

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Mã đề thi 132

Câu 1: [2H2-1] Hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng l và bán kính đáy bằng r có diện tích xung quanh S_{xq} cho bởi công thức

A. $S_{xq} = 2\pi rl$.

B. $S_{xq} = \pi rl$.

C. $S_{xq} = 2\pi r^2$.

D. $S_{xq} = 4\pi r^2$.

Câu 2: [2D2-1] Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4^x < 2^{x+1}$

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1)$.

C. $S = (0; 1)$.

D. $S = (-\infty; +\infty)$.

Câu 3: [1D4-1] Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

A. $L = -\infty$.

B. $L = 0$.

C. $L = +\infty$.

D. $L = 1$.

Câu 4: [2H3-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

A. $M(1; 1; 1)$.

B. $N(0; 1; 0)$.

C. $P(1; 0; 1)$.

D. $Q(1; 1; 0)$.

Câu 5: [2D1-1] Đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{x+2}{x^2+1}$.

B. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

C. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$.

D. $y = \frac{1}{x+2}$.

Câu 6: [2D2-1] Trong các hàm số được cho dưới đây, hàm số nào có tập xác định là $D = \mathbb{R}$?

A. $y = \ln(x^2 - 1)$.

B. $y = \ln(1 - x^2)$.

C. $y = \ln(x+1)^2$.

D. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Câu 7: [2D4-1] Tìm phần ảo của số phức z , biết $(1+i)z = 3-i$.

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Câu 8: [2H3-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(3; -2; 0)$. Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là:

A. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

B. $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

C. $\vec{u} = (2; -4; 2)$.

D. $\vec{u} = (2; 4; -2)$.

Câu 9: [2D2-1] Cho x, y là các số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $e^{x+y} = e^x + e^y$.

B. $e^{x-y} = e^x - e^y$.

C. $e^{xy} = e^x e^y$.

D. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Câu 10: [1D2-1] Ký hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A_n^k = \frac{n!}{(n+k)!}$.

B. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$.

C. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

D. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Câu 11: [2H1-2] Nếu tăng kích thước của một khối hộp chữ nhật lên 3 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 27 lần.

B. 9 lần.

C. 18 lần.

D. 3 lần.

Câu 12: [2D1-1] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là sai?

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2		2	$-\infty$

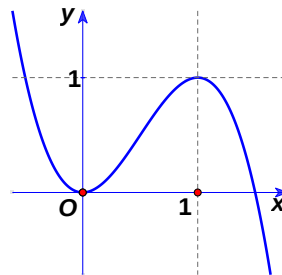
A. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=1$.

B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .

C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 13: [2D1-2] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = x$.



A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 14: [2D3-2] Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} dx$.

A. $I = 1 + \frac{1}{e}$.

B. $I = 2 - \frac{1}{e}$.

C. $I = 2 + \frac{1}{e}$.

D. $I = 1 - \frac{1}{e}$.

Câu 15: [2D4-1] Hỏi điểm $M(3; -1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = -1 + 3i$.

B. $z = 1 - 3i$.

C. $z = 3 - i$.

D. $z = -3 + i$.

Câu 16: [2H3-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz) ?

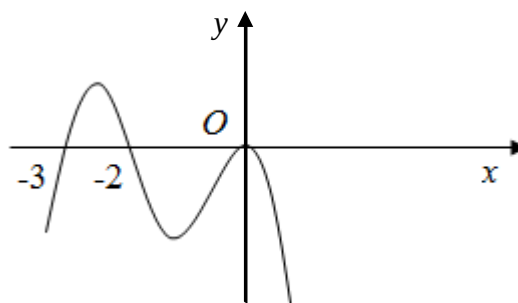
A. $x = y + z$.

B. $y - z = 0$.

C. $y + z = 0$.

D. $x = 0$.

Câu 17: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Câu 18: **[1D1-2]** Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

A. $a // b$ và $b \subset (\alpha)$.

B. $a // (\beta)$ và $(\beta) // (\alpha)$.

C. $a // b$ và $b // (\alpha)$.

D. $a \cap (\alpha) = \emptyset$.

Câu 19: **[2H3-2]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(3; -2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

A. $x - 2y - 2z = 0$.

B. $x - 2y - z - 1 = 0$.

C. $x - 2y - z = 0$.

D. $x - 2y + z - 3 = 0$.

Câu 20: **[1D2-2]** Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ rồi nhân hai số ghi trên thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhân được là một số chẵn.

A. $\frac{5}{54}$.

B. $\frac{8}{9}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{13}{18}$.

Câu 21: **[2D3-1]** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

Câu 22: **[2D3-1]** Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$.

A. $S = 4\ln 2 + e - 5$.

B. $S = 4\ln 2 + e - 6$.

C. $S = e^2 - 7$.

D. $S = e - 3$.

Câu 23: **[2D2-1]** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Tính $P = \log_2(a^2 b^3)$.

A. $P = x^2 y^3$.

B. $P = x^2 + y^3$.

C. $P = 6xy$.

D. $P = 2x + 3y$.

Câu 24: **[2D1-2]** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

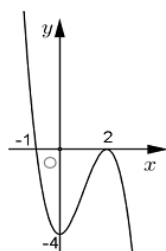
A. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$.

B. $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$.

C. $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$.

D. $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$.

Câu 25: **[2D1-1]** Đường cong ở hình dưới đây của một đồ thị hàm số.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào trong các hàm số sau đây:

A. $y = -x^3 - 4$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$. C. $y = -x^3 + 3x - 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 26: [1D3-2] Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

A. 83,7 (triệu đồng). B. 78,3 (triệu đồng). C. 73,8 (triệu đồng). D. 87,3 (triệu đồng).

Câu 27: [1D2-2] Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn đồng thời các điều kiện $C_m^2 = 153$ và $C_m^n = C_m^{n+2}$. Khi đó $m+n$ bằng

A. 25. B. 24. C. 26. D. 23.

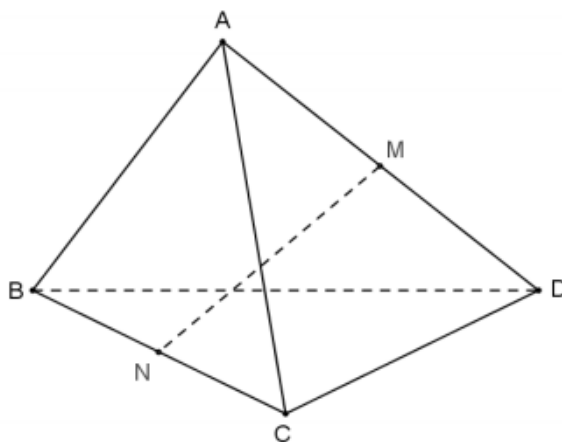
Câu 28: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$

và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Giả sử $M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$ sao cho MN là đoạn vuông góc chung của

hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Tính $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MN} = (5; -5; 10)$. B. $\overrightarrow{MN} = (2; -2; 4)$. C. $\overrightarrow{MN} = (3; -3; 6)$. D. $\overrightarrow{MN} = (1; -1; 2)$.

Câu 29: [1H3-3] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .



A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

Câu 30: [2D3-2] Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $V = 3$. B. $V = 3\pi$. C. $V = 2\pi\sqrt{3}$. D. $V = 2\sqrt{3}$.

Câu 31: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; -2)$, $B(2; 2; -4)$. Giả sử $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 8$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = 14$.

- Câu 32:** [1H3-3] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc 60° .
- A. $x = a\sqrt{3}$. B. $x = a$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{a}{2}$.
- Câu 33:** [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Một vector chỉ phương của Δ là:
- A. $\vec{u} = (2; 3; 2)$. B. $\vec{u} = (1; -1; 2)$. C. $\vec{u} = (-3; 5; 1)$. D. $\vec{u} = (4; 5; -13)$.
- Câu 34:** [1D5-3] Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $-1 < m_0 < 0$. B. $0 < m_0 < 1$. C. $1 < m_0 < 2$. D. $-2 < m_0 < -1$.
- Câu 35:** [2D3-4] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?
- A. $-2 \leq T < -1$. B. $-1 \leq T < 0$. C. $0 \leq T < 1$. D. $1 \leq T < 2$.
- Câu 36:** [2D2-2] Gọi z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình $iz^3 - 2z^2 + (1-i)z + i = 0$. Biết z_1 là số thuần ảo. Đặt $P = |z_2 - z_3|$, hãy chọn khẳng định đúng?
- A. $4 < P < 5$. B. $2 < P < 3$. C. $3 < P < 4$. D. $1 < P < 2$.
- Câu 37:** [2D2-2] Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$
- A. $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. B. 1. C. $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 38:** [2D3-2] Biết rằng $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T = a + b + c$.
- A. 31. B. 29. C. 33. D. 27.
- Câu 39:** [2H1-2] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a}{3}$.
- Câu 40:** [2D2-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất?
- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.
- Câu 41:** [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

- A. $T = -4$. B. $T = 0$. C. $T = -6$. D. $T = 4$.

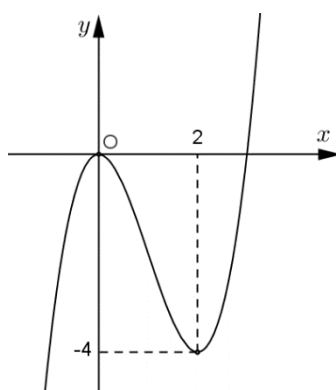
Câu 42: [2H1-3] Cho lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên ABB_1A_1 bằng 4; khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 7. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$.

- A. 14. B. $\frac{28}{3}$. C. $\frac{14}{3}$. D. 28.

Câu 43: [2D1-4] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$ có đúng bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?

- A. 3. B. 5. C. 7. D. 1.

Câu 44: [2D1-4] Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 45: [1D2-3] Từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 6, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số 0 và 5 không đứng cạnh nhau.

- A. 384. B. 120. C. 216. D. 600.

Câu 46: [2D1-4] Cho hàm số $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. $a < 0, b < 0$. B. $a > 0, b > 0$ C. $a < 0, b > 0$. D. $a > 0, b < 0$.

Câu 47: [2D2-2] Cho tứ diện đều $ABCD$ có một đường cao AA_1 . Gọi I là trung điểm AA_1 . Mặt phẳng (BCI) chia tứ diện $ABCD$ thành hai tứ diện. Tính tỉ số hai bán kính của hai mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

- A. $\sqrt{\frac{43}{51}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\sqrt{\frac{48}{153}}$.

Câu 48: [2D4-4] Cho số phức z thỏa mãn $5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z - 2 + 3i|$?

- A. $M = \frac{10}{3}$. B. $M = 1 + \sqrt{13}$. C. $M = 4\sqrt{5}$. D. $M = 9$.

Câu 49: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; 2)$, $B(2; -2; 0)$. Gọi $I_1(1; 1; -1)$ và $I_2(3; 1; 1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có

chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$.

B. $R = 2\sqrt{2}$.

C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$.

D. $R = 2\sqrt{6}$.

Câu 50: [2D3-4] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1)=1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5} \text{ và } \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{5}$.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	B	C	C	D	B	A	D	D	A	A	D	B	C	D	B	D	D	D	A	A	D	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	B	B	D	A	B	A	B	A	B	A	C	D	C	C	A	D	C	A	C	A	C	C	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: [2H2-1] Hình trụ tròn xoay có độ dài đường sinh bằng l và bán kính đáy bằng r có diện tích xung quanh S_{xq} cho bởi công thức

- A. $S_{xq} = 2\pi rl$. B. $S_{xq} = \pi rl$. C. $S_{xq} = 2\pi r^2$. D. $S_{xq} = 4\pi r^2$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 2: [2D2-1] Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4^x < 2^{x+1}$

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (0; 1)$. D. $S = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $4^x < 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Câu 3: [1D4-1] Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

- A. $L = -\infty$. B. $L = 0$. C. $L = +\infty$. D. $L = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{3-3}{3+3} = 0$.

Câu 4: [2H3-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

- A. $M(1;1;1)$. B. $N(0;1;0)$. C. $P(1;0;1)$. D. $Q(1;1;0)$.

Lời giải

Chọn C.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Khoảng cách từ các điểm đã cho tới tâm mặt cầu:

$MI = \sqrt{2} = R$; $NI = 0 < R$, $PI = \sqrt{3} > R$, $QI = 1 < R$. Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu.

Câu 5: [2D1-1] Đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x+2}{x^2+1}$. B. $y = \frac{x+2}{x+1}$. C. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$. D. $y = \frac{1}{x+2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x^2+1} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 6: [2D2-1] Trong các hàm số được cho dưới đây, hàm số nào có tập xác định là $D = \mathbb{R}$?

A. $y = \ln(x^2 - 1)$. B. $y = \ln(1 - x^2)$. C. $y = \ln(x + 1)^2$. D. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện xác định của hàm số $y = \ln x$ là $x > 0$.

Do đó chỉ có hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$ có điều kiện $x^2 + 1 > 0$ (luôn đúng).

Câu 7: [2D4-1] Tìm phần ảo của số phức z , biết $(1+i)z = 3-i$.

A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $(1+i)z = 3-i \Leftrightarrow z = \frac{3-i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = 1-2i$.

Vậy phần ảo của số phức z bằng -2.

Câu 8: [2H3-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(3; -2; 0)$. Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là:

A. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u} = (1; 2; -1)$. C. $\vec{u} = (2; -4; 2)$. D. $\vec{u} = (2; 4; -2)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; -4; -2) = -2(-1; 2; 1)$.

Câu 9: [2D2-1] Cho x, y là các số thực tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $e^{x+y} = e^x + e^y$. B. $e^{x-y} = e^x - e^y$. C. $e^{xy} = e^x e^y$. D. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Lời giải

Chọn D.

Lý thuyết.

Câu 10: [1D2-1] Ký hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A_n^k = \frac{n!}{(n+k)!}$. B. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$. C. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. D. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Lời giải

Chọn D.

Lý thuyết.

Câu 11: [2H1-2] Nếu tăng kích thước của một khối hộp chữ nhật lên 3 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 27 lần.

B. 9 lần.

C. 18 lần.

D. 3 lần.

Lời giải

Chọn A.

Gọi a, b, c ($a > 0, b > 0, c > 0$) là kích thước ban đầu của khối hộp chữ nhật.

Khi tăng kích thước kích thước lên 3 lần ta được độ dài ba cạnh là $3a, 3b, 3c$.

Gọi V và V' lần lượt là kích thước ban đầu của khối hộp chữ nhật và kích thước sau khi tăng lên 3 lần; khi đó: $V' = 3a.3b.3c = 27abc = 27V$.

Câu 12: **[2D1-1]** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	2	$-\infty$	$-\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.

B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .

C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .

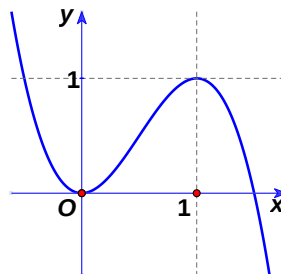
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào BBT, hàm số không đạt cực trị tại $x = 0$.

Câu 13: **[2D1-2]** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = x$.



A. 0.

B. 1.

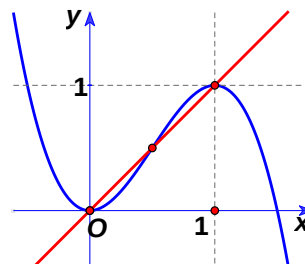
C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = x$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = x$.



Dựa vào hình vẽ suy ra phương trình $f(x) = x$ có 3 nghiệm.

Câu 14: [2D3-2] Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} dx$.

A. $I = 1 + \frac{1}{e}$.

B. $I = 2 - \frac{1}{e}$.

C. $I = 2 + \frac{1}{e}$.

D. $I = 1 - \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B.

$$I = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + \ln|x| \right) \Big|_1^e = 2 - \frac{1}{e}.$$

Câu 15: [2D4-1] Hỏi điểm $M(3; -1)$ là điểm biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = -1 + 3i$.

B. $z = 1 - 3i$.

C. $z = 3 - i$.

D. $z = -3 + i$.

Lời giải

Chọn C.

Điểm $M(a; b)$ trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Do đó điểm $M(3; -1)$ là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - i$.

Câu 16: [2H3-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz) ?

A. $x = y + z$.

B. $y - z = 0$.

C. $y + z = 0$.

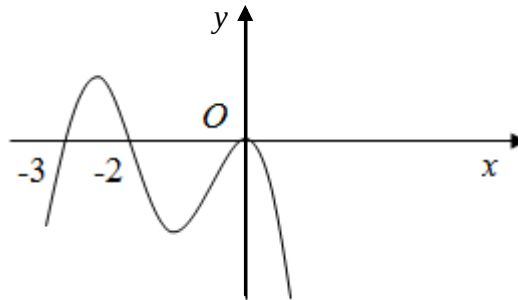
D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt phẳng (Oyz) đi qua $O(0; 0; 0)$ và nhận $\vec{n} = (1; 0; 0)$ làm vec tơ pháp tuyến.

Câu 17: [2D1-3] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có BBT:

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 18: [1D1-2] Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

A. $a // b$ và $b \subset (\alpha)$.

B. $a // (\beta)$ và $(\beta) // (\alpha)$.

C. $a // b$ và $b // (\alpha)$.

D. $a \cap (\alpha) = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 19: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

A. $x - 2y - 2z = 0$.

B. $x - 2y - z - 1 = 0$.

C. $x - 2y - z = 0$.

D. $x - 2y + z - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn D.

Chọn $M(2;0;1)$ là trung điểm của đoạn AB .

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -4; -2)$ làm 1 vec tơ pháp tuyến.

$$2(x-2) - 4(y-0) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 3 = 0.$$

Câu 20: [1D2-2] Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 2 thẻ rồi nhân hai số ghi trên thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhân được là một số chẵn.

A. $\frac{5}{54}$.

B. $\frac{8}{9}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn D.

Trường hợp 1: hai số rút ra đều là số chẵn: $p_1 = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}$

Trường hợp 2: hai số rút ra có một số lẻ, một số chẵn: $p_2 = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}$

Vậy xác suất để kết quả nhân được là một số chẵn là $p = p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} = \frac{13}{18}$.

Câu 21: [2D3-1] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = x + \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$; $f(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

Câu 22: [2D3-1] Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$.

A. $S = 4\ln 2 + e - 5$. **B.** $S = 4\ln 2 + e - 6$. **C.** $S = e^2 - 7$. **D.** $S = e - 3$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S = \int_0^1 |e^x - 2| dx$.

Xét $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Bảng xét dấu $e^x - 2$:

x	0	$\ln 2$	1
$e^x - 2$	—	0	+

Ta có $S = \int_0^1 |e^x - 2| dx = -\int_0^{\ln 2} (e^x - 2) dx + \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (2x - e^x) \Big|_0^{\ln 2} + (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1$
 $= 4\ln 2 + e - 5$. Vậy $S = 4\ln 2 + e - 5$.

Câu 23: [2D2-1] Cho các số thực dương a , b thỏa mãn $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Tính $P = \log_2(a^2 b^3)$.

A. $P = x^2 y^3$. **B.** $P = x^2 + y^3$. **C.** $P = 6xy$. **D.** $P = 2x + 3y$.

Lời giải

Chọn D.

$P = \log_2(a^2 b^3) = \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2\log_2 a + 3\log_2 b = 2x + 3y$.

Câu 24: [2D1-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng

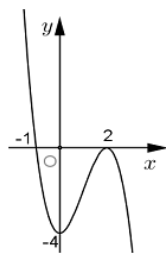
A. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$. **C.** $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$. **D.** $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có trong khoảng $(0; +\infty)$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị và điểm đó là điểm cực đại của đồ thị hàm số. Vậy trong khoảng $(0; +\infty)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ hay $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$.

Câu 25: [2D1-1] Đường cong ở hình dưới đây của một đồ thị hàm số.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào trong các hàm số sau đây:

A. $y = -x^3 - 4$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

C. $y = -x^3 + 3x - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

Chọn D.

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số có hai cực trị và hệ số của x^3 âm loại A và B.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0; -4)$ loại C.

Câu 26: [1D3-2] Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ti.

A. 83,7 (triệu đồng).

B. 78,3 (triệu đồng).

C. 73,8 (triệu đồng).

D. 87,3 (triệu đồng).

Lời giải

Chọn C.

Ta có 3 năm bằng 12 quý.

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_{12}$ là tiền lương kĩ sư đó trong các quý (từ quý 1 đến quý 12).

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai 4,5.

Vậy số tiền lương kĩ sư nhận được là

$$S_{12} = n \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} = 12 \frac{2 \times 4,5 + 11 \times 0,3}{2} = 73,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 27: [1D2-2] Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn đồng thời các điều kiện $C_m^2 = 153$ và $C_m^n = C_m^{n+2}$.

Khi đó $m+n$ bằng

A. 25.

B. 24.

C. 26.

D. 23.

Lời giải

Chọn C.

Theo tính chất $C_m^n = C_m^{m-n}$ nên từ $C_m^n = C_m^{n+2}$ suy ra $2n+2 = m$.

$$C_m^2 = 153 \Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2} = 153 \Rightarrow m = 18. \text{ Do đó } n = 8.$$

Vậy $m+n = 26$.

Câu 28: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$

và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Giả sử $M \in \Delta_1, N \in \Delta_2$ sao cho MN là đoạn vuông góc chung của

hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Tính $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MN} = (5; -5; 10)$.

B. $\overrightarrow{MN} = (2; -2; 4)$.

C. $\overrightarrow{MN} = (3; -3; 6)$.

D. $\overrightarrow{MN} = (1; -1; 2)$.

Lời giải

Chọn B.

Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (3; -1; -2)$ và Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (1; 3; 1)$.

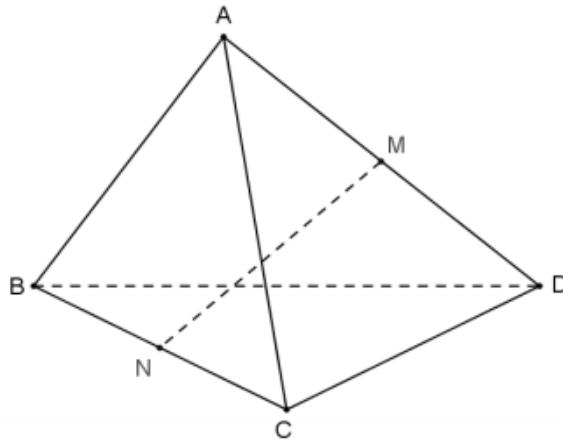
Gọi $M(4+3t; 1-t; -5-2t)$ và $N(2+s; -3+3s; s)$.

Suy ra $\vec{MN} = (-2-3t+s; t+3s-4; 2t+s+5)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s-t-3=0 \\ s-8t-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=-1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{MN} = (2; -2; 4)$.

Câu 29: **[1H3-3]** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .



A. $MN = \frac{a}{2}$.

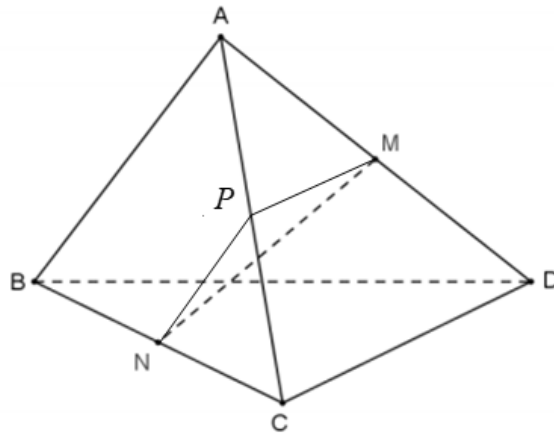
B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $MN = \frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi P là trung điểm của AC . Suy ra $PM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = PN$. Do đó tam giác PMN cân tại P . Lại có góc giữa AB và MN bằng 30° nên góc giữa MN và PN bằng 30° . Vậy tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120° .

$$\text{Ta có } PN \cdot \sqrt{3} = MN \text{ nên } MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 30: [2D3-2] Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

- A. $V = 3$. B. $V = 3\pi$. C. $V = 2\pi\sqrt{3}$. D. $V = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Diện tích tam giác đều } S(x) = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{\sin x})^2}{4} = \sqrt{3} \sin x.$$

$$\text{Vậy thể tích } V = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x dx = 2\sqrt{3}.$$

Câu 31: [2H3-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $T = 8$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = 14$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0;2;-2)$, $\overrightarrow{OB} = (2;2;-4)$. (OAB) có phương trình: $x + y + z = 0$

$$I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0.$$

$$\overrightarrow{AI} = (a;b-2;c+2), \overrightarrow{BI} = (a-2;b-2;c+4), \overrightarrow{OI} = (a;b;c).$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c+2)^2 = (a-2)^2 + (c+4)^2 \\ (b-2)^2 + (c+2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}.$$

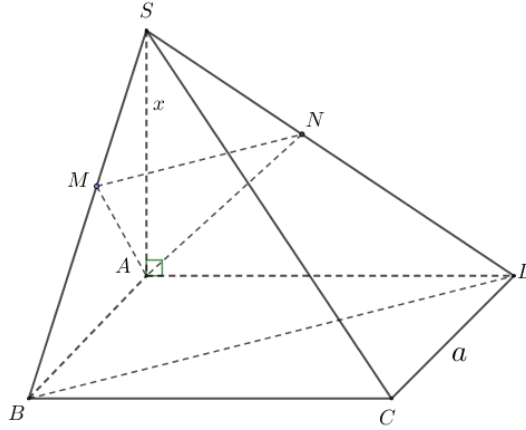
$$\text{Vậy } I(2;0;-2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$$

Câu 32: [1H3-3] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc 60° .

- A. $x = a\sqrt{3}$. B. $x = a$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $(SCD) \perp (SAD)$, vẽ $AN \perp SD$ tại $N \Rightarrow AN \perp (SCD)$.

$(SAB) \perp (SBC)$, vẽ $AM \perp SB$ tại $M \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

$\Rightarrow ((SBC), (SCD)) \Rightarrow AM = AN = MN$.

Ta có $SB = SD = \sqrt{x^2 + a^2}$, $AM = AN = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $\frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BD} \Rightarrow MN = \frac{SM \cdot BD}{SB}$

$$SM = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow MN = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow MN = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{x^2 + a^2}.$$

$$\Delta AMN \text{ đều cho ta } MN = AM \Rightarrow \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = x\sqrt{2} \Leftrightarrow x = a.$$

Câu 33: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt

phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Một vector chỉ phương của Δ là:

A. $\vec{u} = (2; 3; 2)$. **B.** $\vec{u} = (1; -1; 2)$. **C.** $\vec{u} = (-3; 5; 1)$. **D.** $\vec{u} = (4; 5; -13)$.

Lời giải

Chọn A.

Điểm $M \in d \Rightarrow M(-1+2t; t; 2+t)$, A là trung điểm của $MN \Rightarrow N(3-2t; -2-t; 2-t)$

Điểm $N \in (P) \Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M(3; 2; 4)$, $N(-1; -4; 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-4; -6; -4) = -2(2; 3; 2).$$

Câu 34: [1D5-3] Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1 < m_0 < 0$. **B.** $0 < m_0 < 1$. **C.** $1 < m_0 < 2$. **D.** $-2 < m_0 < -1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1$, gọi $B(-1; 2m - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; 2m - 4)$.

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -m + 2$.

Mặt khác: hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Do đó ta có: $3(x_0)^2 + 6m_0x_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2$

$$\Leftrightarrow 3 - 6m_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2 \Leftrightarrow -4m_0 = -2 \Leftrightarrow m_0 = \frac{1}{2}.$$

Câu 35: [2D3-4] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2 \leq T < -1$.

B. $-1 \leq T < 0$.

C. $0 \leq T < 1$.

D. $1 \leq T < 2$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } T = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx$$

$$\text{Lại có: } [f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow -1 = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \Leftrightarrow -1 = \left[\frac{1}{f'(x)} \right]'$$

$$\Leftrightarrow -x + c = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{-x + c}.$$

Mà $f'(0) = -1$ nên $c = -1$.

$$\text{Vậy } T = \int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{-x-1} dx = -\ln|-x-1| \Big|_0^1 = -\ln 2.$$

Câu 36: [2D2-2] Gọi z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình $iz^3 - 2z^2 + (1-i)z + i = 0$. Biết z_1 là số thuần ảo. Đặt $P = |z_2 - z_3|$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $4 < P < 5$.

B. $2 < P < 3$.

C. $3 < P < 4$.

D. $1 < P < 2$.

Lời giải

Chọn B.

$$iz^3 - 2z^2 + (1-i)z + i = 0 \Leftrightarrow (z+i)(iz^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -i \\ iz^2 - z + 1 = 0(1) \end{cases}$$

Vì z_1 là số thuần ảo nên z_2, z_3 là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Ta có: } (z_2 - z_3)^2 = (z_2 + z_3)^2 - 4z_2z_3 = -1 + 4i$$

$$\Rightarrow |(z_2 - z_3)^2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} \Rightarrow P = |z_2 - z_3| = \sqrt[4]{17}.$$

Câu 37: [2D2-2] Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$

A. $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

B. 1.

C. $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Đặt $\sqrt{\log_2 x + 1} = t, (t \geq 0) \Rightarrow \log_2 x = t^2 - 1$ ta có phương trình

$$(t^2 - 1)^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = 1 \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1}$.

Với $t = 1$ thì $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 2^0$.

Với $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$.

Câu 38: [2D3-2] Biết rằng $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính

$$T = a + b + c.$$

A. 31.

B. 29.

C. 33.

D. 27.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} dx &= \int_2^3 \frac{(x - \sqrt{x-1})(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} dx = \int_2^3 (x - \sqrt{x-1}) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{19 - 4\sqrt{8}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 19 \\ b = 8 \\ c = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $T = a + b + c = 33$.

Câu 39: [2H1-2] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

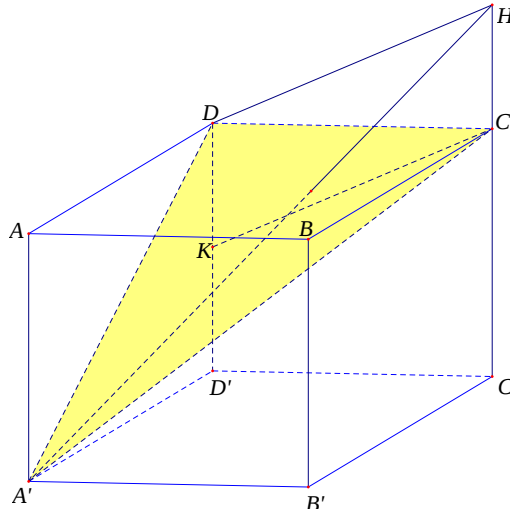
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



Từ D kẻ $DH \parallel CK$ ($H \in CC'$).

$$\text{Khi đó } d(CK, A'D) = d(CK, (A'DH)) = d(C, (A'DH)) = \frac{3V_{CAHD}}{S_{ADH}}.$$

$$\text{Ta có } V_{A'CDH} = \frac{1}{3} A'D \cdot S_{DHC} = \frac{a^3}{12}.$$

$$\text{Mà } A'D = a, DH = \frac{a\sqrt{5}}{2}, A'H = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } A'DH \text{ có } \cos DA'H = \frac{A'D^2 + A'H^2 - DH^2}{2A'D \cdot A'H} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin DA'H = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'DH} = \frac{1}{2} A'D \cdot A'H = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(C, (A'DH)) = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{3}.$$

Câu 40: [2D2-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x+1)} = 2$ có

nghiệm duy nhất?

A. 1.

B. 3.

C. Vô số.

D. 2.

Lời giải

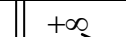
Chọn C.

$$\text{Phương trình tương đương với: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ m = \frac{(x+1)^2}{x} \end{cases}.$$

Xét hàm số $y = \frac{(x+1)^2}{x}$, với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

$$\text{Có } y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\} \text{)}.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	0		1		$+\infty$
y'	0	-		-	0	+
y	0			$+\infty$		$+\infty$
			$-\infty$		4	

Từ bảng biến thiên suy ra để hàm số có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Vậy có vô số giá trị nguyên để phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 41: [1D5-3] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy

tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = -6$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 42: [2H1-3] Cho lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên ABB_1A_1 bằng 4; khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 7. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$.

A. 14.

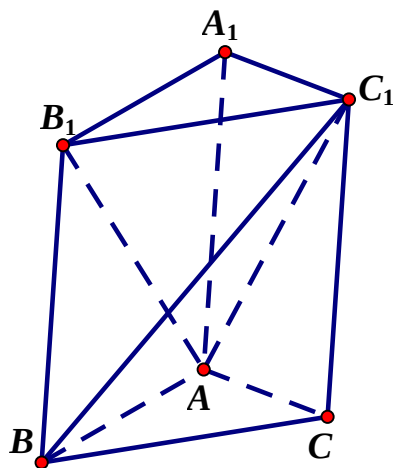
B. $\frac{28}{3}$.

C. $\frac{14}{3}$.

D. 28.

Lời giải

Chọn A.



Gọi thể tích lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ là V .

Ta chia khối lăng trụ thành $ABCA_1B_1C_1$ theo mặt phẳng (ABC_1) được hai khối: khối chóp tam giác $C_1.ABC$ và khối chóp tứ giác $C_1.ABB_1A_1$

$$\text{Ta có } V_{C_1.ABC} = \frac{1}{3}V \Rightarrow V_{C_1.ABB_1A_1} = \frac{2}{3}V$$

$$\text{Mà } V_{C_1.ABB_1A_1} = \frac{1}{3}.S_{ABB_1A_1}.d(A; (ABB_1A_1)) = \frac{1}{3}.4.7 = \frac{28}{3}. \text{ Vậy } V = \frac{28}{3} \cdot \frac{3}{2} = 14$$

Câu 43: [2D1-4] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$ có đúng bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

Chọn D.

$$\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - (2\cos^2 x - 1) + m \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2\cos^2 x + (m-3)\cos x = 0$$

Đặt $\cos x = t$ với $t \in [-1; 1]$. Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 4t^2 - 2t + (m-3) = 0(*) \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, có 2 nghiệm là $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình $\cos x = t$ có 3 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Với mỗi giá trị $t \in (-1; 0]$ thì phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Với $t = -1$ thì phương trình $\cos x = t$ có 1 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

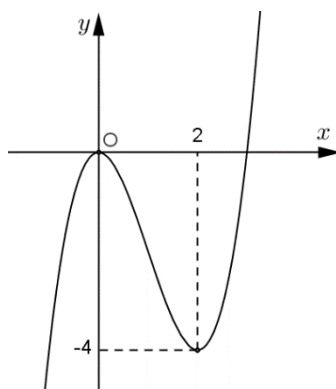
Để pt có đúng 7 nghiệm thỏa mãn thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn điều kiện: $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$.

$$(*) \Leftrightarrow m = -4t^2 + 2t + 3$$

x	-1	0	1/4		1
y'		+	0	-	
y	-3	3	$\frac{13}{4}$		1

Từ bảng biến thiên trên ta có $m \in (1; 3)$. Vậy $m = \{2\}$.

Câu 44: [2D1-4] Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $y = f[f(x)]$, $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2; +\infty) \\ x = b \in (a; +\infty) \end{cases}$$

Với $x > b$, ta có $f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0$

Với $a < x < b$, ta có $0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0$

Với $0 < x < a$ hoặc $x < 0$, ta có $f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0$

BBT:

x	$-\infty$	0		2		a		b		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+
y										

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 45: [1D2-3] Từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 6, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó hai chữ số 0 và 5 không đứng cạnh nhau.

A. 384.

B. 120.

C. 216.

D. 600.

Lời giải

Chọn A.

Số các số có 6 chữ số được lập từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 6, 8 là $6! - 5!$.

Số các số có chữ số 0 và 5 đứng cạnh nhau: $2.5! - 4!$.

Số các số có chữ số 0 và 5 không đứng cạnh nhau là: $6! - 5! - (2.5! - 4!) = 384$.

Câu 46: [2D1-4] Cho hàm số $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $a < 0, b < 0$.

B. $a > 0, b > 0$

C. $a < 0, b > 0$.

D. $a > 0, b < 0$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1.

$$\text{Xét } g(x) = 8x^4 + ax^2 + b, \quad g'(x) = 32x^3 + 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{16} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \max_{[-1;1]} f(x) = 1 \Rightarrow g(0) = b \in [-1; 1].$$

TH1. $a > 0$. Ta có $g(1) = g(-1) = 8 + a + b > 1$. Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$ không thỏa YCBT.

TH2. $a < 0$.

Nếu $-\frac{a}{16} > 1 \Leftrightarrow a < -16$. Ta có $g(1) = g(-1) = 8 + a + b < -1$. Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$ không thỏa YCBT.

Nếu $-\frac{a}{16} < 1 \Leftrightarrow a > -16$.

Ta có BBT

x	-1	$-\frac{\sqrt{-a}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{-a}}{4}$	1	
$g'(x)$		-	0	+	0	+
$g(x)$	$8+a+b$	$b-\frac{a^2}{32}$	b	$b-\frac{a^2}{32}$	$8+a+b$	

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = b = 1. \text{ Khi đó YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a^2}{32} \geq -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq 64 \\ a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \text{ (thỏa } a > -16)$$

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = 8 + a + b = 1. \text{ Khi đó, YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 1 \\ b - \frac{a^2}{32} \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ \frac{a^2}{32} + a + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ -24 \leq a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \Rightarrow b = 1.$$

$$\max_{[-1;1]} f(x) = \left| b - \frac{a^2}{32} \right| = 1. \text{ Khi đó, YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{a^2}{32} = -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \\ b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{32} - 1 \\ 6 + a + \frac{a^2}{32} \leq 0 \\ a \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy $a = -8$, $b = 1$ thỏa YCBT.

Cách 2.

Đặt $t = x^2$ khi đó ta có $g(t) = 8t^2 + at + b$.

Vì $x \in [-1;1]$ nên $t \in [0;1]$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta có: $0 \leq g(t) \leq 1$ với mọi $t \in [0;1]$ và có dấu bằng xảy ra.

Đồ thị hàm số $g(t)$ là một parabol có bề lõm quay lên trên do đó điều kiện trên dẫn đến hệ điều kiện sau xảy ra :

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-\Delta}{32} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 & (1) \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 & (2) \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có : $-64 \leq a^2 \leq 64$ do đó $-8 \leq a \leq 8$.

Lấy (3) + 32(2) ta có : $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$

Suy ra : $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$.

Khi đó ta có $a = -8$ và $b = 1$.

Kiểm tra : $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$

Vì $0 \leq t \leq 1$ nên $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$.

Vậy $\max |g(t)| = 1$ khi $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (t/m).

Câu 47: [2D2-2] Cho tứ diện đều $ABCD$ có một đường cao AA_1 . Gọi I là trung điểm AA_1 . Mặt phẳng (BCI) chia tứ diện $ABCD$ thành hai tứ diện. Tính tỉ số hai bán kính của hai mặt cầu ngoại tiếp hai tứ diện đó.

A. $\sqrt{\frac{43}{51}}$.

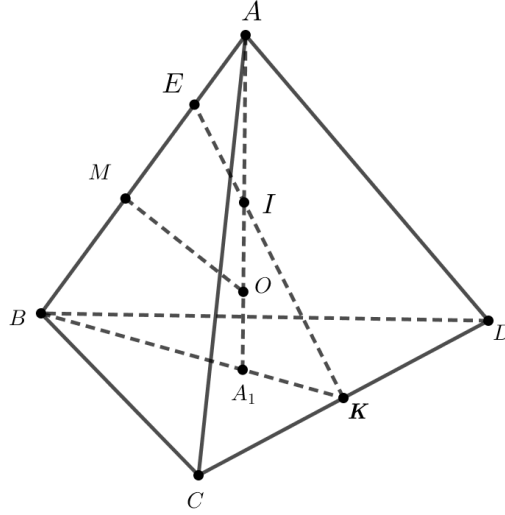
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\sqrt{\frac{48}{153}}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi cạnh của tứ diện đều là a .

Gọi K là trung điểm của CD và $E = IK \cap AB$. Qua A_1 kẻ đường thẳng song song với IK cắt AB tại J .

Ta có:

$$\frac{BJ}{BE} = \frac{BA_1}{BK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{AE}{EJ} = \frac{AI}{IA_1} = 1 \text{ nên suy ra } AE = \frac{1}{4}AB = \frac{a}{4} \text{ và } BE = \frac{3a}{4}.$$

Gọi M là trung điểm của BE , trong mặt phẳng (ABK) dựng đường trung trực của BE cắt AA_1 tại O . Ta dễ dàng chứng minh được O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp $EBCD$.

$$\text{Ta có: } BA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Đặt } BE = x.$$

Tam giác ABA_1 đồng dạng với tam giác AOM nên suy ra

$$\frac{AM}{AA_1} = \frac{OM}{BH} \Rightarrow OM = \frac{AM \cdot BH}{AA_1} = \left(a - \frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $EBCD$ ta suy ra:

$$R = OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{x}{2}\right)^2}.$$

$$\text{Với } x = \frac{3a}{4} \text{ ta có: } R = \sqrt{\frac{9a^2}{64} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{3a}{8}\right)^2} = a\sqrt{\frac{43}{128}}.$$

Tương tự với $x = \frac{a}{4}$ ta có bán kính R' của mặt cầu ngoại tiếp $EACD$ là

$$R' = \sqrt{\frac{a^2}{64} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{4}\right)^2} = a\sqrt{\frac{51}{128}}.$$

$$\text{Do đó } \frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{43}{51}}.$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Áp dụng công thức Crelle: Với mỗi khối tứ diện $ABCD$ đều tồn tại ít nhất một tam giác mà số đo các cạnh của nó bằng tích số đo các cặp đối của tứ diện đó. Hơn nữa nếu gọi V là thể tích, R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì ta có công thức: $S = 6V.R$.

Câu 48: [2D4-4] Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$?

A. $M = \frac{10}{3}$.

B. $M = 1 + \sqrt{13}$.

C. $M = 4\sqrt{5}$.

D. $M = 9$.

Chọn C.

Lời giải

Gọi $A(0;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

$$\text{Ta lại có : } 5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$$

$$\Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{MB^2 + MC^2}$$

$$\Rightarrow 25MA^2 \leq 10(2MA^2 + 10) \Rightarrow MC \leq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Mà } |z-2+3i| = |(z-i) + (-2+4i)| \leq |z-i| + |2-4i| \leq |z-i| + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \frac{a}{-2} = \frac{b-1}{4} \end{cases}, \text{ với } z = a+bi; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-3i \text{ (loại)} \\ z = -2+5i \end{cases}.$$

Câu 49: [2H3-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2)$, $B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_2(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$.

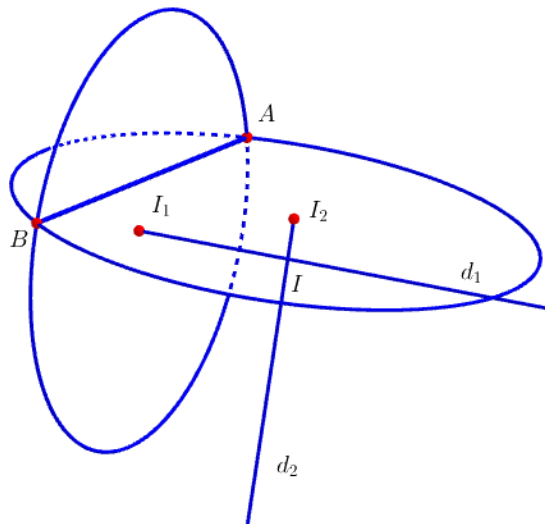
B. $R = 2\sqrt{2}$.

C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$.

D. $R = 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua I_1 và vuông góc với mặt phẳng (I_1AB) , khi đó d_1 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_1 ; d_2 là đường thẳng đi qua I_2 và vuông góc với mặt phẳng (I_2AB) , khi đó d_2 chứa tâm các mặt cầu đi qua đường tròn tâm I_2 . Do đó, mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn tâm (I_1) và (I_2) có tâm I là giao điểm của d_1 và d_2 và bán kính $R = IA$

Ta có $\overrightarrow{I_1A} = (-1; 1; 3)$, $\overrightarrow{I_1B} = (1; -3; 1)$. Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{I_1A}; \overrightarrow{I_1B}] = (10; 4; 2) = 2(5; 2; 1)$.

Phương trình đường thẳng d_1 là: $d_1: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{I_2A} = (-3; 1; 1)$, $\overrightarrow{I_2B} = (-1; -3; -1)$. Đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{I_2A}; \overrightarrow{I_2B}] = (2; -4; 10) = 2(1; -2; 5)$.

Phương trình đường thẳng d_2 là: $d_2: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 2s \\ z = 1 + 5s \end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + 5t = 3 + s \\ 1 + 2t = 1 - 2s \\ -1 + t = 1 + 5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = -\frac{1}{3} \end{cases}$. Suy ra $I = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{129}}{3}$.

Câu 50: [2D3-4] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$f(1) = 1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$

Suy ra $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^1 t \cdot f(t) dt = \frac{1}{5}$. Do đó $\Leftrightarrow \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}$

Mặt khác $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{x^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx$.

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}$

Ta tính được $\int_0^1 (3x^2)^2 dx = \frac{9}{5}$.

$$\text{Do đó } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 3x^2 f'(x) dx + \int_0^1 (3x^2)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3x^2)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \text{ nên } f(x) = x^3$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$