

TỔ TOÁN - LÝ



TÀI LIỆU HỌC TẬP
TOÁN 10
HK2



Bình dương, Tháng 1 năm 2019

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC-BẤT PHƯƠNG TRÌNH.....	1
§1: BẤT ĐẲNG THỨC	1
§2-3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN	8
§4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.....	14
§5: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI.....	19
CHƯƠNG VI: GÓC – CUNG LƯỢNG GIÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	29
§1: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC	29
§2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG.	33
§3: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC.	40

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG II: TÍCH VÔ HƯỚNG.....	48
§2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC TƠ.....	48
§3 : HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC- GIẢI TAM GIÁC.....	53
CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG	59
§1 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	59
§2 KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC	67
§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN	74
§4: PHƯƠNG TRÌNH ELIP	82

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC-BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1: BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮC LÝ THUYẾT.

Điều kiện		Nội dung	
Cộng hai vế với số bất kì		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
Nhân hai vế	một số dương: $c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
	một số âm: $c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều		$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$	(3)
Nhân từng vế BĐT khi biết nó dương		$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac > bd$	(4)
Nâng lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	Mũ chẵn	$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
Lấy căn hai vế	$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(6a)
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(6b)
Nghịch đảo	Nếu a, b cùng dấu: $ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(7a)
	Nếu a, b trái dấu: $ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	(7b)
BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (AM – GM)			
① $\forall a \geq 0; b \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. ② $\forall a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.			
BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXSKI (CAUCHY SCHWARZ)			
① $\forall x; y; a; b \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\ a.x + b.y \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, ($a; b \neq 0$). ② $\forall x; y; z; a; b; c \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases} (a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ a.x + b.y + c.z \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \end{cases}$.			

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ($a; b; c \neq 0$).

③ $\forall x; y \in \mathbb{R}$ và $a > 0, b > 0$ thì $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

④ $\forall x; y; z \in \mathbb{R}$ và $a > 0, b > 0, c > 0$ thì $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$
	$ a - b \leq a+b \leq a + b $

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CẠNH CỦA TAM GIÁC

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

+ $a, b, c > 0$.

+ $|a-b| < c < a+b; |b-c| < a < b+c; |c-a| < b < c+a$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1: Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc - ca)$

HD: a) $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ b) $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$

c) $\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$

d) $\Leftrightarrow (a-b+c)^2 \geq 0$

Bài 2: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

b) $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

d) $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$; với $a, b, c > 0$.

HD: a) $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; c+a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow đpcm$.

$$b) a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}; a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow đpcm.$$

$$c) \bullet (1+a)(1+b)(1+c) = 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc$$

$$\bullet a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \bullet ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+abc = (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

$$d) \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}} = 2c, \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} = 2a, \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b \Rightarrow đpcm$$

Bài 3: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$a) ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$$

$$b) abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$$

$$c) 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4 > 0$$

$$d) a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2 > a^3+b^3+c^3$$

HD: a) Sử dụng BĐT tam giác, ta có: $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > b^2-2bc+c^2$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

$$b) Ta có: a^2 > a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow a^2 > (a+b-c)(a-b+c).$$

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta suy ra đpcm.

$$c) \Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0.$$

$$d) \Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0.$$

Bài 3: Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$a) y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}; x > 0.$$

$$b) y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}; x > 1.$$

$$HD: a) \text{Min} y = 6 \text{ khi } x = 6$$

$$b) \text{Min} y = \frac{3}{2} \text{ khi } x = 3$$

Bài 4: Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

$$a) y = (x+3)(5-x); -3 \leq x \leq 5$$

$$b) y = x(6-x); 0 \leq x \leq 6$$

$$HD: a) \text{Max} y = 16 \text{ khi } x = 1$$

$$b) \text{Max} y = 9 \text{ khi } x = 3$$

$$c) \text{Max} y = \frac{121}{8} \text{ khi } x = -\frac{1}{4}$$

$$d) \text{Max} y = \frac{625}{8} \text{ khi } x = \frac{5}{4}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Cho bất đẳng thức $|a - b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

- A. $a = b$. B. $ab \leq 0$. C. $ab \geq 0$. D. $ab = 0$.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 3|x|$ với $x \in \mathbb{R}$ là:

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0 . D. $\frac{3}{2}$.

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0 , giá trị lớn nhất bằng 1 .
B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1 .
C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1 , giá trị lớn nhất bằng 2 .
D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Câu 5. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3 . Khi đó, tích hai số a và b

- A. có giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$. B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.
C. có giá trị lớn nhất là $\frac{3}{2}$. D. không có giá trị lớn nhất.

Câu 6. Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn đồng thời: $a + b - c > 0$; $b + c - a > 0$; $c + a - b > 0$. Để ba số $a; b; c$ là ba cạnh của một tam giác thì cần thêm điều kiện gì?

- A. Cần có cả $a, b, c \geq 0$. B. Cần có cả $a, b, c > 0$.
C. Chỉ cần một trong ba số a, b, c dương D. Không cần thêm điều kiện gì.

Câu 7. Trong các hình chữ nhật có cùng chi vi thì

- A. Hình vuông có diện tích nhỏ nhất.
- B. Hình vuông có diện tích lớn nhất.
- C. Không xác định được hình có diện tích lớn nhất.
- D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 8. Tìm mệnh đề đúng?

- A. $a < b \Rightarrow ac < bc$.
- B. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.
- D. $a < b \Rightarrow ac < bc, (c > 0)$.

Câu 9. Suy luận nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.
- B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.
- C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$.
- D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$.

Câu 10. Trong các tính chất sau, tính chất nào sai?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.
- B. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.
- C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
- D. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.

Câu 11. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
- B. $a < b \Rightarrow ac < bc$.
- C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
- D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$.
- B. $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$.
- C. $\begin{cases} a \leq b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$.
- D. $ac \leq bc \Rightarrow a \leq b, (c > 0)$

Câu 13. Cho biểu thức $P = -a + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$.
- B. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$.

C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$.

D. P đạt giá trị lớn nhất tại $a = \frac{1}{4}$.

Câu 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

A. $\frac{11}{4}$.

B. $\frac{4}{11}$.

C. $\frac{11}{8}$.

D. $\frac{8}{11}$.

Câu 15. Cho $f(x) = x - x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$.

B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$.

D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 16. Bất đẳng thức $(m+n)^2 \geq 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây?

A. $n(m-1)^2 - m(n-1)^2 \geq 0$.

B. $m^2 + n^2 \geq 2mn$.

C. $(m+n)^2 + m - n \geq 0$.

D. $(m-n)^2 \geq 2mn$.

Câu 17. Với mọi $a, b \neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a - b < 0$.

B. $a^2 - ab + b^2 < 0$.

C. $a^2 + ab + b^2 > 0$.

D. $a - b > 0$.

Câu 18. Với hai số x, y dương thoả $xy = 36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 12$.

B. $x + y \geq 2xy = 72$.

C. $4xy \leq x^2 + y^2$.

D. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy = 36$.

Câu 19. Cho hai số x, y dương thoả $x + y = 12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{xy} \leq 6$.

B. $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 36$.

C. $2xy < x^2 + y^2$.

D. $\sqrt{xy} \geq 6$.

Câu 20. Cho x, y là hai số thực bất kỳ thoả $xy = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Câu 21. Với $a, b, c, d > 0$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề sai?

A. $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

B. $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

C. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$

D. Có ít nhất hai trong ba mệnh đề trên là sai.

Câu 22. Hai số a, b thoả bất đẳng thức $\frac{a^2+b^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì

A. $a < b.$

B. $a > b.$

C. $a = b.$

D. $a \neq b.$

§2-3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. Định nghĩa: Bất phương trình bậc nhất là bất phương trình có dạng:

$$ax + b \leq 0, ax + b \geq 0, ax + b > 0, ax + b < 0, \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Giải và biện luận bất phương trình dạng: $ax + b < 0$ (1)

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$a < 0$		$S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \emptyset$
	$b < 0$	$S = \mathbb{R}$

3. Dấu của nhị thức bậc nhất: Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

4. Giải hệ bất phương trình bậc nhất 1 ẩn:

- Giải từng bất phương trình trong hệ.
- Lấy giao nghiệm.

5. Một số phép biến đổi tương đương bất phương trình:

- $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < P(x) + f(x)$
- $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) < P(x) \cdot f(x)$ nếu $f(x) > 0, \forall x$
- $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) \cdot f(x) > P(x) \cdot f(x)$ nếu $f(x) < 0, \forall x$
- $P(x) < Q(x) \Leftrightarrow [P(x)]^2 < [Q(x)]^2$ nếu $P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \forall x$

6. Bất phương trình qui về bất pt bậc nhất một ẩn:

6.1. Bất phương trình tích

- Dạng: $P(x) \cdot Q(x) > 0$ (1) (trong đó $P(x), Q(x)$ là những nhị thức bậc nhất.)
- Cách giải: Lập bảng xét dấu của $P(x) \cdot Q(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1).

6.2. Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2) (trong đó $P(x), Q(x)$ là những nhị thức bậc nhất.)
- Cách giải: Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).

Chú ý: Không nên qui đồng và khử mẫu.

6.3. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ

- Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa

hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

• Dạng 1: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$

• Dạng 2: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$

Chú ý: Với $B > 0$ ta có: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$; $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$

b) $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}$

c) $\frac{5(x-1)}{6} - 1 < \frac{2(x+1)}{3}$

Bài 2. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

a) $mx + 1 > m^2 + x$

b) $mx + 6 > 2x + 3m$

c) $(m+1)x + m < 3m + 4$

d) $\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}$

Bài 3. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $3 - mx < 2(x-m) - (m+1)^2$

b) $m^2x + 1 \geq m + (3m-2)x$

c) $mx - m^2 > mx - 4$

Bài 4. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x+1 \geq 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x-3}{2} < \frac{2-x}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x + \frac{4}{3} \\ \frac{2x-9}{3} < \frac{19+x}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{11-x}{2} \geq 2x-5 \\ 2(3x+1) \geq \frac{x-8}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 15x-2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $(x+1)(x-1)(3x-6) > 0$

b) $(2x-7)(4-5x) \geq 0$

c) $x^2 - x - 20 > 2(x-11)$

d) $3x(2x+7)(9-3x) \geq 0$

e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 < 0$

f) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 > 0$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2x-5}{3x+2} < \frac{3x+2}{2x-5} & \text{b)} \frac{x-3}{x+1} > \frac{x+5}{x-2} & \text{c)} \frac{x-3}{x+5} < \frac{1-2x}{x-3} \\ \text{d)} \frac{3x-4}{x-2} > 1 & \text{e)} \frac{2x-5}{2-x} \geq -1 & \text{f)} \frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1} \end{array}$$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} |3x-2| > 7 & \text{b)} |5x-12| < 3 & \text{c)} |2x-8| \leq 7 \\ \text{d)} |3x+15| \geq 3 & \text{e)} |x-1| > \frac{x+1}{2} & \text{f)} |x-2| < \frac{x}{2} \\ \text{g)} |2x-5| \leq x+1 & \text{h)} |2x+1| \leq x & \text{i)} |x-2| > x+1 \end{array}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = 23x - 20$. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f(x) > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. & \text{B. } f(x) > 0 \text{ với } \forall x \in \left(-\infty; \frac{20}{23}\right). \\ \text{C. } f(x) > 0 \text{ với } x > -\frac{5}{2}. & \text{D. } f(x) > 0 \text{ với } \forall x \in \left(\frac{20}{23}; +\infty\right) \end{array}$$

Câu 2. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x(x-6) + 5 - 2x - (10 + x(x-8))$ luôn dương?

$$\text{A. } \emptyset. \quad \text{B. } \mathbb{R}. \quad \text{C. } (-\infty; 5). \quad \text{D. } (5; +\infty).$$

Câu 3. Các giá trị của x thỏa mãn điều kiện đa thức $f(x) = \frac{1}{x+2} + x - 1 - \frac{1}{x+1} - \sqrt{x^2+1}$

$$\text{A. } x \neq -2 \text{ và } x \neq -1. \quad \text{B. } x > -1. \quad \text{C. } x \neq -1. \quad \text{D. } x \neq -2.$$

Câu 4. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{2}{1-x} - 1$ âm?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } (-\infty; -1). & \text{B. } (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \\ \text{C. } (1; +\infty). & \text{D. } (-1; 1). \end{array}$$

Câu 5. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = (x-1)(x+3)$ không âm

$$\text{A. } (-3, 1). \quad \text{B. } [-3, 1]. \quad \text{C. } (-\infty, -3] \cup [1, +\infty). \quad \text{D. } (-\infty, -3) \cup [1, +\infty).$$

Câu 6. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{-4x+1}{3x+1} + 3$ không dương

$$\text{A. } \left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{3}\right] \quad \text{B. } \left[-\frac{4}{5}, -\frac{1}{3}\right) \quad \text{C. } \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right]. \quad \text{D. } \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right).$$

Câu 7. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{4}{x+3} - 2$ không dương

$$\text{A. } (-\infty, -3) \cup [-1, +\infty). \quad \text{B. } (-3, -1]. \quad \text{C. } [-1, +\infty). \quad \text{D. } (-\infty, -1].$$

Câu 8. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = |2x-5| - 3$ không dương

$$\text{A. } 1 \leq x \leq 4. \quad \text{B. } x = \frac{5}{2}. \quad \text{C. } x = 0. \quad \text{D. } x < 1.$$

- Câu 9.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x+3}$ không dương?
- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (-3; -1) \cup [1; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 1]$. D. $S = (-3; 1)$.
- Câu 10.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{2-x}{2x+1}$ không âm?
- A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$. D. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.
- Câu 11.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = x(x^2 - 1)$ không âm?
- A. $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. B. $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$. D. $[-1; 1]$.
- Câu 12.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = |2x - 3| - 1$ không dương?
- A. $1 \leq x \leq 3$. B. $-1 \leq x \leq 1$. C. $1 \leq x \leq 2$. D. $-1 \leq x \leq 2$.
- Câu 13.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = 5x - \frac{x+1}{5} - 4 - (2x-7)$ luôn âm
- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; +\infty)$.
- Câu 14.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = x^2 - 2x + 3$ luôn dương
- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.
- Câu 15.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 + 9 - 6x$ luôn dương
- A. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 3)$.
- Câu 16.** Tìm tham số thực m để tồn tại x thỏa $f(x) = m^2x + 3 - (mx + 4)$ âm
- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$ hoặc $m = 0$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.
- Câu 17.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = 2x + \frac{3}{2x-4} - \left(3 + \frac{3}{2x-4}\right)$ âm
- A. $2x < 3$. B. $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$. C. $x < \frac{3}{2}$. D. Tất cả đều đúng.
- Câu 18.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = 2(x-1) - x - (3(x-1) - 2x - 5)$ luôn dương
- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x < 3, 24$. C. $x > -2, 12$. D. Vô nghiệm.
- Câu 19.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = 5(x-1) - x(7-x) - (x^2 - 2x)$ luôn dương
- A. Vô nghiệm. B. $x \in \mathbb{R}$.
C. $x > -2, 5$. D. $x > -2, 6$.
- Câu 20.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 8$ không dương.

- A. $[2; 3]$. B. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. C. $[2; 4]$. D. $[1; 4]$.
- Câu 21.** Số các giá trị nguyên âm của x để đa thức $f(x) = (x+3)(x-2)(x-4)$ không âm là
A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 22.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = \left(\frac{5x}{5} - \frac{13}{21} + \frac{x}{15}\right) - \left(\frac{9}{25} - \frac{2x}{35}\right)$ luôn âm
A. $x > 0$. B. $x < \frac{257}{295}$ C. $x > -\frac{5}{2}$. D. $x < -5$.
- Câu 23.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ không dương
A. $[-2; 5]$. B. $(-2; 5)$ C. $(-2, 5]$. D. $[-2, 5)$.
- Câu 24.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ luôn âm
A. R. B. $\emptyset$. C. $(-1, 1)$. D. Một đáp số khác.
- Câu 25.** Các số tự nhiên bé hơn 4 để đa thức $f(x) = \frac{2x}{5} - 23 - (2x-16)$ luôn âm
A. $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. B. $-\frac{35}{8} < x < 4$.
C. $\{0; 1; 2; 3\}$. D. $\{0; 1; 2; -3\}$
- Câu 26.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = x(5x+2) - x(x^2+6)$ không dương
A. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. B. $[1; 4]$. C. $(1; 4)$. D. $[0; 1] \cup [4; +\infty)$
- Câu 27.** Với giá trị nào của m thì không tồn tại giá trị của x để $f(x) = mx + m - 2x$ luôn âm
A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 28.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = x^2 - 4x + 3$ luôn âm
A. $(-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
C. $(1; 3)$. D. $[1; 3]$.
- Câu 29.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$ không âm
A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$. B. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
C. $\left[-5; \frac{3}{2}\right]$. D. $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$.
- Câu 30.** Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ không âm
A. $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$ B. $[-1; 7]$ C. $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ D. $[-7; 1]$.
- Câu 31.** Tìm số nguyên nhỏ nhất của x để $f(x) = \frac{x-5}{(x+7)(x-2)}$ luôn dương
A. $x = -3$. B. $x = -4$. C. $x = -5$. D. $x = -6$.

Câu 32. Các số tự nhiên bé hơn 6 để đa thức $f(x) = 5x - \frac{1}{3} - \left(12 - \frac{2x}{3}\right)$ luôn dương

A. $\{2; 3; 4; 5\}$. B. $\{3; 4; 5\}$. C. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. D. $\{3; 4; 5; 6\}$.

Câu 33. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = \frac{3x+5}{2} - 1 - \left(\frac{x+2}{3} + x\right)$ luôn âm

A. Vô nghiệm. B. Mọi x đều là nghiệm.
 C. $x > 4,11$. D. $x < -5$.

Câu 34. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x-1}$ không âm?

A. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right]$. B. $(-2; +\infty)$. C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$. D. $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

§4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và miền nghiệm của nó.

- **Bất phương trình bậc nhất hai ẩn** x, y là bất phương trình có một trong các dạng:

$ax + by + c < 0, ax + by + c > 0, ax + by + c \leq 0, ax + by + c \geq 0$ trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

- Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ gọi là **một nghiệm** của bất phương trình $ax + by + c < 0$,

- Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$ cũng được định nghĩa tương tự.

- Trong mặt phẳng tọa độ thì mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một **điểm** và **tập nghiệm** của nó được biểu diễn bởi một **tập hợp điểm**. Ta gọi **tập hợp điểm** ấy là **miền nghiệm** của bất phương trình.

2. Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

* **Định lí :** Trong mặt phẳng tọa độ đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$.

* Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta có quy tắc thực hành **biểu diễn hình học tập nghiệm** (hay **biểu diễn miền nghiệm**) như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$

Bước 2. Xét một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên (d) .

- Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.
- Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \leq 0$ hoặc $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

➤ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn, ta có *hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta gọi tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn mọi bất phương trình trong hệ là **miền nghiệm của hệ**. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch (tô màu) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất pt:

a) $-3x + y + 2 \leq 0$

b) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$

Bài 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất pt:
$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Câu nào sau đây **sai**?

Miền nghiệm của bất phương trình $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A. $(0; 0)$. B. $(1; 1)$. C. $(4; 2)$. D. $(1; -1)$.

Câu 2: Câu nào sau đây đúng?

Miền nghiệm của bất phương trình $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A. $(0; 0)$. B. $(-4; 2)$. C. $(-2; 2)$. D. $(-5; 3)$.

Câu 3: Câu nào sau đây **sai**?

Miền nghiệm của bất phương trình $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A. $(-3; -4)$. B. $(-2; -5)$. C. $(-1; -6)$. D. $(0; 0)$.

Câu 4: Câu nào sau đây đúng?

Miền nghiệm của bất phương trình $4(x - 1) + 5(y - 3) > 2x - 9$ là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A. (0;0). B. (1;1). C. (-1;1). D. (2;5).

Câu 5: Câu nào sau đây đúng?.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ 2(x-1) + \frac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
 là phần mặt phẳng chứa điểm

- A. (2;1). B. (0;0). C. (1;1). D. (3;4).

Câu 6: Điểm nào sau đây **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 > 0 \\ 5x - y + 4 < 0 \end{cases} ?$$

- A. (-1;4). B. (-2;4). C. (0;0). D. (-3;4).

Câu 7: Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$$

- A. (0;0). B. (1;0). C. (0;-2). D. (0;2).

Câu 8: Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y + 3 < 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$$
 là phần mặt phẳng chứa điểm

- A. (5;3). B. (0;0). C. (1;-1). D. (-2;2).

Câu 9: Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$$
 là phần mặt phẳng chứa điểm

- A. (0;0). B. (1;2). C. (2;1). D. (8;4).

Câu 10: Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2(y + 3) > 4(x + 1) - y + 3$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

- A. (3;0). B. (3;1). C. (1;1). D. (0;0).

Câu 11: Miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?

- A. (-2;1). B. (2;3). C. (2;-1). D. (0;0).

Câu 12: Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $2x + y < 1$?

- A. (-2;1). B. (3;-7). C. (0;1). D. (0;0).

Câu 13: Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình $x - 4y + 5 \geq 0$?

- A. $(-5; 0)$. B. $(-2; 1)$. C. $(1; -3)$. D. $(0; 0)$.
- Câu 14:** Miền nghiệm của bất phương trình $2x + y > 1$ không chứa điểm nào sau đây?
- A. $A(1; 1)$. B. $B(2; 2)$. C. $C(3; 3)$. D. $D(-1; -1)$
- Câu 15:** Miền nghiệm của bất phương trình $(1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y \geq 2$ chứa điểm nào sau đây?
- A. $A(1; -1)$. B. $B(-1; -1)$. C. $C(-1; 1)$. D. $D(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.
- Câu 16:** Miền nghiệm của bất phương trình $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4$ chứa điểm nào sau đây?
- A. $A(1; 1)$. B. $B(1; 5)$. C. $C(4; 3)$. D. $D(0; 4)$.
- Câu 17:** Miền nghiệm của bất phương trình $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$ chứa điểm nào sau đây?
- A. $A(1; 1)$. B. $B(1; 0)$. C. $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. D. $D(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.
- Câu 18:** Trong các cặp số sau, cặp nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$ là
- A. $(0; 0)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; -1)$.
- Câu 19:** Cho bất phương trình $2x + 4y < 5$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $(1; 1) \in S$. B. $(1; 10) \in S$. C. $(1; -1) \in S$. D. $(1; 5) \in S$.
- Câu 20:** Cho bất phương trình $x - 2y + 5 > 0$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $(2; 2) \in S$. B. $(1; 3) \in S$. C. $(-2; 2) \in S$. D. $(-2; 4) \in S$.
- Câu 21:** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y > 0 \\ 2x + 5y < 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $(1; 1) \in S$. B. $(-1; -1) \in S$. C. $(1; -\frac{1}{2}) \in S$. D. $(-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}) \in S$.
- Câu 22:** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $(1; -1) \in S$. B. $(1; -\sqrt{3}) \in S$. C. $(-1; \sqrt{5}) \notin S$. D. $(-4; \sqrt{3}) \in S$.
- Câu 23:** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $(-1; 2) \in S$. B. $(\sqrt{2}; 0) \notin S$. C. $(1; -\sqrt{3}) \in S$. D. $(\sqrt{3}; 0) \in S$.

Câu 24: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > 3 \\ 1 - \frac{1}{2}x + y > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $(1; -2) \in S$.

B. $(2; 1) \in S$.

C. $(5; -6) \in S$.

D. $S = \emptyset$.

§5: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI										
1. Tam thức bậc hai: (đối với x) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là số cho trước với $a \neq 0$. Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$. 2. Dấu của tam thức bậc hai:										
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th colspan="2">$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">$\Delta < 0$</td><td>$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R}$</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\Delta = 0$</td><td>$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$</td></tr> <tr> <td rowspan="2" style="text-align: center;">$\Delta > 0$ (lập bảng xét dấu)</td><td>$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$</td></tr> <tr> <td>$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$</td></tr> </tbody> </table>		$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$		$\Delta < 0$	$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R}$	$\Delta = 0$	$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$\Delta > 0$ (lập bảng xét dấu)	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$
$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$										
$\Delta < 0$	$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R}$									
$\Delta = 0$	$f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$									
$\Delta > 0$ (lập bảng xét dấu)	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$									
	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$									
Bảng xét dấu của $f(x)$ khi $\Delta > 0$										
x	$-\infty \qquad \qquad \qquad x_1 \qquad \qquad \qquad x_2 \qquad \qquad \qquad +\infty$									
$f(x)$	Cùng dấu với a 0 trái dấu với a 0 cùng dấu với a									
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI										
Bất phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $\geq 0; < 0; \leq 0$) Để giải BPT bậc hai ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.										
BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PT BẬC HAI										
1. Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.										
• Dạng 1:	$ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$									
• Dạng 2:	$ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$									
• Dạng 3:	$ f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$									

• Dạng 4: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \\ g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$

Chú ý: • $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$; $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$
 • Với $B > 0$ ta có: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$; $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$.
 • $|A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0$; $|A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0$

2. Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn ta thường dùng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để khử dấu căn.

• Dạng 1: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

• Dạng 2: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (hoặc } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

• Dạng 3: $a \cdot f(x) + b \cdot \sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$

• Dạng 4: $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{f(x)} \\ v = \sqrt{g(x)} \end{cases}$; $u, v \geq 0$ đưa về hệ u, v .

• Dạng 5: $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

• Dạng 6: $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Bài 1. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $2x^2 - 7x + 5$

b) $-x^2 + 4x + 5$

c) $-4x^2 + 12x - 9$

d) $3x^2 - 2x - 8$

e) $-x^2 + 2x - 1$

f) $2x^2 - 7x + 5$

g) $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

h) $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

i) $\frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - x - 6 \leq 0$

b) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$

c) $16x^2 + 40x + 25 > 0$

$$d) -2x^2 + 3x - 7 \geq 0$$

$$e) 3x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$f) \frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$$

Bài 3. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

$$a) mx^2 - 2x + 4 > 0$$

$$b) (1+m)x^2 - 2mx + 2m \leq 0 \quad c)$$

Bài 4. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$f) -4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$$

Bài 5. Tìm m để các phương trình sau: i) có nghiệm ii) vô nghiệm

$$a) (1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$$

$$b) (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$$

$$c) (3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 = 0$$

$$d) (m-2)x^2 - 4mx + 2m - 6 = 0$$

$$e) (-m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(2 - 3m)x - 3 = 0$$

Bài 6. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$a) 3x^2 + 2(m-1)x + m + 4 > 0$$

$$b) x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0$$

$$c) 2x^2 + (m-2)x - m + 4 > 0$$

$$d) mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$$

$$e) (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$$

$$f) |3(m+6)x^2 - 3(m+3)x + 2m - 3| > 3$$

Bài 7. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

$$a) (m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$$

$$b) (m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0$$

$$c) (m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(m-1)x + 1 < 0$$

$$d) mx^2 + 2(m-1)x + 4 \geq 0$$

$$e) (3-m)x^2 - 2(2m-5)x - 2m + 5 > 0$$

$$f) mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0$$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

$$a) |x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$$

$$b) |x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8$$

$$c) |2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0$$

$$d) 2|x| - |x-3| = 3$$

$$e) |x^2 - 1| = 1 - |x|$$

$$f) \frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2$$

Bài 9. Giải các bất phương trình sau:

$$a) 2x^2 - |5x - 3| < 0$$

$$b) x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$$

$$c) |x^2 - 1| - 2x < 0$$

$$d) |x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$$

$$e) |x-3| - |x+1| < 2$$

$$f) |x^2 - 3x + 2| + x^2 > 2x$$

$$g) \left| \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2} \right| \leq 1$$

$$h) \frac{2x-5}{|x-3|} + 1 > 0$$

$$i) \frac{|x-2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3$$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x-3} = x-3$$

$$b) \sqrt{5x+10} = 8-x$$

$$c) x - \sqrt{2x-5} = 4$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} & \text{e)} \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2 & \text{f)} \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2| \\ \text{g)} \sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2 & \text{h)} \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2 & \text{i)} \frac{\sqrt{21 + x} + \sqrt{21 - x}}{\sqrt{21 + x} - \sqrt{21 - x}} = \frac{21}{x} \end{array}$$

Bài 11. Giải các phương trình sau: (đặt ẩn phụ)

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 & \text{b)} (x - 3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7} \\ \text{c)} \sqrt{(x + 1)(x + 2)} = x^2 + 3x - 4 \end{array}$$

Bài 12. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{x^2 + x - 12} < 8 - x & \text{b)} \sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x & \text{c)} \sqrt{-x^2 - 4x + 21} < x + 3 \\ \text{d)} \sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2 & \text{e)} \sqrt{3x^2 + 13x + 4} \geq x - 2 & \text{f)} \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} > x + 1 \\ \text{g)} \sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} > \sqrt{2x - 8} & \text{h)} \sqrt{2 - x} > \sqrt{7 - x} - \sqrt{-3 - 2x} & \text{i)} \sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 2} \leq 1 \end{array}$$

Bài 13. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{(x - 3)(8 - x)} + 26 > -x^2 + 11x & \text{b)} (x + 5)(x - 2) + 3\sqrt{x(x + 3)} > 0 \\ \text{c)} (x + 1)(x + 4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} & \text{d)} \sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1 \end{array}$$

Bài 14. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{3 - x} \leq 2 & \text{b)} \frac{\sqrt{-2x^2 - 15x + 17}}{x + 3} \geq 0 \\ \text{c)} (x + 3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9 & \text{d)} \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{2x + 5} \geq \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{x + 4} \end{array}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{1 - x} < 1$ là

- A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ B. $(-\infty; -1)$ C. $(-1; 1)$ D. $(1; +\infty)$

Câu 2: Bất phương trình $5x - 1 > \frac{2x}{5} + 3$ có nghiệm là

- A. $x > \frac{20}{23}$ B. $x < 2$ C. $x < 3$ D. $x > -\frac{5}{2}$

Câu 3: Bất phương trình $|2x - 1| > x$ có tập nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ B. $\emptyset$ C. $\mathbb{R}$ D. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $x(x - 6) + 5 - 2x > 10 + x(x - 8)$ là

- A. $\emptyset$ B. $(-\infty; 5)$ C. $(5; +\infty)$ D. $\mathbb{R}$

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $1 < \frac{1}{x - 1}$ là :

- A. $(1; +\infty)$ B. $(1; 2)$ C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ D. $(-\infty; 1)$

Câu 6: Bất phương trình $|2x - 1| > x$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ B. $\emptyset$ C. $\mathbb{R}$ D. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-1}{x-3} > 1$ là

- A. $(3; +\infty)$ B. $\mathbb{R}$ C. $\emptyset$ D. $(-\infty; 5)$

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x-2006} > \sqrt{2006-x}$ là

- A. $\emptyset$ B. $[2006; +\infty)$ C. $(-\infty; 2006)$ D. $\{2006\}$

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1$ là

- A. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ B. $(-\infty; 2)$ C. $(-1; 2)$ D. $(-1; +\infty)$

Câu 10: Cho bất phương trình $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ (1). Tập nghiệm của (1) là

- A. $[2; 8]$ B. $[2; 3]$ C. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ D. $[1; 4]$

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $5x - \frac{x+1}{5} - 4 < 2x - 7$ là

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-1; +\infty)$ C. $\emptyset$ D. $\mathbb{R}$

Câu 12: Nghiệm của bất phương trình $\frac{x-1}{x^2+4x+3} \leq 0$ là

- A. $(-\infty; -3) \cup (-1; 1)$ B. $(-3; -1) \cup [1; +\infty)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-3; 1)$

Câu 13: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 4x| < 0$

- A. $\emptyset$ B. $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ C. $(0; 4)$ D. $\{\emptyset\}$

Câu 14: Tìm m để bất phương trình $m^2x + 3 < mx + 4$ có nghiệm

- A. $\forall m \in \mathbb{R}$ B. $m = 1$ C. $m = 0$ D. $m = 1 \vee m = 0$

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+5x+6}{x-1} \geq 0$ là

- A. $(1; 2] \cup [3; +\infty)$ B. $(1; 3]$ C. $[2; 3]$ D. $(-\infty; 1) \cup [2; 3]$

Câu 16: : Cho $f(x) = mx^2 - 2x - 1$. Xác định m để $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m < -1$ B. $m < 0$ C. $-1 < m < 0$ D. $m < 1$ và $m \neq 0$

Câu 17: Phương trình $x^2 - 7mx - m - 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m > 6$ B. $m < 6$ C. $m > -6$ D. $m < -6$

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $x(x^2 - 1) \geq 0$ là

A. $[1;0] \cup [1; +\infty)$ B. $(-\infty; -1] \cup [0;1)$

C. $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$ D. $[-1;1]$

Câu 19: Tìm m để $x^2 - 2(2m - 3)x + 4m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $1 < m < 3$ B. $m > \frac{3}{4}$ C. $m > \frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$

Câu 20: Giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m > \frac{1}{3}$ B. $m > 2$ C. $m < \frac{1}{3}$ D. $m < 2$

Câu 21: Cho bất phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 > 0$ có tập nghiệm là S. Khi đó

A. $5 \in S$ B. $1 \in S$ C. $\frac{3}{2} \in S$ D. $-1 \in S$

Câu 22: Trong các phép biến đổi sau, phép nào là phép biến đổi tương đương:

A. $\sqrt{2x-3} = 3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = (3x+2)^2 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases}$.

B. $|2x-1| = 3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3x+2 \\ 2x-1 = -3x-2 \end{cases}$

C. $|2x-1| = 3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 \geq 0 \\ (2x-1) = (3x+2)^2 \end{cases}$.

D. $\sqrt{3x-5} = 3x+2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-5} - 3x+2 = 0$.

Câu 23: Phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x} + 3$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Câu 24: Phương trình $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 25: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |2x-1| < 3 \end{cases}$ là

A. $(1;2)$ B. $\emptyset$ C. $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$ D. $[1;2]$

Câu 26: Hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $1 \leq x < 3$

B. $-1 \leq x < 2$

C. $-3 < x \leq -\frac{4}{3}$ hay $-1 \leq x \leq 1$

D. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $x \geq 1$

Câu 27: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6) < -3 \\ \frac{5x+m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > -11$

B. $m \geq -11$

C. $m < -11$

D. $m \leq -11$

Câu 28: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m < 1$

B. $m > 1$

C. $m = 1$

D. $m \neq 1$

Câu 29: Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m > -2$

B. $m < 5$

C. $m > 5$

D. $m = -2$

Câu 30: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} \end{cases}$ (1). Tập nghiệm của (1) là

A. $(-2; \frac{4}{5})$

B. $[-2; \frac{4}{5}]$

C. $(-2; \frac{4}{5})$

D. $[-2; \frac{4}{5})$

Câu 31: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+1 > 3x-2 \\ -x-3 < 0 \end{cases}$ là :

A. $(-3; 3)$

B. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

C. $(-3; +\infty)$

D. $(-\infty; 3)$

Câu 32: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ (1). Số nghiệm nguyên của (1) là

A. 8

B. 0

C. Vô số

D. 4

Câu 33: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$

B. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

C. $(1; 4)$

D. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Câu 34: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 > x-2 \end{cases}$ là

A. $(-3; 2)$

B. $(2; +\infty)$

C. $(-3; +\infty)$

D. $(-\infty; -3)$

Câu 35: Phương trình $(x-4)\sqrt{1-x^2} = x^2 - 16$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Câu 36: Cho phương trình $x^3 - 4x = 0$ (1). Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình hệ quả của phương trình (1):

A. $(x^2 - 4)(x^2 + 5x) = 0$.

B. $x^2 - 4x + 4 = 0$.

C. $(x-2)(x^2 + 4x) = 0$.

D. $x^2 - 4x = 0$.

Câu 37: Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào là tương đương:

A. $|2x-3| = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = x^2 \\ 2x-3 = -x^2 \end{cases}$.

B. $x^2 + 2x + \frac{3x}{x+2} = \frac{3x}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$.

C. $\sqrt{2x-1} = 3x-2 \Leftrightarrow 2x-1 = (3x-2)^2$.

D. $\sqrt{x+4} = |2-x| \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = (2-x)^2 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$.

Câu 38: Trong các cách viết dưới đây, cách nào là sai:

A. $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$.

B. $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

C. $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2; x = -2$.

D. $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 - 4 = 0$.

Câu 39: Phương trình $|x^2 - 2x| = x - 1$ có bao nhiêu nghiệm:

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Câu 40: Phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$, có hai nghiệm phân biệt khi:

- A. $\begin{cases} m < 3 \\ m \neq -1 \end{cases}$. B. $m < 3$. C. $m > -2$. D. $\begin{cases} m > -2 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Câu 41: Phương trình $\sqrt{x^3 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$ có bao nhiêu nghiệm:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 42: Phép biến đổi tương đương là:

- A. Phép biến đổi không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình.
B. Phép rút gọn, qui đồng, bình phương.
C. Phép biến đổi không làm thay đổi tập hợp nghiệm của phương trình.
D. Các phép biến đổi trừ phép qui đồng, bình phương, rút gọn.

Câu 43: Với giá trị nào của m thì ptr $mx^2 + x - 1 = 0$ có nghiệm:

- A. $m \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.
C. $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \left[\frac{1}{4}; 0\right)$.

Câu 44: Phương trình $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = |2x - 5|$ có bao nhiêu nghiệm:

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 45: Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x^2 - 5}{\sqrt[3]{3x - 6} + 2} - \frac{2}{\sqrt{|5 - x|}} = 0$:

- A. $\begin{cases} x \neq -2/3 \\ x \neq 5 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 5 \\ x \neq 2/3 \end{cases}$. C. $2 \leq x < 5$. D. $2 \leq x \leq 5$.

Câu 46: Trong các phép biến đổi sau, phép nào là phép biến đổi nào là đúng:

- A. $\sqrt{3x - 5} = 2x - 1 \Rightarrow 3x - 5 = (2x - 1)^2$.
B. $\sqrt{5x - 3} = |3x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 = (3x + 2)^2 \\ 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$.
C. $|3x - 1| - |2 - 3x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 2 - 3x = 0 \end{cases}$.

$$D. \sqrt{3-2x+x^2} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x+x^2 = 1-x \\ 1-x \geq 0 \end{cases}.$$

Câu 47: Phương trình $m^2x + m^2 - 25x - 3m - 10 = 0$ có nghiệm khi:

- A. $m \neq -5$. B. $m = -5$. C. $m = \pm 5$. D. $m \neq \pm 5$.

CHƯƠNG VI

GÓC – CUNG LƯỢNG GIÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

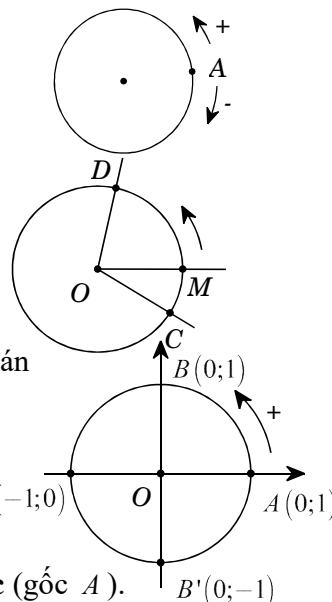
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. Khái niệm cung và góc lượng giác.

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

2. Góc lượng giác

Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC, OD) .



3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R=1$.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm

$$A(1;0), A'(-1;0), B(0;1), B'(0;-1).$$

Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác** (gốc A).

II. Số đo của cung và góc lượng giác.

1. Độ và radian

a) Đơn vị radian

Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

c) Độ dài của một cung tròn

Cung có số đo $a \text{ rad}$ của đường tròn bán kính R có độ dài: $\ell = R\alpha$.

2. Số đo của một cung lượng giác.

$$\text{sđ } \widehat{AM} = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A , điểm cuối là M .

3. Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1: Đổi số đo của các góc sau ra Radian.

a) 72°

b) 600^0

c) $-37^045'30''$

e) 225^0

d) 270^0 .

f) -720^0

Bài 2: Đổi số đo của các góc sau ra độ

a) $\frac{5\pi}{18}$

c) -4

e) $-\frac{4\pi}{7}$

b) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{9\pi}{2}$

f) $-\frac{5\pi}{3}$

Bài 3: Một đường tròn có bán kính $36m$. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51^0

c) $\frac{1}{3}$

d) 70^0

e) 105^0

f) $\frac{2\pi}{3}$

g) $\frac{3\pi}{7}$

h) 49^0

i) $\frac{4}{3}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Góc có số đo 108° đổi ra radian là

- A. $\frac{3\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 2: Biết một số đo của góc $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + 2001\pi$. Giá trị tổng quát của góc (Ox, Oy) là

- A. $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + k\pi$. B. $(Ox, Oy) = \pi + k2\pi$.
C. $(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 3: Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là

- A. 240° . B. 135° . C. 72° . D. 270° .

Câu 4: Góc có số đo $\frac{\pi}{9}$ đổi sang độ là

- A. 15° . B. 18° . C. 20° . D. 25° .

Câu 5: Cho $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với k bằng bao nhiêu thì $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$?

- A. $k \in \emptyset$. B. $k = 3$. C. $k = -5$. D. $k = 5$.

Câu 6: Góc có số đo $\frac{\pi}{24}$ đổi sang độ là

- A. 7° . B. $7^\circ 30'$. C. 8° . D. $8^\circ 30'$.

Câu 7: Góc có số đo 120° đổi sang radian là góc

- A. $\frac{\pi}{10}$. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 8: Số đo góc $22^\circ 30'$ đổi sang radian là:

- A. $\frac{\pi}{8}$. B. $\frac{7\pi}{12}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{5}$.

Câu 9: Đổi số đo góc 105° sang radian bằng

- A. $\frac{5\pi}{12}$. B. $\frac{7\pi}{12}$. C. $\frac{9\pi}{12}$. D. $\frac{5\pi}{8}$.

Câu 10: Giá trị k để cung $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ thỏa mãn $10\pi < \alpha < 11\pi$ là

- A. $k = 4$. B. $k = 6$. C. $k = 7$. D. $k = 5$.

Câu 11: Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi}$ cm. Tìm độ dài của cung $\frac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

- A. 10 cm. B. 5 cm. C. $\frac{20}{\pi^2}$ cm. D. $\frac{\pi^2}{20}$ cm.

Câu 12: Một đường tròn có bán kính $R = 10$ cm. Độ dài cung 40° trên đường tròn gần bằng:

- A. 7 cm. B. 9 cm. C. 11 cm. D. 13 cm.

Câu 13: Góc 18° có số đo bằng radian là

- A. $\frac{\pi}{18}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{\pi}{360}$. D. π .

Câu 14: Góc $\frac{\pi}{18}$ có số đo bằng độ là:

- A. 18° . B. 36° . C. 10° . D. 12° .

Câu 15: Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\frac{\pi}{15}$ (tính

gần đúng đến hàng phần trăm).

A. 4,19 cm .

B. 4,18 cm .

C. 95,49 cm .

D. 95,50 cm .

Câu 16: Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Tìm điểm cuối M của cung lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$.

A. M là điểm chính giữa của cung phần tư thứ I .

B. M là điểm chính giữa của cung phần tư thứ II .

C. M là điểm chính giữa của cung phần tư thứ III .

D. M là điểm chính giữa của cung phần tư thứ IV .

Câu 17: Cho đường tròn có bán kính 6 cm . Tìm số đo (rad) của cung có độ dài là 3 cm :

A. 0,5 .

B. 3 .

C. 2 .

D. 1 .

Câu 18: Cho $a = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Để $a \in (19;27)$ thì giá trị của k là

A. $k = 2, k = 3$.

B. $k = 3, k = 4$.

C. $k = 4, k = 5$.

D. $k = 5, k = 6$.

Câu 19: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

A. 30° .

B. 40° .

C. 50° .

D. 60° .

Câu 20: Nếu góc lượng giác có $sđ(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$ thì hai tia Ox và Oz

A. Trùng nhau.

B. Vuông góc.

C. Tạo với nhau một góc bằng $\frac{3\pi}{4}$.

D. Đối nhau.

§2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

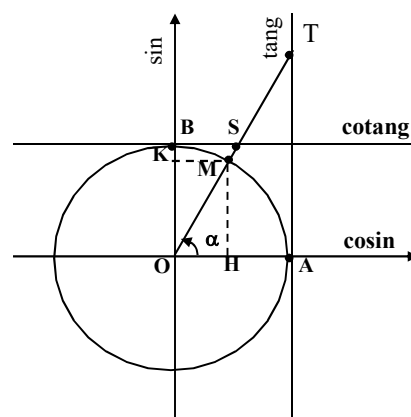
Cho $(OA, OM) = \alpha$. Giả sử $M(x; y)$.

$$\cos \alpha = x = \overline{OH}$$

$$\sin \alpha = y = \overline{OK}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS} \quad (\alpha \neq k\pi)$$



Nhận xét:

$$\bullet \forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1; -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$\bullet \tan \alpha \text{ xác định khi } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$$

$$\bullet \cot \alpha \text{ xác định khi } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$$

2. Dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	0		0
cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1		0	

4. Hệ thức cơ bản:

$$\textcircled{1} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\textcircled{3} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\textcircled{5} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\textcircled{2} \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\textcircled{4} \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1..$$

$$\textcircled{6} 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

5. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Tính giá trị còn lại của góc x, biết

1/ $\sin x = \frac{1}{2}$ với $90^\circ < x < 180^\circ$.

2/ $\sin x = -\frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

3/ $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

4/ $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5/ $\cos x = \frac{3}{5}$ với $0 < x < 90^\circ$.

6/ $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

7/ $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

8/ $\cos x = \frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

9/ $\sin x = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

10/ $\sin x = -\frac{1}{3}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

11/ $\tan x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

12/ $\tan x = -2$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

$$13/ \tan x = -\frac{1}{2} \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$14/ \cot x = 3 \text{ với } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$15/ \tan x = \frac{3}{4} \text{ với } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$16/ \tan x = -\sqrt{2} \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$17/ \cot x = \frac{2}{3} \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$18/ \cot x = -\sqrt{3} \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$19/ \cot x = -3 \text{ với } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi.$$

$$20/ \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau

$$1/ \text{ Cho } \tan x = -2. \text{ Tính: } A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}, A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}.$$

$$2/ \text{ Cho } \cot x = \sqrt{2}. \text{ Tính: } B_1 = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}, B_2 = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 3 \cos x}.$$

$$3/ \text{ Cho } \cot x = 2. \text{ Tính: } C_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}, C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}.$$

$$4/ \text{ Cho } \tan x = 2. \text{ Tính: } D_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{4 \sin x - 5 \cos x}, D_2 = \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5 \sin^3 x + 4 \cos^3 x},$$

Bài 3. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

$$1/ \sin(x - 90^\circ). \quad 2/ \cos(180^\circ + x). \quad 3/ \sin(270^\circ - x). \quad 4/ \sin(x - 180^\circ).$$

$$5/ \cos(x + 540^\circ). \quad 6/ \cot(180^\circ + x). \quad 7/ \sin(x - 540^\circ). \quad 8/ \tan(360^\circ - x).$$

Bài 4. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

$$1/ \cot(x - \pi). \quad 2/ \sin(\pi + x). \quad 3/ \tan(2\pi - x). \quad 4/ \cot(3\pi - x).$$

$$5/ \sin(x - 7\pi). \quad 6/ \tan(x - 5\pi). \quad 7/ \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right). \quad 8/ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

Bài 5. Rút gọn (đơn giản) các biểu thức

$$1/ A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi).$$

$$2/ B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

$$3/ C = 2 \cos x + 3 \cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

$$4/ D = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Bài 6. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức (không dùng máy tính)

$$A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 180^\circ.$$

$$C = \cos 10^0 + \cos 40^0 + \cos 70^0 + \dots + \cos 170^0$$

$$F = \sin 5^0 + \sin 10^0 + \sin 15^0 + \dots + \sin 360^0$$

$$I = \tan 10^0 \cdot \tan 20^0 \cdot \tan 30^0 \dots \tan 80^0$$

$$L = \cos^2 2^0 + \cos^2 4^0 + \cos^2 6^0 + \dots + \cos^2 88^0$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

$$2/ \quad 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

$$3/ \quad 3 - 4\sin^2 x = 4\cos^2 x - 1.$$

$$4/ \quad \sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$$

$$5/ \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

$$6/ \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$7/ \quad 4\cos^2 x - 3 = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x).$$

$$8/$$

$$(1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x.$$

$$9/ \quad \sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x = 2\sin^2 x - 1.$$

$$10/ \quad \sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x.$$

$$11/ \quad \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x.$$

$$12/ \quad \cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x.$$

$$13/ \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

$$14/ \quad \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

$$15/ \quad \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1.$$

$$16/ \quad \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0.$$

Bài 8. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

$$1/ \quad A = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x.$$

$$2/ \quad B = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x.$$

$$3/ \quad C = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x.$$

$$4/ \quad D = \cos^4 x (2\cos^2 x - 3) + \sin^4 x (2\sin^2 x - 3).$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Đơn giản biểu thức $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$, ta có

$$A. A = \sin^2 x.$$

$$B. A = \cos^2 x.$$

$$C. A = -\sin^2 x.$$

$$D. A = -\cos^2 x.$$

Câu 2. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng ?

$$A. \sin(180^0 - a) = -\cos a.$$

$$B. \sin(180^0 - a) = -\sin a.$$

$$C. \sin(180^0 - a) = \sin a.$$

$$D. \sin(180^0 - a) = \cos a.$$

Câu 3. Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

$$A. \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$B. \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

$$C. \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x.$$

$$D. \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x.$$

- Câu 4.** Giá trị của biểu thức $A = \frac{\cos 750^\circ + \sin 420^\circ}{\sin(-330^\circ) - \cos(-390^\circ)}$ bằng
- A. $-3 - \sqrt{3}$. B. $2 - 3\sqrt{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. D. $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.
- Câu 5.** Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, ta có :
- A. $A = 2 \sin \alpha$. B. $A = 2 \cos \alpha$. C. $A = \sin \alpha - \cos \alpha$. D. $A = 0$.
- Câu 6.** Giá trị của $\cot 1458^\circ$ là
- A. 1. B. -1. C. 0. D. $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
- Câu 7.** Trong các giá trị sau, $\sin \alpha$ có thể nhận giá trị nào?
- A. -0,7. B. $\frac{4}{3}$. C. $-\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 8.** Trong các công thức sau, công thức nào sai?
- A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. B. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.
- C. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$. D. $\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.
- Câu 9.** Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$
- A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. D. $\cot \alpha = \sqrt{2}$.
- Câu 10.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cos \alpha$ là :
- A. $\frac{4}{5}$. B. $-\frac{4}{5}$. C. $\pm \frac{4}{5}$. D. $\frac{16}{25}$.
- Câu 11.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 2 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$ là :
- A. $\frac{2}{57}$. B. $-\frac{2}{57}$. C. $\frac{4}{57}$. D. $-\frac{4}{57}$.
- Câu 12.** Cho $\tan \alpha = 2$. Giá trị của $A = \frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ là :
- A. 5. B. $\frac{5}{3}$. C. 7. D. $\frac{7}{3}$.
- Câu 13.** Các cặp đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?
- A. $\sin \alpha = 1$ và $\cos \alpha = 1$. B. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- C. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ và $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. D. $\sin \alpha = \sqrt{3}$ và $\cos \alpha = 0$.
- Câu 14.** Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.
- A. $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. B. $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.
- Câu 15.** Tính α biết $\cos \alpha = 1$
- A. $\alpha = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. B. $\alpha = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\alpha = -\pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 16. Giá trị của $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Câu 17. Cho tam giác ABC. Hãy tìm mệnh đề **sai**

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Câu 18. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta có

A. $A = \cos a + \sin a$.

B. $A = 2 \sin a$.

C. $A = \sin a - \cos a$.

D. $A = 0$.

Câu 19. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$, ta có A bằng

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Câu 20. Biểu thức $B = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ) \cdot \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$ có kết quả rút gọn bằng

A. -1.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 21. Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ lần lượt là

A. $-\frac{5}{13}; \frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{3}; -\frac{5}{12}$.

C. $-\frac{5}{13}; \frac{5}{12}$.

D. $\frac{5}{13}; -\frac{5}{12}$.

Câu 22. Biết $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Giá trị $\cos \alpha + \sin \alpha$ bằng

A. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B. $1 - \sqrt{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 23. Biểu thức $D = \cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$ không phụ thuộc x và bằng

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. -3.

Câu 24. Cho $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó :

A. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

B. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

C. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

D. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

Câu 25. Đơn giản biểu thức $A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$ ta có

A. $A = \cos x + \sin x$.

B. $A = \cos x - \sin x$.

C. $A = \sin x - \cos x$.

D. $A = -\sin x - \cos x$.

Câu 26. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Câu 27. Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$ bằng :

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

Câu 28. Biểu thức rút gọn của $A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a}$ bằng :

A. $\tan^6 a$.

B. $\cos^6 a$.

C. $\tan^4 a$.

D. $\sin^6 a$.

§3: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Hệ quả:

$$\textcircled{1} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\textcircled{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

2. Công thức nhân đôi

Công thức nhân đôi

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\textcircled{4} \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

Công thức hạ bậc

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\textcircled{2} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\textcircled{3} \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Công thức nhân ba (mở rộng)

$$\textcircled{1} \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\textcircled{2} \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

3. Công thức biến đổi

① Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned} \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}. & \bullet \tan a + \tan b &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}. \\ \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}. & \bullet \tan a - \tan b &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}. \\ \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}. & \bullet \cot a + \cot b &= \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}. \\ \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}. & \bullet \cot a - \cot b &= \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}. \end{aligned}$$

✧ Hệ quả

$$\begin{aligned} \bullet \sin \alpha + \cos \alpha &= \sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \\ \bullet \sin \alpha - \cos \alpha &= \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

② Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]. \\ \bullet \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \\ \bullet \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]. \end{aligned}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Không dùng máy tính. Hãy tính giá trị của các biểu thức

$$\begin{aligned} 1/ \quad A &= \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ. \\ 2/ \quad B &= \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ. \\ 3/ \quad C &= \sin 10^\circ \cdot \cos 55^\circ - \cos 10^\circ \cdot \sin 55^\circ. \\ 4/ \quad D &= \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ. \\ 5/ \quad E &= \cos 112^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 112^\circ \cdot \sin 23^\circ. \\ 6/ \quad F &= \sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ. \end{aligned}$$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}, \quad 2/ \quad B = \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}.$$

$$3/ \quad C = \frac{\sin 10^0 \cos 20^0 + \sin 20^0 \cos 10^0}{\cos 17^0 \cos 13^0 - \sin 17^0 \sin 13^0}. \quad 4/ \quad D = \frac{\tan 225^0 - \cot 81^0 \cot 69^0}{\cot 261^0 + \tan 201^0}.$$

$$5/ \quad E = \frac{\sin 73^0 \cos 3^0 - \sin 87^0 \cos 17^0}{\cos 132^0 \cos 62^0 + \cos 42^0 \cos 28^0}. \quad 6/ \quad F = \frac{\cot 225^0 - \cot 79^0 \cot 71^0}{\cot 259^0 + \cot 251^0}.$$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \cos x \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ biết } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$2/ \quad B = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \text{ biết } \cos x = -\frac{12}{13} \text{ và } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$3/ \quad C = \cos (x - 30^0) \text{ biết } \tan x = \sqrt{2} \text{ và } 0 < x < 90^0.$$

$$4/ \quad D = \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ biết } \sin x = \frac{3}{5} \text{ và } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$5/ \quad E = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \text{ biết } \sin x = -\frac{12}{13} \text{ và } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi.$$

$$6/ \quad F = \cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ biết } \sin x = -\frac{4}{5} \text{ và } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Bài 4. Biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $(0^0 < \alpha < 90^0)$ và $\sin \beta = \frac{8}{17}$, $(90^0 < \beta < 180^0)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \cos(\alpha + \beta)$ và $B = \sin(\alpha - \beta)$.

Bài 5. Rút gọn các biểu thức

$$1/ \quad A = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x.$$

$$2/ \quad B = \sin 4x \cot 2x - \cos 4x.$$

$$3/ \quad C = \cos 6x \tan 3x - \sin 6x.$$

$$4/ \quad D = \sin(x + y) \cos(x - y) + \sin(x - y) \cos(x + y).$$

$$5/ \quad E = \cos(40^0 - x) \cos(x + 20^0) - \sin(40^0 - x) \sin(x + 20^0).$$

$$6/ \quad G = \sin(x + 10^0) \cos(2x - 80^0) + \sin(x + 100^0) \cos(2x + 10^0).$$

Bài 6. Cho tam giác ABC với A, B, C lần lượt là ba góc của tam giác. Chứng minh

$$1/ \quad \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

$$2/ \quad \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

$$3/ \quad \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

$$4/ \quad \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B, \quad (A, B \neq 90^0).$$

$$5/ \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C, \quad (A, B, C \neq 90^0).$$

$$6/ \quad \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1.$$

Bài 7. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

$$1/ \quad A = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}.$$

$$2/ \quad B = 3 \cos 10^0 - 4 \cos^3 10^0.$$

$$3/ \quad C = \sin 20^0 (1 - 4 \cos^2 20^0).$$

$$4/ \quad D = 4 \sin^3 40^0 + 3 \sin 130^0.$$

$$5/ \quad E = 4 \sin^3 50^0 + 3 \cos 140^0.$$

$$6/ \quad F = \frac{\tan 15^0}{1 - \tan^2 15^0}.$$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức

$$1/ \quad A = (\sin x + \cos x)^2.$$

$$2/ \quad B = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$3/ \quad C = \sin x \cos x \cos 2x.$$

$$4/ \quad D = \cos^4 2x - \sin^4 2x.$$

$$5/ \quad E = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$6/ \quad F = \sin x \cos x \cos 2x.$$

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

$$1/ \quad A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}.$$

$$2/ \quad B = \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}.$$

$$3/ \quad C = \frac{2}{(1 - \tan x)(1 + \cot x)}.$$

$$4/ \quad D = (1 - \tan^2 x) \cot x.$$

$$5/ \quad E = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

$$6/ \quad F = \frac{\cot x - \tan x}{\cos 2x}.$$

Bài 10. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết

$$1/ \quad \sin 2x, \cos 2x \text{ khi } \sin x = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$2/ \quad \sin 2x, \cos 2x \text{ khi } \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

$$3/ \quad \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \cos x = -\frac{5}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$4/ \quad \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \tan x = 2.$$

$$5/ \quad \sin x, \cos x \text{ khi } \sin 2x = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Bài 11. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$$

$$2/ \quad \sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x).$$

$$3/ \quad \cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cos 3x.$$

$$4/ \quad \cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

$$5/ \quad 8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x.$$

$$6/ \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$7/ \sin^4 x + \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x. \quad 8/ \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

Bài 12. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

$$1/ A = \cos 3x + \cos x.$$

$$2/ B = \sin 3x + \sin 2x.$$

$$3/ C = \cos 4x - \cos x.$$

$$4/ D = \sin 5x - \sin x.$$

Bài 13. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

$$1/ A = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}.$$

$$2/ B = \sin 5x \cos 3x.$$

$$3/ C = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}.$$

$$4/ D = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$$

$$5/ E = \sin(x + y) \cos(x - y).$$

$$6/ F = \sin(x + 30^\circ) \cos(x - 30^\circ).$$

Bài 14. Tính giá trị của biểu thức

$$1/ A = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x} \text{ khi } x = 20^\circ.$$

$$2/ B = \frac{\cos x \cdot \cos 13x}{\cos 3x + \cos 5x} \text{ khi } x = \frac{\pi}{17}.$$

$$3/ C = \frac{\cos x \cdot \cos 10x}{\cos 2x + \cos 4x} \text{ khi } x = \frac{\pi}{13}.$$

$$4/ D = \frac{\tan 2x - \sin 2x}{\tan 2x + \sin 2x} \text{ khi } \tan x = \frac{2}{15}$$

Bài 15. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

$$1/ 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

$$2/ \sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x.$$

$$3/ \sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x.$$

$$4/ \cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x.$$

Bài 16. Trong ΔABC có ba góc lần lượt là A, B, C . Chứng minh rằng

$$1/ \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$2/ \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$3/ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$4/ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

$$\text{A. } \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}.$$

$$\text{B. } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}.$$

- Câu 2.** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?
A. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
C. $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.
- Câu 3.** Trong các công thức sau, công thức nào **đúng**?
A. $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$.
- Câu 4.** Trong các công thức sau, công thức nào **đúng**?
A. $\tan(a-b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
C. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- Câu 5.** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?
A. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.
C. $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$.
- Câu 6.** Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?
A. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.
C. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.
- Câu 7.** Rút gọn biểu thức : $\sin(a-17^\circ) \cdot \cos(a+13^\circ) - \sin(a+13^\circ) \cdot \cos(a-17^\circ)$, ta được :
A. $\sin 2a$. **B.** $\cos 2a$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 8.** Cho x, y là các góc nhọn, $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng :
A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π .
- Câu 9.** Cho $\cot a = 15$, giá trị $\sin 2a$ có thể nhận giá trị nào dưới đây:
A. $\frac{11}{113}$. **B.** $\frac{13}{113}$. **C.** $\frac{15}{113}$. **D.** $\frac{17}{113}$.
- Câu 10.** trị của $\sin 2(a+b)$ là :
A. $\frac{2\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$.
- Câu 11.** Biểu thức $A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ không phụ thuộc x và bằng :
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.
- Câu 12.** Biểu thức $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$ bằng biểu thức nào sau đây? (Giả sử biểu thức có nghĩa)
A. $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$. **B.** $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b}$.

$$\text{C. } \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}.$$

$$\text{D. } \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b}.$$

Câu 13. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chỉ ra hệ thức SAI.

$$\text{A. } \sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C.$$

$$\text{B. } \cos(A+B-C) = -\cos 2C.$$

$$\text{C. } \tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}.$$

$$\text{D. } \cot \frac{A+B+2C}{2} = \tan \frac{C}{2}.$$

Câu 14. Nếu $\tan \frac{\beta}{2} = 4 \tan \frac{\alpha}{2}$ thì $\tan \frac{\beta-\alpha}{2}$ bằng :

$$\text{A. } \frac{3 \sin \alpha}{5-3 \cos \alpha}.$$

$$\text{B. } \frac{3 \sin \alpha}{5+3 \cos \alpha}.$$

$$\text{C. } \frac{3 \cos \alpha}{5-3 \cos \alpha}.$$

$$\text{D. } \frac{3 \cos \alpha}{5+3 \cos \alpha}.$$

Câu 15. Kết quả nào sau đây SAI ?

$$\text{A. } \sin 33^\circ + \cos 60^\circ = \cos 3^\circ.$$

$$\text{B. } \frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ}.$$

$$\text{C. } \cos 20^\circ + 2 \sin^2 55^\circ = 1 + \sqrt{2} \sin 65^\circ.$$

$$\text{D. } \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Câu 16. Nếu $5 \sin \alpha = 3 \sin(\alpha + 2\beta)$ thì :

$$\text{A. } \tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta.$$

$$\text{B. } \tan(\alpha + \beta) = 3 \tan \beta.$$

$$\text{C. } \tan(\alpha + \beta) = 4 \tan \beta.$$

$$\text{D. } \tan(\alpha + \beta) = 5 \tan \beta.$$

Câu 17. Cho $\cos a = \frac{3}{4}$; $\sin a > 0$; $\sin b = \frac{3}{5}$; $\cos b < 0$. Giá trị của $\cos(a+b)$ bằng :

$$\text{A. } \frac{3}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right).$$

$$\text{B. } -\frac{3}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right).$$

$$\text{C. } \frac{3}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{4} \right).$$

$$\text{D. } -\frac{3}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{4} \right).$$

Câu 18. Rút gọn biểu thức : $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là

$$\text{A. } 0.$$

$$\text{B. } -\cos x.$$

$$\text{C. } -2 \cos x.$$

$$\text{D. } \sin x - \cos x.$$

Câu 19. Cho biểu thức $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng :

$$\text{A. } A = 2 \cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b).$$

$$\text{B. } A = 2 \sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b).$$

$$\text{C. } A = 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b).$$

$$\text{D. } A = 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b).$$

Câu 20. Cho $\sin a = \frac{3}{5}$; $\cos a < 0$; $\cos b = \frac{3}{4}$; $\sin b > 0$. Giá trị $\sin(a-b)$ bằng :

$$\text{A. } -\frac{1}{5} \left(\sqrt{7} + \frac{9}{4} \right).$$

$$\text{B. } -\frac{1}{5} \left(\sqrt{7} - \frac{9}{4} \right).$$

$$\text{C. } \frac{1}{5} \left(\sqrt{7} + \frac{9}{4} \right).$$

$$\text{D. } \frac{1}{5} \left(\sqrt{7} - \frac{9}{4} \right).$$

Câu 21. Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$. Giá trị $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ bằng :

$$\text{A. } -\frac{113}{144}.$$

$$\text{B. } -\frac{115}{144}.$$

$$\text{C. } -\frac{117}{144}.$$

$$\text{D. } -\frac{119}{144}.$$

Câu 22. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

$$\text{A. } A = \tan 6x.$$

$$\text{B. } A = \tan 3x.$$

$$\text{C. } A = \tan 2x.$$

$$\text{D. } A = \tan x + \tan 2x + \tan 3x.$$

Câu 23. Biến đổi biểu thức $\sin a + 1$ thành tích.

$$\text{A. } \sin a + 1 = 2 \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{B. } \sin a + 1 = 2 \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

C. $\sin a + 1 = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$

D. $\sin a + 1 = 2 \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$

Câu 24. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau.

A. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$

B. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$

C. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$

D. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$

- a) Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.
- b) Tìm tọa độ điểm M biết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- c) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(-2; 6), C(9; 8).

- a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.
- b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- c) Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.
- d) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.
- e) Tìm tọa độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.
- f) Tìm tọa độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N.
- g) Tìm tọa độ điểm D để ABDC là hình chữ nhật.
- h) Tìm tọa độ điểm K trên Ox để AOKB là hình thang đáy AO.
- i) Tìm tọa độ điểm T thỏa $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$
- k) Tìm tọa độ điểm E đối xứng với A qua B.
- l) Tìm tọa độ điểm I chân đường phân giác trong tại đỉnh C của ΔABC .

Bài 6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(1;3) và B(4;2)

- a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho DA=DB
- b) Tính chu vi tam giác OAB
- c) Chứng tỏ OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB

Bài 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm A(7;-3) ; B(8;4) và C(0;-2)

- a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông
- b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = 65^\circ$. Khi đó góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ có giá trị

- A. 115°
- B. 65°
- C. 25°
- D. 155°

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = 65^\circ$. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó góc $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC})$ có giá trị là:

- A. 65°
- B. 130°
- C. 50°
- D. 100°

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = 35^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó góc $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BA})$ có giá trị.

- A. 35°
- B. 55°
- C. 125°
- D. 145°

Câu 4: Cho ΔABC đều. Khi đó góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ có giá trị là:

- A. 60°
- B. 120°
- C. 90°
- D. 30°

Câu 5: Cho ΔABC đều. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó góc $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BA})$ có giá trị là:

- A. 120°
- B. 60°
- C. 150°
- D. 30°

Câu 6: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Góc $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BA})$ có giá trị là:

- A. 60°
- B. 135°
- C. 45°
- D. 90°

Câu 7: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Góc $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{BA})$ có giá trị là:

- A. 135°
- B. 30°
- C. 45°
- D. 90°

Câu 8: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Góc $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AO})$ có giá trị là:

- A. 45°
- B. 90°
- C. 180°
- D. 135°

Câu 9: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Khi đó $\cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB})$ có giá trị là:

A. $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 0

Câu 10: Cho tam giác ABC đều. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $\sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CA})$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{-1}{2}$

C. 0

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 11: Cho tam giác ABC đều. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $\sin(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AC})$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 12: Cho tam giác đều ABC cạnh $AB = 6\text{cm}$. Gọi M là một điểm trên AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng:

A. 6

B. -12

C. -6

D. 12

Câu 13: Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 6cm . Gọi M là một điểm trên AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BA}$ bằng:

A. -6

B. 6

C. $6\sqrt{3}$

D. $-6\sqrt{2}$

Câu 14: Cho hình thoi ABCD cạnh a và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính các tích vô hướng sau đây: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

A. $\frac{-a^2}{2}; 0$

B. $\frac{a^2}{2}; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{-a^2}{2}; \frac{a^2}{2}$

D. $\frac{a^2}{2}; 0$

Câu 15: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. Đặt $M = \vec{a}(2\vec{a} - 3\vec{b})$; $N = (3\vec{a} + 4\vec{b})(3\vec{a} - 4\vec{b})$. Tính $2M + 3N$

A. $684 - 54\sqrt{2}$

B. $684 + 54\sqrt{2}$

C. $585 - 81\sqrt{2}$

D. $585 + 81\sqrt{2}$

Câu 16: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính giá trị của biểu thức: $F = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

A. $\frac{13a^2}{2}$

B. $\frac{7a^2}{2}$

C. $5a^2$

D. $\frac{a^2}{2}$

Câu 17: Cho hai véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |4\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{13}$. Lập $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Biết $\vec{c}$ có độ dài bằng 1 và vuông góc với $\vec{a} - \vec{b}$. Tính $2x^2 + 3y^2$

A. 0

B. $\frac{5}{2}$

C. 5

D. $\frac{5}{3}$

Câu 18: Cho tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hãy xác định góc của các véc tơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})$

A. 90°

B. 30°

C. 60°

D. 150°

Câu 19: Cho $|\vec{a}| = 1; |\vec{b}| = \sqrt{2}; (\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{-\sqrt{6}}{2}$

D. 1

Câu 20: Cho $|\vec{a}| = \sqrt{3}; |\vec{b}| = \sqrt{6}; (\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$

A. 3

B. -3

C. $3\sqrt{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 21: Cho $|\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{3}}; |\vec{b}| = 3\sqrt{3}; (\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

Câu 22: Cho $|\vec{a}| = 3\sqrt{3}; |\vec{b}| = 5\sqrt{6}; (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- A. $-45\sqrt{3}$ B. 45 C. -45 D. $\frac{45\sqrt{2}}{2}$

Câu 23: Cho $|\vec{a}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}; |\vec{b}| = \sqrt{3} + \sqrt{2}; (\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. -1

Câu 24: Cho hình vuông ABCD có cạnh AB=1. Tính giá trị của biểu thức sau: $(\vec{AB} + 2\vec{AD})(3\vec{AB} - \vec{CD})$

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 25: Cho các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có độ dài tương ứng là 1, 2, 3 và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ, (\vec{a}, \vec{c}) = 90^\circ, (\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$. Tính giá trị của các biểu thức sau: $(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})(2\vec{b} + 3\vec{c})$

- A. $49 + 2\sqrt{3}$ B. $49 - 2\sqrt{3}$ C. $-49 + 2\sqrt{3}$ D. $-49 - 2\sqrt{3}$

Câu 26: Cho các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có độ dài tương ứng là 1, 2, 3 và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ, (\vec{a}, \vec{c}) = 90^\circ, (\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$. Tính giá trị của các biểu thức sau: $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{c})$

- A. $-1 + \sqrt{3}$ B. $8 + \sqrt{3}$ C. $8 - \sqrt{3}$ D. $-2 + \sqrt{3}$

Câu 27: Cho tam giác ABC có $\angle A = 120^\circ$. AB=1, AC=3. Tính giá trị của các biểu thức $Q = (\vec{AB} + 2\vec{AC})(2\vec{AB} - \vec{AC})$

- A. $\frac{41}{2}$ B. $\frac{-41}{2}$ C. $\frac{-23}{2}$ D. $\frac{31}{2}$

Câu 34: Cho $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 4; \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1}{6}$. Tính góc giữa hai véc tơ $(\vec{a} + \vec{b})$ và $(\vec{a} - 2\vec{b})$

- A. 60° B. 90° C. 30° D. 45°

Câu 35: Cho tam giác ABC vuông ở A và $\hat{B} = 30^\circ$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$P = \cos(\vec{AB}, \vec{BC}) + \sin(\vec{BA}, \vec{BC}) + \tan \frac{(\vec{AC}, \vec{CB})}{2}$$

- A. $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

Câu 36: Cho tam giác ABC cân tại A và $\hat{B} = 30^\circ$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin(\vec{AC}, \vec{AB}) - \cos(\vec{AC}, \vec{BC}) + \tan \frac{(\vec{AB}, \vec{CA})}{2}$$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 37: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Nếu $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AD}$ thì độ dài đoạn AM là:

- A. 3a B. a C. $\frac{a}{2}$ D. 2a

Câu 39: Cho hình thang vuông ABCD có hai đáy là $AD = 2a; BC = 4a$ đường cao $AB = 2a\sqrt{2}$.
Tính góc giữa véc tơ $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}$.

- A. 93° B. 120° C. 35° D. 58°

Câu 40. Tính $\sin x$ biết $\cos x = 3/5$ ($0 < x < \pi/2$).

- A. $\sin x = 4/5$ B. $\sin x = 2/5$ C. $\sin x = 1/5$ D. $\sin x = 0$

Câu 41. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin x \cos x$ biết $\sin x - \cos x = 2/3$.

- A. $P = 5/9$ B. $P = -5/9$ C. $P = -5/18$ D. $P = 5/18$

Câu 42. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \dots + \cos 170^\circ$.

- A. $P = 1$ B. $P = -1$ C. $P = 0$ D. $P = 2$

Câu 43. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos^2 120^\circ - \sin^2 150^\circ + 2\tan 135^\circ$.

- A. $P = -1$ B. $P = 2$ C. $P = 0$ D. $P = -2$

Câu 44. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$

- A. 120° B. 60° C. 30° D. 90°

Câu 45. Cho A(-1; -1) và B(4; 4). Tìm tọa độ của điểm M trên trục Ox để ΔABM cân tại M.

- A. (2; 0) B. (2; 1) C. (3; 0) D. (3; 1)

Câu 46. Cho A(-1; 1) và B(4; 4). Tìm tọa độ của điểm N trên trục Oy để ΔABN vuông tại N.

- A. (0; 0) hoặc (0; 3) B. (0; 1) hoặc (0; 4) C. (0; 1) hoặc (0; 5) D. (0; 0) hoặc (0; 5)

Câu 47. Cho $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (k; -4)$. Tìm k để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc nhau

- A. $k = 3$ B. $k = -3$ C. $k = 5$ D. $k = -5$

Câu 48. Cho ΔABC có A (-4; 1); B(2; 4); C(2; -2). Diện tích tam giác ABC là

- A. 12 B. 18 C. 9 D. 6

Câu 49. Cho ΔABC có A (-4; 4), B(6; 6), C(-2; -2). Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC .

- A. (-3; 1) B. (-2; 3) C. (-1; 2) D. (-3; 3)

Câu 50. Cho ΔABC có $AB = 7, AC = 5$, góc $A = 120^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ là

- A. $P = -35/2$ B. $P = 35/2$ C. $P = -35$ D. $P = 35$

Câu 51. Cho 2 điểm M, N phân biệt nằm trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, hai đường thẳng AM và BN cắt nhau tại I. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ theo R.

- A. R^2 B. $2R^2$ C. $4R^2$ D. $8R^2$

Câu 52. Cho đoạn thẳng AB cố định, $AB = 2a$, k là số thực dương. Tìm tập hợp điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k^2$.

A. Đường tròn có tâm là trung điểm của AB và có bán kính $r = 2a + k$

B. Đường thẳng song song cách AB một khoảng $a + k$

C. Đường tròn có tâm là trung điểm của AB và có bán kính $r = a + k$

D. Đường tròn có tâm là trung điểm của AB và có bán kính $r = \sqrt{a^2 + k^2}$

Câu 53. Cho hai điểm A(-3; 2), B(4; 3) tìm tọa độ của điểm C sao cho ΔABC vuông cân tại C.

- A. (1; -1) V (0; 6) B. (1; 0) V (0; 6) C. (1; 0) V (0; 5) D. (1; -1) V (0; 5)

Câu 54. Cho 3 điểm A (-1; 1), B(3; 1), C(0; 4). Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên BC; tìm tọa độ A'.

- A. (0; 2) B. (1; 3) C. (2; 3) D. (0; 3)

Câu 55. Cho tam giác ABC có A(1; 2), B(-2; 6), C(9; 8). Tính góc BAC.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

§3 : HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC- GIẢI TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho ΔABC có:

- độ dài các cạnh: $BC = a, CA = b, AB = c$
- độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a, m_b, m_c
- độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a, h_b, h_c
- bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
- nửa chu vi tam giác: p
- diện tích tam giác: S

1. Định lý côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

2. Định lý sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

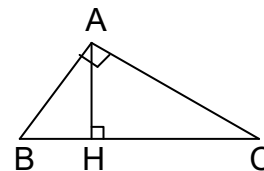
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hê-rông}) \end{aligned}$$

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông (nhắc lại)

Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao.

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pi-ta-go)
- $AB^2 = BC \cdot BH, \quad AC^2 = BC \cdot CH$
- $AH^2 = BH \cdot CH, \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
- $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C = c \tan B = c \cot C; \quad c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B = b \tan C = b \cot C$



B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giải tam giác ABC, biết:

- a) $c = 14; \hat{A} = 60^\circ; \hat{B} = 40^\circ$
- b) $b = 4,5; \hat{A} = 30^\circ; \hat{C} = 75^\circ$
- c) $c = 35; \hat{A} = 40^\circ; \hat{C} = 120^\circ$
- d) $a = 137,5; \hat{B} = 83^\circ; \hat{C} = 57^\circ$

Bài 2. Giải tam giác ABC, biết:

- a) $a = 6,3; b = 6,3; \hat{C} = 54^\circ$
- b) $b = 32; c = 45; \hat{A} = 87^\circ$
- c) $a = 7; b = 23; \hat{C} = 130^\circ$
- d) $b = 14; c = 10; \hat{A} = 145^\circ$

Bài 3. Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 14; b = 18; c = 20$

b) $a = 6; b = 7,3; c = 4,8$

c) $a = 4; b = 5; c = 7$

d) $a = 2\sqrt{3}; b = 2\sqrt{2}; c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Bài 4. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B \sin C = \sin^2 A, h_b h_c = h_a^2$

c) A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Bài 5. Cho ΔABC có $a = 12, b = 15, c = 13$

- Tính số đo các góc của ΔABC
- Tính độ dài các đường trung tuyến của ΔABC
- Tính S, R, r
- Tính h_a, h_b, h_c

Bài 6. Cho ΔABC có $AB = 6, AC = 8, \widehat{A} = 120^\circ$

- Tính diện tích ΔABC
- Tính cạnh BC và bán kính R

Bài 7. Cho ΔABC có $a = 8, b = 10, c = 13$

- ΔABC có góc tù hay không?
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC
- Tính diện tích ΔABC

Bài 8. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, b = 2$ tính độ dài cạnh a, c bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và diện tích tam giác

Bài 9. Cho ΔABC $AC = 7, AB = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$ tính BC, S, h_a , R

Bài 10. Cho ΔABC có $m_b = 4, m_c = 2$ và $a = 3$ tính độ dài cạnh AB, AC

Bài 11. Cho ΔABC có $AB = 3, AC = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính cạnh BC

Bài 12. Tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC biết $AB = 2, AC = 3, BC = 4$

Bài 13. Tính $\widehat{A}$ của ΔABC có các cạnh a, b, c thỏa hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, \widehat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

- A. $2\sqrt{13}$. B. $3\sqrt{12}$. C. $2\sqrt{37}$. D. $\sqrt{20}$.

Câu 2. Cho ΔABC có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

- A. 8,125. B. 130. C. 8. D. 8,5.

Câu 3. Cho ΔABC có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

- A. 48. B. 24. C. 12. D. 30.

Câu 4. Cho ΔABC thỏa mãn: $2\cos B = \sqrt{2}$. Khi đó:

- A. $B = 30^\circ$. B. $B = 60^\circ$. C. $B = 45^\circ$. D. $B = 75^\circ$.

Câu 5. Cho ΔABC vuông tại B và có $\widehat{C} = 25^\circ$. Số đo của góc A là:

- A. $A = 65^\circ$. B. $A = 60^\circ$. C. $A = 155^\circ$. D. $A = 75^\circ$.

Câu 6. Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

- A. 7. B. 129. C. 49. D. $\sqrt{129}$.

Câu 7. Cho ΔABC có $\widehat{C} = 45^\circ, \widehat{B} = 75^\circ$. Số đo của góc A là:

- A. $A = 65^\circ$. B. $A = 70^\circ$. C. $A = 60^\circ$. D. $A = 75^\circ$.

- Câu 8.** Cho ΔABC có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:
A. 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.
- Câu 9.** Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:
A. $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.
- Câu 10.** Cho tam giác ABC thỏa mãn: $2\cos A = 1$. Khi đó:
A. $A = 30^\circ$. **B.** $A = 45^\circ$. **C.** $A = 120^\circ$. **D.** $A = 60^\circ$.
- Câu 11.** Cho tam giác ABC có $b = 7; c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là
A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$. **D.** $80\sqrt{3}$.
- Câu 12.** Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:
A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. **B.** $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.
C. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. **D.** $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.
- Câu 13.** Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:
A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. **B.** $\sin A = \frac{a}{2R}$. **C.** $b \sin B = 2R$. **D.** $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.
- Câu 14.** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:
A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. **B.** $S = \frac{1}{2}ac \sin A$. **C.** $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. **D.** $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.
- Câu 15.** Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là ?
A. $c = 3\sqrt{21}$. **B.** $c = 7\sqrt{2}$. **C.** $c = 2\sqrt{11}$. **D.** $c = 2\sqrt{21}$.
- Câu 16.** Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng ?
A. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.b.c$. **B.** $\frac{a}{\sin A} = R$.
C. $\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. **D.** $m_c^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$.
- Câu 17.** Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng ?
A. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.AB \cos C$. **B.** $AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2AC.BC \cos C$.
C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC \cos C$. **D.** $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC + \cos C$.
- Câu 18.** Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. **B.** $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. **D.** $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.
- Câu 19.** Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào sai ?
A. $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$. **B.** $\cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.
C. $\sin(A + B) = \sin C$. **D.** $\cos \frac{A + B + 2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$.
- Câu 20.** Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?
A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. **B.** $S = a^2 + b^2 + c^2$. **C.** $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. **D.** $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 21. Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của ΔABC bằng biểu thức nào sau đây

A. $\frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

B. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2} + \frac{c^2}{4}}$.

C. $\frac{1}{2}\sqrt{(2b^2 + 2a^2) - c^2}$.

D. $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{4}}$.

Câu 22. Tam giác ABC có $\cos B$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

B. $\sqrt{1 - \sin^2 B}$.

C. $\cos(A + C)$.

D. $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó :

A. Góc $C > 90^\circ$

B. Góc $C < 90^\circ$

C. Góc $C = 90^\circ$

D. Không thể kết luận được gì về góc C .

Câu 24. Chọn đáp án **sai** : Một tam giác giải được nếu biết :

A. Độ dài 3 cạnh

B. Độ dài 2 cạnh và 1 góc bất kỳ

C. Số đo 3 góc

D. Độ dài 1 cạnh và 2 góc bất kỳ

Câu 25. Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu ?

A. 84.

B. $\sqrt{84}$.

C. 42.

D. $\sqrt{168}$.

Câu 26. Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16.

B. 8.

C. 4.

D. $4\sqrt{2}$.

Câu 27. Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\frac{65}{8}$.

B. 40.

C. 32,5.

D. $\frac{65}{4}$.

Câu 28. Tam giác với ba cạnh là 3,4,5. Có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Câu 29. Tam giác ABC có $a=6, b=4\sqrt{2}, c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{9}$.

B. 9.

C. 3.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Câu 30. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}$.

B. $3\sqrt{15}$.

C. 105.

D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 31. Cho ΔABC , biết $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (b_1; b_2)$. Để tính diện tích S của ΔABC . Một học sinh làm như sau:

(I) Tính $\cos A = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

(II) Tính $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2)}}$

(III) $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

(IV) $S = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2}$$

$$S = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Học sinh đó đã làm sai bắt đầu từ bước nào?

- A. (I) B. (II) C. (III) D. (IV)

Câu 32. Câu nào sau đây là phương tích của điểm $M(1;2)$ đối với đường tròn (C) . tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=2$:

- A. 6. B. 8. C. 0. D. -5.

Câu 33. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^{\circ}24'$. Biết $CA=250m, CB=120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu ?

- A. 266m. B. 255m. C. 166m. D. 298m.

Câu 34. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

- A. 13. B. $15\sqrt{13}$. C. $10\sqrt{13}$. D. 15.

Câu 35. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD=80m$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^{\circ}12'$ và $34^{\circ}26'$. Ba điểm A,B,D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

- A. 71m. B. 91m. C. 79m. D. 40m.

Câu 36. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^{\circ}16'$. Biết $CA=200m$, $CB=180m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu ?

- A. 163m. B. 224m. C. 112m. D. 168m.

Câu 37. Cho đường tròn (C) đường kính AB với $A(-1;-2)$; $B(2;1)$. Kết quả nào sau đây là phương tích của điểm $M(1;2)$ đối với đường tròn (C) .

- A. 3. B. 4. C. -5. D. 2.

Câu 38. Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích ΔABC bằng bao nhiêu ?

- A. $\frac{13}{2}$. B. 13. C. 26. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích ΔABC là

- A. 12. B. 6. C. $6\sqrt{2}$. D. 9.

Câu 40. Cho $\vec{a}=(2;-3)$ và $\vec{b}=(5;m)$. Giá trị của m để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là:

- A. -6. B. $-\frac{13}{2}$. C. -12. D. $-\frac{15}{2}$.

Câu 41. Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 42. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là ?

- A. 6. B. 8. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

- A. $9\sqrt{15}$. B. $3\sqrt{15}$. C. 105. D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 44. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 45. Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu ?

- A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Câu 46. Cho tam giác ABC thỏa mãn : $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó :

- A. $A=30^{\circ}$. B. $A=45^{\circ}$. C. $A=60^{\circ}$. D. $A=75^{\circ}$.

- Câu 47.** Tam giác ABC có $a=16,8$; $\hat{B}=56^{\circ}13'$; $\hat{C}=71^{\circ}$. Cạnh c bằng bao nhiêu?
A. 29,9. **B.** 14,1. **C.** 17,5. **D.** 19,9.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^{\circ}}{\sin 52^{\circ}47'} \approx 19,9.$

- Câu 48.** Cho tam giác ABC , biết $a=24, b=13, c=15$. Tính góc A ?
A. $33^{\circ}34'$. **B.** $117^{\circ}49'$. **C.** $28^{\circ}37'$. **D.** $58^{\circ}24'$.
- Câu 49.** Tam giác ABC có $\hat{A}=68^{\circ}12'$, $\hat{B}=34^{\circ}44'$, $AB=117$. Tính AC ?
A. 68. **B.** 168. **C.** 118. **D.** 200.
- Câu 50.** Tam giác ABC có $a=8, c=3, \hat{B}=60^{\circ}$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?
A. 49. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** 7. **D.** $\sqrt{61}$.
- Câu 51.** Cho tam giác ABC , biết $a=13, b=14, c=15$. Tính góc B ?
A. $59^{\circ}49'$. **B.** $53^{\circ}7'$. **C.** $59^{\circ}29'$. **D.** $62^{\circ}22'$.

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Vector pháp tuyến và phương trình tổng quát của đường thẳng :

a. Định nghĩa : Cho đường thẳng Δ . Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là *vector pháp tuyến* (VTPT) của Δ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .

Nhận xét :

- Nếu $\vec{n}$ là VTPT của Δ thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là VTPT của Δ .

b. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a; b)$.

Khi đó $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_0 - by_0) \quad (1)$$

(1) gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng Δ .

Chú ý :

- Nếu đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ thì $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của Δ .

3. Vector chỉ phương và phương trình tham số của đường thẳng :

a. Định nghĩa vector chỉ phương :

Cho đường thẳng Δ . Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là *vector chỉ phương* (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .

Nhận xét :

- Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k\vec{u} (k \neq 0)$ cũng là VTCP của Δ .

- VTPT và VTCP vuông góc với nhau. Do vậy nếu Δ có VTCP $\vec{u} = (a; b)$ thì $\vec{n} = (-b; a)$ là một VTPT của Δ .

b. Phương trình tham số của đường thẳng :

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{u} = (a; b)$ là VTCP.

$$\text{Khi đó } M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Hệ (1) gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ , t gọi là *tham số*

Nhận xét : Nếu Δ có phương trình tham số là (1) khi đó $A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt)$

4. Phương trình chính tắc của đường thẳng.

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{u} = (a; b)$ (với $a \neq 0, b \neq 0$) là vector chỉ phương thì phương trình $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

c) Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

- Δ song song hoặc trùng với trục $Ox \Leftrightarrow \Delta: by + c = 0$
- Δ song song hoặc trùng với trục $Oy \Leftrightarrow \Delta: ax + c = 0$
- Δ đi qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow \Delta: ax + by = 0$
- Δ đi qua hai điểm $A(a; 0), B(0; b) \Leftrightarrow \Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ với $(ab \neq 0)$
- Phương trình đường thẳng có hệ số góc k là $y = kx + m$ với $k = \tan \alpha$, α là góc hợp bởi tia Mt của Δ ở phía trên trục Ox và tia Mx

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

- d_1 cắt d_2 khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$
- $d_1 // d_2$ khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$, hoặc $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$
- $d_1 \equiv d_2$ khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$

Chú ý: Với trường hợp $a_2.b_2.c_2 \neq 0$ khi đó

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTCP $\vec{u}$:

- a) $M(-2; 3)$, $\vec{u} = (5; -1)$ b) $M(-1; 2)$, $\vec{u} = (-2; 3)$ c) $M(3; -1)$, $\vec{u} = (-2; -5)$
d) $M(1; 2)$, $\vec{u} = (5; 0)$ e) $M(7; -3)$, $\vec{u} = (0; 3)$ f) $M \equiv O(0; 0)$, $\vec{u} = (2; 5)$

Bài 2. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có VTPT $\vec{n}$:

- a) $M(-2; 3)$, $\vec{n} = (5; -1)$ b) $M(-1; 2)$, $\vec{n} = (-2; 3)$ c) $M(3; -1)$, $\vec{n} = (-2; -5)$

- d) $M(1; 2), \vec{n} = (5; 0)$ e) $M(7; -3), \vec{n} = (0; 3)$ f) $M \equiv O(0; 0), \vec{n} = (2; 5)$

Bài 3. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và có hệ số góc k:

- a) $M(-3; 1), k = -2$ b) $M(-3; 4), k = 3$ c) $M(5; 2), k = 1$
d) $M(-3; -5), k = -1$ e) $M(2; -4), k = 0$ f) $M \equiv O(0; 0), k = 4$

Bài 4. Lập PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua hai điểm A, B:

- a) $A(-2; 4), B(1; 0)$ b) $A(5; 3), B(-2; -7)$ c) $A(3; 5), B(3; 8)$
d) $A(-2; 3), B(1; 3)$ e) $A(4; 0), B(3; 0)$ f) $A(0; 3), B(0; -2)$
g) $A(3; 0), B(0; 5)$ h) $A(0; 4), B(-3; 0)$ i) $A(-2; 0), B(0; -6)$

Bài 5. Viết PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và song song với đường thẳng d:

- a) $M(2; 3), d: 4x - 10y + 1 = 0$ b) $M(-1; 2), d \equiv Ox$ c) $M(4; 3), d \equiv Oy$
d) $M(2; -3), d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ e) $M(0; 3), d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-2}$

Bài 6. Viết PTTS, PTCT (nếu có), PTTQ của các đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d:

- a) $M(2; 3), d: 4x - 10y + 1 = 0$ b) $M(-1; 2), d \equiv Ox$ c) $M(4; 3), d \equiv Oy$
d) $M(2; -3), d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ e) $M(0; 3), d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-2}$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Viết phương trình các cạnh, các đường trung tuyến, các đường cao của tam giác với:

- a) $A(2; 0), B(2; -3), C(0; -1)$ b) $A(1; 4), B(3; -1), C(6; 2)$
c) $A(-1; -1), B(1; 9), C(9; 1)$ d) $A(4; -1), B(-3; 2), C(1; 6)$

Bài 8. Cho tam giác ABC, biết phương trình ba cạnh của tam giác. Viết phương trình các đường cao của tam giác, với:

- a) $AB: 2x - 3y - 1 = 0, BC: x + 3y + 7 = 0, CA: 5x - 2y + 1 = 0$
b) $AB: 2x + y + 2 = 0, BC: 4x + 5y - 8 = 0, CA: 4x - y - 8 = 0$

Bài 9. Viết phương trình các cạnh và các trung trực của tam giác ABC biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB lần lượt là các điểm M, N, P, với:

- a) $M(-1; -1), N(1; 9), P(9; 1)$ b) $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), N\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right), P(2; -4)$
c) $M\left(2; -\frac{3}{2}\right), N\left(1; -\frac{1}{2}\right), P(1; -2)$ d) $M\left(\frac{3}{2}; 2\right), N\left(\frac{7}{2}; 3\right), P(1; 4)$

Bài 10. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và chắn trên hai trục tọa độ 2 đoạn bằng nhau, với:

- a) $M(-4; 10)$ b) $M(2; 1)$ c) $M(-3; -2)$ d) $M(2; -1)$

Bài 11. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cùng với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích S, với:

- a) $M(-4; 10), S = 2$ b) $M(2; 1), S = 4$ c) $M(-3; -2), S = 3$ d) $M(2; -1), S = 4$

Bài 12. Tìm hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d và điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d với:

- a) $M(2; 1), d: 2x + y - 3 = 0$ b) $M(3; -1), d: 2x + 5y - 30 = 0$
c) $M(4; 1), d: x - 2y + 4 = 0$ d) $M(-5; 13), d: 2x - 3y - 3 = 0$

Bài 13. Cho tam giác ABC biết $A(2; 0), B(0; 4), C(1; 3)$. Viết phương trình tổng quát của

- a) Đường cao AH
b) Đường trung trực của đoạn thẳng BC.
c) Đường thẳng AB.

d) Đường thẳng qua C và song song với đường thẳng AB .

Bài 14. Cho đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$ và điểm $M(-1; 2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

- a) Δ đi qua điểm M và có hệ số góc $k = 3$
- b) Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d
- c) Δ đối xứng với đường thẳng d qua M .

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho phương trình: $ax + by + c = 0$ (1) với $a^2 + b^2 > 0$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. (1) là phương trình tổng quát của đường thẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$.
- B. $a = 0$ (1) là phương trình đường thẳng song song hoặc trùng với trục ox .
- C. $b = 0$ (1) là phương trình đường thẳng song song hoặc trùng với trục oy .
- D. Điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (1) khi và chỉ khi $ax_0 + by_0 + c \neq 0$.

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây sai? Đường thẳng (d) được xác định khi biết.

- A. Một vectơ pháp tuyến hoặc một vectơ chỉ phương.
- B. Hệ số góc và một điểm thuộc đường thẳng.
- C. Một điểm thuộc (d) và biết (d) song song với một đường thẳng cho trước.
- D. Hai điểm phân biệt thuộc (d) .

Câu 3: Cho tam giác ABC . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BC}$ là một vectơ pháp tuyến của đường cao AH .
- B. $\overrightarrow{BC}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng BC .
- C. Các đường thẳng AB, BC, CA đều có hệ số góc.
- D. Đường trung trực của AB có $\overrightarrow{AB}$ là vectơ pháp tuyến.

Câu 4: Đường thẳng (d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\vec{u}_1 = (b; -a)$ là vectơ chỉ phương của (d) .
- B. $\vec{u}_2 = (-b; a)$ là vectơ chỉ phương của (d) .
- C. $\vec{n}' = (ka; kb) k \in \mathbb{R}$ là vectơ pháp tuyến của (d) .
- D. (d) có hệ số góc $k = \frac{-b}{a}$ ($b \neq 0$).

Câu 5: Đường thẳng đi qua $A(-1; 2)$, nhận $\vec{n} = (2; -4)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

- A. $x - 2y - 4 = 0$
- B. $x + y + 4 = 0$
- C. $-x + 2y - 4 = 0$
- D. $x - 2y + 5 = 0$

Câu 6: Cho đường thẳng $(d): 2x + 3y - 4 = 0$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (d) ?

- A. $\vec{n}_1 = (3; 2)$.
- B. $\vec{n}_2 = (-4; -6)$.
- C. $\vec{n}_3 = (2; -3)$.
- D. $\vec{n}_4 = (-2; 3)$.

Câu 7: Cho đường thẳng $(d): 3x - 7y + 15 = 0$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\vec{u} = (7; 3)$ là vectơ chỉ phương của (d) .

B. (d) có hệ số góc $k = \frac{3}{7}$.

C. (d) không đi qua gốc tọa độ.

D. (d) đi qua hai điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ và $N(5; 0)$.

Câu 8: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2; 4); B(-6; 1)$ là:

A. $3x + 4y - 10 = 0$. B. $3x - 4y + 22 = 0$. C. $3x - 4y + 8 = 0$. D. $3x - 4y - 22 = 0$

Câu 9: Cho đường thẳng $(d): 3x + 5y - 15 = 0$. Phương trình nào sau đây không phải là một dạng khác của (d) .

A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$. B. $y = -\frac{3}{5}x + 3$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ D. $\begin{cases} x = 5 - \frac{5}{3}t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 10: Cho đường thẳng $(d): x - 2y + 1 = 0$. Nếu đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; -1)$ và song song với (d) thì (Δ) có phương trình

A. $x - 2y - 3 = 0$ B. $x - 2y + 5 = 0$ C. $x - 2y + 3 = 0$ D. $x + 2y + 1 = 0$

Câu 11: Cho ba điểm $A(1; -2), B(5; -4), C(-1; 4)$. Đường cao AA' của tam giác ABC có phương trình

A. $3x - 4y + 8 = 0$ B. $3x - 4y - 11 = 0$ C. $-6x + 8y + 11 = 0$ D. $8x + 6y + 13 = 0$

Câu 12: Cho hai đường thẳng $(d_1): mx + y = m + 1, (d_2): x + my = 2$ cắt nhau khi và chỉ khi:

A. $m \neq 2$. B. $m \neq \pm 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq -1$.

Câu 13: Cho hai điểm $A(4; 0), B(0; 5)$. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của đường thẳng AB?

A. $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ C. $\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{5}$ D. $y = \frac{-5}{4}x + 15$

Câu 14: Đường thẳng $(\Delta): 3x - 2y - 7 = 0$ cắt đường thẳng nào sau đây?

A. $(d_1): 3x + 2y = 0$ B. $(d_2): 3x - 2y = 0$
C. $(d_3): -3x + 2y - 7 = 0$. D. $(d_4): 6x - 4y - 14 = 0$.

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây đúng? Đường thẳng $(d): x - 2y + 5 = 0$:

A. Đi qua $A(1; -2)$.

B. Có phương trình tham số: $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. (d) có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$.

D. (d) cắt (d') có phương trình: $x - 2y = 0$.

- Câu 16:** Cho đường thẳng $(d): 4x - 3y + 5 = 0$. Nếu đường thẳng (Δ) đi qua góc tọa độ và vuông góc với (d) thì (Δ) có phương trình:
- A. $4x + 3y = 0$ B. $3x - 4y = 0$ C. $3x + 4y = 0$ D. $4x - 3y = 0$
- Câu 17:** Cho tam giác ABC có $A(-4;1)B(2;-7)C(5;-6)$ và đường thẳng $(d): 3x + y + 11 = 0$. Quan hệ giữa (d) và tam giác ABC là:
- A. Đường cao vẽ từ A.
B. Đường cao vẽ từ B.
C. Đường trung tuyến vẽ từ A.
D. Đường Phân giác góc $\widehat{BAC}$.
- Câu 18:** Giao điểm M của $(d): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$ và $(d'): 3x - 2y - 1 = 0$ là
- A. $M\left(2; -\frac{11}{2}\right)$. B. $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- Câu 19:** Phương trình nào sau đây biểu diễn đường thẳng không song song với đường thẳng $(d): y = 2x - 1$?
- A. $2x - y + 5 = 0$. B. $2x - y - 5 = 0$. C. $-2x + y = 0$. D. $2x + y - 5 = 0$.
- Câu 20:** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x - y + 4 = 0$
- A. $-x + 2y - 5 = 0$ B. $x + 2y - 3 = 0$ C. $x + 2y = 0$ D. $x - 2y + 5 = 0$
- Câu 21:** Hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 2t \end{cases}$ và $(d_2): 4x + 3y - 18 = 0$. Cắt nhau tại điểm có tọa độ:
- A. $(2;3)$. B. $(3;2)$. C. $(1;2)$. D. $(2;1)$.
- Câu 22:** Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ và điểm $A\left(\frac{7}{2}; -2\right)$. Điểm $A \in (d)$ ứng với giá trị nào của t ?
- A. $t = \frac{3}{2}$. B. $t = \frac{1}{2}$. C. $t = -\frac{1}{2}$. D. $t = 2$
- Câu 23:** Phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2;3)$ và vuông góc với đường thẳng $(d'): 3x - 4y + 1 = 0$ là
- A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$
- Câu 24:** Cho ΔABC có $A(2;-1); B(4;5); C(-3;2)$. Viết phương trình tổng quát của đường cao AH .
- A. $3x + 7y + 1 = 0$ B. $7x + 3y + 13 = 0$ C. $-3x + 7y + 13 = 0$ D. $7x + 3y - 11 = 0$

- Câu 25:** Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $M(\sqrt{2}; 1)$ và vuông góc với đường thẳng có phương trình $(\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y = 0$.
- A. $(1 - \sqrt{2})x + (\sqrt{2} + 1)y + 1 - 2\sqrt{2} = 0$ B. $-x + (3 + 2\sqrt{2})y - 3 - \sqrt{2} = 0$
 C. $(1 - \sqrt{2})x + (\sqrt{2} + 1)y + 1 = 0$ D. $-x + (3 + 2\sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$
- Câu 26:** Cho đường thẳng (d) đi qua điểm $M(1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -2)$. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của (d) ?
- A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2}$ C. $2x + y - 5 = 0$ D. $y = -2x - 5$
- Câu 27:** Cho tam giác ABC có $A(-2; 3), B(1; -2), C(-5; 4)$. Đường trung trực trung tuyến AM có phương trình tham số
- A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 - 2t \end{cases}$
- Câu 28:** Cho $(d): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases}$. Điểm nào sau đây không thuộc (d) ?
- A. $A(5; 3)$ B. $B(2; 5)$ C. $C(-1; 9)$ D. $D(8; -3)$
- Câu 29:** Cho $(d): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M \in (d)$ cách $A(9; 1)$ một đoạn bằng 5.
- A. 1 B. 0 C. 3 D. 2
- Câu 30:** Cho hai điểm $A(-2; 3), B(4; -1)$. viết phương trình trung trực đoạn AB.
- A. $x - y - 1 = 0$ B. $2x - 3y + 1 = 0$ C. $2x + 3y - 5 = 0$ D. $3x - 2y - 1 = 0$
- Câu 31:** Cho hai đường thẳng $(d_1): mx + y = m + 1, (d_2): x + my = 2$ song song nhau khi và chỉ khi
- A. $m = 2$ B. $m = \pm 1$ C. $m = 1$ D. $m = -1$
- Câu 32:** Cho hai đường thẳng $(\Delta_1): 11x - 12y + 1 = 0$ và $(\Delta_2): 12x + 11y + 9 = 0$. Khi đó hai đường thẳng này
- A. Vuông góc nhau B. cắt nhau nhưng không vuông góc
 C. trùng nhau D. song song với nhau
- Câu 33:** Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc $(\Delta_1): \begin{cases} x = 1 + (m^2 + 1)t \\ y = 2 - mt \end{cases}$ và $(\Delta_2): \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 1 - 4mt' \end{cases}$
- A. $m = \pm\sqrt{3}$ B. $m = -\sqrt{3}$ C. $m = \sqrt{3}$ D. không có m
- Câu 34:** Cho 4 điểm $A(1; 2), B(4; 0), C(1; -3), D(7; -7)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD .
- A. Song song. B. Cắt nhau nhưng không vuông góc.

C. Trùng nhau.

D. Vuông góc nhau.

Câu 35: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $(\Delta_1): 3x + 4y - 1 = 0$ và $(\Delta_2): (2m - 1)x + m^2y + 1 = 0$ trùng nhau.

A. $m = 2$

B. mọi m

C. không có m

D. $m = \pm 1$

Câu 36: Cho 4 điểm $A(-3;1), B(-9;-3), C(-6;0), D(-2;4)$. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng AB và CD .

A. $(-6;-1)$

B. $(-9;-3)$

C. $(-9;3)$

D. $(0;4)$

Câu 37: Cho tam giác ABC có $A(-1;-2); B(0;2); C(-2;1)$. Đường trung tuyến BM có phương trình là:

A. $5x - 3y + 6 = 0$

B. $3x - 5y + 10 = 0$

C. $x - 3y + 6 = 0$

D. $3x - y - 2 = 0$

Câu 38: Cho tam giác ABC với $A(2;-1); B(4;5); C(-3;2)$. Phương trình tổng quát của đường cao đi qua A của tam giác là

A. $3x + 7y + 1 = 0$

B. $7x + 3y + 13 = 0$

C. $-3x + 7y + 13 = 0$

D. $7x + 3y - 11 = 0$

Câu 39: Cho tam giác ABC với $A(2;3); B(-4;5); C(6;-5)$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Phương trình tham số của đường trung bình MN là:

A. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$

Câu 40: Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(5;-3)$ và cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB là:

A. $3x - 5y - 30 = 0$.

B. $3x + 5y - 30 = 0$.

C. $5x - 3y - 34 = 0$.

D. $5x - 3y + 34 = 0$

§2 KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Khoảng cách.

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$.

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N) \notin \Delta$.

– M, N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

– M, N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Chú ý: Để lập phương trình đường phân giác trong hoặc ngoài của góc A trong tam giác ABC ta có thể thực hiện như sau:

Cách 1:

– Tìm tọa độ chân đường phân giác trong hoặc ngoài (dựa vào tính chất đường phân giác của góc trong tam giác).

Cho ΔABC với đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE ($D, E \in BC$)

ta có: $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Cách 2:

– Viết phương trình các đường phân giác d_1, d_2 của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB, AC.

– Kiểm tra vị trí của hai điểm B, C đối với d_1 (hoặc d_2).

+ Nếu B, C nằm khác phía đối với d_1 thì d_1 là đường phân giác trong.

+ Nếu B, C nằm cùng phía đối với d_1 thì d_1 là đường phân giác ngoài.

II. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$)

và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ (có VTPT $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$).

$$(\widehat{A_1, A_2}) = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & \text{khi } (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq 90^\circ \\ 180^\circ - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & \text{khi } (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^\circ \end{cases}$$

$$\cos(\widehat{A_1, A_2}) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Chú ý: • $0^\circ \leq (\widehat{A_1, A_2}) \leq 90^\circ$.

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• Cho $\Delta_1: y = k_1x + m_1, \Delta_2: y = k_2x + m_2$ thì:

- $+\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ $+\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.
 • Cho ΔABC . Để tính góc A trong ΔABC , ta có thể sử dụng công thức:

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d , với:

- a) $M(4; -5)$, $d: 3x - 4y + 8 = 0$ b) $M(3; 5)$, $d: x + y + 1 = 0$
 c) $M(4; -5)$, $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ d) $M(3; 5)$, $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3}$

Bài 2.

- a) Cho đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$. Tính bán kính đường tròn tâm $I(-5; 3)$ và tiếp xúc với Δ .
 b) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình 2 cạnh là: $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ và đỉnh $A(2; -3)$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.
 c) Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng song song: $d_1: 3x - 4y + 6 = 0$ và $d_2: 6x - 8y - 13 = 0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC . Tính diện tích tam giác ABC , với:

- a) $A(-1; -1)$, $B(2; -4)$, $C(4; 3)$ b) $A(-2; 14)$, $B(4; -2)$, $C(5; -4)$

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đường thẳng Δ một khoảng k , với:

- a) $\Delta: 2x - y + 3 = 0$, $k = \sqrt{5}$ b) $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$, $k = 3$
 c) $\Delta: y - 3 = 0$, $k = 5$ d) $\Delta: x - 2 = 0$, $k = 4$

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng k , với:

- a) $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$, $A(2; 3)$, $k = 2$ b) $\Delta: x + 4y - 2 = 0$, $A(-2; 3)$, $k = 3$
 c) $\Delta: y - 3 = 0$, $A(3; -5)$, $k = 5$ d) $\Delta: x - 2 = 0$, $A(3; 1)$, $k = 4$

Bài 6. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng d , với:

- a) $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $d = 3$ b) $A(-1; 3)$, $B(4; 2)$, $d = 5$
 c) $A(5; 1)$, $B(2; -3)$, $d = 5$ d) $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $d = 4$.

Bài 7. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P , Q , với:

- a) $M(2; 5)$, $P(-1; 2)$, $Q(5; 4)$ b) $M(1; 2)$, $P(2; 3)$, $Q(4; -5)$
 c) $M(10; 2)$, $P(3; 0)$, $Q(-5; 4)$ d) $M(2; 3)$, $P(3; -1)$, $Q(3; 5)$

Bài 8. Viết phương trình đường thẳng d cách điểm A một khoảng bằng h và cách điểm B một khoảng bằng k , với:

- a) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $h = 2$, $k = 4$ b) $A(2; 5)$, $B(-1; 2)$, $h = 1$, $k = 3$

Bài 9. Cho đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$ và các điểm $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(-2; 2)$.

- a) Chứng minh đường thẳng Δ cắt đoạn thẳng AB .
 b) Chứng minh rằng hai điểm O , A nằm cùng về một phía đối với đường thẳng Δ .
 c) Tìm điểm O' đối xứng với O qua Δ .

Bài 10. Tính góc giữa hai đường thẳng:

- a) $x - 2y - 1 = 0, x + 3y - 11 = 0$ b) $2x - y + 5 = 0, 3x + y - 6 = 0$
 c) $3x - 7y + 26 = 0, 2x + 5y - 13 = 0$ d) $3x + 4y - 5 = 0, 4x - 3y + 11 = 0$

Bài 11. Tính số đo của các góc trong tam giác ABC, với:

- a) $A(-3; -5), B(4; -6), C(3; 1)$
 b) $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3)$
 c) $AB: 2x - 3y + 21 = 0, BC: 2x + 3y + 9 = 0, CA: 3x - 2y - 6 = 0$
 d) $AB: 4x + 3y + 12 = 0, BC: 3x - 4y - 24 = 0, CA: 3x + 4y - 6 = 0$

Bài 12. Cho hai đường thẳng d và Δ . Tìm m để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α , với:

- a) $d: 2mx + (m - 3)y + 4m - 1 = 0, \Delta: (m - 1)x + (m + 2)y + m - 2 = 0, \alpha = 45^\circ$.
 b) $d: (m + 3)x - (m - 1)y + m - 3 = 0, \Delta: (m - 2)x + (m + 1)y - m - 1 = 0, \alpha = 90^\circ$.

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α , với:

- a) $A(6; 2), \Delta: 3x + 2y - 6 = 0, \alpha = 45^\circ$ b) $A(-2; 0), \Delta: x + 3y - 3 = 0, \alpha = 45^\circ$
 c) $A(2; 5), \Delta: x + 3y + 6 = 0, \alpha = 60^\circ$ d) $A(1; 3), \Delta: x - y = 0, \alpha = 30^\circ$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$. Khi đó khoảng cách $d_{(M; \Delta)}$ là

A. $d_{(M; \Delta)} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

B. $d_{(M; \Delta)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

C. $d_{(M; \Delta)} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

D. $d_{(M; \Delta)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Câu 2: Khoảng cách từ điểm $M(15; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \end{cases}$ là

A. $\sqrt{5}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

C. $\sqrt{10}$.

D. $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

Câu 3: Khoảng cách từ điểm $M(5; -1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + 2y + 13 = 0$ là

A. $\frac{13}{\sqrt{2}}$.

B. 2.

C. $\frac{28}{\sqrt{13}}$.

D. $2\sqrt{13}$.

Câu 4: Khoảng cách từ điểm $M(0; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: 5x - 12y - 1 = 0$ là

A. $\frac{11}{13}$.

B. $\frac{13}{17}$.

C. 1.

D. $\sqrt{13}$.

Câu 5: Cho ba điểm $A(0; 1), B(12; 5), C(-3; 5)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm A, B, C?

A. $5x - y + 1 = 0$.

B. $2x - 6y + 21 = 0$.

C. $x + y = 0$.

D. $x - 3y + 4 = 0$.

Câu 6: Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục Ox và cách đều 2 đường thẳng: $\Delta_1: 3x - 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2: 3x - 2y + 3 = 0$

A. $(0; \sqrt{2})$.

B. $(\frac{1}{2}; 0)$.

C. $(1; 0)$.

D. $(\sqrt{2}; 0)$.

Câu 7: Khoảng cách từ điểm $M(2; 0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ là

- A. 2. B. . C. $\frac{10}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8: Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 17 = 0$ là

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{10}{\sqrt{5}}$. C. 2. D. $-\frac{18}{5}$.

Câu 9: Khoảng cách từ điểm $M(1;0)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 1 = 0$ là

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{10}{\sqrt{5}}$. C. 2. D. $\frac{2}{25}$.

Câu 10: Khoảng cách từ điểm $M(-1;1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 3 = 0$ là

- A. $\frac{2}{5}$. B. 2. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{4}{25}$.

Câu 11: Khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ là

- A. 4,8. B. $\frac{1}{10}$. C. $\frac{48}{\sqrt{14}}$. D. $\frac{1}{14}$.

Câu 12: Khoảng cách từ điểm $M(1;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + y + 4 = 0$ là

- A. $2\sqrt{10}$. B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 1.

Câu 13: Khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến đường thẳng $\Delta: 4x - 3y - 5 = 0$ là

- A. 0. B. -5. C. 1. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 14: Cho hai điểm $A(1;-2)$, $B(-1;2)$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $2x + y = 0$. B. $x + 2y = 0$. C. $x - 2y = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.

Câu 15: Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng $\Delta: x \cos \alpha + y \sin \alpha + 3(2 - \sin \alpha) = 0$ là

- A. $\sqrt{6}$. B. 6. C. $3 \sin \alpha$. D. $\frac{3}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

Câu 16: Cho đường thẳng $\Delta: 7x + 10y - 15 = 0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(8;0)$, $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng Δ nhất?

- A. N . B. M . C. P . D. Q .

Câu 17: Tính diện tích tam giác ABC biết $A(2;-1)$, $B(1;2)$, $C(2;-4)$

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{3}{\sqrt{37}}$. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 18: Tính diện tích tam giác ABC biết $A(3;2)$, $B(0;1)$, $C(1;5)$

- A. $\frac{11}{\sqrt{17}}$. B. $\sqrt{17}$. C. 11. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 19: Tính diện tích tam giác ABC biết $A(3;-4)$, $C(3;1)$, $B(1;5)$

- A. 10. B. 5. C. $\sqrt{26}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 20: Tính chiều cao tương ứng với cạnh BC của tam giác ABC biết $A(1;2)$, $C(4;0)$, $B(0;3)$

- A. 3. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{25}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 21: Khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1: 7x + y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 7x + y + 12 = 0$ là

- A. $\frac{9}{\sqrt{50}}$. B. 9. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. 15.

Câu 22: Khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - 4y = 0$ và $\Delta_2: 6x - 8y - 101 = 0$ là

- A. 1,01. B. $\sqrt{101}$. C. 10,1. D. 101.

Câu 23: Khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta_1: 5x - 7y + 4 = 0$ và $\Delta_2: 5x - 7y + 6 = 0$ là

- A. $\frac{4}{\sqrt{74}}$. B. $\frac{6}{\sqrt{74}}$. C. $\frac{2}{\sqrt{74}}$. D. $\frac{10}{\sqrt{74}}$.

Câu 24: Cho đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -1)$, $B(0; 3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1

- A. $M\left(\frac{7}{2}; 0\right)$ và $M(1; 0)$. B. $M(\sqrt{13}; 0)$.
C. $M(4; 0)$. D. $M(2; 0)$.

Câu 25: Cho hai điểm $A(2; 3)$, $B(1; 4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều A và B ?

- A. $x + y - 1 = 0$. B. $x + 2y = 0$.
C. $2x - 2y + 10 = 0$. D. $x - y + 100 = 0$.

Câu 26: Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ được xác định theo công thức:

- A. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. B. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.
C. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. D. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{a^2 + b^2}}$.

Câu 27: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 10x + 5y - 1 = 0$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$.

- A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 28: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{2} = 0$ và $\Delta_2: x - y = 0$.

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Tìm cosin giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x + 3y - 10 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 4 = 0$.

- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{6}{13}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\frac{5}{13}$.

Câu 30: Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x + 2\sqrt{3}y + \sqrt{5} = 0$ và $\Delta_2: y - \sqrt{6} = 0$

- A. 60° . B. 125° . C. 145° . D. 30° .

Câu 31: Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x + \sqrt{3}y = 0$ và $\Delta_2: x + 10 = 0$.

- A. 45° . B. 125° . C. 30° . D. 60° .

Câu 32: Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x - y - 10 = 0$ và $\Delta_2: x - 3y + 9 = 0$.

- A. 60° . B. 0° . C. 90° . D. 45° .

Câu 33: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - 7 = 0$ và $\Delta_2 : 2x - 4y + 9 = 0$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 34: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2 : x - 3y + 9 = 0$. Tính góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2

- A. 30° . B. 135° . C. 45° . D. 60° .

Câu 35: Cho hai đường thẳng $d_1 : x + 2y + 4 = 0$; $d_2 : 2x - y + 6 = 0$. Số đo góc giữa d_1 và d_2 là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 36: Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : 6x - 5y + 15 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

- A. 90° . B. 60° . C. 0° . D. 45° .

Câu 37: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : 3x + 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 15 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{13}$. C. $\frac{6}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Câu 38: Cho đoạn thẳng AB với $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$ và đường thẳng $d : 4x - 7y + m = 0$. Định m để d và đoạn thẳng AB có điểm chung.

- A. $10 \leq m \leq 40$. B. $m > 40$ hoặc $m < 10$.
C. $m > 40$. D. $m < 10$.

Câu 39: Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi đường thẳng $\Delta : x + y = 0$ và trục hoành Ox ?

- A. $(1 + \sqrt{2})x + y = 0$; $x - (1 - \sqrt{2})y = 0$.
B. $(1 + \sqrt{2})x + y = 0$; $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.
C. $(1 + \sqrt{2})x - y = 0$; $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.
D. $x + (1 + \sqrt{2})y = 0$; $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.

Câu 40: Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ và 2 điểm $A(1; 2)$, $B(-2; m)$. Định m để A và B nằm cùng phía đối với d .

- A. $m < 13$. B. $m \geq 13$. C. $m > 13$. D. $m = 13$.

Câu 41: Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi 2 đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2 : 2x - y + 3 = 0$.

- A. $3x + y = 0$ và $x - 3y = 0$. B. $3x + y = 0$ và $x + 3y - 6 = 0$.
C. $3x + y = 0$ và $-x + 3y - 6 = 0$. D. $3x + y + 6 = 0$ và $x - 3y - 6 = 0$.

Câu 42: Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x - 4y - 3 = 0$; $d_2 : 3x - y + 17 = 0$. Số đo góc giữa d_1 và d_2 là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $-\frac{3\pi}{4}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

- Câu 43:** Cho đường thẳng $d: 3x + 4y - 5 = 0$ và 2 điểm $A(1;3)$, $B(2;m)$. Định m để A và B nằm cùng phía đối với d .
- A. $m < 0$. B. $m > -\frac{1}{4}$. C. $m > -1$. D. $m = -\frac{1}{4}$.
- Câu 44:** Cho ΔABC với $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(-1;5)$ và đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$. Đường thẳng d cắt cạnh nào của ΔABC ?
- A. Cạnh AC . B. Không cạnh nào.
C. Cạnh AB . D. Cạnh BC .
- Câu 45:** Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + y + 5 = 0$ và $\Delta_2: y = -10$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 là
- A. 30° . B. 45° . C. $88^\circ 57' 52''$. D. $1^\circ 13' 8''$.
- Câu 46:** Xác định giá trị của a để góc tạo bởi hai đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ và đường thẳng $3x + 4y + 12 = 0$ một góc bằng 45° .
- A. $a = \frac{2}{7}; a = -14$. B. $a = \frac{2}{7}; a = 14$. C. $a = 1; a = -14$. D. $a = -2; a = -14$.
- Câu 47:** Đường thẳng $ax + by - 3 = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$ đi qua điểm $M(1;1)$ và tạo với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 7 = 0$ một góc 45° . Khi đó $a - b$ bằng
- A. 6. B. -4. C. 3. D. 1.
- Câu 48:** Cho $d: 3x - y = 0$ và $d': mx + y - 1 = 0$. Tìm m để $\cos(d, d') = \frac{1}{\sqrt{10}}$
- A. $m = 0$. B. $m = \frac{4}{3}$ hoặc $m = 0$. C. $m = \frac{3}{4}$ hoặc $m = 0$. D. $m = \pm\sqrt{3}$.
- Câu 49:** Có hai giá trị m_1, m_2 để đường thẳng $x + my - 3 = 0$ hợp với đường thẳng $x + y = 0$ một góc 60° . Tổng $m_1 + m_2$ bằng:
- A. -1. B. 1. C. -4. D. 4.
- Câu 50:** Phương trình đường thẳng đi qua $A(-2;0)$ và tạo với đường thẳng $d: x + 3y - 3 = 0$ một góc 45° là
- A. $2x + y + 4 = 0; x - 2y + 2 = 0$. B. $2x + y - 4 = 0; x - 2y + 2 = 0$.
C. $2x - y + 4 = 0; x - 2y + 2 = 0$. D. $2x + y + 4 = 0; x + 2y + 2 = 0$.

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Nhận xét: Phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$, là phương trình đường tròn tâm $I(-a; -b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ .

$$\Delta \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$$

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường cần phải xác định **tâm $I(a; b)$** và **bán kính R** của (C) . Khi đó phương trình đường tròn (C) là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Dạng 1: (C) có tâm I và đi qua điểm A .

– Bán kính $R = IA$.

Dạng 2: (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

– Bán kính $R = d(I, \Delta)$.

Dạng 3: (C) có đường kính AB .

– Tâm I là trung điểm của AB .

– Bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Dạng 4: (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ .

– Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB .

– Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ .

– Bán kính $R = IA$.

Dạng 5: (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

– Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB .

– Tâm I của (C) thỏa mãn: $\begin{cases} I \in d \\ d(I, \Delta) = IA \end{cases}$.

– Bán kính $R = IA$.

Dạng 6: (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B .

– Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB .

– Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua B và vuông góc với Δ .

– Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ' .

– Bán kính $R = IA$.

Dạng 7: (C) đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

– Tâm I của (C) thỏa mãn: $\begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) & (1) \\ d(I, \Delta_1) = IA & (2) \end{cases}$

– Bán kính $R = IA$.

Chú ý: – Muốn bỏ dấu GTTĐ trong (1), ta xét dấu miền mặt phẳng định bởi Δ_1 và Δ_2 hay xét dấu khoảng cách đại số từ A đến Δ_1 và Δ_2 .

– Nếu $\Delta_1 \parallel \Delta_2$, ta tính $R = \frac{1}{2}d(\Delta_1, \Delta_2)$, và (2) được thay thế bởi $IA = R$.

Dạng 8: (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d .

$$- \text{Tâm } I \text{ của } (C) \text{ thoả mãn: } \begin{cases} d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \\ I \in d \end{cases}$$

$$- \text{Bán kính } R = d(I, \Delta_1).$$

Dạng 9: (C) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác).

Cách 1: – Phương trình của (C) có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (*).

– Lần lượt thay toạ độ của A, B, C vào (*) ta được hệ phương trình.

– Giải hệ phương trình này ta tìm được a, b, c $\Rightarrow$ phương trình của (C).

Cách 2: – Tâm I của (C) thoả mãn: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$.

$$- \text{Bán kính } R = IA = IB = IC.$$

Dạng 10: (C) nội tiếp tam giác ABC.

– Viết phương trình của hai đường phân giác trong của hai góc trong tam giác

– Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.

$$- \text{Bán kính } R = d(I, AB).$$

Vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (C)

Để biện luận số giao điểm của đường thẳng d: $Ax + By + C = 0$ và đường tròn (C):

$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, ta có thể thực hiện như sau:

• **Cách 1:** So sánh khoảng cách từ tâm I đến d với bán kính R.

– Xác định tâm I và bán kính R của (C).

– Tính khoảng cách từ I đến d.

$$+ d(I, d) < R \Leftrightarrow d \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt.}$$

$$+ d(I, d) = R \Leftrightarrow d \text{ tiếp xúc với } (C).$$

$$+ d(I, d) > R \Leftrightarrow d \text{ và } (C) \text{ không có điểm chung.}$$

• **Cách 2:** Toạ độ giao điểm (nếu có) của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$+ \text{Hệ } (*) \text{ có 2 nghiệm} \Leftrightarrow d \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt.}$$

$$+ \text{Hệ } (*) \text{ có 1 nghiệm} \Leftrightarrow d \text{ tiếp xúc với } (C).$$

$$+ \text{Hệ } (*) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow d \text{ và } (C) \text{ không có điểm chung.}$$

Vị trí tương đối của hai đường tròn (C₁) và (C₂)

Để biện luận số giao điểm của hai đường tròn

$$(C_1): x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0, (C_2): x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0.$$

ta có thể thực hiện như sau:

• **Cách 1:** So sánh độ dài đoạn nối tâm I_1I_2 với các bán kính R_1, R_2 .

$$+ |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1) \text{ cắt } (C_2) \text{ tại 2 điểm.}$$

$$+ I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1) \text{ tiếp xúc ngoài với } (C_2).$$

$$+ I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1) \text{ tiếp xúc trong với } (C_2).$$

$$+ I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ ở ngoài nhau.}$$

$$+ I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ ở trong nhau.}$$

• **Cách 2:** Toạ độ các giao điểm (nếu có) của (C₁) và (C₂) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Hệ (*) có hai nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ cắt (C_2) tại 2 điểm.

+ Hệ (*) có một nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc với (C_2) .

+ Hệ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không có điểm chung.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với: (dạng 1)

- a) I(2; 4), A(-1; 3) b) I(-3; 2), A(1; -1) c) I(-1; 0), A(3; -11) d) I(1; 2), A(5; 2)

Bài 2. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với: (dạng 2)

- a) I(3; 4), $\Delta: 4x - 3y + 15 = 0$ b) I(2; 3), $\Delta: 5x - 12y - 7 = 0$
c) I(-3; 2), $\Delta \equiv Ox$ d) I(-3; -5), $\Delta \equiv Oy$

Bài 3. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với: (dạng 3)

- a) A(-2; 3), B(6; 5) b) A(0; 1), C(5; 1) c) A(-3; 4), B(7; 2) d) A(5; 2), B(3; 6)

Bài 4. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ , với: (dạng 4)

- a) A(2; 3), B(-1; 1), $\Delta: x - 3y - 11 = 0$ b) A(0; 4), B(2; 6), $\Delta: x - 2y + 5 = 0$
c) A(2; 2), B(8; 6), $\Delta: 5x - 3y + 6 = 0$

Bài 5. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với: (dạng 5)

- a) A(1; 2), B(3; 4), $\Delta: 3x + y - 3 = 0$ b) A(6; 3), B(3; 2), $\Delta: x + 2y - 2 = 0$
c) A(-1; -2), B(2; 1), $\Delta: 2x - y + 2 = 0$ d) A(2; 0), B(4; 2), $\Delta \equiv Oy$

Bài 6. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với: (dạng 6)

- a) A(-2; 6), $\Delta: 3x - 4y - 15 = 0$, B(1; -3) b) A(-2; 1), $\Delta: 3x - 2y - 6 = 0$, B(4; 3)
c) A(6; -2), $\Delta \equiv Ox$, B(6; 0) d) A(4; -3), $\Delta: x + 2y - 3 = 0$, B(3; 0)

Bài 7. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , với: (dạng 7)

- a) A(2; 3), $\Delta_1: 3x - 4y + 1 = 0$, $\Delta_2: 4x + 3y - 7 = 0$
b) A(1; 3), $\Delta_1: x + 2y + 2 = 0$, $\Delta_2: 2x - y + 9 = 0$
c) A $\equiv O(0; 0)$, $\Delta_1: x + y - 4 = 0$, $\Delta_2: x + y + 4 = 0$
d) A(3; -6), $\Delta_1 \equiv Ox$, $\Delta_2 \equiv Oy$

Bài 8. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 , Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d, với: (dạng 8)

- a) $\Delta_1: 3x + 2y + 3 = 0$, $\Delta_2: 2x - 3y + 15 = 0$, $d: x - y = 0$
b) $\Delta_1: x + y + 4 = 0$, $\Delta_2: 7x - y + 4 = 0$, $d: 4x + 3y - 2 = 0$
c) $\Delta_1: 4x - 3y - 16 = 0$, $\Delta_2: 3x + 4y + 3 = 0$, $d: 2x - y + 3 = 0$
d) $\Delta_1: 4x + y - 2 = 0$, $\Delta_2: x + 4y + 17 = 0$, $d: x - y + 5 = 0$

Bài 9. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với: (dạng 9)

- a) $A(2; 0), B(0; -3), C(5; -3)$ b) $A(5; 3), B(6; 2), C(3; -1)$
 c) $A(1; 2), B(3; 1), C(-3; -1)$ d) $A(-1; -7), B(-4; -3), C \equiv O(0; 0)$
 e) $AB: x - y + 2 = 0, BC: 2x + 3y - 1 = 0, CA: 4x + y - 17 = 0$
 f) $AB: x + 2y - 5 = 0, BC: 2x + y - 7 = 0, CA: x - y + 1 = 0$

Bài 10. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với: (dạng 10)

- a) $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$ b) $A(2; 0), B(0; -3), C(5; -3)$
 c) $AB: 2x - 3y + 21 = 0, BC: 3x - 2y - 6 = 0, CA: 2x + 3y + 9 = 0$
 d) $AB: 7x - y + 11 = 0, BC: x + y - 15, CA: 7x + 17y + 65 = 0$

Bài 11. Biện luận theo m số giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C) , với:

- a) $d: mx - y - 3m - 2 = 0, (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$
 b) $d: 2x - y + m = 0, (C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$
 c) $d: x + y - 1 = 0, (C): x^2 + y^2 - 2(2m + 1)x - 4y + 4 - m = 0$
 d) $d: mx + y - 4m = 0, (C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

Bài 12. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2) , tìm tọa độ giao điểm, nếu có, với:

- a) $(C_1): x^2 + y^2 + 6x - 10y + 24 = 0, (C_2): x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$
 b) $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0, (C_2): x^2 + y^2 - 10x - 14y + 70 = 0$
 c) $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0, (C_2)$ có tâm $I_2\left(5; \frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 13. Cho đường tròn (C) và đường thẳng d .

- i) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.
 ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .

- a) $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0, d: 2x - y + 3 = 0$
 b) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0, d: 2x - 3y + 1 = 0$

Bài 14. Cho đường tròn (C) , điểm A và đường thẳng d .

- i) Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C) .
 ii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
 iii) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .
 iv) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .

- a) $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0, A(-7; 7), d: 3x + 4y - 6 = 0$
 b) $(C): x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0, A(2; 2), d: x + 2y - 6 = 0$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R có dạng:

- A. $(x + a)^2 + (y + b)^2 = R^2$. B. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
 C. $(x - a)^2 + (y + b)^2 = R^2$. D. $(x + a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Câu 2: Đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ được viết lại thành $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Khi đó biểu thức nào sau đây đúng?

A. $c = a^2 + b^2 - R^2$. **B.** $c = a^2 - b^2 - R^2$. **C.** $c = -a^2 + b^2 - R^2$. **D.** $c = R^2 - a^2 - b^2$.

Câu 3: Điều kiện để $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là một đường tròn là

A. $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. **B.** $a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$. **C.** $a^2 + b^2 - c > 0$. **D.** $a^2 + b^2 - c \geq 0$.

Câu 4: Cho đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Đường tròn có tâm là $I(a; b)$.

B. Đường tròn có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

C. $a^2 + b^2 - c > 0$.

C. Tâm của đường tròn là $I(-a; -b)$.

Câu 5: Cho đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) có tâm I , bán kính R tại điểm M , khẳng định nào sau đây sai?

A. $d_{(I; \Delta)} = R$.

B. $d_{(I; \Delta)} - IM = 0$.

C. $\frac{d_{(I; \Delta)}}{R} = 1$.

D. IM không vuông góc với Δ .

Câu 6: Cho điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn (C) tâm $I(a; b)$. Phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn (C) tại điểm M là

A. $(x_0 - a)(x + x_0) + (y_0 - b)(y + y_0) = 0$.

B. $(x_0 + a)(x - x_0) + (y_0 + b)(y - y_0) = 0$.

C. $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

D. $(x_0 + a)(x + x_0) + (y_0 + b)(y + y_0) = 0$.

Câu 7: Đường tròn $x^2 + y^2 - 10x - 11 = 0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 6.

B. 2.

C. 36.

D. $\sqrt{6}$.

Câu 8: Một đường tròn có tâm $I(3; -2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - 5y + 1 = 0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. 6.

B. $\sqrt{26}$.

C. $\frac{14}{\sqrt{26}}$.

D. $\frac{7}{13}$.

Câu 9: Một đường tròn có tâm là điểm $O(0; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x + y - 4\sqrt{2} = 0$. Hỏi bán kính đường tròn đó bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2}$

B. 1

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

Câu 10: Đường tròn $x^2 + y^2 - 5y = 0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{5}$

B. 25.

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{25}{2}$.

Câu 11: Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$.

B. $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

D. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$.

Câu 12: Tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua 3 điểm $A(0; 4), B(2; 4), C(4; 0)$.

A. $(0; 0)$.

B. $(1; 0)$.

C. $(3; 2)$.

D. $(1; 1)$.

Câu 13: Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

- A. 5. B. 3. C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 14: Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình đường tròn ?

- A. $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0$ B. $x^2 + y^2 - y = 0$
C. $x^2 + y^2 - 2 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 100y + 1 = 0$.

Câu 15: Tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;5), B(3;4), C(-4;3)$.

- A. $(-6;-2)$. B. $(-1;-1)$. C. $(3;1)$. D. $(0;0)$.

Câu 16: Đường tròn $x^2 + y^2 + 4y = 0$ **không** tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

- A. $x - 2 = 0$. B. $x + y - 3 = 0$. C. $x + 2 = 0$. D. Trục hoành.

Câu 17: Đường tròn $x^2 + y^2 - 1 = 0$ tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

- A. $x + y = 0$. B. $3x + 4y - 1 = 0$. C. $3x - 4y + 5 = 0$. D. $x + y - 1 = 0$.

Câu 18: Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;0), B(0;6), C(8;0)$.

- A. 6. B. 5. C. 10. D. $\sqrt{5}$.

Câu 19: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

- A. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. B. $(0;2)$ và $(0;-2)$.
C. $(2;0)$ và $(0;2)$. D. $(2;0)$ và $(-2;0)$.

Câu 20: Đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây ?

- A. $(2;1)$ B. $(3;-2)$ C. $(-1;3)$ D. $(4;-1)$

Câu 21: Một đường tròn có tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x + 4y = 0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu ?

- A. $\frac{3}{5}$ B. 1 C. 3. D. 15.

Câu 22: Đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ **không** cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

- A. Đường thẳng đi qua điểm $(2;6)$ và điểm $(45;50)$.
B. Đường thẳng có phương trình $y - 4 = 0$.
C. Đường thẳng đi qua điểm $(3;-2)$ và điểm $(19;33)$.
D. Đường thẳng có phương trình $x - 8 = 0$.

Câu 23: Đường tròn nào dưới đây đi qua 3 điểm $A(2;0), B(0;6), O(0;0)$?

- A. $x^2 + y^2 - 3y - 8 = 0$. B. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$. D. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$.

Câu 24: Đường tròn nào dưới đây đi qua điểm $A(4;-2)$.

A. $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 4x + 7y - 8 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 2x - 20 = 0$.

Câu 25: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$

và $(C_2): (x+10)^2 + (y-16)^2 = 1$.

A. Cắt nhau.

B. Không cắt nhau.

C. Tiếp xúc ngoài.

D. Tiếp xúc trong.

Câu 26: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 5$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

A. $(1; 2)$ và $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

B. $(1; 2)$.

C. $(1; 2)$ và $(\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

D. $(1; 2)$ và $(2; 1)$.

Câu 27: Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Ox ?

A. $x^2 + y^2 - 2x - 10y = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 6x + 5y + 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 10y + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Câu 28: Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Oy ?

A. $x^2 + y^2 - 10y + 1 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 6x + 5y - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Câu 29: Tâm đường tròn $x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0$ cách trục Oy bao nhiêu ?

A. -5 .

B. 0 .

C. 10 .

D. 5 .

Câu 30: Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$.

A. $x^2 + y^2 - 2ax - by = 0$.

B.

$x^2 + y^2 - ax - by + xy = 0$.

C. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$.

D. $x^2 - y^2 - ay + by = 0$.

Câu 31: Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: 4x + 3y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 9 = 0$.

A. $m = -3$.

B. $m = 3$ và $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = 15$ và $m = -15$.

Câu 32: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

A. $(3; 3)$ và $(-1; 1)$.

B. $(-1; 1)$ và $(3; -3)$

C. $(3; 3)$ và $(1; 1)$

D. Không có

Câu 33: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 8y = 0$.

A. Tiếp xúc trong.

B. Không cắt nhau.

C. Cắt nhau.

D. Tiếp xúc ngoài.

Câu 34: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: x + y - 7 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 25 = 0$.

A. $(3; 4)$ và $(-4; 3)$.

B. $(4; 3)$.

C. $(3; 4)$.

D. $(3; 4)$ và $(4; 3)$.

Câu 35: Đường tròn $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ cắt đường thẳng $\Delta: x - y + 2 = 0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu ?

A. 5 .

B. $2\sqrt{23}$.

C. 10 .

D. $5\sqrt{2}$.

Câu 36: Đường tròn nào sau đây tiếp xúc với trục Oy ?

A. $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + x + y - 3 = 0$.

Câu 37: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x = 0$

A. $(2; 0)$ và $(0; 2)$.

B. $(\sqrt{2}; 1)$ và $(1; -\sqrt{2})$.

C. $(1; -1)$ và $(1; 1)$.

D. $(-1; 0)$ và $(0; -1)$.

Vậy có hai giao điểm là: $(1; -1)$ và $(1; 1)$.

Câu 38: Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ tiếp xúc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

A. Trục tung.

B. $\Delta_1: 4x + 2y - 1 = 0$.

C. Trục hoành.

D. $\Delta_2: 2x + y - 4 = 0$

Câu 39: Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 3 = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): (x - m)^2 + y^2 = 9$

A. $m = 0$ và $m = 1$.

B. $m = 4$ và $m = -6$.

C. $m = 2$.

D. $m = 6$.

§4: PHƯƠNG TRÌNH ELIP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

$$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \quad (a > c)$$

F_1, F_2 : các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.

2. Phương trình chính tắc của elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$

- Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.
- Với $M(x; y) \in (E)$, MF_1, MF_2 đgl các **bán kính qua tiêu điểm** của M.

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x$$

3. Hình dạng của elip

- (E) nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Tọa độ các đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$
- Độ dài các trục: trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$
- **Tâm sai** của (E): $e = \frac{c}{a}$ ($0 < e < 1$)
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ (ngoại tiếp elip).

Xác định các yếu tố của (E)

Đưa phương trình của (E) về dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Xác định a, b, c .

Các yếu tố:

- Độ dài trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$.
- Tiêu cự $2c$.
- Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.
- Tọa độ các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a}$.

Lập phương trình chính tắc của (E)

Để lập phương trình chính tắc của (E) ta cần xác định độ dài các nửa trục a, b của (E).

Chú ý: Công thức xác định các yếu tố của (E):

$$+ b^2 = a^2 - c^2 + e = \frac{c}{a} \quad + \text{ Các tiêu điểm } F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$$

$$+ \text{ Các đỉnh: } A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Bài 1. Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, với (E) có phương trình:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

e) $16x^2 + 25y^2 = 400$ f) $x^2 + 4y^2 = 1$ g) $4x^2 + 9y^2 = 5$ h) $9x^2 + 25y^2 = 1$

Bài 2. Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

- a) Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4.
- b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.
- c) Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự.
- d) Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M(\sqrt{15}; -1)$.
- e) Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M(-2\sqrt{5}; 2)$.
- e) Một tiêu điểm là $F_1(-2; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.
- f) Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- g) Đi qua hai điểm $M(1; 0)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.
- h) Đi qua hai điểm $M(4; -\sqrt{3})$, $N(2\sqrt{2}; 3)$.

Bài 3. Lập phương trình chính tắc của (E), biết:

- a) Độ dài trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.
- b) Một tiêu điểm là $F_1(-8; 0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.
- c) Độ dài trục nhỏ bằng 6, phương trình các đường chuẩn là $x\sqrt{7} \pm 16 = 0$.
- d) Một đỉnh là $A_1(-8; 0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{4}$.
- e) Đi qua điểm $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Dạng chính tắc của Elip là

A. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. B. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. C. $y^2 = 2px$. D. $y = px^2$.

Câu 2. Cho Elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu $c^2 = a^2 + b^2$ thì (E) có các tiêu điểm là $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$.
- B. Nếu $c^2 = a^2 + b^2$ thì (E) có các tiêu điểm là $F_1(0; c)$, $F_2(0; -c)$.
- C. Nếu $c^2 = a^2 - b^2$ thì (E) có các tiêu điểm là $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$.
- D. Nếu $c^2 = a^2 - b^2$ thì (E) có các tiêu điểm là $F_1(0; c)$, $F_2(0; -c)$.

Câu 3. Cho Elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Với $c^2 = a^2 - b^2$ ($c > 0$), tâm sai của elip là $e = \frac{c}{a}$.

B. Với $c^2 = a^2 - b^2$ ($c > 0$), tâm sai của elip là $e = \frac{a}{c}$.

C. Với $c^2 = a^2 - b^2$ ($c > 0$), tâm sai của elip là $e = -\frac{c}{a}$.

D. Với $c^2 = a^2 - b^2$ ($c > 0$), tâm sai của elip là $e = -\frac{a}{c}$.

Câu 4. Cho Elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$. Khi đó khẳng định nào sau đây sai?

A. Tọa độ các đỉnh nằm trên trục lớn là $A_1(a; 0)$, $A_1(-a; 0)$.

B. Tọa độ các đỉnh nằm trên trục nhỏ là $B_1(0; b)$, $A_1(0; -b)$.

C. Với $c^2 = a^2 - b^2$ ($c > 0$), độ dài tiêu cự là $2c$.

D. Với $c^2 = a^2 - b^2$ ($c > 0$), tâm sai của elip là $e = \frac{a}{c}$.

Câu 5. Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có tâm sai bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{5}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 6. Đường Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng :

A. 3.

B. 6.

C. $\frac{9}{16}$.

D. $\frac{6}{7}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 12 và độ dài trục bé bằng 6. Phương trình nào sau đây là phương trình của elip (E)

A. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1$.

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$.

C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

D. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 0$.

Câu 8. Tìm phương trình chính tắc của Elip có tâm sai bằng $\frac{1}{3}$ và trục lớn bằng 6.

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

D. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 9. Tìm phương trình chính tắc của Elip có một đường chuẩn là $x + 4 = 0$ và một tiêu điểm là $(-1; 0)$.

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$.

C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 0$.

D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Câu 10. Tìm phương trình chính tắc của Elip có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(0; 5)$.

A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$.

B. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$.

C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

D. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 11. Cho Elip có phương trình : $9x^2 + 25y^2 = 225$. Lúc đó hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng

A. 15.

B. 40.

C. 60.

D. 30.

Câu 12. Cho Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Với M là điểm bất kì nằm trên (E) , khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $4 \leq OM \leq 5$.

B. $OM \geq 5$.

C. $OM \leq 3$.

D. $3 \leq OM \leq 4$.

Câu 13. Tìm phương trình chính tắc của Elip có trục lớn gấp đôi trục bé và có tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$

$$\text{A. } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Câu 14. Cho elip $(E): x^2 + 4y^2 = 1$ và cho các mệnh đề:

(I) (E) có trục lớn bằng 4

(II) (E) có trục nhỏ bằng 1

(III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$

Trong các mệnh đề trên, tìm mệnh đề đúng?

A. (I).

B. (II) và (IV).

C. (I) và (III).

D. (IV).

Câu 15. Phương trình chính tắc của Elip có trục lớn gấp đôi trục bé và đi qua điểm $A(2; -2)$ là

$$\text{A. } \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Câu 16. Cho Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ và điểm M nằm trên (E) . Nếu điểm M có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng :

$$\text{A. } 4 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{B. } 3 \text{ và } 5.$$

$$\text{C. } 3,5 \text{ và } 4,5.$$

$$\text{D. } 4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 17. Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và cho các mệnh đề :

(I) (E) có tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ và $F_2(3; 0)$.

(II) (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

(III) (E) có đỉnh $A_1(-5; 0)$.

(IV) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào sai ?

A. I và II.

B. II và III.

C. I và III.

D. IV và I.

Câu 18. Một elip có trục lớn bằng 26, tâm sai $e = \frac{12}{13}$. Trục nhỏ của elip có độ dài bằng bao nhiêu?

$$\text{A. } 10.$$

$$\text{B. } 12.$$

$$\text{C. } 24.$$

$$\text{D. } 5.$$

Câu 19. Đường Elip $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ có tiêu cự bằng :

$$\text{A. } 2.$$

$$\text{B. } 4.$$

$$\text{C. } 9.$$

$$\text{D. } 1.$$

Câu 20. Cho Elip $(E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ và điểm M nằm trên (E) . Nếu điểm M có hoành độ bằng -13 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng :

$$\text{A. } 8; 18.$$

$$\text{B. } 13 \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{C. } 10; 16.$$

$$\text{D. } 13 \pm \sqrt{10}.$$

Câu 21. Tìm phương trình chính tắc của Elip có một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $M(4; 3)$.

$$\text{A. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$