2)}{1+\sqrt{9+2x-x^2}} > 0$$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 5$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta tìm được nghiệm của HPT đã cho là $(x; y) = (4; 5)$.

Nhận xét. Khi giải một HPT nào đó thì việc đầu tiên ta xem PT nào trong hệ cần "xử lý trước". Cảm nhận về bài toán trên, ta thấy việc tìm ra quan hệ ràng buộc giữa các biến trong PT thứ hai để thay vào PT thứ nhất vẫn còn khó nên ta có thể nghĩ ngay mẫu chốt giải quyết bài toán trên chắc chắn ở PT thứ nhất vì trong PT này ta phát hiện ra bóng dáng dạng của hai BĐT như sau:

$$\bullet \text{ Với hai số thực } a, b \text{ bất kỳ ta có } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

$$\bullet \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = b \text{ (BĐT Cauchy).}$$

Sau đó sử dụng điều kiện dấu "=" trong (1) ta tìm được $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y-2 = 11+2x-x^2 \end{cases}$ (2). Thay (2) vào PT thứ hai của hệ ta tìm được PT mới theo biến x . Giải PT này và đối chiếu nghiệm của chúng với các điều kiện (nếu có) của HPT; từ đó suy ra nghiệm $(x; y)$ cần tìm của hệ.

Thí dụ 2. [VMO-2009] Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ (*)

Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \leq 2\left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2}\right) \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Ta chứng minh BĐT

$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \leq \frac{2}{1+2xy}$$

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow 2(1+2x^2)(1+2y^2) \geq (2+2x^2+2y^2)(1+2xy)$

$$\Leftrightarrow 1+2x^2+2y^2+4x^2y^2 \geq 1+x^2+y^2+2xy+2x^3y+2xy^3$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(1-2xy) \geq 0$ luôn đúng với mọi

$$x, y \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \quad (3)$$

Đẳng thức trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Thay $x = y$ vào PT còn lại của hệ được

$$x(1-2x) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 162x^2 - 81x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36}.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), suy ra HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\frac{9+\sqrt{73}}{36}; \frac{9+\sqrt{73}}{36}\right); \left(\frac{9-\sqrt{73}}{36}; \frac{9-\sqrt{73}}{36}\right).$$

Nhận xét. Trong thí dụ 2 điều quan trọng là phát hiện được BĐT phụ (2), vì đây là mấu chốt giúp ta tìm được lời giải cho bài toán.

Thí dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+4y)(x^2+16y^2) = 32xy(x+4y-3\sqrt{xy}) \\ \sqrt{3x-1}+6x = \sqrt{8y+3}+8(2y+1) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ y \geq 0 \end{cases}$ (*). Ta chứng minh

$$(x+4y)(x^2+16y^2) \geq 32xy(x+4y-3\sqrt{xy})$$

Do $x+4y \geq 4\sqrt{xy}$ nên ta cần chứng minh

$$x^2+16y^2 \geq 8\sqrt{xy}(x+4y-3\sqrt{xy}) \quad (1)$$

Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = 2\sqrt{y}$ thì BĐT (1) trở thành

$$a^4+b^4 \geq 2ab(2a^2+2b^2-3ab)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4-2a^2b^2 \geq 2ab(2a^2+2b^2-4ab)$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \text{ Suy ra đpcm.}$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = 4y$.

Thay $x = 4y$ vào PT thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{3x-1}+6x = \sqrt{8y+3}+4x+8$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-1)+\sqrt{3x-1} = 2(2x+3)+\sqrt{2x+3} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2+t$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$, có $f'(t) = 4t+1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (2) có $f(\sqrt{3x-1}) = f(\sqrt{2x+3})$, suy ra

$$\sqrt{3x-1} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 1.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), suy ra HPT đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 1)$.

Thí dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x(x^2+1) - y(y^2+3) = 3xy(x-y) \\ \sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 2y\sqrt{y} = x^3 + 30 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$9x(x^2+1) - y(y^2+3) = 3xy(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (2x)^3 + 3(2x) = (y-x)^3 + 3(y-x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) có $f(2x) = f(y-x)$, suy ra

$$2x = y - x \Leftrightarrow y = 3x.$$

Thay $y = 3x$ vào PT thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} = x^3 + 30 \quad (2)$$

ĐK: $2 \leq x \leq 4$ (*). Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\begin{cases} \sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \leq \sqrt{\frac{x-2+4-x}{2}} = 1 \\ 6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{27x^3} \leq x^3 + 27 \end{cases}$$

Áp dụng BDT Bunyakovsky, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} &\leq \sqrt{2(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} \\ &\leq \sqrt{2\sqrt{2(x-2+4-x)}} = 2. \end{aligned}$$

Cộng ba BDT trên lại về theo vế, ta được $VT(2) \leq VP(2)$ (**). Đẳng thức trong (**) xảy ra khi $x = 3$ (thỏa mãn ĐK (*)).

Từ đó, ta tìm được nghiệm của HPT đã cho là

$$(x; y) = (3; 9).$$

Nhận xét. Quan sát hai PT trong hệ trên thì thấy PT thứ hai cồng kềnh và khó biến đổi hơn, nên ta chọn PT thứ nhất để xử lý trước. Việc biến đổi PT này thành PT tích hoặc tìm ra mối quan hệ ràng buộc giữa các biến trong PT không thuận tiện cho lắm, nên ta chuyển sang hướng suy nghĩ khác là đưa PT thứ nhất về dạng mà ta có thể tìm ra hàm đặc trưng để từ đó suy ra mối quan hệ ràng buộc giữa các biến. Thay mối quan hệ này vào PT thứ hai ta được PT vô tỉ một ẩn (giả sử ẩn x) và giải nó thông qua

phương pháp đánh giá dựa vào BDT, từ đó suy ra nghiệm của HPT đã cho. Nhìn chung, bài hệ trên không quá khó nhưng để giải tốt, nhanh, tiết kiệm thời gian trong thi cử cũng cần phải có độ nhạy bén, tinh tế ở chỗ nhìn ra PT thứ nhất trong hệ có chứa hàm đặc trưng đó là dấu hiệu của phương pháp hàm số và PT (2) có chứa bóng dáng của BDT.

Lưu ý chung: Qua các thí dụ 1, 2, 3, 4 các bạn có thể tự rút ra cho mình được nguyên tắc chung để giải các bài toán HPT có dạng tương tự.

- Trước tiên ta cần phát hiện xem có PT nào trong hệ sử dụng BDT không. Nếu không có thì ta đổi sang hướng suy nghĩ khác bằng cách vận dụng phương pháp trung gian để tìm mối quan hệ mới giữa hai ẩn của một PT nào đó trong hệ nhằm mục đích chuyển PT còn lại trong hệ thành PT mới theo một biến mà chúng ta có thể sử dụng được BDT.

- Sử dụng điều kiện dấu "=" xảy ra để giải PT (thông thường các BDT mà ta phát hiện được rơi vào các bài tập về BDT cơ bản hoặc các BDT cổ điển quen thuộc là BDT Cauchy, BDT Bunyakovsky...).

2. Giải HPT hai ẩn mà trong đó có hai PT đều phải dựa vào BDT

Thí dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 6\sqrt{xy} - y = 3 \\ x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x^2 + xy + y^2 \neq 0 \end{cases}$ (*).

Từ PT thứ hai của hệ ta thấy nếu $x \leq 0, y \leq 0$ dẫn đến HPT vô nghiệm, do đó ta chỉ giải hệ

với $x > 0, y > 0$. Đặt $\begin{cases} 2x = a \\ 2y = b \end{cases}$. Hệ đã cho trở

thành

$$\begin{cases} a + 6\sqrt{ab} - b = 6 \\ a + \frac{6(a^3 + b^3)}{a^2 + ab + b^2} - \sqrt{2(a^2 + b^2)} = 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a + 6\sqrt{ab} - b = 6 \\ a + \frac{6(a^3 + b^3)}{a^2 + ab + b^2} - \sqrt{2(a^2 + b^2)} = 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$PT(1) \Rightarrow a + 2\sqrt{ab} = 3 + \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 3 \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$. Ta lại có

$$VT(2) \geq a + 2(a+b) - \sqrt{2(a^2+b^2)} \quad (4)$$

(Các bạn tự chứng minh $\frac{6(a^3+b^3)}{a^2+ab+b^2} \geq 2(a+b)$

bằng định nghĩa). Ta có:

$$\begin{aligned} VP(4) &= a + 2\sqrt{a^2+b^2+2ab} - \sqrt{2(a^2+b^2)} \\ &= a + 2\sqrt{\frac{ab}{2}(1^2+1^2)\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+2\right)} - \sqrt{2(a^2+b^2)} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có

$$\begin{aligned} VP(4) &\geq a + 2\sqrt{\frac{ab}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}+\sqrt{2}\right)} - \sqrt{2(a^2+b^2)} \\ &= a + 2\sqrt{ab} \geq 3 \quad (5) \end{aligned}$$

Đẳng thức trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.

Từ các lập luận trên dẫn đến HPT có nghiệm

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

3. Giải HPT hai ẩn bằng cách kết hợp hai PT trong hệ với nhau sau đó vận dụng phương pháp đánh giá dựa vào BĐT

Thí dụ 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{4xy}{\sqrt{4x^2-12x+25}} = x^2 + y \\ y + \frac{4xy}{\sqrt{4y^2-12y+25}} = y^2 + x \end{cases}$$

Lời giải. Hiển nhiên $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của HPT. Xét $x \neq 0$ và $y \neq 0$, ta thấy HPT trên là HPT đối xứng loại 2 nên nghiệm của bài toán sẽ là $x=y$ nhưng nếu làm theo cách thông thường thì sẽ khó khăn vì có sự xuất hiện của căn bậc hai. Chúng ta thử kết hợp hai PT trong hệ lại với nhau để được một PT mới và xét xem nó có thể biến đổi về một dạng đặc biệt gì không.

Cộng hai PT trong hệ theo về được $A=B$ (*), trong đó:

$$A = 2xy \left(\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+4}} \right)$$

$$B = x^2 + y^2.$$

• Với $xy > 0$ ta có

$$A \leq 2xy \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2xy \leq B$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\frac{3}{2}$.

• Với $xy < 0$. Khả năng này không xảy ra, thật vậy, không làm mất tính tổng quát giả sử $x < 0, y > 0$ thì đẳng thức (*) không thể xảy ra.

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là:

$$(0; 0), \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Thí dụ 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 + (8x-1)^2 = 2\sqrt[3]{x(16x+1)} \\ 2x(80x+1) = y\sqrt{28x-1} \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{28}$.

HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y^2 + 64x^2 - 16x + 1 = \sqrt[3]{8x(16x+1)} & (1) \\ 4x(80x+1) - 2y\sqrt{28x-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo về ta được

$$\begin{aligned} (y - \sqrt{28x-1})^2 + 384x^2 - 40x + 2 = \\ \sqrt[3]{8x(16x+1)} \quad (3) \end{aligned}$$

Gọi A là vế trái của PT(3). Ta có

$$\begin{aligned} A &\geq 384x^2 - 40x + 2 = \frac{1}{2}(3(16x-1)^2 + 16x+1) \\ &\geq \frac{1}{2}(16x+1) \quad (4) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(16x+1) &= \frac{1}{6}(32x + (16x+1) + 2) \\ &\geq \frac{1}{2}\sqrt[3]{32x(16x+1)2} = \sqrt[3]{8x(16x+1)} \quad (5) \end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 27)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/477 (Lớp 6). Xét tổng S gồm 20 số hạng:

$$S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{20.21.22.23}.$$

Hãy so sánh S với $\frac{1}{18}$.

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/477 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A , đường phân giác BD . Trên tia BA lấy điểm E sao cho $BE = 2CD$. Chứng minh rằng $\widehat{EDB} = 90^\circ$.

THÂN VĂN CHƯƠNG

(GV THCS Võ Như Hưng, Điện Bàn, Quảng Nam)

Bài T3/477. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}$.

NGUYỄN TỔNG HÙNG

(GV THPT Thành Sen, Thạch Trung, TP. Hà Tĩnh)

Bài T4/477. Cho $\triangle ABC$ cân tại A và M là một điểm ở trong tam giác đó sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{BCM}$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CA . Gọi E là giao điểm của MB và IH , F là giao điểm của MC và IK . Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MEH và MFK cắt nhau tại $N \neq M$. Chứng minh rằng đường thẳng NM đi qua trung điểm của BC .

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T5/477. Giải phương trình:

$$(x^2 + x + 1) \cdot (\sqrt[3]{(3x - 2)^2} + \sqrt[3]{3x - 2} + 1) = 9.$$

LƯƠNG CAO VINH

(GV THPT Cộng Hiền, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/477. Giả sử phương trình

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

có 3 nghiệm thực dương. Chứng minh rằng nếu:

$$2a^3 + 3a^2 - 7ab + 9c - 6b - 3a + 2 = 0$$

thì $1 \leq a \leq 2$.

HỒ QUANG VINH (Hà Nội)

Bài T7/477. Cho a, b, c, d, e là các số thực thỏa mãn:

$$\begin{cases} \sin a + \sin b + \sin c + \sin d + \sin e = 0 \\ \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d + \cos 2e = -3 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \cos a + 2 \cos 2b + 3 \cos 3c$.

PHẠM HẢI ĐĂNG

(Kim Đường, Ứng Hòa, Hà Nội)

Bài T8/477. Cho điểm H nằm ở miền trong tam giác ABC . Gọi K là trực tâm tam giác ABH . Đường thẳng qua H vuông góc với BC cắt AK tại E . Đường thẳng qua H vuông góc với AC cắt BK tại F . Chứng minh rằng $CH \perp EF$.

NGUYỄN NGỌC TÚ

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T9/477. Với $n \in \mathbb{N}^*$, gọi $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Ký hiệu $\{S_n\}$ là phần lẻ của S_n . Chứng minh rằng: Với mỗi $\varepsilon \in (0, 1)$, luôn tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $\{S_n\} \leq \varepsilon$.

ĐOÀN THẾ PHIỆT

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/477. Tìm số màu k nhỏ nhất để có thể tô màu các số $1, 2, \dots, 20$ (mỗi số một màu, hai số khác nhau có thể được tô cùng màu) sao cho không có 3 số nào cùng màu lập thành một cấp số cộng.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV Khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/477. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_1 = -\pi, x_2 = -1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + \log_2 \frac{9 + 3(\cos x_{n+1} - \cos x_n) - \cos x_{n+1} \cos x_n}{8 + \sin^2 x_n}, \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng và tính giới hạn đó.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T12/477. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác ngoài của các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ theo thứ tự cắt phân giác ngoài của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ tại X, Y, Z, T . E, F theo thứ tự là trung điểm của XZ, YT . Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $XYZT$ nội tiếp và $XZ \perp YT$.

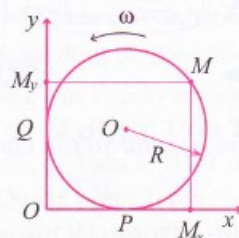
2) O, E, F thẳng hàng.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài L1/477. Một chất điểm M chuyển động tròn đều trên quỹ đạo có bán kính R , ngược chiều kim đồng hồ, tốc độ góc ω . Chọn hệ trục tọa độ

xOy nằm trong mặt phẳng quỹ đạo, có 2 trục Ox và Oy tiếp xúc với quỹ đạo tại P và Q như hình dưới. Gọi M_x, M_y lần lượt là hình chiếu của M trên 2 trục Ox và Oy . Chọn gốc thời gian $t = 0$ là lúc chất điểm đi qua P . Tìm thời điểm đầu tiên để khoảng cách giữa M_x và M_y là lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các khoảng cách đó?



NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/477. Cho hai thấu kính hội tụ L_1 và L_2 đặt đồng trục có tiêu cự lần lượt là $f_1 = 20\text{cm}$ và $f_2 = 30\text{cm}$. Hai quang tâm của chúng cách nhau là $L = O_1O_2 = 100\text{cm}$. Hỏi phải đặt vật sáng AB ở cách thấu kính trước L_1 bao nhiêu (cm) để ảnh cuối cùng A_2B_2 tạo bởi hệ L_1, L_2 là ảnh thật và có độ lớn $A_2B_2 = \frac{3}{8}AB$?

NGUYỄN QUANG HẬU (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/477 (For 6th grade). Let

$$S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{20.21.22.23}.$$

Compare S and $\frac{1}{18}$.

Problem T1/477 (For 7th grade). Given an isosceles triangle ABC with the base BC . Let BD be the angle bisector. On the ray BA , choose E such that $BE = 2CD$. Show that $\widehat{EDB} = 90^\circ$.

Problem T3/477. Let x, y , and z be positive numbers such that $x + y + z = xyz$. Find the minimum value of

$$\text{the expression } S = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}.$$

Problem T4/477. Given an isosceles triangle ABC with the base BC and let M be a point inside the triangle such that $\widehat{ABM} = \widehat{BCM}$. Let H, I , and K respectively be the perpendicular projections of M on AB, BC , and CA . Suppose that E is the intersection between MB and IH , and F is the

intersection between MC and IK . Assume that the circumcircles of the triangles MEH and MFK intersect at $N \neq M$. Prove that the line NM contains the midpoint of BC .

Problem T5/477. Solve the equation

$$(x^2 + x + 1)(\sqrt[3]{(3x - 2)^2} + \sqrt[3]{3x - 2} + 1) = 9.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/477. Suppose that the equation

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

has 3 positive solutions. Prove that if

$$2a^3 + 3a^2 - 7ab + 9c - 6b - 3a + 2 = 0$$

then $1 \leq a \leq 2$.

Problem T7/477. Let a, b, c, d , and e be real numbers such that

$$\begin{cases} \sin a + \sin b + \sin c + \sin d + \sin e = 0 \\ \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d + \cos 2e = -3 \end{cases}$$

Find the maximum and minimum values of the expression $P = \cos a + 2\cos 2b + 3\cos 3c$.

(Xem tiếp trang 27)



Bài T1/473. Tìm hai chữ số tận cùng của hiệu

$$2^{9^{2016}} - 2^{9^{1945}}$$

Lời giải. • Ta thấy $(20k+1)(20h+1) = 20(20kh+k+h)+1 = 20m+1$ nên $(20k+1)^n = 20r+1$ với k, h, m, n, r là các số nguyên dương. Do $9^2 = 81 = 20k+1$ nên $9^{2016} = 81^{1008} = (20k+1)^{1008} = 20m+1$ và $9^{1945} = 9.81^{972} = 9(20k+1)^{972} = 9(20n+1) = 20r+9$ với m, n, r là các số nguyên dương.

• Từ $2^{20} = 2^{10 \cdot 2} = 1024^2 = (1000+24)(1000+24) = 1000(1000+24+24) + 576 = 100k+76$ mà $(100k+76)(100h+76) = 100(100kh+76k+76h) + 5776 = 100m+76$ nên $2^{20n} = (100k+76)^n = 100r+76$ với k, h, m, n, r là các số nguyên dương. Từ đó $2^{9^{2016}} = 2^{20m+1} = 2.2^{20m} = 2(100t+76) = 100.2t+152 = 100s+52$ và $2^{9^{1945}} = 2^{20r+9} = 2^9.2^{20r} = 2^9(100x+76) = 512(100x+76) = (100.5+12)(100x+76) = 100y+12.76 = 100z+12$ với m, t, s, r, x, y, z là các số nguyên dương.

• Từ kết quả trên suy ra $2^{9^{2016}} - 2^{9^{1945}} = 100s + 52 - (100z+12) = 100(s-z) + 40$. Vậy hai chữ số tận cùng của hiệu $2^{9^{2016}} - 2^{9^{1945}}$ là 40. $\square$

➤ **Nhận xét.** Một số bạn tính 9^{2016} và 9^{1945} theo bội của 100 nên xét số dư của 2^{100n+r} khi chia cho 100 sẽ phải tính với các số lớn hơn nhiều so với khi xét 2^{20n+r} như lời giải trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Phạm Thanh Nga, Bùi Nhật Minh, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An:** Đặng Hữu Khanh, Nguyễn Văn Thành, Lê Xuân

Hoàng, Đào Thái Hoàng, Lê Hoài Sơn, Đặng Thị Vân Khánh, Trương Công Cảnh, Nguyễn Thị Thanh Hằng, Nguyễn Thị Khánh Thư, Phạm Văn Quyền, Trần Xuân Mai, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Mai Thành Nguyên, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/473. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn:

$$n^4 + 8n^3 + 19n^2 - 33n - 90 = 0.$$

Lời giải. Cách 1 (Của đa số các bạn). Viết lại đẳng thức đã cho thành

$$n^4 - 2n^3 + 10n^3 - 20n^2 + 39n^2 - 78n + 45n - 90 = 0,$$

$$n^3(n-2) + 10n^2(n-2) + 39n(n-2) + 45(n-2) = 0,$$

$$(n-2)(n^3 + 10n^2 + 39n + 45) = 0.$$

Vì n là số tự nhiên nên $n^3 + 10n^2 + 39n + 45 > 0$, do đó $n = 2$. Vậy giá trị n cần tìm là $n = 2$.

Cách 2. Từ giả thiết ta có $n^4 + 8n^3 + 19n^2 - 33n = 90$, hay $n(n^3 + 8n^2 + 19n - 33) = 90$ (*).

Nếu n là số lẻ thì $(n^3 + 8n^2 + 19n - 33)$ là và về trái của (*) là số lẻ, không thỏa mãn. Vậy n phải là số chẵn và là ước số của 90, tức $n \in \{2; 6; 10; 18; 30; 90\}$. Dễ dàng kiểm tra thấy $n = 2$ thỏa mãn đẳng thức đã cho. Với $n > 2$ ta có $n^3 + 8n^2 + 19n - 33 > 2^3 + 8.2^2 + 19.2 - 33 = 45$, suy ra $n(n^3 + 8n^2 + 19n - 33) > 90$, không thỏa mãn (*).

Vậy $n = 2$ là giá trị duy nhất cần tìm. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Bài toán tương đối dễ, tất cả các bạn đều tìm ra đáp số đúng. Ngoài hai cách giải trên đây, một số bạn còn biến đổi đẳng thức thành $(n^4 + 8n^3 - 90) + n(19n - 33) = 0$ rồi lập luận không thể xảy ra $n \geq 3$, do đó $n = 0; 1; 2$. Kiểm tra trực tiếp tìm được $n = 2$.

2) Cách 1 trên đây đúng nhưng không được “tự nhiên”, dựa trên cơ sở phải nhằm đoán được giá trị $n = 2$ thỏa mãn. Xin tuyên dương các bạn có lời giải

theo cách 1. Các bạn sau có lời giải tốt (khác cách 1): **Sơn La:** Đỗ Thu Trang, 7A1, THCS CLC Mai Sơn; **Vĩnh Phúc:** Quảng Thị Bích Ngọc, Hà Văn Tuấn, Hà Yến Nhi, Phùng Minh Vũ, Trịnh Thị Quỳnh Anh, Nguyễn Thế Đạt, Đặng Ngọc Linh, Phạm Trung Đức, 6A5, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ:** Hạ Hiền Lương, Nguyễn Công Hải, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thanh Hóa:** Trịnh Đức Tuấn, 6A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Dương Hùng, Nguyễn Thiên Phúc Anh, Nguyễn Huy Hoàng, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Văn Quang Tuệ, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** Dương Bội Quỳnh, 6A, THCS Nguyễn Chí Thanh, Ngô Lan Giang, 7H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa; **Cần Thơ:** Trần Danh Nhân, 7A5, THCS Đoàn Thị Điểm, Q. Ninh Kiều, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/473. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho $A = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2}$ là số chính phương.

Lời giải. Ta có $A = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2}$

$$= (x+y)^2 - 2(x+y) \cdot \frac{xy}{x+y} + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 = \left(x+y - \frac{xy}{x+y}\right)^2$$

 + Để A là số chính phương, ta cần tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{xy}{x+y}$ cũng là số nguyên dương. Đặt $\frac{xy}{x+y} = k (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Leftrightarrow xy = k(x+y) \quad (1) \Leftrightarrow (x-k)(y-k) = k^2 \quad (2)$$

Vì x, y, k là các số nguyên dương nên từ (1) suy ra $x > k, y > k$, do đó $x-k$ và $y-k$ là các số nguyên dương.

Gọi UCLN $(x-k, y-k) = d (d \in \mathbb{N}^*)$ suy ra

$$\begin{cases} x-k:d \\ y-k:d \\ k^2:d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x:d \\ y:d \\ k:d \end{cases}$$

Đặt $x = dx', y = dy', k = dk' (x', y', k' \in \mathbb{N}^*)$.

Thay vào (2) ta có $(x'-k')(y'-k') = k'^2$ (3)

Ta có $x-k = d(x'-k'), y-k = d(y'-k')$ và $(x-k, y-k) = d$ nên $(x'-k'; y'-k') = 1$.

Kết hợp với (3) suy ra $x'-k'$ và $y'-k'$ là các số chính phương. Do đó

$$\begin{cases} x'-k' = m^2 \\ y'-k' = n^2 \end{cases} (m, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = m^2 + mn \\ y' = n^2 + mn \\ k' = mn \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x = dm^2 + dmn \\ y = dn^2 + dmn \end{cases} (m, n, d \in \mathbb{N}^*)$.

+ Ngược lại với $\begin{cases} x = dm^2 + dmn \\ y = dn^2 + dmn \end{cases} (m, n, d \in \mathbb{N}^*)$

thì $\frac{xy}{x+y} = \frac{(dm^2 + dmn)(dn^2 + dmn)}{d(m+n)^2} = dmn$ nên

$$A = \left(x + y - \frac{xy}{x+y}\right)^2 = (d(m+n)^2 - dmn)^2$$

là số chính phương.

Vậy với $\begin{cases} x = dm^2 + dmn \\ y = dn^2 + dmn \end{cases} (m, n, d \in \mathbb{N}^*)$ thì A là

số chính phương. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải đúng suy luận đến công thức (2), nhưng không tìm ra được công thức tường minh tính x, y . Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** Bùi Thị Quỳnh, 9A3, Nguyễn Chí Công, Trần Hải Nam, Nguyễn Quốc Thứ, 8A3, THCS Lâm Thao.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/473. Cho tam giác ABC nhọn với hai đường cao BE và CK . Gọi R và S thứ tự là hình chiếu của K trên BC và BE ; P và Q thứ tự là hình chiếu của E trên BC và CK . Chứng minh các đường thẳng RS, PQ và EK đồng quy.

Lời giải. Hạ $EI \perp AB$ tại I . Dễ thấy $KQEI$ là hình chữ nhật và các tứ giác $PCEQ, BCEK$ nội tiếp.

Yên Lạc, H. Yên Lạc. **Nghệ An:** Nguyễn Nam Khánh, 9A1, THCS Quán Hành, H. Nghi Lộc, Thái Bá Bảo, 9C, THCS Lý Nhật Quang, H. Đô Lương, **Sơn La:** Diễm Đăng Hoàng, Phan Quang Huy, Nguyễn Trung Thế, 9A1, THCS chất lượng cao Mai Sơn - TK9, TTr. Hát Lót, H. Mai Sơn. **Vĩnh Long:** Nguyễn Võ Thuấn, 9A1, THCS Thị trấn Tam Bình. **Phú Yên:** Đàm Ngọc Hiếu, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, H. Đông Hòa. **Vũng Tàu:** Lê Tuấn Anh, 9A1, THCS Châu Đức, H. Châu Đức.

Hà Nguyễn Hoàng Anh, 9A5, THCS Trần Phú, H.(Q.) ?, Tỉnh (TP.) ?

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/473. Tìm số nguyên m để phương trình

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$$

có nghiệm nguyên.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$x(x^2 - 2m + 1) + m(x^2 - 2m + 1) + (x^2 - 2m + 1) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+m+1)(x^2 - 2m + 1) = 5.$$

Vì x, m là các số nguyên và 5 là số nguyên tố nên có các trường hợp sau :

TH1.

$$\begin{cases} x+m+1=1 \\ x^2-2m+1=5 \end{cases} \Rightarrow 2(x+m+1)+x^2-2m+1=7.$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5} \text{ (loại)}.$$

TH2.

$$\begin{cases} x+m+1=5 \\ x^2-2m+1=1 \end{cases} \Rightarrow 2(x+m+1)+x^2-2m+1=11$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2; m=2 \\ x=-4; m=8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

TH3.

$$\begin{cases} x+m+1=-1 \\ x^2-2m+1=-5 \end{cases} \Rightarrow 2(x+m+1)+x^2-2m+1=-7$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = -9 \text{ (vô nghiệm)}.$$

TH4.

$$\begin{cases} x+m+1=-5 \\ x^2-2m+1=-1 \end{cases} \Rightarrow 2(x+m+1)+x^2-2m+1=-11$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = -13 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=2$ và $m=8$. $\square$

➤ **Nhận xét.** Đây là bài toán không khó nên có nhiều bạn gửi bài giải với một số cách làm khác nhau. Cách giải trên đây ngắn gọn, chỉ cần kiến thức cấp

THCS. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Thanh Hóa:** Thiều Đình Minh Hùng, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoàng Hóa; **Phú Thọ:** Nguyễn Thu Hiền, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nam:** Nguyễn Công Phụng, 10 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Sơn La:** Diễm Đăng Hoàng, 9A1, THCS chất lượng cao Mai Sơn, TTr. Hát Lót, Mai Sơn; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Công Phú, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Nghệ An:** Dương Văn Minh, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Trị:** Võ Thực Khánh Huyền, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Quảng Nam:** Lê Thảo Huyền, Nguyễn Lê Thanh Hằng, Trần Văn Tình, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Nam Định:** Nguyễn Hùng Sơn, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Trục Ninh; **Bình Phước:** Lưu Trí Cường, 10T4, THPT chuyên Bình Long; **Bắc Giang:** Chu Thị Ngân, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/473. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} x+z-yz=1 \\ y-3z+xz=1 \end{cases} \quad (1). \text{ Tìm giá trị lớn nhất}$$

và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Ta viết lại (1)

$$\text{dưới dạng } \begin{cases} z(1-y)=1-x & (2) \\ z(x-3)=1-y & (3) \end{cases}$$

• Với $y=1$ thì từ (2) suy ra $x=1$. Thay vào (3) ta được $z=0$ nên $T=2$.

• Với $x=3$ thì từ (3) suy ra $y=1$. Khi đó (1) không xảy ra.

• Xét $x \neq 3, y \neq 1$. Khi đó, từ (2) và (3) ta thu

$$\text{được } z = \frac{1-x}{1-y} = \frac{1-y}{x-3}.$$

$$\text{Suy ra } x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y \quad (4)$$

Tiếp theo áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta thu được

$$4x + 2y = 2(2x + y) \leq 2\sqrt{5(x^2 + y^2)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } x^2 + y^2 + 4 \leq 2\sqrt{5(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} - 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{5} + 1$$

$$\text{hay } 6 - 2\sqrt{5} \leq T \leq 6 + 2\sqrt{5}.$$

Vậy $\max T = 6 + 2\sqrt{5}$ khi $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$ hay

$$(x; y) = \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}; \frac{5 + \sqrt{5}}{5} \right) \text{ hoặc}$$

$$(x; y) = \left(\frac{-10 - 2\sqrt{5}}{5}; \frac{-5 - \sqrt{5}}{5} \right).$$

$\min T = 6 - 2\sqrt{5}$ khi $\begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases}$ hay

$$(x; y) = \left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}; \frac{5 - \sqrt{5}}{5} \right) \text{ hoặc}$$

$$(x; y) = \left(\frac{-10 + 2\sqrt{5}}{5}; \frac{-5 + \sqrt{5}}{5} \right).$$

Cách 2. (Không phải phân chia ra các trường hợp).

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z + yz \\ y = 1 + 3z - xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 1} \\ y = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + 1} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } T = x^2 + y^2 = \frac{10z^2 + 4z + 2}{z^2 + 1}.$$

Từ đây ta đưa về xét tam thức bậc hai theo z và nhận lại kết quả T như ở trên. $\square$

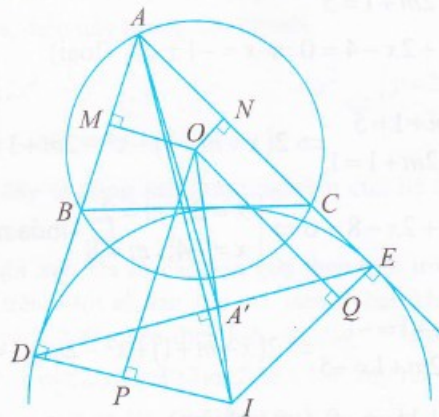
► **Nhận xét.** Một số bạn còn sử dụng phương pháp tọa độ và phương pháp lượng giác để giải. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** Nguyễn Hữu Tình, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, 10A1, THPT Lạc Long Quân, Nguyễn Minh Anh, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Phước:** Lưu Tú Cường, 10T4, Nguyễn Lê Phi Long, 11T3, THPT chuyên Bình Long; **Cà Mau:** Trần Quốc Việt, 12T, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền; **Đồng Tháp:** Nguyễn Hoàng Huy, 10H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hải Dương:** Nguyễn Đăng Sơn, 11A, THPT Nam Sách; **Hưng Yên:** Nguyễn Lê Huy, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Khánh Hòa:** Nguyễn Quang Đạt, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** Nguyễn Đăng Khánh Vân, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** Phan Quý Lộc, 10T1, Lê Trí Phú, 11T1, THPT chuyên Long An; **Nghệ An:** Nguyễn Hữu Thắng, Phạm Trần Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Phú Thọ:** Trần Quốc Lập, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Nam:** Nguyễn Lê Thanh

Hàng, 10/1, Nguyễn Huy Hải, Nguyễn Phạm Minh Trí, Trương Nhật Nguyên Bảo, Trương Ngọc Long, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Minh Triết, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** Thục Khánh Huyền, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sơn La:** Trần Hoàng Đạt, 12A1, THPT Mộc Lỵ, Mộc Châu; **Tiền Giang:** Lê Hoàng Bảo, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Minh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Nguyễn Danh Thắng, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng; **Thừa Thiên Huế:** Lê Cẩm Thanh Hà, 11T2, Lê Viết Thanh Long, Lê Bá Quốc Minh, Nguyễn Đăng Tiến Dũng, Phan Trần Hương, Cao Thị Linh, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Vĩnh Long:** Châu Minh Khánh, 11T1, Phan Gia Anh, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Vĩnh Phúc:** Phạm Thị Kiều Trang, 9A, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/473. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn bàng tiếp góc A có tâm I tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và E . OI cắt DE tại A' . Các điểm B', C' được xác định tương tự như điểm A' . Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải.



Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Gọi

M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB, AC, ID, IE . Ta thấy

$$\frac{S_{ADA'}}{S_{AEA'}} = \frac{AD \cdot AA' \cdot \sin \widehat{DAA'}}{AE \cdot AA' \cdot \sin \widehat{EAA'}} = \frac{\sin \widehat{DAA'}}{\sin \widehat{EAA'}} = \frac{DA'}{EA'} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự có } \frac{\sin \widehat{DIA'}}{\sin \widehat{EIA'}} = \frac{DA'}{EA'} \quad (2)$$

Mặt khác $\frac{\sin \widehat{DIA'}}{\sin \widehat{EIA'}} = \frac{OP}{OI} : \frac{OQ}{OI} = \frac{OP}{OQ} = \frac{MD}{NE}$

$$= \frac{p - \frac{c}{2}}{p - \frac{b}{2}} = \frac{a+b}{a+c} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} = \frac{a+b}{a+c}$.

Chúng minh tương tự ta được

$$\frac{\sin \widehat{ACC'}}{\sin \widehat{BCC'}} = \frac{c+a}{c+b}; \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = \frac{b+c}{b+a}.$$

Từ đó $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACC'}}{\sin \widehat{BCC'}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = 1$.

Theo định lý Ceva dạng lượng giác ta thấy AA' , BB' , CC' , đồng quy. $\square$

► **Nhận xét.** Một số bạn kẻ các đường phân giác trong AX , BY , CZ của $\triangle ABC$, chứng minh $OI \perp YZ$, từ đó

suy ra $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} = \frac{YA}{ZA}; \frac{\sin \widehat{ACC'}}{\sin \widehat{BCC'}} = \frac{XC}{YC}; \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = \frac{ZB}{XB}$,

kết hợp định lý Ceva dạng lượng giác và định lý Ceva dạng hình học cũng đi đến điều cần chứng minh. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Sơn La:** Trần Hoàng Đạt, 12A1, THPT Mộc Ly, Mộc Châu; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Nguyễn Hữu Thắng, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** Huỳnh Hữu Nhật, Lê Viết Thanh Long, Trương Ngọc Long, Lê Bá Quốc Minh, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/473. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^b b^c c^a \leq ab+bc+ca.$$

Lời giải. (Của đa số các bạn). Xét hàm số

$$f(x) = \ln x \quad (x > 0). \text{ Ta có } f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x > 0$$

do đó $f(x)$ là hàm lõm trên $(0, +\infty)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$a \ln x + b \ln y + c \ln z \leq \ln(ax+by+cz) \quad (1)$$

$\forall x, y, z \in (0, +\infty)$ (do $a+b+c=1$).

$$\Rightarrow x^a \cdot y^b \cdot z^c \leq ax+by+cz, \forall x, y, z > 0.$$

Chọn $x=c, y=a, z=b$ ta có

$$a^b b^c c^a \leq ab+bc+ca.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Một số bạn có cách giải không dùng bất đẳng thức Jensen mà dùng bất đẳng thức $e^{x-1} \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc dùng bất đẳng thức Cauchy suy rộng.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Thừa Thiên Huế:** Phan Cảnh Minh Phước, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** Trương Nhật Nguyên Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, Phạm Trần Anh, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Minh Triết, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Lâm Đồng:** Nguyễn Đăng Khánh Vân, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/473. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên dương n sao cho n^2+1 có một ước nguyên tố $p > 2n+\sqrt{10n}$.

Lời giải. Xét số nguyên tố p có dạng $8k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) (có vô số số nguyên tố như vậy là kết quả quen biết). Dễ thấy phương trình $x^2 = -1 \pmod{p}$ có đúng hai nghiệm nguyên dương $n < m$ có tổng $n+m=p$. Suy ra $p|n^2+1$ và $n < \frac{p}{2}$.

Ta sẽ chứng minh $p > 2n+\sqrt{10n}$.

Đặt $n = \frac{p-1}{2} - r$, với r là số tự nhiên, thay vào phương trình $x^2 = -1 \pmod{p}$ ta thu được $(2r+1)^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$.

Mặt khác $(2r+1)^2 + 4 \equiv 5 \pmod{8}$, cho nên nếu đặt $(2r+1)^2 + 4 = p \cdot q$, với $p = 8k+1$ và q là số tự nhiên, thì $q \equiv 5 \pmod{8}$ và do đó $q \geq 5$.

$$\text{Suy ra } (2r+1)^2 + 4 = p \cdot q \geq 5p \Rightarrow r \geq \frac{\sqrt{5p-4}-1}{2}.$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{5p-4} \geq 0 \text{ thì } p = \frac{x^2+4}{5}, r \geq \frac{x-1}{2}$$

và $n = \frac{p-1}{2} - r \leq \frac{1}{2}(p-x)$. Thay $p = \frac{x^2+4}{5}$

vào $n \leq \frac{1}{2}(p-x)$, ta có được bất phương trình

$$x^2 - 5x - 10n + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5 + \sqrt{40n+9}}{2}.$$

Từ $n \leq \frac{1}{2}(p-x)$ ta có

$$p \geq 2n + x \geq 2n + \frac{5 + \sqrt{40n+9}}{2} > 2n + \sqrt{10n}.$$

Ta xây dựng dãy số nguyên tố dạng $8k+1$ bắt đầu từ $p_1 = 17$. Giả sử có p_i và tương ứng là n_i được xác định theo cách trên, ta chọn số nguyên tố p_{i+1} dạng $8k+1$ tiếp theo thỏa mãn $p_{i+1} > n_i^2$. Do $p_{i+1} \leq n_{i+1}^2$ cho nên ta có $n_i < n_{i+1}$ và do đó có vô hạn số n thỏa mãn điều kiện bài toán. $\square$

►Nhận xét. Tất cả các bạn gửi lời giải đều quên không lập luận có vô hạn giá trị n khác nhau thỏa mãn điều kiện bài toán. Các bạn sau đây có lời giải tương đối hoàn chỉnh: **Nghệ An:** Trần Tiến Mạnh, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Võ Việt Anh, Phạm Trần Anh,** 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Quảng Nam:** Nguyễn Phạm Minh Trí, Trương Nhật Nguyễn Bảo, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Tam Kỳ; **Thanh Hóa:** Đặng Quang Anh, 10I, THPT chuyên Lam Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/473. Với hai số nguyên dương bất kỳ n, p , tìm số các hàm số

$f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{-p, -p+1, -p+2, \dots, p\}$ thỏa mãn tính chất $|f(i) - f(j)| \leq p$ với $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Lời giải. Nhận xét: nếu tập hợp A có k phần tử, tập hợp B có l phần tử thì số cặp (x, y) trong đó $x \in A, y \in B$ bằng $k \cdot l$.

Với mỗi số $m \in \{-p, -p+1, \dots, p\}$ ta kí hiệu t_m là số hàm số f thỏa mãn bài toán và $\min_{1 \leq i \leq n} f(i) = m$.

Ta có $t_m =$ số hàm số $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{m, m+1, \dots, a_m\}$ - số hàm số $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{m+1, \dots, a_m\}$

$$= (a_m - m + 1)^n - (a_m - m)^n,$$

trong đó $a_m = \min\{m + p, p\}$.

$$\text{Chú ý } a_m = \begin{cases} m + p & \text{nếu } m \leq 0 \\ p & \text{nếu } m > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } t_m = \begin{cases} (p+1)^n - p^n & \text{nếu } m \leq 0 \\ (p-m+1)^n - (p-m)^n & \text{nếu } m > 0 \end{cases}.$$

Bởi vậy số các hàm số thỏa mãn bài toán là

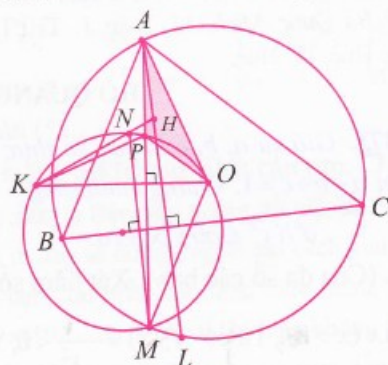
$$\begin{aligned} t_{-p} + t_{-p+1} + \dots + t_p &= (p+1)((p+1)^n - p^n) + \\ &+ \sum_{m=1}^p ((p-m+1)^n - (p-m)^n) \\ &= (p+1)^{n+1} - (p+1) \cdot p^n + p^n = (p+1)^{n+1} - p^{n+1}. \end{aligned}$$

►Nhận xét. Đây là bài toán tính số phần tử của tập hợp dạng cơ bản, hay, nhưng không quá phức tạp. Rất tiếc là đã không có một bạn học sinh nào giải đúng bài toán này.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T12/473. Cho tam giác không vuông ABC , O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC . M là điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp (M khác A, B, C); N là điểm đối xứng của M qua BC; P là giao điểm thứ hai của AM và đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN. Chứng minh HN đi qua trực tâm của tam giác AOP.

Lời giải. Gọi K là trực tâm của tam giác AOP; L là giao điểm thứ hai của AH và (O).



Để thấy $(KP, KO) \equiv (AO, AP) \pmod{\pi}$

(vì $KP \perp AO; KO \perp AP$)

$\equiv (AO, AM) \pmod{\pi}$ (vì $AP \equiv AM$)

$\equiv (MA, MO) \pmod{\pi}$ (vì $OA = OM$)

$$\equiv (MP, MO) \pmod{\pi} \text{ (vì } MA \equiv MP).$$

Từ đó, chú ý rằng bốn điểm M, N, P, O cùng thuộc một đường tròn, suy ra bốn điểm K, M, N, O cùng thuộc một đường tròn.

$$\text{Vậy } (NK, NM) \equiv (OK, OM) \pmod{\pi} \text{ (vì } O \in (NKM))$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overline{OA}, \overline{OM}) \pmod{\pi} \text{ (vì } OA=OM; OK \perp AP \equiv AM)$$

$$\equiv (LA, LM) \pmod{\pi} \text{ (vì } L \in (O))$$

$$\equiv (LH, LM) \pmod{\pi} \text{ (vì } LA \equiv LH)$$

$$\equiv (NH, NM) \pmod{\pi} \text{ (vì } HNML \text{ là hình thang cân).}$$

Do đó HN đi qua K (đpcm). $\square$

► **Nhận xét.** Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên đa số các bạn không biết sử dụng khái niệm góc định hướng giữa hai đường thẳng để khắc phục tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ. Sau đây là một số bạn có lời giải tương đối tốt: **Sơn La:** Trần Hoàng Đạt, THPT Mộc Lỵ, Mộc Châu; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Trung Phương, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Nam Định:** Trần Minh Hiếu, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Nghệ An:** Nguyễn Hữu Thắng, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Lê Đình Tập, Nguyễn Đình Nhật, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** Trương Ngọc Long, Lê Bá Quốc Minh, Phan Trần Hương, 11T1, THPT chuyên Quốc Học, TP. Huế; **Đồng Nai:** Trần Phạm Thế Vinh, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa; **Long An:** Phạm Quốc Thắng, 12T1, THPT chuyên Long An, TP. Tân An.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/473. Một cuộn cảm có lõi sắt được mắc vào nguồn điện xoay chiều có điện áp $u(t) = U_0 \cos \omega t$. Độ tự cảm của cuộn dây là L và điện trở thuần $R = 10^3 \omega L$. Sau một chu kì biến thiên của u , do tổn hao để làm nhiễm từ sắt ở lõi toả ra một nhiệt lượng tỉ lệ thuận với giá trị cực đại của năng lượng từ trường dự trữ trong

cuộn cảm với hệ số tỉ lệ $k = 2\pi \cdot 10^{-3}$. Tính công suất tiêu thụ trung bình của cuộn dây.

Lời giải. Dòng điện cực đại trong mạch :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}.$$

Xét trong một chu kì, ta có nhiệt lượng toả ra

$$\text{trên } R \text{ là: } Q_R = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 RT = \frac{U_0^2 RT}{2(R^2 + Z_L^2)}.$$

Nhiệt lượng toả ra trong lõi sắt :

$$Q_{LS} = k \frac{L}{2} I_0^2 = \frac{kLU_0^2}{2(R^2 + Z_L^2)}.$$

Công suất toả nhiệt trung bình :

$$\mathcal{P} = \frac{Q_R + Q_{LS}}{T} = \frac{U_0^2}{2(R^2 + Z_L^2)} \left(R + \frac{kL}{T} \right) \quad (*)$$

Thay $R = 10^3 \omega L$; $Z_L = \omega L$; $k = 2\pi \cdot 10^{-3}$;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ vào (*), ta được :

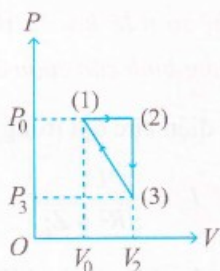
$$\mathcal{P} = \frac{U_0^2 \omega L}{2\omega^2 L^2 (10^6 + 1)} (10^3 + 10^{-3}) = \frac{U_0^2}{2 \cdot 10^3 \omega L}.$$

$$\text{Vậy } \mathcal{P} = \frac{U_0^2}{2 \cdot 10^3 \omega L}. \quad \square$$

► **Nhận xét:** Rất tiếc không có bạn nào có lời giải đúng hoàn toàn cho đề ra kì này. Duy nhất có bạn Trần Thị Trang, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định có hướng giải đúng.

DINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/473. Một mol khí lý tưởng biến đổi trạng thái theo chu trình biểu diễn trên đồ thị $P - V$ (hình vẽ). Biết rằng trong chu trình có hai trạng thái có cùng nhiệt độ thấp nhất $T_{\min}$ và trạng thái có nhiệt độ cao nhất $T_{\max}$ (với $T_{\max} = 2T_{\min}$). Chứng tỏ trong chu trình có 3 trạng thái có nhiệt độ bằng nhau. Xác định các thông số ở 3 trạng thái đó (coi như đã biết P_0 và V_0).



Lời giải. Hai trạng thái có nhiệt độ thấp nhất là

$$(1) \text{ và } (3): T_{\min} = T_0 = \frac{p_0 V_0}{R}.$$

Trạng thái (2) có nhiệt độ cao nhất: $T_{\max} = 2T_0$

Trong quá trình (3) – (1) ta dễ dàng lập được phương trình sự phụ thuộc của p vào V :

$$p = -\frac{p_0}{2V_0}V + \frac{3}{2}p_0 \quad (1)$$

Kết hợp với phương trình trạng thái $pV = RT$ ta

được phương trình:

$$T = \frac{1}{R} \left(-\frac{p_0}{2V_0}V^2 + \frac{3}{2}p_0V \right) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra nhiệt độ lớn nhất trong quá trình

$$(3) - (1) \text{ là: } T_{\max 31} = \frac{9}{8} \frac{p_0 V_0}{R} = \frac{9}{8} T_0 = T_x.$$

Vậy trong 3 quá trình, có 3 trạng thái có nhiệt độ bằng nhau và bằng T_x , các thông số còn lại của các trạng thái này là:

$$\left(p_0; \frac{9}{8}V_0 \right); \left(\frac{9}{16}p_0; 2V_0 \right); \left(\frac{3}{4}p_0; \frac{3}{2}V_0 \right). \square$$

► **Nhận xét:** Rất tiếc không có bạn nào có lời giải đúng hoàn toàn cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN ...

(Tiếp theo trang 11)

Câu 48. d đi qua giao điểm $I(-3; 1; 1)$ của Δ và (P) . Gọi $\vec{u}(a; b; c)$ là VTCP của d . Ta có:

$$\begin{cases} d \subset (P) \\ d \perp \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3+at+2(1+bt)-3(1+ct)+4=0, \forall t \\ a+b-c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-3c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=2c \end{cases}$$

Chọn $\vec{u}(-1; 2; 1)$. d đi qua $I(-3; 1; 1)$ và có VTCP

$\vec{u}(-1; 2; 1)$ nên $d: \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Chọn D.

Câu 50. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm B nên có phương trình dạng $ax+b(y-4)+cz=0$ (Q)

($a, b, c \in \mathbb{R}, a^2+b^2+c^2 > 0$).

Mà điểm A cũng thuộc (Q) nên

$$a.1+b(2-4)+c(-1)=0 \Leftrightarrow a=2b+c \quad (1)$$

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n}_p = (2; -1; -2).$$

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là:

$$\vec{n}_q = (a; b; c).$$

Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Khi đó ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{n}_q|} = \frac{|2a-b-2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (2)$$

Thế $a=2b+c$ (1) vào (2) ta được

$$\cos \alpha = \frac{|3b|}{3\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}}.$$

• Nếu $b=0$ thì: $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$.

• Nếu $b \neq 0$ thì: $\cos \alpha$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{b}\right) + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b}+1\right)^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn D.

ĐẶNG THỊ QUỲNH HOA

(GV THPT Nghèn, Can Lộc, Hà Tĩnh)

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T8/477. Assume that H is a point inside the triangle ABC . Let K be the orthocenter of ABH . The line which goes through H and is perpendicular to BC intersects AK at E . The line which goes through H and is perpendicular to AC intersects BK at F . Prove that $CH \perp EF$.

Problem T9/477. For $n \in \mathbb{N}^*$, let $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Let $\{S_n\}$ denote the fractional part of S_n . Show that for every $\varepsilon \in (0, 1)$, there always exists $n \in \mathbb{N}^*$ such that $\{S_n\} \leq \varepsilon$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/477. Find the smallest k such that we can use k colors to color the numbers $1, 2, \dots, 20$ in the following way. For each number, we use exactly one color, we can use one color for more than one number, and no 3 numbers with the same color forms an arithmetic sequence.

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ... (Tiếp theo trang 15)

Từ (4) và (5) suy ra $VT(3) \geq VP(3)$ (6)

Đẳng thức trong (6) xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{16}$ và

$y = \sqrt{28x-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Đối chiếu với điều kiện và thử

lại ta tìm được nghiệm của HPT đã cho là

$$(x; y) = \left(\frac{1}{16}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các hệ phương trình sau

- $$\begin{cases} x+y=2017 \\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}}+\frac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)=2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-10 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+8y=38 \end{cases}$$

Đọc lại cho đúng: Trong đề bài Bài toán 8 (trang 14, TH&TT số 476, T2/2017) có cho các kích thước của hình chóp cắt $ABCD.EFGH$ là 30×80 và 28×78 . Do $ABCD.EFGH$ là hình chóp cắt nên các cạnh của hai đáy phải tương ứng tỷ lệ, tức là $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$. Vì $\frac{30}{28} \neq \frac{80}{78}$ nên hình chóp cắt đã cho sẽ không tồn tại! Vậy mặc dù trong lời giải các tính toán theo số liệu đầu bài là đúng, tuy nhiên số liệu ở đề bài cần phải sửa cho phù hợp với nhận xét trên, chẳng hạn các kích thước hai đáy của hình chóp cắt là 30×80 và 27×72 . Tòa soạn chân thành xin lỗi bạn đọc.

TH&TT

Problem T11/477. Consider the sequence (x_n) determined as follows

$$\begin{cases} x_1 = -\pi, x_2 = -1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + \log_2 \frac{9 + 3(\cos x_{n+1} - \cos x_n) - \cos x_{n+1} \cos x_n}{8 + \sin^2 x_n}, \\ n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Prove that the sequence (x_n) has a finite limit and find that limit.

Problem T12/477. Given a quadrilateral $ABCD$ inscribed a circle (O) . The external angle bisectors of the angles $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ respectively intersects the external angle bisectors of the angles $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ at X, Y, Z, T . Let E and F respectively be the midpoints of XZ and YT . Prove that

- $XYZT$ is a cyclic quadrilateral and $XZ \perp YT$.
- O, E , and F are collinear.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 16x + 2\sqrt{1-4x} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{8xy} \\ x^3 + 2x + 1 = 2\sqrt{y} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \\ \sqrt{2x-2} - \sqrt{6y-9} = 16x^2 - 48y + 35 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^3(1-x) + y^3(1-y) = 16xy + 32 \\ |4x-3y+2014| + |3x-4y| = 2017 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+3x+2} = 4xy-3x-2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (2x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{2x(4x+1)} \\ 12x^2 - 2x + \frac{1}{2} = y\sqrt{2x(2x+1)} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy(1-xy)} \\ 8xy^3 + 2y^3 + 1 \geq 4x^2 + 2\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$$



MỘT SỐ ĐỊNH HƯỚNG CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI TRONG ĐẠI SỐ

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Thứng minh tồn tại là một trong những vấn đề khó của toán sơ cấp. Trong các kỳ thi Olympic các cấp, yêu cầu chứng minh tồn tại thường xuất hiện ở vị trí cuối cùng và đóng vai trò phân loại thí sinh, đòi hỏi thí sinh phải có khả năng xây dựng, phân biện, phân tích từ các trường hợp cơ sở, sáng tạo, tư duy tổng hợp. Chúng ta hãy cùng theo dõi qua một số thí dụ.

Thí dụ 1. Cho trước số nguyên dương k . Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại n số thực thuộc khoảng $(-1, 1)$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1 + \dots + a_n = 0; a_1^2 + \dots + a_n^2 = k.$$

Phân tích. Gọi số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm là $f(k)$. Rõ ràng $f(1) = 2$ do nếu $f(1) = 1$ thì $a_1 = 0$,

$a_1^2 = 1$, vô lý và $a_1 = -a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 1)$ thỏa mãn bài toán. Ta có $f(k) \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $f(2) = 2$ thì ta có $a_1 + a_2 = 0, a_1^2 + a_2^2 = 2$ suy ra $a_1 = -a_2 = \pm 1 \notin (-1, 1)$, không thỏa mãn.

Nếu $f(2) = 3$, giả sử $a_1, a_2 \geq 0$ thì

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq a_1 + a_2 + a_3^2 = a_3^2 - a_3 < 2, \text{ vô lý.}$$

Rõ ràng $a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (-1, 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do vậy $f(2) = 4$.

Từ đây $f(k) \geq k+1$ với mọi k nguyên dương.

Rõ ràng $a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (-1, 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do vậy $f(3) = 4$.

Từ đây ta dự đoán rằng $f(k) = k+1$ với k lẻ và $f(k) = k+2$ với k chẵn.

Lời giải. Do $a_i \in (-1; 1)$ nên $0 \leq a_i^2 < 1$ và

$$n > a_1^2 + \dots + a_n^2 = k \text{ nên } f(k) > k.$$

Nếu k lẻ tức $k = 2l+1$ thì tồn tại

$$x_i = (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}}; \forall i = 1, 2, \dots, 2l+2 \text{ thỏa mãn.}$$

Do đó $f(2l+1) = 2l+2$. Nếu k chẵn tức $k = 2l$.

Nếu $f(2l) = 2l+1$. Giả sử các số $a_1, a_2, \dots, a_{l+1}$ là các số không âm. Ta có

$$a_1^2 + \dots + a_{2l+1}^2 \leq a_1 + \dots + a_{l+1} + a_{l+2}^2 + \dots + a_{2l+1}^2 \\ = \sum_{i=l+2}^{2l+1} (a_i^2 - a_i) < 2l, \text{ vô lý } (t^2 - t < 2; \forall |t| < 1).$$

Tóm lại $f(2l) = 2l+2$ vì tồn tại

$$x_i = (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{l}{l+1}}; \forall i = 1, 2, \dots, 2l+2 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là $2 \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$.

Thí dụ 2 (VNTST 2015). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại n số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

- i) Tổng của n số đó dương;
- ii) Tổng lập phương của n số đó âm;
- iii) Tổng lũy thừa bậc 5 của n số đó dương.

Phân tích. Xét $n = 3$. Giả sử $a + b + c > 0, a^3 + b^3 + c^3 < 0, a^5 + b^5 + c^5 > 0$ và $a \geq b \geq c$ (hệ quả là $a > 0 > c$). Nếu $b > 0$ (chú ý nếu 1 biến bằng không thì quy về $n = 2$ loại) ta có $x + y > 1, x^3 + y^3 < 1, x^5 + y^5 > 1$

$$\text{với } x = \frac{a}{-c}, y = \frac{b}{-c} \in (0; 1).$$

Ta có $x^5 + y^5 < x^3 + y^3 < 1$, vô lý.

Nếu $c < b < 0$ ta có $x + y < 1, x^3 + y^3 > 1, x^5 + y^5 < 1$

$$\text{với } x = \frac{-b}{a}; y = \frac{-c}{a} \in (0; 1).$$

Ta có $x^3 + y^3 < x + y < 1$, vô lý.

Với $n = 4$. Giả sử $a + b + c + d > 0, a^3 + b^3 + c^3 + d^3 < 0, a^5 + b^5 + c^5 + d^5 > 0$ và $a \geq b \geq c \geq d$.

Nếu $b > 0; c > 0$ hoặc $d < c < b < 0$ giải quyết tương tự trường hợp $n = 3$.

Nếu $a > b > 0 > c > d$ ta có $x + y > z + 1, x^3 + y^3 < z^3 + 1, x^5 + y^5 > z^5 + 1$ với

$$x = \frac{a}{-d} > y = \frac{b}{-d} > 0; z = \frac{-c}{-d} \in (0; 1).$$

Ta có $xy > \frac{t^3 - z^3 - 1}{3t} > 0$ ($t = x + y > z + 1$) nên

$$x^2 + y^2 < \frac{t^3 + 2z^3 + 2}{3t}.$$

Khi đó $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y)$

$$< (z^3 + 1) \frac{t^3 + 2z^3 + 2}{3t} - \frac{(t^3 - z^3 - 1)^2}{9t} < 1 + z^5$$

vì biến đổi tương đương điều này ta được

$$t^6 - 5(z^3 + 1)t^3 + 9(z^5 + 1)t - 5(z^3 + 1)^2 > 0(*) \text{ vô lý}$$

do $x^5 + y^5 > 1 + z^5$. Ta có (*) đúng với $t > z + 1 > 2$

do (*) $\Leftrightarrow f(t) > 0$ với

$$f(t) = t^6 - 5(z^3 + 1)t^3 + 9(z^5 + 1)t - 5(z^3 + 1)^2.$$

Ta có $f'(t) = 6t^5 - 15(z^3 + 1)t^2 + 9(1 + z^5)$ và

$$f(z + 1) = 0, f'(z + 1) = 45z^2(z + 1) > 0.$$

Lại có $f''(t) = 30t(t^3 - z^3 - 1) > 0$ nên (*) đúng.

Khi $n = 5$, cho $a_1 = a_2 = x, a_3 = a_4 = y, a_5 = 2z$ ta cần chứng minh hệ này có nghiệm

$$x + y = 1 - z, x^3 + y^3 = -1 - 4z^3, x^5 + y^5 = 1 - 16z^5.$$

Khử x, y ta chỉ cần chỉ ra phương trình sau có ít nhất một nghiệm lớn hơn 1.

$$t(z) = 9z^6 - 18z^5 - 9z^4 - 9z^3 + 6z^2 - 6z + 2 = 0.$$

Chú ý $t(1) < 0$ nên tồn tại $z > 1$ thỏa mãn.

Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là 5.

Thí dụ 3 (VNTST 2016). Cho các số thực phân biệt $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}$. Với mỗi đa thức $P(x)$, đặt

$$V(P(x)) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_{16}).$$

Chứng minh tồn tại duy nhất đa thức $Q(x)$ bậc 8 có hệ số x^8 bằng 1 thỏa mãn:

i) $V(Q(x) \cdot P(x)) = 0$ với mọi đa thức $P(x)$ có bậc bé hơn 8;

ii) $Q(x)$ có 8 nghiệm thực (tính cả bội).

Phân tích. Ta sẽ chứng minh sự duy nhất trước, vì nó đơn giản hơn. Ta có

$$V([P_1 - P_2](x)) = V(P_1(x)) - V(P_2(x)).$$

Giả sử tồn tại đa thức $Q_1(x), Q_2(x)$ thỏa mãn. Đặt

$$H(x) = Q_1(x) - Q_2(x) \text{ thì } \deg H(x) < 8.$$

Vì $V(H(x)H(x)) = V([Q_1(x) - Q_2(x)]H(x)) = 0$ nên $H(x) \equiv 0$, đpcm.

Ta xem bài toán này là $n = 8$ và coi $16 = m$.

Với $n = 1$ chọn $Q_1(x) = x - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}{m}$.

Ta xét tiếp $n = 2$. Đặt $Q_2(x) = x^2 + q_1x + q_0$ thay vào tính toán trực tiếp ta được hệ

$$q_1 \sum_{i=1}^m \alpha_i^j + q_0 \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j-1} = - \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j+1}, j = 1, 2.$$

Do $m \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right)^2 > 0$ nên tồn tại duy nhất bộ

(q_1, q_0) thỏa mãn điều kiện trên. Lại do

$$\Delta = q_1^2 - 4q_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (q_1 + 2\alpha_i)^2 > 0$$

nên $Q_2(x)$ có hai nghiệm.

Từ trường hợp trên, ta phát hiện i) tương đương với $V(x^k Q(x)) = 0; \forall k < \deg Q(x)$.

Ta xét tiếp trường hợp $n = 3$.

Đặt $Q_3(x) = x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$ thay vào tính toán trực tiếp ta được hệ

$$q_2 \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^j \right) + q_1 \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j-1} + q_0 \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j-2} = - \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j+1}$$

với $j = 2, 3, 4$.

Như vậy ta sẽ dùng α_i phân biệt để chứng minh hệ trên có nghiệm (bởi nếu α_i bằng nhau thì hệ có vô số nghiệm), đồng thời từ sự tồn tại bộ nghiệm này chỉ ra sự có nghiệm. Nếu giải trực tiếp thì ta mới chỉ hình dung được trên lý thuyết là "hệ phương trình n ẩn n phương trình thì có nghiệm" nhưng khối lượng tính toán quá lớn. Do không giải trực tiếp được hệ trên nên ta sẽ dùng "truy hồi" biểu diễn nghiệm dựa vào nghiệm của 2 trường hợp là $n = 2$ và $n = 1$.

Cụ thể, ta sẽ tìm a, b sao cho

$$Q_3(x) = (x + a)Q_2(x) + bQ_1(x).$$

thỏa mãn điều kiện $V(x^k Q_3(x)) = 0; k = 0, 1, 2$. Điều kiện $V(Q_3(x)) = 0$ sẽ cho

$$Q_1(x) = x - \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{m} \text{ và } Q_2(x) = x^2 + q_1x + q_0$$

trong đó q_1, q_0 thỏa mãn hệ

$$q_1 \sum_{i=1}^m \alpha_i^j + q_0 \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j-1} = - \sum_{i=1}^m \alpha_i^{j+1}, j = 1, 2.$$

Do $m \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right)^2 > 0$ nên tồn tại duy nhất bộ

(q_0, q_1) thỏa mãn.

Bước tiếp theo là giải $V(xQ_3(x)) = 0$ để tìm b .

Thật vậy, để $V(xQ(x)) = 0$ cần có

$$b = -\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 Q_2(\alpha_i)}{\sum_{i=1}^m \alpha_i Q_1(\alpha_i)} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i Q_1(\alpha_i) \neq 0 \text{ do các } \alpha_i \text{ phân biệt} \right).$$

Bước tiếp theo là giải $V(x^2 Q(x)) = 0$ để tìm a .

Thật vậy, để $V(x^2 Q(x)) = 0$ cần có

$$a = -\frac{b \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 Q_1(\alpha_i) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^3 Q_2(\alpha_i)}{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 Q_2(\alpha_i)}.$$

Nếu $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 Q_2(\alpha_i) = 0$ thì $\sum_{i=1}^m Q_2^2(\alpha_i) = 0$, vô lý do

$Q_2(x)$ là đa thức bậc 2 và $m > 2$.

Ta chỉ chứng minh $Q_3(x)$ có ba nghiệm thực.

Do $V(Q_3(x)) = 0$ nên tồn tại i_0 để $Q_3(\alpha_{i_0}) \leq 0$.

Khi đó $Q_3(x)$ có ít nhất một nghiệm là n_1 .

Đặt $Q_3(x) = (x - n_1)T(x)$ với $T(x)$ có bậc 2.

Khi đó $\sum_{i=1}^m (x - n_1)^2 T(\alpha_i) = 0$.

Suy ra tồn tại i_1 sao cho $T(\alpha_{i_1}) \leq 0$.

Suy ra $Q_3(x)$ có ít nhất hai nghiệm n_1, n_2 . Xét

tương tự, suy ra $Q_3(x)$ có ba nghiệm n_1, n_2, n_3 .

Bài toán được giải xong khi $n = 3$, với $n = 8$ hoàn toàn tương tự, bạn đọc tự viết lời giải.

Thí dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại đa thức bậc $2n$ có ít nhất một nghiệm thực, đồng thời tất cả các hệ số của đa thức này đều là các số thực thuộc đoạn $[2017; 2018]$.

Phân tích. Gọi $f(k)$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn với hệ số của đa thức thuộc đoạn $[k; k+1]$.

Ta có $f(1) = 1$ do tồn tại các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c \in [1, 2]$ và $b^2 - 4ac \geq 0$ là $b = 2, a = c = 1$ (nghiệm -1). Nếu $f(2) = 1$ thì tồn tại các số thực $a, b, c \in [2, 3]$ thỏa mãn $b^2 - 4ac \geq 0$. Khi đó $9 \geq b^2 \geq 4ac \geq 16$, vô lý. Ta kiểm tra $f(2) = 2$.

Trong trường hợp $f(1)$ ta thấy đa thức thỏa mãn có hệ số tại biên, hệ số bậc cao nhất là biên nhỏ nhất và nghiệm là -1 .

Thử đa thức $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ thấy thỏa mãn.

Ta dự đoán $f(k) = k, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Ta thấy $n = 2017$ thỏa mãn. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ bậc $2n_0$ với $n_0 < 2017$ thỏa mãn. Suy ra $T(x) = P(-x)$ có nghiệm dương x_0 .

Đặt $Q(x) = 2017x^{2n_0} - 2018x^{2n_0-1} + \dots + 2017$, ta có

$T(x) \geq Q(x); \forall x > 0$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^{2n_0} + x^{2n_0-2} + \dots + 1}{x^{2n_0-1} + x^{2n_0-3} + \dots + x} \geq \frac{n_0 + 1}{n_0}, \forall x > 0.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này đúng do

$$(n_0 + 1)x^{2n_0-v} \leq \frac{1}{2}(n_0 + 1)x^{2n_0-v+1} + \frac{1}{2}(n_0 + 1)x^{2n_0-v-1}; \forall v \in [1; 2n_0 - 1]$$

và $x^{2n_0} + 1 \geq x^u + x^{2n_0-u}, \forall u \in [0; 2n_0]$.

Từ đó suy ra $T(x_0) \geq Q(x_0) > 0$, vô lý.

Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là 2017.

Thí dụ 5. Cho dãy các đa thức với hệ số thực $\{P_n(x)\}_{n=1,2,3,\dots}$ thỏa mãn điều kiện

$$P_n(2 \cos x) = 2^n \cos nx; \forall x \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm số n nhỏ nhất thỏa mãn

$$\frac{2018 \sqrt[n]{P_{2018}(x)} - 2}{x - 2} \leq k; \forall x \neq 2.$$

Lời giải. Ta có $P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) - 4P_{n-2}(x)$ (*).

Thật vậy $\cos(nx) + \cos((n-2)x) \equiv 2 \cos x \cos((n-1)x)$.

Do đó $P_n(2 \cos x) \equiv 4 \cos x P_{n-1}(2 \cos x) - 4P_{n-2}(2 \cos x)$

nên (*) đúng. Từ đó

$$P_n(x) \equiv \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4})^n + (x - \sqrt{x^2 - 4})^n}{2}; \forall n \geq 1.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}, \sqrt[n]{P_n(x)} = 2 \sqrt[n]{\frac{a^n + a^{-n}}{2}} = 2t.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{\sqrt[n]{P_n(x)} - 2}{x - 2} \leq n; \forall x \neq 2$

$$\text{tương đương } \frac{t^n - 1}{t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1} \leq n \frac{(a-1)^2}{2a}.$$

$$\text{Do } t^n - 1 = \frac{(a^n - 1)^2}{2a^n} = \frac{(a-1)^2(a^{n-1} + \dots + a + 1)^2}{2a^n} \text{ nên}$$

ta chỉ cần chứng minh (với $n = 2m$)

$$na^{n-1}(t^{n-1} + \dots + t + 1) \geq (a^{n-1} + \dots + a + 1)^2.$$

Điều này đúng theo BĐT trung bình lũy thừa

$$\begin{aligned} VT &\geq na^{n-1} \left[\frac{a^{n-1} + a^{1-n}}{2} + \dots + \frac{a + a^{-1}}{2} + 1 \right] \\ &\geq m \left[a^{2n-2} + a^{2n-3} + \dots + 2a^{n-1} + \dots + a + 1 \right] \\ &\geq m \left[(a^{n-1} + 1)^2 + (a^{n-2} + a)^2 \dots (a^m + a^{m-1})^2 \right] \geq VP. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f(a) = \frac{\sqrt[2018]{\frac{a^{2018} + a^{-2018}}{2}} - 1}{\frac{a + a^{-1}}{2} - 1} < 2018.$$

Theo quy tắc L'Hopital thì $\lim_{a \rightarrow 1} f(a) = 2018$.

Nếu $k \geq 2018$ thì $k \geq 2018 > f(a); \forall a \neq 1$.

Nếu $k < 2018$, thì do $\lim_{a \rightarrow 1} f(a) = 2018$ nên với

$\varepsilon = 2018 - k > 0$, tồn tại $M \in \mathbb{Z}^+$ đủ lớn sao cho

$$\left| f\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 2018 \right| < \varepsilon; \forall n \geq M \text{ hay}$$

$$f\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > 2018 - \varepsilon = k; \forall n \geq M, \text{ vô lý.}$$

Vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là 2018.

Thí dụ 6 (VMO 2016). Chứng minh tồn tại vô số số n sao cho phần lẻ của $\ln[(2n^2 + 1)(n^2 + n + 1)]$ không vượt quá $\frac{1}{2016}$.

Phân tích. Đặt $x_n = \ln[(2n^2 + 1)(n^2 + n + 1)]$.

Rõ ràng x_n không nguyên, $\{x_n\}$ tăng đến vô cùng và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Dãy $\{x_n\}$ tăng nhanh hay chậm của thể hiện qua $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

Ta có $\forall M \in \mathbb{Z}^+; \exists n_1 \in \mathbb{Z}^+ : x_{n+1} > M; \forall n \geq n_1$.

$\forall \varepsilon > 0; \exists n_2 \in \mathbb{Z}^+ : 0 < x_{n+1} - x_n < \varepsilon; \forall n \geq n_2$.

Khi n rất lớn thì x_n, x_{n+1} rất gần nhau (có thể nhỏ tùy ý), vì vậy nếu tồn tại một số nguyên ở giữa chúng thì chắc chắn $\{x_{n+1}\} < \varepsilon$.

Thật vậy nếu tồn tại vô số n để giữa x_n, x_{n+1} có một số nguyên thì sẽ tồn tại vô số n để $[x_{n+1}] + \{x_{n+1}\} - [x_n] - \{x_n\} < \varepsilon$, tức tồn tại vô số n để $\{x_{n+1}\} < \varepsilon + \{x_n\} - 1 < \varepsilon$, đpcm.

Giả sử tồn tại hữu hạn n để giữa x_n, x_{n+1} có một số nguyên thì sẽ tồn tại $n_3 \in \mathbb{Z}^+$ để với mọi $n > n_3$ thì giữa x_n, x_{n+1} không có số nguyên nào. Điều này mâu thuẫn với $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Nhận xét. Với mỗi số nguyên dương $K > 3$ cho trước, luôn tồn tại n sao cho $x_n < K < x_{n+1}$. Thật vậy, gọi n là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $x_n < K$ thì kết luận trên đúng do $x_n \notin \mathbb{Z}; \forall n$.

Qua các thí dụ trên phần nào các bạn cũng đã nắm được một số định hướng khi giải các bài toán dạng này, để rèn luyện thêm, các bạn hãy giải các bài tập sau:

1. Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại n tam thức bậc hai đơn khởi khác nhau từng đôi một thỏa mãn tổng của hai tam thức bất kỳ có đúng một nghiệm.

2. Xét n số nguyên dương $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ thỏa mãn $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < 2$ có tổng bằng 3.

Chứng minh tồn tại một số nguyên dương k thuộc $[1; n-1]$ thỏa mãn $1 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 2$.

3. Chứng minh tồn tại vô hạn cách viết mỗi số nguyên n thành dạng $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2$ với số nguyên dương k và dấu $+$, $-$ được chọn.

4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho trong n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $2 \cdot \max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \cdot \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ luôn tồn tại ba số là độ dài ba cạnh của tam giác nhọn.

5. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại đa thức hệ số nguyên $P(x)$ có bậc bằng n với hệ số đầu dương thỏa mãn điều kiện đa thức $\frac{4x^2 P^2(x) + P(x)}{x^2 - 1}$ là bình phương của một đa thức với hệ số nguyên.

6. Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực khác hằng. Chứng minh với mỗi số $c > 0$, tồn tại số nguyên dương n_0 thỏa mãn điều kiện: Nếu đa thức $P(x)$ với hệ số thực có bậc k không nhỏ hơn n_0 và có hệ số của số hạng bậc cao nhất bằng 1 thì số các số nguyên x thỏa mãn $|f(P(x))| \leq c$ không vượt quá k .

7. Với mỗi tập $M \subset \mathbb{R}$ hữu hạn, bị chặn, xét

$$\text{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in M \right\}.$$

Chứng minh với mỗi tập $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ và $\forall x \in \text{conv}(M), \forall \varepsilon > 0$ thì ta có thể chọn được các

phần tử $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$ sao cho $\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i - x \right| < \varepsilon$.

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2017 – MÔN TOÁN

NGUYỄN VĂN QUÝ – LÊ ANH VINH

(Trường Đại học Giáo dục – Đại học Quốc gia Hà Nội)

Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2017 đã được tổ chức trong các ngày 5, 6 và 7/1/2017, cho 12 môn học (ngày 7/1 là ngày thi thực hành cho các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học). Tham dự kỳ thi, ở môn Toán có 461 học sinh (ít hơn 03 học sinh so với năm 2016) thuộc 69 đơn vị dự thi.

1. Đề thi

Ngày thi thứ nhất (5/1/2017)

Bài 1 (5 điểm). Cho a là một số thực và xét dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = a, u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Khi $a = 5$, chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định và tìm giới hạn đó.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (u_n) xác định và có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5 điểm). Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn:

$$\begin{cases} P(1 + \sqrt[3]{2}) = 1 + \sqrt[3]{2} \\ P(1 + \sqrt{5}) = 2 + 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Bài 3 (5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C ; AH cắt (O) tại D (D khác A).

a) Gọi I là trung điểm của AH ; EI cắt BC tại M và FI cắt CD tại N . Chứng minh rằng $MN \perp OH$.

b) Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt tại P, Q (P và Q khác D). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) và AO lần lượt tại R và S (R và S khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.

Bài 4 (5 điểm). Cho số nguyên $n > 1$. Bảng vuông $ABCD$ kích thước $n \times n$ gồm n^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được tô bởi một trong ba màu: đen, trắng, xám. Một cách tô màu được gọi là đối xứng nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được tô màu xám và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được tô cùng màu đen hoặc cùng màu trắng. Người ta điền vào mỗi ô xám số 0, mỗi ô trắng một số nguyên dương và mỗi ô đen một số nguyên âm. Một cách điền số như vậy được gọi là k -cân đối (với k nguyên dương) nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số nguyên thuộc đoạn $[-k; k]$.

(ii) Nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô đen thì tập các số nguyên dương được điền trên hàng đó và tập số nguyên dương được điền trên cột đó không giao nhau; nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô trắng thì tập các số nguyên âm được điền trên hàng đó và tập các số nguyên âm được điền trên cột đó không giao nhau.

a) Với $n = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại cách điền hình số k -cân đối cho cách tô màu đối xứng ở hình bên.

b) Với $n = 2017$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô màu đối xứng, luôn tồn tại cách điền k -cân đối.

Ngày thi thứ hai (6/1/2017)

Bài 5 (6 điểm). Tìm tất cả các hàm số: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

thỏa mãn hệ thức: $f(xy) - f(x) = 2f(x) + xy$

với mọi số thực x, y .

Bài 6 (7 điểm). Chứng minh rằng:

a) $\sum_{k=1}^{2017} k C_{2017}^k \equiv 0 \pmod{2017^2}$.

b) $\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}$.

Bài 7 (7 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và G là một điểm thuộc cung BC không chứa O của đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác OBC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại E , đường tròn ngoại tiếp tam giác ACG cắt AB tại F (E và F khác A).

a) Gọi K là giao điểm của BE và CF . Chứng minh rằng AK, BC và OG đồng quy.

b) Cho D là một điểm thuộc cung BOC chứa O của đường tròn (I) ; GB cắt CD tại M , GC cắt BD tại N . Giả sử MN cắt (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng: khi G thay đổi trên cung BC không chứa O của đường tròn (I) , đường tròn ngoại tiếp GPQ luôn đi qua hai điểm cố định.

2. Kết quả chấm thi và Giải thưởng

Điểm số cao nhất của kì thi là 32/40; có 2 thí sinh đạt điểm số này (em Lê Quang Dũng, Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa và em Nguyễn Trọng Phúc, Trường THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội).

Chiều theo Quy chế thi chọn HSGQG THPT hiện hành và căn cứ kết quả chấm thi, Lãnh đạo Bộ GD&ĐT đã quyết định mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- **Giải Nhất:** từ 27,5 điểm đến 40 điểm;
- **Giải Nhì:** từ 22,5 điểm đến 27,25 điểm;
- **Giải Ba:** từ 17,5 điểm đến 22,25 điểm;
- **Giải Khuyến khích:** từ 14 điểm đến 17,25 điểm.

Theo đó, có **224** thí sinh (chiếm 49 % tổng số học sinh dự thi) được trao giải; gồm **8** thí sinh được trao Giải Nhất (gồm 4 học sinh lớp 12, 3 học sinh lớp 11 và 1 học sinh lớp 10), **49** thí sinh được trao Giải Nhì, **76** thí sinh được trao Giải Ba và **91** thí sinh được trao Giải Khuyến khích.

Trong số 8 thí sinh được trao Giải Nhất năm nay, có 3 em **Lê Phước Định** (Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**), **Phạm Nam Khánh** (Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội**) và **Lê Quang Dũng** (Trường THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**) cũng đã đạt Giải Nhất trong kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia môn Toán năm 2016. Ngoài ra, với thành tích xuất sắc, em **Nguyễn Hoàng Tùng Lâm** đã lập lại thành tích năm 2016 của em **Phạm Nam Khánh**, cũng là học sinh của Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, trở thành thí sinh lớp 10 thứ hai đạt được Giải Nhất trong kì thi HSG Quốc gia THPT.

Dưới đây là danh sách các thí sinh được trao giải.

• **Giải Nhất:** **Hoàng Hữu Quốc Huy** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**); **Lê Phước Định** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); **Phạm Tiến Khoa** (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); **Phạm Nam Khánh**, **Nguyễn Đăng Khôi**, **Nguyễn Hoàng Tùng Lâm** (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); **Lê Quang Dũng** (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); **Nguyễn Trọng Phúc** (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội).

• **Giải Nhì:** **Phạm Thị Hồng Nhung** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**); **Vương Đình Ân** (THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**); **Lê Bá Thành** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); **Trà Trần Quý Thiên** (THPT Tăng Bạt Hổ, **Bình Định**); **Trương Ngọc Huy** (THPT chuyên Nguyễn Du, **Đắk Lắk**); **Đỗ Hoàng Việt** (THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**); **Nguyễn Ngọc Anh Khoa** (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); **Mai Đặng Quân Anh** (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); **Phan Nhật Duy**, **Trần Hữu Hiếu**, **Trần Đình Hùng**, **Nguyễn Văn Nghĩa**, **Nguyễn Thanh Nhã** (THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); **Đào Minh Quân**, **Nguyễn Tuấn Hiệp** (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); **Trần Việt Hoàng**

(THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); **Trương Quang Khánh** (THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**); **Trần Thị Hà**, **Nguyễn Hoàng Huy** (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); **Nguyễn Đức Bảo**, **Cao Hữu Đạt**, **Nguyễn Cảnh Hoàng**, **Nguyễn Đình Hoàng**, **Nguyễn Văn Huy**, **Nguyễn Hồng Quốc Khánh**, **Trần Nguyễn Lâm**, **Hoàng Văn Nam**, **Nguyễn Trung Phúc**, **Phan Đức Tiến** (THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); **Nguyễn Thành Đạt**, **Nguyễn Tiến Long**, **Nguyễn Đức Thuận** (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); **Trần Khánh Linh**, **Bùi Văn Tuấn** (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); **Đoàn Cao Khả** (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); **Trương Công Cường** (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Quảng Nam**); **Nguyễn Việt Dũng** (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); **Nguyễn Doãn Hoàng Lâm** (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); **Đỗ Văn Quyết**, **Cao Phương Nam**, **Đỗ Trung Phương** (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); **Nguyễn Quang Bin**, **Đinh Công Duy**, **Hoàng Trung Dũng**, **Cao Tiến Thành** (THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội); **Nguyễn Lý Nhật Quỳnh**, **Đỗ Hoàng Tùng** (PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); **Lê Ngọc Trường Giang**, **Đặng Lâm Sơn** (THPT chuyên, **ĐH Vinh**).

• **Giải Ba:** **Lê Trần Trung Hiếu**, **Nguyễn Bá Nguyên** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**); **Trần Minh Duy** (THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**); **Nguyễn Thanh Hiếu**, **Lê Long Vũ** (THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**); **Trần Thanh Dương** (THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**); **Dương Thái Đức Sơn** (THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); **Nguyễn Trường Hải** (THPT chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); **Nguyễn Trần Hữu Thịnh** (THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); **Phạm Tuấn Kiệt** (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); **Nguyễn Thành Phát**, **Hoàng Huy Thông** (THPT chuyên Nguyễn Du, **Đắk Lắk**); **Lê Thanh Tú** (THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); **Đinh Nguyễn Hoàng Kim** (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); **Ngô Nhật Long**, **Nguyễn Đức Tuấn** (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); **Mai Thiên An**, **Nguyễn Trung Hiếu**, **Hoàng Tùng** (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); **Nguyễn Tuấn Anh**, **Lê Anh Thành** (THPT chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); **Nguyễn Văn Dũng**, **Trần Danh Quyết**, **Lê Minh Tuấn**, **Phan Anh Tuấn** (THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); **Nguyễn Tiến Dũng**, **Nguyễn Quang Đức**, **Nguyễn Anh Tuấn** (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); **Trịnh Khánh Hiệp** (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); **Nguyễn Hải Long** (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); **Nông Ngọc Quân** (THPT chuyên Chu Văn An, **Lạng Sơn**); **Bùi Tuấn Anh**, **Trần Hoàng Chuẩn**, **Đinh Văn Hiếu**, **Phạm Quang Huy**, **Đoàn Ngọc Khánh**, **Đoàn Thị Nhài** (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam**

Định); Tạ Anh Dũng, Nguyễn Hoàng Hải, Hồ Quang Huy (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); Nguyễn Hưng Quang Khải (THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); Bùi Quang Dũng, Lê Hoàng Long, Hoàng Nhật Tuấn (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); Trương Nhật Nguyên Bảo (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Quảng Nam**); Trần Hoàng Anh, Trần Lưu Thái Phong (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); Nguyễn Tiến Đạt (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); Vũ Đình Cường, Hà Thị Linh Giang (THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); Đỗ Đình Đắc, Đỗ Minh Thắng (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); Nguyễn Minh Hải (THPT chuyên Quốc học, **Thừa Thiên - Huế**); Đặng Vũ Quang Thịnh (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); Phan Huyền My (THPT chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**); Nguyễn Trường Giang, Lê Tường Khanh, Nguyễn Thị Hồng Ngọc (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); Trần Minh Khoa, Lê Việt Lưu Thanh, Trần Minh Tiến, Trương Mạnh Tuấn (THPT chuyên KHTN - **ĐHQG Hà Nội**); Trần Thanh Bình, Nguyễn Minh Châu, Tiêu Phát Đạt, Huỳnh Phạm Minh Nguyễn (PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); Hoàng Duy, Tạ Khánh Hà, Nguyễn Minh Hiếu, Ngô Thị Huế, Phạm Ngọc Khánh, Hoàng Anh Quân (THPT chuyên ĐHS, **ĐHSP Hà Nội**); Phan Việt Hoàng, Phan Nguyễn Khôi, Lê Ngọc Lợi, Trần Tiến Mạnh (THPT chuyên, **ĐH Vinh**).

• **Giải Khuyến khích:** Nguyễn Hoàng Thuận (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); Nguyễn Thành Lâm (THPT chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**); Nguyễn Ngọc Trúc Vy (THPT chuyên Bạc Liêu, **Bạc Liêu**); Trần Hữu Trí (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); Trần Hoàng Long (THPT chuyên Hùng Vương, **Bình Dương**); Lê Sỹ Quan, Trần Văn Trà, Lê Phước Tùng (THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); Đậu Ngọc Khánh, Huỳnh Bách Khoa, Dương Đức Tín (THPT chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); Triệu Phú Hữu (THPT Thốt Nốt, **Cần Thơ**); Nguyễn Minh Quân (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); Phạm Huy Bình, Trần Tùng Lâm, Phạm Tuấn Thành (THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Điện Biên**); Mai Văn Xuân Hoàng, Lưu Hoàng Huy (THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); Nguyễn Lê Minh (THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**); Nguyễn Quốc Vũ Hoàng, Phùng Anh Huy (THPT chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); Đoàn Hải Nam (THPT chuyên, **Hà Giang**); Đoàn Tuấn Anh, Phạm Quỳnh Anh, Nguyễn Thành Việt (THPT chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); Ngô Thế Anh Khoa (THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, **Hà Nội**); Nguyễn Phan Minh (THPT Chu Văn An, **Hà Nội**); Phan Văn Đức Nhật (THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); Nguyễn Trọng Bình, Phạm Hải Châu, Nguyễn Minh Hiếu, Trương Minh Quang, Nguyễn Đình Sơn (THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**);

Đỗ Tấn Dũng, Hoàng Hiệp, Trịnh Văn Hoàn, Nguyễn Thị Thu Phương, Lại Ngọc Tân (THPT chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); Nguyễn Thị Ngọc Anh, Lê Quang Huy, Nguyễn Ngọc Long, Nguyễn Văn Tiến, Nguyễn Quang Trung (THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); Đặng Thế Hùng, Nguyễn Phước Toàn (THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**); Phạm Nhật Huy, Trần Việt Huy, Đinh Tiên Kiên (THPT chuyên, **Lào Cai**); Hoàng Trung Hiếu, Nguyễn Đức Minh (THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); Dương Gia Huy (THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); Lê Thành Lâm (THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); Nguyễn Thanh Nhã (THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); Nguyễn Lê Anh Nguyễn, Lê Tấn Đăng Tâm (THPT chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam**); Phan Đình Kha, Lê Nguyễn Trường Phước (THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); Lê Bùi Minh Chiến, Nguyễn Tiến Mạnh, Trịnh Minh Nhật, Hoàng Huy Phan, Vũ Minh Tuấn (THPT chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); Lê Thành Đạt, Nguyễn Hà Nhất Phương (THPT chuyên Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh**); Đoàn Nhật Dương, Đoàn Ngọc Phú (THPT chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); Vũ Duy Mạnh, Nguyễn Trần Đức Tài (THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); Tống Ngọc Chung, Hồ Đắc Thanh Chương, Huỳnh Hữu Nhật (THPT chuyên Quốc Học, **Thừa Thiên - Huế**); Bùi Cảnh Khang, Thái Hoàng Minh (THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); Phạm Việt Hoàng (THPT chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**); Phan Gia Anh, Đoàn Hoàng Gia Bảo, Huỳnh Hoàng Huy, Nguyễn Minh Thức, Trần Nguyễn Tuấn Vỹ (THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**); Nguyễn Khắc Việt Anh (THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); Nguyễn Hải Nam (THPT chuyên KHTN - **ĐHQG Hà Nội**); Trần Dương Việt Hoàng, Phạm Kha Luân, Tăng Lợi Phát (PTNK - **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); Lê Phúc Anh, Nguyễn Thị Thanh Loan, Phạm Đình Nghĩa (THPT chuyên ĐHS, **ĐHSP Hà Nội**); Lê Thị Hồng Hà, Phan Bà Hoàng, Hoàng Nhật Minh (THPT chuyên, **ĐH Vinh**); Nguyễn Trung Nghĩa (Trường Trung học Thực hành - **ĐHSP TP. Hồ Chí Minh**).

3. Tuyển chọn học sinh tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2017 (IMO 2017)

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành và kết quả kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Toán, Bộ GD&ĐT quyết định triệu tập học sinh Phạm Nguyễn Mạnh (lớp 12 Trường PTK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, thành viên đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2016) và 48 học sinh đạt từ 23 điểm trở lên trong kỳ thi vừa nêu tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi IMO 2017, được tổ chức trong các ngày 24 và 25/3/2017 tại Thủ đô Hà Nội.



ĐỊNH LÝ VAN DER WAERDEN VỀ CẤP SỐ CỘNG

HOÀNG ĐỨC TÂN (Hà Nội)

Dịnh lý Van der Waerden được phát biểu như sau:

Giả sử k và l là các số tự nhiên tùy ý. Khi đó tồn tại một số tự nhiên $n(k, l)$ sao cho với việc phân chia một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có độ dài $n(k, l)$ theo phương pháp tùy ý thành k lớp (trong số các lớp đó có thể có lớp rỗng) thì có ít nhất một trong số các lớp đó ta luôn tìm được một cấp số cộng có độ dài l .

Định lý này đã được Van der Waerden (nhà toán học Hà Lan) báo cáo tại Đại học Göttingen (CHLB Đức) vào năm 1928. Tuy nhiên chứng minh của ông là khá phức tạp. Tới năm 1948 một nữ sinh ở Minsk (Liên Xô cũ) là M. A. Lucmxaia đã đưa ra một chứng minh hoàn toàn sơ cấp cho định lý này. Bài viết này sẽ giới thiệu với bạn đọc về chứng minh của Lucmxaia.

Rõ ràng định lý là đúng với $l = 2$. Để chứng tỏ điều đó thì ta chỉ cần đặt $n(k, 2) = k + 1$ là đủ. Thật vậy, khi phân chia $(k + 1)$ số thành k lớp thì trong số các lớp đó sẽ có ít nhất một lớp có chứa nhiều hơn một số, nhưng một cấp số bất kỳ luôn tạo thành một cấp số cộng có độ dài bằng 2 và khẳng định trên được chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp đầy đủ áp dụng cho số l . Vì thế từ nay về sau chúng ta luôn coi rằng định lý là đúng với một số $l \geq 2$ nào đó và với mọi giá trị của k , và ta cần phải chứng minh rằng định lý cũng đúng với số $l + 1$ (và tất nhiên là với mọi giá trị của k).

Vậy theo giả thiết của ta với mọi số tự nhiên k luôn tồn tại một số tự nhiên $n(k, l)$ sao cho với việc phân chia một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có độ dài $n(k, l)$ theo một phương pháp tùy ý thành k lớp thì trong ít nhất là một trong

số các lớp đó ta luôn tìm được một cấp số cộng có độ dài l . Bài toán của chúng ta là cần phải chứng minh rằng với mọi số tự nhiên k luôn tồn tại số $n(k, l + 1)$. Bài toán này sẽ được ta giải bằng cách xác định trực tiếp số $n(k, l + 1)$ (quá trình xác định trực tiếp này được gọi là quá trình thiết kế). Với mục đích ấy ta đặt:

$$q_0 = 1, n_0 = n(k, l).$$

Và sau đó sẽ xác định dãy các số $q_1, q_2, \dots, n_1, n_2, \dots$ bằng cách sau: Nếu đối với số $s > 0$ nào đó mà ta đã xác định được q_{s-1} và n_{s-1} thì ta sẽ đặt:

$$q_s = 2n_{s-1}q_{s-1}, \quad n_s = n(q_s, l) \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

Rõ ràng là các số q_s, n_s là được xác định với mọi $s \geq 0$. Bây giờ chúng ta khẳng định rằng số $n(k, l + 1)$ có thể nhận giá trị bằng q_k . Vì thế tiếp theo ta cần phải chứng minh rằng nếu một đoạn của dãy số tự nhiên có độ dài q_k được phân chia theo một phương pháp bất kỳ thành k lớp thì sẽ có ít nhất một lớp trong số k lớp ấy mà trong lớp đó ta tìm được một cấp số cộng có độ dài $l + 1$. Chứng minh này sẽ được trình bày ngay sau đây.

Để cho ngắn gọn từ nay về sau ta đặt $l + 1 = l'$.

Ta giả sử Δ là một đoạn của dãy số tự nhiên có độ dài q_k được phân chia theo một phương pháp tùy ý thành k lớp. Hai số a và b của đoạn đó được gọi là **cùng loại** và được viết là $a \sim b$ nếu a và b cùng nằm trong một lớp nào đó. Hai đoạn $\delta(a, a + 1, \dots, a + r)$ và $\delta'(a', a' + 1, \dots, a' + r)$ có độ dài bằng nhau, cùng nằm trên đoạn Δ sẽ được ta gọi là **cùng loại** và viết là $\delta \sim \delta'$ nếu như $a \sim a', a + 1 \sim a' + 1, \dots, a + r \sim a' + r$.

LTS: - Một cấp số cộng có độ dài k là tập hợp có dạng $\{a, a + d, \dots, a + (k - 1)d\}$.

- Một đoạn thẳng Δ của tập các số tự nhiên; $\Delta = \{x \in \mathbb{N} : a \leq x \leq b\}$ có độ dài $b - a + 1$.

Rõ ràng số các loại khác nhau có thể của các số nằm trong đoạn Δ là bằng k ; đối với các đoạn có dạng $(a, a+1)$ (tức là đối với các đoạn có độ dài bằng 2) thì số các loại khác nhau có thể có của các đoạn có độ dài bằng 2 sẽ là k^2 , và một cách tổng quát đối với các đoạn có độ dài m thì số các loại khác nhau có thể có của chúng sẽ là k^m .

Bởi vì $q_k = 2n_{k-1}q_{k-1}$ (theo (1)) nên đoạn Δ có thể coi như là dãy $2n_{k-1}$ đoạn có độ dài q_{k-1} .

Bởi vì theo nhận xét ở trên các đoạn như vậy có thể có $k^{q_{k-1}}$ loại khác nhau, nhưng do nửa bên trái của đoạn Δ có chứa n_{k-1} đoạn như vậy, hơn nữa do (1) ta có $n_{k-1} = n(k^{q_{k-1}}, l)$. Do chính ý nghĩa của số $n(k^{q_{k-1}}, l)$ mà chúng ta có thể khẳng định như sau: nửa bên trái của đoạn Δ có chứa một cấp số cộng từ l đoạn cùng loại với nhau $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ có độ dài bằng q_{k-1} ; lúc đó ta có thể nói một cách ngắn gọn rằng các đoạn Δ_i bằng nhau đã tạo nên một cấp số cộng nếu cấp số ấy được tạo ra bởi các số hạng đầu tiên của chúng. Công sai d_1 của cấp số $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ sẽ được gọi là hiệu giữa các số đầu tiên của hai đoạn kề nhau trong cấp số đó. Chính điều đó cũng cho ta thấy rằng hiệu của các số thứ hai (thứ ba, thứ tư, ...) của hai đoạn kề nhau cũng bằng d_1 .

Bây giờ chúng ta nối thêm vào cấp số $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ phần tử thứ $l+1$ là $\Delta_{l'}$ (nhớ rằng $l' = l+1$) mà $\Delta_{l'}$ có thể vượt ra bên ngoài giới hạn nửa bên trái của đoạn Δ , nhưng trong mọi trường hợp thì $\Delta_{l'}$ luôn nằm trong chính đoạn Δ ; khi đó các đoạn $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l, \Delta_{l'}$ sẽ tạo nên một cấp số cộng có độ dài $l' = l+1$ và công sai d_1 từ các đoạn có độ dài q_{k-1} và $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$ giữa chúng là cùng loại với nhau, chỉ còn đoạn cuối cùng $\Delta_{l'}$ là chúng ta không biết nó có cùng loại hay không? Chúng ta sẽ kết thúc bước đầu tiên trong quá trình thiết kế của chúng ta ở đây.

Bây giờ ta chuyển sang bước thứ hai. Lấy một phần tử bất kỳ trong l phần tử đầu tiên chỉ trong các đoạn của cấp số đã được xây dựng ở trên; giả sử đó là phần tử Δ_{i_1} sao cho $1 \leq i_1 \leq l$. Ta thấy Δ_{i_1} là đoạn có độ dài q_{k-1} . Chúng ta khảo sát với Δ_{i_1} theo cách tương tự hoàn toàn như ta đã làm với đoạn Δ ở trên. Bởi vì $q_{k-1} = 2n_{k-2}q_{k-2}$ nên nửa bên trái của đoạn Δ_{i_1} có thể được xem như là một dãy n_{k-2} các đoạn có độ dài q_{k-2} ; nhưng đối với các đoạn có độ dài như vậy có thể có tất cả $k^{q_{k-2}}$ loại khác nhau, mặt khác do (1) ta có $n_{k-2} = n(k^{q_{k-2}}, l)$. Cho nên nửa bên trái của Δ_{i_1} cần phải chứa cấp số từ l đoạn cùng loại $\Delta_{i_1 i_2}$ ($1 \leq i \leq l$) có độ dài q_{k-2} . Giả sử công sai của cấp số đó (tức là khoảng cách giữa các số đầu tiên của hai đoạn kề nhau) bằng d_2 . Nối thêm vào cấp số các đoạn đó một phần tử thứ $l+1$ là $\Delta_{i_1 l'}$ mà đến giờ ta vẫn chưa biết nó có cùng loại hay không, đoạn $\Delta_{i_1 l'}$ có thể cũng không nằm trong nửa bên trái của đoạn Δ_{i_1} , nhưng tất nhiên nó vẫn phải nằm bên trong chính đoạn Δ_{i_1} .

Vậy là ta đã tiến hành việc thiết kế của mình chỉ với một đoạn Δ_{i_1} nào đó thôi. Bây giờ ta tiếp tục quá trình thiết kế của mình với tất cả các đoạn Δ_{i_1} ($1 \leq i_1 \leq l'$). Như vậy ta sẽ nhận được một họ các đoạn $\Delta_{i_1 i_2}$ ($1 \leq i_1 \leq l', 1 \leq i_2 \leq l'$) có hai chỉ số. Như vậy rõ ràng là 2 đoạn bất kỳ của họ đó với các chỉ số không vượt quá l sẽ là cùng loại với nhau: $\Delta_{i_1 i_2} \sim \Delta_{i_1' i_2'}$ ($1 \leq i_1, i_2, i_1', i_2' \leq l$).

Bây giờ các bạn cũng thấy rõ ràng rằng quá trình này của ta có thể kéo dài tiếp tục nữa. Chúng ta tiến hành quá trình đó k lần. Sản phẩm thiết kế ở bước đầu tiên sẽ là các đoạn có độ dài q_{k-1} ; ở bước thứ hai là các đoạn có độ dài q_{k-2} ; và ... Vì vậy ở bước cuối cùng thứ k sản phẩm thiết kế sẽ là các đoạn có độ dài $q_0 = 1$ tức là chỉ số của đoạn đầu tiên của Δ ; tuy nhiên ta sẽ ký hiệu các số đó qua:

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq l').$$

Lúc đó đối với $1 \leq s \leq k$ và

$$1 \leq i_1, \dots, i_s, i'_1, \dots, i'_s \leq l \text{ ta có } \Delta_{i_1 i_2 \dots i_s} \sim \Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \quad (2)$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra hai nhận xét quan trọng sau đây:

1) Nếu trong quan hệ (2) $s < k$ và nếu $i_{s+1}, i_{s+2}, \dots, i_k$ là các chỉ số bất kỳ được lấy từ dãy số $1, 2, \dots, l, l'$ thì số $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_k}$ phải được lấy ở trong đoạn $\Delta_{i_1 \dots i_s}$ cũng cùng một vị trí như số $\Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s i'_{s+1} \dots i'_k}$ ở trong đoạn $\Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$; vì (2) mà hai đoạn đó là cùng loại, nên từ đó suy ra:

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_k} \sim \Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s i'_{s+1} \dots i'_k} \quad (3)$$

nếu $1 \leq i_1, \dots, i_s, i'_1, \dots, i'_s \leq l$ và

$$1 \leq i_{s+1}, i_{s+2}, \dots, i_k \leq l' \quad (1 \leq s \leq k).$$

2) Với $s \leq k, i'_s = i_s + 1$ các đoạn $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s}$ và $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s}$ đương nhiên là các đoạn kề nhau ở trong bước thiết kế thứ s của ta. Cho nên cũng như với các chỉ số $i_{s+1}, \dots, i_k$, các số $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_k}$ và $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \dots i_k}$ sẽ được lấy ở cùng một vị trí trong hai đoạn kề nhau đó để sao cho (với $i'_s = i_s + 1$):

$$\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \dots i_k} - \Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_k} = d_s \quad (4)$$

Bây giờ chúng ta tiến tới mục tiêu của ta. Ta xét $(k+1)$ số của Δ sau đây:

$$\begin{cases} a_0 = \Delta_{l' l' l' \dots l'} \\ a_1 = \Delta_{l' l' l' \dots l'} \\ a_2 = \Delta_{l' l' l' \dots l'} \\ \dots \dots \dots \\ a_k = \Delta_{l' l' l' \dots l'} \end{cases} \quad (5)$$

Bởi vì số lớp mà chúng ta phân chia đoạn Δ là bằng k , còn các số trong (5) lại là $k+1$, cho nên trong các số của (5) ta luôn tìm được hai số nằm trong cùng một lớp; giả sử đó là hai số a_r và a_s ($r < s$) sao cho: $\Delta_{l' l' l' \dots l'} \sim \Delta_{l' l' l' \dots l'}$ (6)

Tiếp theo ta xét $l+1$ số:

$$c_i = \Delta_{l' l' l' \dots l'} \quad (1 \leq i \leq l') \quad (7)$$

Ta thấy l số đầu tiên của nhóm đó (tức là ở đây $i < l'$) cùng nằm trong một lớp nào đó do (3).

Còn đối với số cuối cùng ($i = l'$) thì do (6) nó phải cùng loại với l số đầu tiên. Vì vậy tất cả các số dạng (7) là cùng loại với nhau. Cho nên để có thể kết thúc chứng minh thì ta chỉ còn phải chứng tỏ rằng các số ấy tạo thành một cấp số cộng là xong, tức là phải chứng tỏ rằng công sai $c_{i+1} - c_i$ ($1 \leq i \leq l$) là không phụ thuộc vào i . Để cho ngắn gọn ta đặt $i+1 = i'$ và tiếp theo ta đặt:

$$c_{i,m} = \Delta_{l' l' l' \dots l'} \quad (0 \leq m \leq s-r).$$

Như vậy $c_{i,0} = c_i, c_{i,s-r} = c_{i+1}$ và do đó:

$$c_{i+1} - c_i = \sum_{m=1}^{s-r} (c_{i,m} - c_{i,m-1}).$$

Nhưng do (4) ta có: $c_{i,m} - c_{i,m-1}$

$$= \Delta_{l' l' l' \dots l'} - \Delta_{l' l' l' \dots l'} = d_{r+m},$$

có nghĩa là: $c_{i+1} - c_i = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_s$.

Và thực tế hiệu số này không phụ thuộc vào i và phép chứng minh của chúng ta kết thúc một cách hoàn hảo.

Các bạn thấy đấy, mặc dù chứng minh là khá dài dòng nhưng nó được xây dựng hoàn toàn sơ cấp. Tuy nhiên các bạn hãy tin rằng Định lý Van der Waerden khó có thể có chứng minh đơn giản hơn thế này. Và xu hướng tìm các chứng minh sơ cấp cho các định lý toán học hiện đang rất phát triển. Hy vọng sẽ nhận được một chứng minh sơ cấp khác cho định lý này từ các bạn trẻ yêu toán Việt Nam. Chúc các bạn thành công.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 18

Problem. Compute the integral $I = \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

Solution. We use substitution method. We need to handle the “radical” part which is $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)}$. The form of the radical part and the range $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ of x suggests letting

$x = \sin^2(t)$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. For such substitution,

$dx = 2\sin(t)\cos(t)dt$, and therefore

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(t)\cos(t)dt}{\sqrt{\sin^2(t)(1-\sin^2(t))}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(t)\cos(t)dt}{|\sin(t)| \cdot |\cos(t)|}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(t)\cos(t)dt}{\sin(t)\cos(t)} = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

(notice that since we choose $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, both

$\sin(t)$ and $\cos(t)$ are positive).

Remark. we might use the “completing square” technique and then use the substitution method to

reduce the original integral to the form $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

which can be computed via $\sin^{-1}(t)$.

TỪ VỰNG

integral	: tích phân xác định
range	: phạm vi, khoảng thay đổi
substitution	: phép đổi biến, phép thay thế
radical	: căn thức
completing square	: thêm bớt để thành một bình phương
reduce to	: quy về
via	: qua, thông qua

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài toán. Cho $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ là một đa thức với hệ số thực và c là một số thực khác không. Chúng ta có thể biểu diễn $f(x)$ dưới dạng $b_0 + b_1(x-c) + \dots + b_n(x-c)^n$ hay không? Nếu có thể thì làm thế nào để tìm được các hệ số b_i theo a_j ?

Lời giải. Câu trả lời là có. Giả sử rằng

$$f(x) = b_0 + b_1(x-c) + \dots + b_n(x-c)^n \quad (1)$$

Trong (1), cho $x = c$, ta có $b_0 = f(c)$. Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được $f'(x) = b_1 + 2b_2(x-c) + \dots + nb_n(x-c)^{n-1}$ (2)

Trong (2), cho $x = c$, ta có $b_1 = f'(c)$. Lấy đạo hàm hai vế của (2) ta được

$$f''(x) = 1.2.b_2 + 2.3.b_3(x-c) + \dots + (n-1).n.b_n(x-c)^{n-2} \quad (3)$$

Trong (3), cho $x = c$, ta có $b_2 = \frac{f''(c)}{2!}$. Tương tự như vậy, ta tìm được $b_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}$, với $i = 1, \dots, n$.

Lưu ý. Bài toán này có một vài áp dụng. Ở bậc trung học phổ thông nó giúp bạn tính nguyên hàm hay tích phân của một số hàm số, chẳng hạn như hàm $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^3}$. Trước tiên bạn có thể biểu diễn

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2-3}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^3}.$$

Từ biểu thức cuối, bạn có thể dễ dàng tính nguyên hàm hay tích phân của hàm số ban đầu.

Những bài toán dạng này cũng thường xuất hiện trong các tiết toán ở các trường đại học.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Hưng Yên:** Lê Thùy Dương, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** Mai Thị Kim Chi, 11A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò; **Thừa Thiên Huế:** Phan Cảnh Minh Phước, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Vĩnh Long:** Huỳnh Lý Văn Anh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

HÒ HẢI (Hà Nội)



GIẢI ĐÁP: TÍNH THỂ TÍCH

(Đề đăng trên TH&TT số 473, tháng 11 năm 2016)

Phân tích. Công thức tỉ số thể tích

$$\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} \cdot \frac{SN}{SD} \text{ không đúng.}$$

Ta chỉ có kết quả trong trường hợp hình chóp tam giác. Xét hình chóp tam giác $S.ABC$ với A', B', C' lần lượt thuộc các đường thẳng SA, SB, SC (A', B', C' khác A, B, C). Khi đó ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (1)$$

Do đó kết luận $\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{4}{9}$ của bạn Thành là sai.

Lời giải đúng. Hình chiếu của SB trên $(ABCD)$ là AB nên góc giữa SB và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Ta

có $\frac{SA}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$. Do đó:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3.$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$S_{ACB} = S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.ACB} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}.$$

Do M thuộc đoạn SA và $SA = a\sqrt{3}, AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$ nên

$$\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}. \text{ Đề ý rằng } (MBC) \cap (SAD) = MN,$$

$(MBC) \cap (ABCD) = BC, (SAD) \cap (ABCD) = AD, BC \parallel AD$, nên theo định lý về 3 đường giao tuyến của 3 mặt phẳng phân biệt ta có: $MN \parallel AD \parallel BC$. Dẫn tới

$$\frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}. \text{ Áp dụng công thức (1) ta có}$$

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{2}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SC}{SC'} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{4}{9} V_{S.ADC} = \frac{2}{9} V_{S.ABCD},$$

$$\text{ suy ra } V_{S.BCNM} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$$

$$= \frac{1}{3} V_{S.ABCD} + \frac{2}{9} V_{S.ABCD} = \frac{5}{9} V_{S.ABCD} = \frac{5}{9} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 = \frac{10\sqrt{3}}{27} a^3.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.BCNM$ là $\frac{10\sqrt{3}}{27} a^3$ (đvtt).

Ghi chú: Bài toán này có thể giải bằng phương pháp tọa độ cũng khá gọn.

Nhận xét. Các bài gửi về Tòa soạn đều phát hiện ra sai lầm và đưa ra lời giải đúng, đáng tiếc là có 2 bạn quên viết tên và địa chỉ nên Tòa soạn không khen những những bạn đó được. Xin nêu tên các bạn được khen số này như sau:

Hà Nội: Đinh Châu Anh, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1, Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Hưng Yên:** Triệu Quốc Tùng, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Hải Dương:** Nguyễn Đăng Sơn, 11A, THPT Nam Sách, H. Nam Sách. **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Ngọc Thanh, 11T1, Lê Cẩm Thanh Hà, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Cà Mau:** Hoàng Công Minh, 12 chuyên toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển. **Bến Tre:** Lê Ngô Nhật Huy, Đỗ Thành An, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHI VI



ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong giờ Toán, Thầy giáo đưa một bài tập tương tự câu 11, đề minh họa kì thi THPT Quốc gia năm 2017 như sau: Tìm giá trị thực của tham số m sao cho hàm

$$\text{số } y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m} \text{ nghịch biến trên khoảng } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{A. } m \leq 0 \text{ hoặc } 1 \leq m < 2$$

$$\text{B. } m \leq 0$$

$$\text{C. } m \geq 2$$

$$\text{D. } m > 2.$$

Một bạn học sinh làm như sau: Đặt $t = \cos x$, theo giả thiết $t \in (0; 1)$. Bài toán trở thành: Tìm giá trị thực

của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{t-2}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Khi đó m cần tìm thỏa mãn

$$\begin{cases} m \notin (0; 1) \\ y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m} < 0 \Leftrightarrow m > 2. \end{cases} \text{ Do đó chọn đáp án D.}$$

Bạn có đồng ý với lời giải trên không, nếu không thì bạn làm thế nào?

ĐẶNG QUỲNH HOA

(GV THPT Nghèn, H. Can Lộc, Hà Tĩnh)



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXB Giáo dục Việt Nam

MẠC VĂN THIÊN

Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

GS. TS. VŨ VĂN HÙNG

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập

NXB Giáo dục Việt Nam

TS. PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÂN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KIỆT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Hoàng Thuật – Ứng dụng nguyên lý kẹp vào giải phương trình nghiệm nguyên.

4 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Vinh Phúc, năm học 2016 – 2017.

5 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 môn Toán THPT chuyên Thái Bình, năm học 2016 – 2017.

8 Thử sức trước kỳ thi - Đề số 7.

11 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 6.

12 Diễn đàn dạy học Toán

Phạm Trọng Thư – Giải hệ phương trình hai ẩn bằng phương pháp đánh giá dựa vào bất đẳng thức.

16 Đề ra kỳ này

Problems in This Issue

T1/477, ..., T12/477, L1/477, L2/477.

18 Giải bài kỳ trước

Solutions to Previous Problems

28 Phương pháp giải toán

Trần Quốc Luật – Phương pháp hàm sinh.

32 Nguyễn Văn Quý - Lê Anh Vinh – Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2017 - môn Toán.

35 Bạn có biết

Hoàng Đức Tân – Định lý Van der Waerden về cấp số cộng.

38 Tiếng Anh qua các bài toán - Bài số 18.

Bài dịch số 15 - Tiếng Anh qua các bài toán.

39 Sai lầm ở đâu?

Giải đáp: Tính thể tích.

Đặng Quỳnh Hoa – Đáp án nào?

Ảnh bìa 1. Nhà Toán học Hà Lan Van der Waerden (1903 - 1996).

Biên tập: LÊ MAI - NGUYỄN HIỆP

Trĩ sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MAI ANH

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

SIÊU THỊ TRỰC TUYẾN:

www.sachtoan24h.com

Được thành lập và đi vào hoạt động chưa quá lâu tuy nhiên website www.sachtoan24h.com đã được rất nhiều bạn đọc biết đến, tin tưởng và lựa chọn sản phẩm của chúng tôi.

www.sachtoan24h.com cung cấp:

- Sách ôn luyện các kì thi Toán quốc tế: Apmops, IMC, Kangaroo, AMC, HOMC...
- Sách Toán song ngữ Việt – Anh, từ điển Toán học.
- Sách bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp, ôn thi vào THPT hệ chuyên Toán.
- Sách bồi dưỡng nghiệp vụ cho giáo sinh, giáo viên Toán

Tất cả các đầu sách đã được ban biên tập thẩm định nội dung cùng với sự tư vấn, góp ý về mặt chuyên môn của đội ngũ chuyên gia là những tác giả, giáo viên Toán tên tuổi chắc chắn sẽ làm các thầy cô, các vị phụ huynh cùng với các em học sinh hài lòng.

● Hotline 0912920591

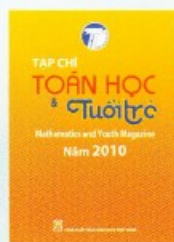
● Website: www.sachtoan24h.com

● facebook: gõ theo SĐT 0973472803

Giao hàng toàn quốc, thu tiền tại nhà.

Bộ đóng tập

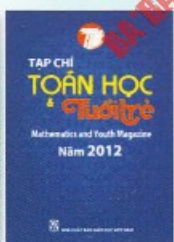
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



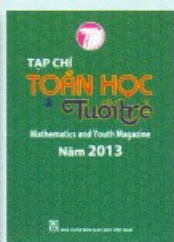
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



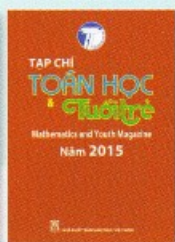
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



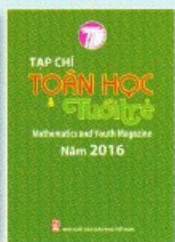
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

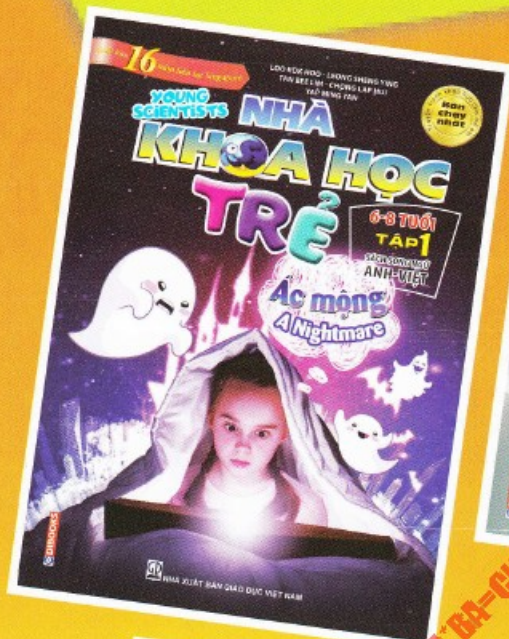
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- ĐT Biên tập: (04) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com
- Website: www.nxbgd.vn/toanhocuoitre

Bộ sách song ngữ Nhà khoa học trẻ

- Mỗi tập sách gồm nhiều câu chuyện thú vị về đời sống tự nhiên, xã hội, được vẽ dưới dạng manga hấp dẫn.
- Sách nhiều tập, ra đều đặn hàng quý, dành cho 4 lứa tuổi từ 6 đến 14.
- Từng được dịch ra 8 thứ tiếng tại Châu Á như Nhật Bản, Hàn Quốc, Trung Quốc, Ấn Độ...
- Được coi là truyện tranh khoa học bán chạy nhất tại Singapore trong suốt 16 năm từ khi ra đời.



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI
HANOI EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT, JSC
Toà nhà Văn phòng HEID, ngõ 12, Láng Hạ - Thành Công - Ba Đình - Hà Nội
Tel : (04) 35123939 - Phòng Kinh doanh - Tel : (04) 35122636, Fax : (04) 35122504