

SỞ GD&ĐT BẮC GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

ĐỀ THI THÁNG 02/2019
BÀI THI MÔN: TOÁN Lớp 12

Ngày thi: 23/02/2019

(Đề thi gồm: 50 câu, 05 trang)

Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. [2D3-1.1-1] Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau

- A.** $f(x) = 2xe^{x^2}$. **B.** $f(x) = x^2e^{x^2} - 1$. **C.** $f(x) = e^{2x}$. **D.** $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thị Ngọc Lan; Fb: Ngoclan Hoang

Chọn A

Ta có $f(x) = F'(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

Câu 2. [2D1-4.1-1] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-4}$ có phương trình là

- A.** $y = \frac{1}{2}$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thị Ngọc Lan; Fb: Ngoclan Hoang

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1}{2}$.

Do đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-4}$ có phương trình là $y = \frac{1}{2}$.

Câu 3. [2H3-3.7-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình mặt cầu?

- A.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$. **B.** $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thu Thanh; Fb: Thanh Trần

Chọn A

Phương trình mặt cầu có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

+ Xét đáp án **A**: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ có $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = -1$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 6 > 0$. Do đó phương trình này là phương trình mặt cầu.

+ Xét đáp án **B** không có y^2 nên phương trình này không phải là phương trình mặt cầu.

+ Xét đáp án **C** có $2xy$ nên phương trình này không phải là phương trình mặt cầu.

+ Xét đáp án **D**: Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$ có $a = -1$, $b = 1$, $c = -2$,
 $d = 8 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = -2 < 0$. Do đó phương trình này không phải là phương trình mặt cầu.

Câu 4. [2D4-2.1-2] Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- A.** $M(-1;1)$. **B.** $M(-1;-1)$. **C.** $M(1;1)$. **D.** $M(1;-1)$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thu Thanh; Fb: Thanh Trần

Chọn C

Ta có phương trình: $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)z = -(2-i)^2 + 4+i$

$$\Leftrightarrow (3+2i)z = 1+5i \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{3+2i} \Leftrightarrow z = 1+i.$$

Vậy điểm M biểu diễn số phức z có tọa độ là $M(1;1)$.

Câu 5. [2H3-3.4-1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$ và mặt

phẳng $(P): x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

A. 60° .

B. 30° .

C. 120° .

D. 45° .

Lời giải

Tác giả: Đặng Phước Thiên; Fb: Đặng Phước Thiên

Chọn A

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (-1; 2; 1)$.

Một vector chỉ phương của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1; -1; 0)$.

$$\text{Ta có } \sin((P), d) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $((P), d) = 60^\circ$.

Câu 6. [1D1-2.1-1] Phương trình $\sin x = \cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Tác giả: Đặng Phước Thiên; Fb: Đặng Phước Thiên

Chọn C

Ta có $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Theo đề $x \in [-\pi; \pi] \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$.

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7. [2D1-2.1-2] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x+1)^2(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Minh Anh Phúc; Fb: Minh Anh Phúc

Chọn D

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(x-2)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Dựa vào bảng trên suy ra hàm số đã cho có một điểm cực trị.

Câu 8. [0D4-4.1-2] Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$ có dạng $[a; b)$. Tính

$A = a + b$.

A. 12.

B. 19.

C. 16.

D. 18.

Lời giải

Tác giả: Minh Anh Phuc; Fb: Minh Anh Phuc

Chọn B

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -2 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 14.$$

$$\text{Suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là } T = [5; 14) \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 14 \end{cases} \Rightarrow a + b = 19.$$

Câu 9. [2D3-3.3-2] Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng

A. 5.

B. $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\pi \left(\frac{1}{2} + \pi\right)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Ngọc Lan; Fb: Ngoclan Nguyen

Chọn B

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \pi (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \left[\left(\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - (\tan 0) \right] = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Câu 10. [2H3-2.7-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$,

$d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau.

B. Trùng nhau.

C. Song song.

D. Cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

Tác giả: Nguyễn Ngọc Lan; Fb: Ngoclan Nguyen

Đường thẳng d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ và đi qua điểm $M_1(1; 0; -2)$.

Đường thẳng d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2; -1; 2)$.

Do $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ nên ta có $\begin{cases} d_1 // d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{cases}, (1).$

Thay tọa độ M_1 vào phương trình d_2 ta được: $\frac{1+2}{-2} = \frac{-1}{-1} = \frac{-2}{2}$, (mệnh đề sai).

Suy ra $M_1 \notin d_2, (2).$

Từ (1) và (2), ta có $d_1 // d_2$.

- Câu 11.** [2D4-2.1-2] Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.
A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Phương Thúy; Fb: thuypham

Chọn B

Ta có $z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$, khi đó $w = 2z + \bar{z} = 2(1 + 2i) + (1 - 2i) = 3 + 2i$.

Phần thực của số phức w là 3, phần ảo của số phức w là 2.

$\Rightarrow$ Tổng phần thực và phần ảo là: $3 + 2 = 5$.

- Câu 12.** [2D2-4.3-1] Cho số thực $a > 0$, $a \neq 1$. Chọn khẳng định **sai** về hàm số $y = \log_a x$.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy .

C. Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$.

D. Hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Thị Phương Thúy; Fb: thuypham

Chọn A

Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$, có tập giá trị là $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{C, D}$ đúng.

Đồ thị hàm số nhận Oy là tiệm cận đứng $\Rightarrow \mathbf{B}$ đúng.

Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow \mathbf{A}$ sai.

- Câu 13.** [2D1-2.1-2] Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $M(0; -1)$.

B. $Q(-1; 10)$.

C. $P(1; 0)$.

D. $N(1; -10)$.

Lời giải

Tác giả: Phùng Hoàng Cúc ; Fb: Phùng Hoàng Cúc

Chọn D

Cách 1: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) \cdot f'(x) - 8x - 2$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị A và B nên $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$.

Suy ra $\begin{cases} y_A = f(x_A) = -8x_A - 2 \\ y_B = f(x_B) = -8x_B - 2 \end{cases}$

Do đó phương trình đường thẳng AB là $y = -8x - 2$.

Khi đó ta có $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB . Chọn D.

Cách 2: Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(3; -26)$ và $B(-1; 6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-4; 32)$ cùng phương với $\vec{u}(-1; 8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(-1; 6)$ và nhận $\vec{u}(-1; 8)$ làm vectơ chỉ phương là

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 8t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Khi đó ta có $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB . Chọn D.

Câu 14. [2H1-2.3-1] Hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

A. 7.

B. 9.

C. 3.

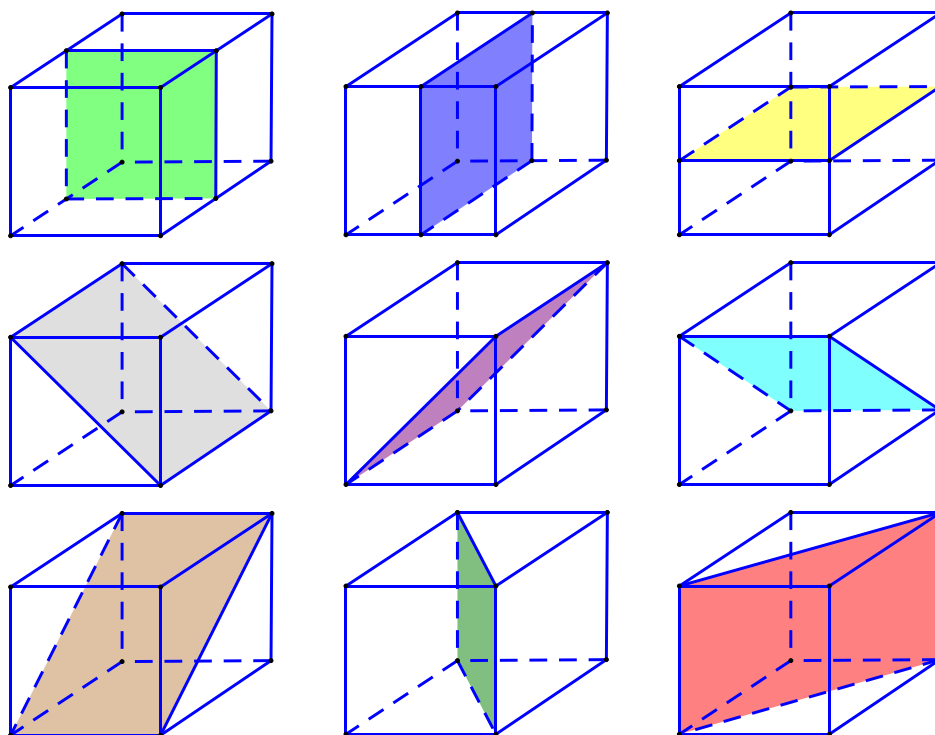
D. 6.

Lời giải

Tác giả: Phùng Hoàng Cúc ; **Fb:** Phùng Hoàng Cúc

Chọn D

Hình lập phương: có 9 mặt phẳng đối xứng.



Câu 15. [2D2-4.1-1] Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\pi}$.

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huyền ; **Fb:** Huyền Nguyễn

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi: $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}.$

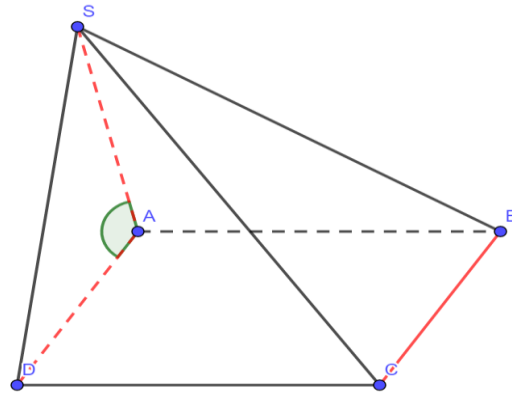
Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

- Câu 16.** [1H2-5.3-1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $(SAD) \perp (ABCD)$, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA là
- A. 90° . B. 45° . **C. 60° .** D. 30° .

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huyền ; Fb: Huyen Nguyen

Chọn C

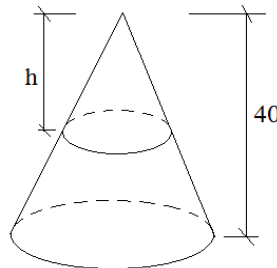


Vì đáy $ABCD$ là hình vuông nên $AD \parallel BC$.

Ta có: $(BC, SA) = (AD, SA) = \angle SAD = 60^\circ$ (Do $\triangle SAD$ đều).

Nhận xét: Đề thừa giả thiết.

- Câu 17.** [2H2-1.2-2] Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng 40 cm . Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích N_1 . Tính chiều cao h của hình nón N_2 ?



- A. 10 cm . **B. 20 cm .** C. 40 cm . D. 5 cm .

Lời giải

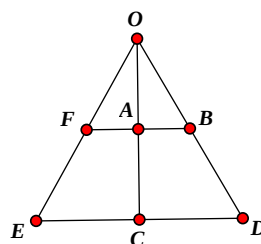
Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang

Chọn B

N_1 có chiều cao $h_1 = 40\text{ cm}$, bán kính đáy r_1 , thể tích V_1 .

N_2 có chiều cao h , bán kính đáy r_2 , thể tích V_2 .

Cắt hình nón N_1 , N_2 bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện lần lượt là tam giác cân OED , OAB (như hình vẽ)



Ta có $AB \parallel CD$, suy ra $\frac{h}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

$$\text{Mặt khác } \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{h^3}{h_1^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}h_1 \Leftrightarrow h = 20.$$

Vậy $h = 20 \text{ cm}$.

Câu 18. [2H1-3.2-2] Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$?

A. $V = a^3$.

B. $V = \frac{a^3}{3}$.

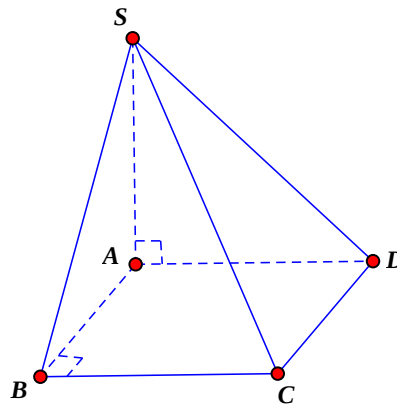
C. $V = 3a^3$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyễn Trang

Chọn A



+) $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SA$.

+) $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta có, $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SB, AB) = SBA = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SAB , ta có: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = a^3$.

Câu 19. [2D3-3.1-2] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{23}{15}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thúy; Fb: Thúy Minh.

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx.$$

Nhận xét: $x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 2]$.

$$\text{Nên } S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Câu 20. [2D2-5.3-2] Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$. Tính $|x_1 - x_2|$.

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thúy; Fb: Thúy Minh.

Chọn D

$$\text{Ta có: } 4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3 \Leftrightarrow 4^{x^2-x} + 2 \cdot 2^{x^2-x} - 3 = 0 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = 2^{x^2-x}, t > 0.$$

$$\text{Khi đó phương trình } (*) \text{ trở thành: } t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện $t > 0$, ta được $t = 1$.

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có } 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } |x_1 - x_2| = 1.$$

Câu 21. [2H3-3.7-3] Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}, d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$

C. $x + y + 2z + 9 = 0$. D. $x - y + 2z + 9 = 0$.

Lời giải

Tác giả: Giáp Minh Đức; Fb: Giáp Minh Đức

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Đường thẳng d_1, d_2 có vector chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (3; -1; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 1; -1)$.

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$ có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

$$\text{Do } \begin{cases} (P) // d_1 \\ (P) // d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases}. \text{ Suy ra } \vec{n} \text{ cùng phương với } [\vec{u}_1, \vec{u}_2].$$

$$\text{Có } [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; 4), \text{ nên chọn } \vec{n} = (1; 1; 2).$$

Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng: $x + y + 2z + d = 0$.

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 + 0 + 2 \cdot (-2) + d|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow |d - 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 9 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn đề là $(P_1): x + y + 2z - 3 = 0$ và $(P_2): x + y + 2z + 9 = 0$.

Câu 22. [2H2-1.2-2] Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

A. $r = 5$.

B. $r = 5\sqrt{\pi}$.

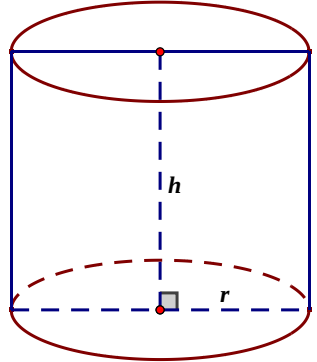
C. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

D. $r = \frac{5\sqrt{2\pi}}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Giáp Minh Đức; Fb: Giáp Minh Đức

Chọn C



Gọi l là độ dài đường sinh của hình trụ, ta có: $l = 2r$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$.

Mặt khác theo giả thiết $S_{xq} = 50\pi$. Từ đó suy ra $4\pi r^2 = 50\pi \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy bán kính của đường tròn đáy $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. [2D4-2.4-2] Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$.

A. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

B. Đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

D. Đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Chí Dũng; Fb: Phạm Chí Dũng

Chọn D

Gọi số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Theo đề bài ta có: $|x + yi - i| = |(1 + i)(x + yi)| \Leftrightarrow |x + (y - 1)i| = |(x - y) + (x + y)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 24. [2D4-4.1-2] Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 10.

B. 5.

C. 12.

D. 14.

Lời giải

Tác giả: Phạm Chí Dũng; Fb: Phạm Chí Dũng

Chọn A

Phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ có 2 nghiệm là $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$.

$$\text{Vậy } P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |1 + 2i|^2 + |1 - 2i|^2 = (\sqrt{1^2 + 2^2})^2 + (\sqrt{1^2 + (-2)^2})^2 = 10.$$

Câu 25. [1D2-5.5-2] Lớp 11A có 2 tổ. Tổ I có 5 bạn nam, 3 bạn nữ và tổ II có 4 bạn nam, 4 bạn nữ. Lấy ngẫu nhiên mỗi tổ 2 bạn đi lao động. Tính xác suất để trong các bạn đi lao động có đúng 3 bạn nữ.

A. $\frac{1}{364}$.

B. $\frac{69}{392}$.

C. $\frac{1}{14}$.

D. $\frac{9}{52}$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Minh Tuấn ; Fb: Minh Tuấn Hoàng Thị

Chọn B

Chọn mỗi tổ 2 bạn nên số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_8^2 \cdot C_8^2 = 784$.

Gọi A là biến cố : “Có đúng 3 bạn nữ trong 4 bạn đi lao động”, khi đó

TH1: Chọn 2 nữ tổ I, 1 nữ tổ II, 1 nam tổ II có $C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1$.

TH2: Chọn 2 nữ tổ II, 1 nữ tổ I, 1 nam tổ I có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1$.

Suy ra $n(A) = C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 138$.

Xác suất để chọn 4 bạn đi lao động có đúng 3 bạn nữ là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{138}{784} = \frac{69}{392}$.

Câu 26. [2H3-3.6-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - z + 1 = 0$, $(\beta): 2x - y + z - 7 = 0$.

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{-7}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-7}$.

C. $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-10}{7}$.

D. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{7}$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Minh Tuấn; Fb: Minh Tuấn Hoàng Thị

Chọn D

Ta có điểm $I(2;0;3)$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho.

Vector pháp tuyến của (α) và (β) lần lượt là $\vec{n}_\alpha = (1;3;-1)$ và $\vec{n}_\beta = (2;-1;1)$.

Ta có $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2;-3;-7)$.

Gọi $\vec{u}$ là 1 vec tơ chỉ phương của đường thẳng giao tuyến.

Ta có $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{u} \perp \vec{n}_\beta \end{cases}$, suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$. Chọn $\vec{u} = (-2;3;7)$.

Vậy phương trình đường thẳng giao tuyến là: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{7}$.

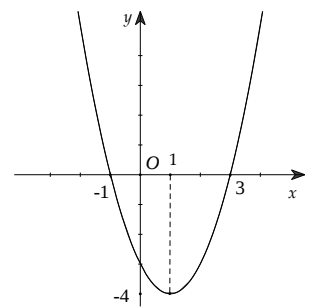
Câu 27. [2D1-1.2-1] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Lời giải

Tác giả: Trương Thanh Nhân ; Fb: Trương Thanh Nhân

Chọn C

Từ đồ thị của hàm $f'(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 28. [2D1-3.1-1] Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $M = \frac{5}{2}$.

B. $M = 2$.

C. $M = \frac{10}{3}$.

D. $M = 3$.

Lời giải

Tác giả: Trương Thanh Nhân ; Fb: Trương Thanh Nhân

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

$$+) \begin{cases} y' = 0 \\ -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$+) y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}; y(0) = 2; y(2) = \frac{10}{3}.$$

Suy ra $M = \frac{10}{3}$.

Câu 29. [2D3-2.4-2] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x) dx = 10$, thì $\int_0^3 f(2x) dx$ bằng

A. 30.

B. 20.

C. 10.

D. 5.

Lời giải

Tác giả: Ngọc Thanh ; Fb: Ngọc Thanh

Chọn D

Xét tích phân $\int_0^3 f(2x) dx$. Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 3 \Rightarrow t = 6$.

$$\text{Do đó: } \int_0^3 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^6 f(x) dx = 5.$$

Vậy $\int_0^3 f(2x) dx = 5$.

Câu 30. [2D2-5.5-2] Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2.3^x$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0

Lời giải

Tác giả: Ngọc Thanh ; Fb: Ngọc Thanh

Chọn C

Ta có $6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2.3^x \Leftrightarrow 6^x - 2.3^x + 4 - 2^{x+1} \leq 0$.

$$\Leftrightarrow 3^x(2^x - 2) - 2(2^x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)(3^x - 2) \leq 0 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } f(x) = (2^x - 2)(3^x - 2).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \log_3 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\log_3 2$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \log_3 2 \leq x \leq 1$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm nguyên.

Câu 31. [2D1-1.3-2] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 999.

B. 1001.

C. 1998.

D. 998.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thúy; Fb: Vũ Thị Thúy

Chọn B

$$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Hàm số có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						
	$-\infty$					$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty; m)$ và $(m+1; +\infty)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi $(2; +\infty) \subset (m+1; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Mà m là số nguyên thuộc khoảng $(-1000; 1000) \Rightarrow m \in \{-999; -998; \dots; 1\}$.

Có tất cả 1001 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 32. [2D3-3.5-2] Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5m.

B. 20m.

C. 40m.

D. 10m.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thúy; Fb: Vũ Thị Thúy

Chọn B

Khi ô tô dừng lại thì vận tốc $v(t) = 0 \text{ (m/s)}$. Thời gian ô tô đi được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xe dừng lại là: $-10t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (s)}$.

Gọi $t = 0$ là thời điểm tính từ lúc xe bắt đầu đạp phanh thì đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:

$$s = \int_0^2 (-10t + 20) dt = \left(-5t^2 + 20t \right) \Big|_0^2 = 20 \text{ (m)}.$$

Câu 33. [2D4-2.1-3] Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải**Tác giả: Nguyễn Trọng Tú ; Fb: Anh Tú****Chọn B**

Gọi $z = a + bi$ với $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} |z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6 \\ |z| = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + (b + \sqrt{5})i| + |a + (b - \sqrt{5})i| = 6 \\ |a + bi| = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + (b + \sqrt{5})^2} + \sqrt{a^2 + (b - \sqrt{5})^2} = 6 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{5}b + 5} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{5}b + 5} = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}b} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}b} = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}, \text{ (điều kiện } -\sqrt{5} \leq a \leq \sqrt{5}, -\sqrt{5} \leq b \leq \sqrt{5} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 2\sqrt{100 - 20b^2} = 36 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{100 - 20b^2} = 8 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 20b^2 = 64 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{5} \\ b^2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có bốn số phức cần tìm là: $z = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i$,

$$z = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i, z = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i.$$

Câu 34. [0H3-1.2-3] Cho đường tròn $(T): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ và hai điểm $A(3; -1); B(6; -2)$. Viết phương trình đường thẳng cắt (T) tại hai điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $x+3y+10=0.$

B. $\begin{cases} x+3y+10=0 \\ x+3y-10=0 \end{cases}$

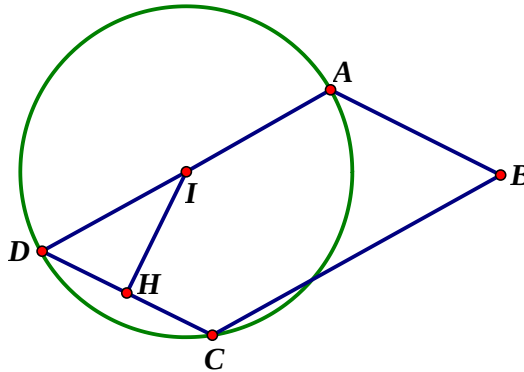
C. $x+3y-10=0.$

D. $\begin{cases} x+3y=0 \\ x+3y+10=0 \end{cases}$

Lời giải

Tác giả: Đặng Mai Hương ; Fb: maihuongpla

Chọn A



Đường tròn (C): Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\overline{AB} = (3;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}.$$

Phương trình của đường thẳng AB là $x+3y=0$.

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow CD: x+3y+m=0; m \neq 0$.

Hạ $IH \perp CD \Rightarrow H$ là trung điểm của CD.

$$\text{Áp dụng định lý Pytago trong } \triangle IHD: R^2 = ID^2 = IH^2 + DH^2 = IH^2 + \frac{AB^2}{4} \Rightarrow IH^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow d(I, CD) = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{|m-5|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow |m-5| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \Rightarrow CD: x+3y+10=0 (t/m) \\ m=0 \Rightarrow CD: x+3y=0 (=AB) \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng (CD): $x+3y+10=0$.

Câu 35. [2D3-2.4-2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\square$ đồng thời thỏa mãn $f(0) = f(1) = 5$.

$$\text{Tính tích phân } I = \int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx.$$

A. $I = 10.$

B. $I = -5.$

C. $I = 0.$

D. $I = 5.$

Lời giải

Tác giả: Lưu Thị Thủy; Fb: thuy.luu.33886

Chọn C

$$I = \int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = \int_0^1 e^{f(x)} d(f(x)) = e^{f(x)} \Big|_0^1 = e^{f(1)} - e^{f(0)} = e^5 - e^5 = 0.$$

Vậy $I = 0$.

Câu 36. [2D2-6.2-3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x

A. 5.

B. 4.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Tác giả: Lê Hoa ; Fb: Le hoa

Chọn D

$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \text{ nghiệm đúng với mọi } x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \text{ nghiệm đúng với mọi } x$$

TH1: Xét $m = 7$ ta được $\begin{cases} -4x \geq 0 \\ 7x^2 + 4x + 7 > 0 \end{cases}$ (1). Ta thấy hệ (1) không nghiệm đúng với mọi x
 $\Rightarrow m = 7$ (loại).

TH2: Xét $m = 0$ ta được $\begin{cases} 7x^2 - 4x + 7 \geq 0 \\ 4x > 0 \end{cases}$ (2). Ta thấy hệ (2) không nghiệm đúng với mọi x
 $\Rightarrow m = 0$ (loại).

TH3: Xét $m \neq 7$ và $m \neq 0$.

$$\begin{cases} (7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \text{ nghiệm đúng với mọi } x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-m > 0 \\ m > 0 \\ \Delta'_1 = 4 - (7-m)^2 \leq 0 \\ \Delta'_2 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 7 \\ \begin{cases} m \geq 9 \\ m \leq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5.$$

Do m nguyên nên $m \in \{3, 4, 5\}$.

Câu 37. [2H3-3.8-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x + my + (m-1)z + 2019 = 0$. Khi hai mặt phẳng (P) , (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

- A. $M(2019; -1; 1)$. B. $M(0; -2019; 0)$. C. $M(-2019; 1; 1)$. D. $M(0; 0; -2019)$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Việt Tiến, FB: Vũ Việt Tiến

Chọn C

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Vì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ nên α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos \alpha$ lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos \alpha &= \frac{|1 + 2m - 2(m-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2 + (m-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2 - m + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \forall m. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Khi đó $(Q): x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 2019 = 0$. Dễ thấy điểm $M(-2019; 1; 1)$ thuộc mặt phẳng (Q) .

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(-2019; 1; 1)$.

Câu 38. [2D2-5.5-3] Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

- A. $6 \leq m \leq 9$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $2 \leq m \leq 6$. D. $3 \leq m \leq 6$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Thị Thanh Huyền; Fb: Vu Thi Thanh Huyen

Chọn C

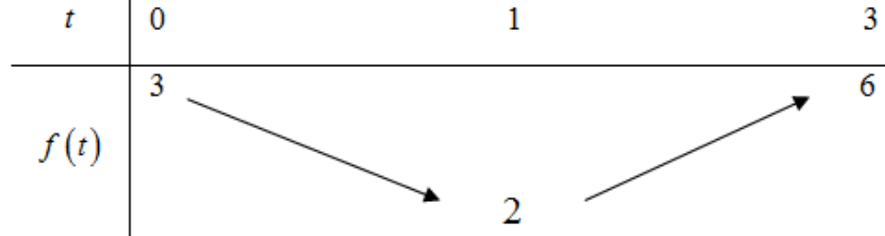
Ta có: $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m \quad (1)$.

Đặt $t = \log_2 x$, $x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 2t + 3 = m \quad (2)$.

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [1; 8]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 3]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ với $t \in [0; 3]$.

Ta có bảng biến thiên:



Vậy phương trình (1) có nghiệm $x \in [1; 8] \Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(3) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6$.

Câu 39. [2D1-5.4-3] Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số

$y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$.

B. $m = 3$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Tác giả: Phạm Công Dũng ; Fb: Phạm Công Dũng

Chọn D

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $\frac{2x}{x-1} = x - m + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2x = (x-1)(x-m+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x = x^2 - mx + 2x - x + m - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4(m-2) > 0 \\ 1^2 - (m+1) \cdot 1 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 9 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8 > 0, \text{ đúng với } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm x_1, x_2 của (1) lần lượt là hoành độ điểm A, B.

Gọi $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$. Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - m + 2 - x_1 + m - 2)^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_2 + x_1)^2 - 8x_2 x_1 \\ &= 2(m+1)^2 - 8(m-2) = 2m^2 - 4m + 18 = 2(m-1)^2 + 16 \geq 16, \forall m. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy AB ngắn nhất khi $m = 1$.

Câu 40. [2H1-3.3-2] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Điểm M nằm trên cạnh AA' sao cho $AM = 2MA'$. Gọi V' là thể tích của khối chóp $M.BCC'B'$. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.

B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

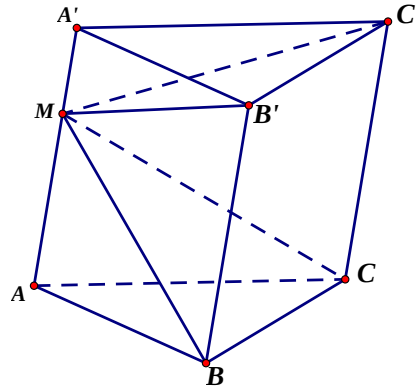
C. $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Võ Tự Lực; Fb: Tự Lực

Chọn D



Ta có thể tích khối lăng trụ $V = d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC}$.

Điểm M nằm trên cạnh AA' thỏa mãn $AM = 2MA'$ nên $d(M; (ABC)) = \frac{2}{3}d(A'; (ABC))$ và

$$d(M; (A'B'C')) = \frac{1}{3}d(A; (A'B'C')) = \frac{1}{3}d(A'; (ABC)).$$

Thể tích khối chóp $M.ABC$ là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot d(M; (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{2}{9}V$.

Thể tích khối chóp $M.A'B'C'$ là $V_2 = \frac{1}{3} \cdot d(M; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(A'; (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{1}{9}V$.

Thể tích khối chóp $M.BCC'B'$ là $V' = V - V_1 - V_2 = V - \frac{2}{9}V - \frac{1}{9}V = \frac{2}{3}V$.

Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

Có thể tính nhanh:

$$\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{M.ABC} - V_{M.A'B'C'}}{V} = 1 - \frac{\frac{1}{3}d(M; (ABC))}{d(A'; (ABC))} - \frac{\frac{1}{3}d(M; (A'B'C'))}{d(A; (A'B'C'))} = 1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}.$$

Cách 2: Lưu Thêm

$$+ V_{M.BCC'B'} = V' = \frac{1}{3}d(M; (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'}$$

$$= \frac{1}{3}d(A; (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} \quad (1)$$

$$+ \text{Ta lại có: } \frac{V_{A.BCC'B'}}{V} = 1 - \frac{V_{A.A'B'C'}}{V} = 1 - \frac{\frac{1}{3}d(A; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'}}{d(A; (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{2}{3}.$$

Câu 41. [1D4-1.1-2] Dãy số nào dưới đây là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

B. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

C. $u_n = 2^n + 1$.

D. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Thu Trang; Fb: Nguyễn Thị Thu Trang

Chọn A

Dãy số $u_n = \frac{n}{n+1}$ bị chặn vì $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chọn A.

$$\text{Lại có: } + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = +\infty.$$

$$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n + 1) = +\infty.$$

$$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right] = +\infty.$$

Nên các dãy số $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$, $u_n = 2^n + 1$, $u_n = n + \frac{1}{n}$ không bị chặn trên, suy ra các dãy số này không bị chặn. Loại B, C, D.

Câu 42. [2D4-2.3-3] Tìm mô đun của số phức số z biết $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{2}{9}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Diệu; Fb: dieuptnguyen

Chọn B

$$\text{Ta có } (2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$$

$$\Leftrightarrow 2z(1+i) - 1 - i + (1-i)\bar{z} + 1 - i = 2 - 2i.$$

$$\Leftrightarrow 2z(1+i) = 2 - (1-i)\bar{z} \quad (1).$$

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } 2z(1+i) = 2(a+bi)(1+i) = 2a - 2b + (2a + 2b)i.$$

$$2 - (1-i)\bar{z} = 2 - (1-i)(a-bi) = 2 - a + b + (a+b)i.$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 2 - a + b \\ 2a + 2b = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 43. [2H2-2.2-3] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

B. $R = \frac{a}{3}$.

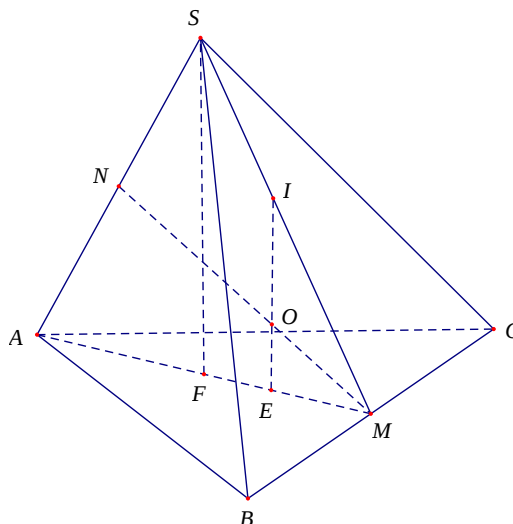
C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Trương Hồng Hà; Fb: Trương Hồng Hà

Chọn D**Cách 1:**



Ta có: $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AM = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \Delta SAM \text{ là tam giác đều cạnh } \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Mặt khác $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AM \perp BC$.

$$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SF \quad (2).$$

Gọi E là trọng tâm $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Qua E kẻ đường thẳng (d) vuông góc với $mp(ABC)$

$\Rightarrow (d)$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\forall i \quad SF \perp (ABC) \Rightarrow (d) // SF \text{ .}$$

Mặt khác $\triangle SAM$ đều nên đường thẳng MN là đường trung trực đoạn SA .

Trong $mp(SAM)$, gọi $O = (d) \cap MN$.

$$+ O \in (d) \Rightarrow OA = OB = OC.$$
$$+ O \in MN \Rightarrow OS = OA.$$

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = OA = \sqrt{OE^2 + EA^2}$.

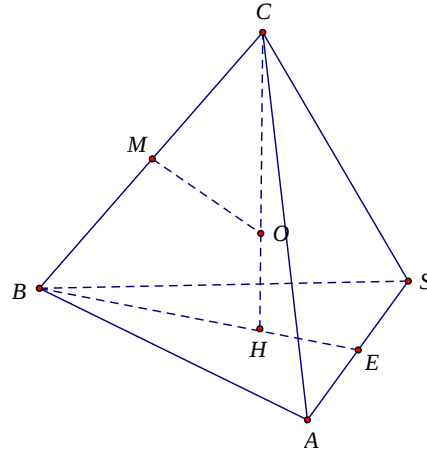
Trong $\triangle ABC$: $AE = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $EM = \frac{1}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$\triangle SAM$ đều $\Rightarrow MN$ là đường phân giác trong góc $SMA \Rightarrow OME = 30^\circ$.

Xét $\triangle OME$ vuông tại E : $\tan 30^\circ = \frac{OE}{EM} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}$.

$$\text{Vậy } R = \sqrt{OE^2 + EA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Cách 2:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , E là trung điểm của SA .

ΔSAB cân tại B nên $H \in BE$.

Vì $CA = CB = CS = a$ nên $CH \perp (SAB)$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng CH là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔSAB .

Gọi M là trung điểm của BC , qua M dựng đường thẳng (d) vuông góc với BC .

$$(d) \cap CH = O.$$

$$+ O \in (d) \Rightarrow OB = OC.$$

$$+ O \in CH \Rightarrow OS = OA = OB.$$

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$, bán kính $R = OC$.

$$\text{Ta có } \Delta CMO \sim \Delta CHB \Rightarrow \frac{CM}{CH} = \frac{CO}{CB} \Rightarrow CO = \frac{CM \cdot CB}{CH} = \frac{CB^2}{2 \cdot CH}.$$

$$\text{Xét } \Delta SBE \text{ ta có: } BE = \sqrt{SB^2 - SE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$\text{Ta có: } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} BE \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{39}}{16}.$$

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp } \Delta SAB \text{ là: } BH = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot S_{\Delta SAB}} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}}{4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{39}}{16}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Xét } \Delta CHB \text{ ta có: } CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Vậy } R = CO = \frac{CB^2}{2 \cdot CH} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{3a}{\sqrt{13}}} = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Câu 44. [2H3-3.2-4] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0)$, $B(3;0;2)$, $C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A .

A.
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

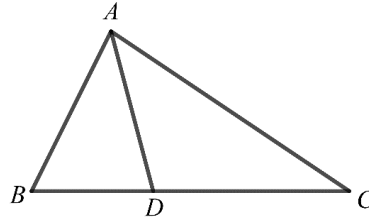
C.
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Lời giải

Tác giả: Trần Thơm ; Fb: Kem LY

Chọn C

**Cách 1:**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC} = (2; 2; -4) \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$.

Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

Khi đó: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DB = \frac{1}{2}DC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*) (vì D nằm giữa B và C).

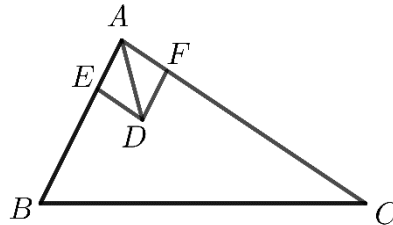
Gọi $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DB} = (3-x; -y; 2-z)$, $\overrightarrow{DC} = (4-x; 3-y; -4-z)$.

$$\text{Thay vào (*) ta được hệ phương trình } \begin{cases} 3-x = -\frac{1}{2}(4-x) \\ -y = -\frac{1}{2}(3-y) \\ 2-z = -\frac{1}{2}(-4-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}. \text{ Vậy } D\left(\frac{10}{3}; 1; 0\right).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3}; 0; 0\right).$$

Đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = (1; 0; 0) \text{ nên có phương trình là: } \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC} = (2; 2; -4) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{6}$.

Lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = 1$. Khi đó $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $AF = 1$. Khi đó $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Dựng hình bình hành AEDF, ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; 0; 0\right)$.

Vì $AE = AF = 1$ nên hình bình hành AEDF cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AD}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{6}}{2} \overrightarrow{AD} = (1;0;0) \text{ nên có phương trình là: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Nhận xét:

Đường phân giác trong của góc BAC có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|} \overrightarrow{AC}$.

Cách 3: Lưu Thêm

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC} = (2; 2; -4) \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$.

Gọi I là trung điểm AC . Ta có $I = (3; 2; -2)$ và $AI = \sqrt{6}$.

Dựng hình bình hành $ABKI$, ta có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = (2; 0; 0)$.

Vì $AB = AI = \sqrt{6}$ nên hình bình hành $ABKI$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AK}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC .

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AI} = (1; 0; 0) \text{ nên có phương trình là: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Câu 45. [2D3-2.4-2] Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính

$$P = abc.$$

A. $P = -36$.

B. $P = 0$.

C. $P = -18$.

D. $P = 18$.

Lời giải

Tác giả: Ngô Quốc Tuấn; Fb: Quốc Tuấn

Chọn A

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\frac{x-2}{x+1}$				
		+	-	0
				+

$$\text{Khi đó: } \int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} dx = -\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx + \int_2^5 \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= -\int_1^2 dx + 3 \int_1^2 \frac{d(x+1)}{x+1} + \int_2^5 dx - 3 \int_2^5 \frac{d(x+1)}{x+1} \\ &= -x \Big|_1^2 + 3 \ln |x+1| \Big|_1^2 + x \Big|_2^5 - 3 \ln |x+1| \Big|_2^5 = 2 - 6 \ln 2 + 3 \ln 3. \end{aligned}$$

Suy ra: $a = 2$, $b = -6$, $c = 3$. Vậy $P = -36$.

Câu 46. [2D2-5.3-4] Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m + e^{3m} = 2 \left(x + \sqrt{1-x^2} \right) \left(1 + x\sqrt{1-x^2} \right).$$

A. 2.

B. 0.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Hoàng Hưng; Fb: Nguyễn Hưng

Chọn D

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$.

Xét phương trình: $e^m + e^{3m} = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ (1).

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2}$.

Ta có $t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$e^m + e^{3m} = 2t\left(1 + \frac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow e^m + e^{3m} = t(t^2+1) \Leftrightarrow (e^m)^3 + e^m = t^3 + t \quad (2).$$

Xét hàm số: $g(u) = u^3 + u$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(2) \Leftrightarrow g(e^m) = g(t) \Leftrightarrow e^m = t$.

Khi đó ta có $(1) \Leftrightarrow e^m = x + \sqrt{1-x^2}$ (3)

Xét hàm số: $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. TXĐ: $[-1;1]$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$		-1	$\sqrt{2}$	1	

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [-1;1] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow -1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2}.$$

Do $m \in \mathbb{R}$ nên $m \in \{0\}$.

Câu 47. [2D1-2.4-4] Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 1.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Tác giả: Trần Lê Hương Ly; Fb: Trần Lê Hương Ly

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + (m+3).$$

* Trường hợp 1: $m = 1$.

Lúc đó $f'(x) = -10x + 4$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị dương. Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

* Trường hợp 2: $m \neq 1$.

Lúc này hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc ba. Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ hoặc $x_1 = 0 < x_2$.

➤ Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow (m-1) \cdot (m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

➤ Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x_1 = 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 = 0 \\ \frac{10}{3(m-1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m > 1 \end{cases}. \text{ Hệ phương trình này vô nghiệm.}$$

Kết hợp các trường hợp, ta có $-3 < m \leq 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 48. [2D4-5.2-3] Cho số phức z có $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ là

A. $\frac{13}{4}$.

B. 3.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Anh Đào; Fb: Đào Nguyễn

Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 1$.

Ta có: $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z(z-1)| + |z^2 + z + 1| = |z| \cdot |z-1| + |z^2 + z + 1| = |z-1| + |z^2 + z + 1|$.

$$|z-1| = |x + yi - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \sqrt{2-2x}.$$

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + 2xyi + x + yi + 1 = 2x^2 + x + y(2x+1)i$$

$$\Rightarrow |z^2 + z + 1| = \sqrt{x^2(2x+1)^2 + y^2(2x+1)^2} = \sqrt{(2x+1)^2(x^2 + y^2)} = |2x+1|.$$

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{2-2x} + |2x+1|.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2-2x} + |2x+1|$ trên đoạn $[-1; 1]$.

+ Trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right)$:

$$f(x) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} - 2 < 0, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right).$$

Mặt khác hàm số $f(x) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1$ liên tục trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) \leq f(-1) = 3, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right).$

$$\Rightarrow \max_{x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right)} f(x) = 3. \quad (1)$$

+ Trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$:

$$f(x) = \sqrt{2-2x} + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}.$$

Có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$; $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$; $f(1) = 3$.

$$\Rightarrow \max_{x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = \frac{13}{4}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{13}{4}$ hay $P_{\max} = \frac{13}{4}$.

Chú ý:

Ta có thể biến đổi theo hướng khác như sau

Do $z \cdot \bar{z} = |z| = 1 \Rightarrow z^2 + z + 1 = z^2 + z + z \cdot \bar{z} = z(z + 1 + \bar{z}) = z(2x + 1)$

$$\Rightarrow |z^2 + z + 1| = |z(2x + 1)| = |z| |2x + 1| = |2x + 1|.$$

Câu 49. [0H3-1.3-3] Cho hai đường thẳng Ax , By chéo nhau và vuông góc với nhau, có AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó và $AB = a$. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho $MN = b$. Xác định độ dài đoạn thẳng AM theo a và b sao cho thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $AM = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{3}$.

B. $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$.

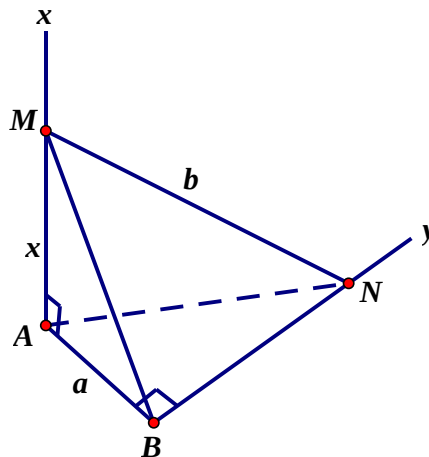
C. $AM = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$.

D. $AM = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{3}}$.

Lời giải

Tác giả: Võ Thanh Hải ; Fb: Võ Thanh Hải

Chọn B



Đặt $AM = x, x > 0$, ta tính được $AN^2 = b^2 - x^2$ và $BN = \sqrt{AN^2 - AB^2} = \sqrt{b^2 - a^2 - x^2}$.

Tính thể tích tứ diện $ABMN$.

Ta có $V_{ABMN} = \frac{1}{3} AM \cdot \left(\frac{1}{2} AB \cdot BN \right) = \frac{1}{6} ax \sqrt{b^2 - a^2 - x^2}$

$$= \frac{a}{6} \sqrt{x^2 \cdot (b^2 - a^2 - x^2)} \leq \frac{a}{6} \left(\frac{x^2 + b^2 - a^2 - x^2}{2} \right) = \frac{1}{12} a(b^2 - a^2).$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = b^2 - a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$.

Câu 50. [2H3-3.8-3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 2; -3)$, $B(-2; -2; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

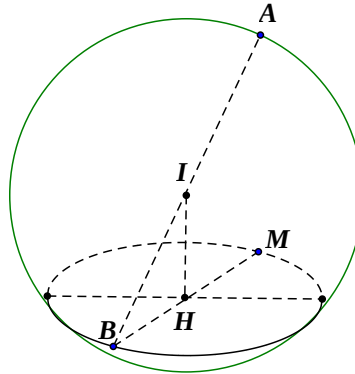
C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Lời giải

Tác giả: Đàm Văn Thượng ; Fb: Thượng Đàm.

Chọn C



Ta có $M \in (C)$ và $AMB = 90^\circ$ suy ra M nằm trên đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (a) và mặt cầu (S) đường kính AB .

Lại có $B \in (C)$ suy ra B và M cùng nằm trên đường tròn (C) .

Khi đó MB lớn nhất khi và chỉ khi MB là đường kính của đường tròn (C) .

Gọi I là tâm mặt cầu (S) suy ra $I \left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2} \right)$, H là tâm đường tròn (C) .

(a) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_{(a)}(2; 2; -1)$.

Đường thẳng IH vuông góc với (a) nên nhận $\vec{n}_{(a)}(2; 2; -1)$ là vector chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng IH : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Ta có $H \left(-\frac{1}{2} + 2t; 2t; -1 - t \right)$.

$H \in (a) \Leftrightarrow 2 \left(-\frac{1}{2} + 2t \right) + 2(2t) - (-1 - t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Suy ra $H \left(-\frac{5}{2}; -2; 0 \right)$.

Phương trình đường thẳng BM đi qua B nhận $\vec{BH} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1 \right) = -\frac{1}{2}(1; 0; 2)$ làm vector chỉ

phương là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.