

NGUYỄN TRUNG KIẾN

Tổng hợp CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM

THI VÀO

10 CHUYÊN & HỌC SINH GIỎI



Cập nhật những bài toán
và chứng bài mới nhất Đại số



Giúp học sinh nâng cao
tư duy nhanh giải toán Đại số

ĐẠI SỐ 9

HOÀNG VĂN ANH
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN TRUNG KIẾN

TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM
THI VÀO
10 CHUYÊN
& HỌC SINH GIỎI
ĐẠI SỐ 9



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA



19 đề với hơn 100 bài ôn luyện kèm
lời giải và hướng dẫn chi tiết

Mỗi nội dung lý thuyết đều đi kèm ví dụ cụ thể, trực quan giúp các em tiếp thu kiến thức nhanh, dễ hiểu

Phần kiến thức khó trong chương trình đại số được tác giả trực tiếp giảng dạy qua video tặng kèm sách. Các em chỉ cần sử dụng ứng dụng Facebook hoặc Zalo quét mã QR để xem video bài giảng

Bước 1: Mở ứng dụng Facebook/Zalo và thanh công cụ tìm kiếm.



Bước 3: Quét và xem video bài giảng



Lời nói đầu

Đại số là mảng kiến thức quan trọng trong chương trình toán phổ thông. Các bài toán về đại số là nội dung không thể thiếu trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi, cũng như tuyển sinh vào lớp 10 THPT, THPT chuyên.

Nhằm giúp các em học sinh ôn thi vào lớp 10 cũng như các em học sinh chuyên Toán có một tài liệu mang tính hệ thống để ôn luyện, nâng cao kiến thức kỹ năng Lời giải toán để đạt kết quả cao nhất trong các kỳ thi Học sinh giỏi, kỳ thi vào các lớp chuyên chọn, tôi biên soạn cuốn: "Tổng hợp chuyên đề trọng tâm thi vào 10 chuyên và học sinh giỏi Đại số 9"

Nội dung cuốn sách được chia làm 9 chủ đề từ cơ bản đến nâng cao:

Trong mỗi đề tôi luôn cố gắng hệ thống phương pháp, phân tích, định hướng cách giải, cuối cuốn sách là hệ thống bài tập rèn luyện từ cơ bản đến nâng cao.

Tôi hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu bổ ích cho các em học sinh học tốt môn hình học phẳng và đạt kết quả cao trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 cũng như kỳ thi học sinh giỏi.

Mặc dù đã cố gắng dành nhiều tâm huyết cho việc biên soạn cuốn sách song thiếu sót là điều không thể tránh khỏi. Rất mong sự đóng góp phê bình của bạn đọc để lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến bạn bè, đồng nghiệp, các diễn đàn toán đã cung cấp một số tài liệu quý giá để hoàn thiện cuốn sách.

Tác giả

Nguyễn Trung Kiên

Mục lục

Chủ đề 1: Biến đổi đại số	07
Chủ đề 2: Hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai	32
Chủ đề 3: Hệ phương trình	82
Chủ đề 4: Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.....	121
Chủ đề 5: Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ	135
Chủ đề 6: Một số kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức	186
Chủ đề 7: Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên.....	271
Chủ đề 8: Một số bài toán số nguyên tố, số chính phương.....	290
Chủ đề 9: Các đề ôn thi vào lớp 10.....	327

I. CĂN THỨC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn thức bậc hai

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a :

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

- Với hai số thực không âm a, b ta có: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

$$+ \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$+ \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = A \sqrt{B} \text{ với } A, B \geq 0; \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = -A \sqrt{B} \text{ với } A < 0; B \geq 0$$

$$+ \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{|B|} \text{ với } AB \geq 0, B \neq 0$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A}} = \frac{M \cdot \sqrt{A}}{A} \text{ với } A > 0; \text{ (Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu)}$$

$$+ \frac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{M(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ với } A, B \geq 0, A \neq B \text{ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)}$$

2. Căn thức bậc ba, bậc n

a. Căn thức bậc 3

Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$

- Cho $a \in \mathbb{R}; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$
- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.

- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[n]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[n]{a} = 0$.
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ với mọi $b \neq 0$.
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ với mọi a, b .
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.
- $A\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n B}$.
- $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{A}}{B} = \sqrt[n]{\frac{A}{B^n}}$.
- $\frac{1}{\sqrt[n]{A} \pm \sqrt[n]{B}} = \frac{\sqrt[n]{A^2} \mp \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{B^2}}{A \pm B}$ với $A \neq \pm B$.

b. Căn thức bậc n

Cho số $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a .

- Trường hợp n là số lẻ: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$

Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a. \text{ nếu } a > 0 \text{ thì } \sqrt[n]{a} > 0, \text{ nếu } a < 0 \text{ thì } \sqrt[n]{a} < 0, \text{ nếu } a = 0 \text{ thì } \sqrt[n]{a} = 0$$

- Trường hợp n là số chẵn: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$.

Mọi số thực $a > 0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a). Căn bậc chẵn âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ và $x^{2k} = a$; $-\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x \leq 0$ và $x^{2k} = a$.



II. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP TIÊU BIỂU

Dạng 1: Thu gọn các biểu thức đại số và tính giá trị các biểu thức.

Phương pháp:

Biến đổi các biểu thức trong dấu $\sqrt{\quad}$ về dạng $\sqrt{A^2} = |A|$ sau đó dựa vào dấu của A để mở dấu trị tuyệt đối nếu có.

Ngoài ra cần nắm được các đẳng thức cơ bản quen thuộc:

- $ab + bc + ca = m \Rightarrow a^2 + m = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$;
- $a + b + c = n \Rightarrow na + bc = (a+b+c)a + bc = (a+b)(a+c)$;
- Với $abc = 1$ thì $\frac{1}{a+ab+1} + \frac{1}{b+bc+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$;
- Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ với $abc \neq 0$.

Ví dụ 1

Rút gọn các biểu thức:

a, $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b, $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

c, $C = \sqrt{9 - \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{8 + 10\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải:

a, $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} - \sqrt{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right|$

+ Nếu $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right| = -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

b, $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}} = \sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1} + \sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$

Hay $B = \sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2} = |\sqrt{4x-1}-1| + |\sqrt{4x-1}+1| = |\sqrt{4x-1}-1| + \sqrt{4x-1}+1$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = \sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B = 2\sqrt{4x-1}$.



+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ thì $|\sqrt{4x-1}-1| = -\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B=2$.

c, Để ý rằng: $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

Suy ra $C = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}}} = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$
 $= \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}}}.$ Hay $C = \sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}} = \sqrt{9-\sqrt{25}} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2.$

Ví dụ 2

Chứng minh:

a, Tính $A = \sqrt{8-4\sqrt{3}} - \sqrt{8+4\sqrt{3}}$

b, $B = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên (Trích đề Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).

c, Chứng minh rằng: $x = \sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a \geq \frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

d, Tính $x+y$ biết $(x+\sqrt{x^2+2019})(y+\sqrt{y^2+2019}) = 2019.$

e, Cho các số thực x, y thỏa mãn: $(x+\sqrt{y^2+1})(y+\sqrt{x^2+1}) = 1.$ Tính giá trị của $x+y.$

Lời giải:

a, Dễ thấy $A < 0,$

Cách 1: Ta có $A^2 = (\sqrt{8-4\sqrt{3}} - \sqrt{8+4\sqrt{3}})^2 = 8-4\sqrt{3}+8+4\sqrt{3}-2\sqrt{8-4\sqrt{3}}.\sqrt{8+4\sqrt{3}}$
 $= 16-2.4 = 8$

Suy ra $A = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}.$

Cách 2: Ta viết lại

$$A = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{6}-\sqrt{2}| - |\sqrt{6}+\sqrt{2}| = \sqrt{6}-\sqrt{2} - \sqrt{6}-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

b, Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v).$ Ta có:

$$B^3 = \left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}} \right)^3$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{84}}{9} + 1 - \frac{\sqrt{84}}{9} + 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right) \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}} \right)$$

$$\text{Hay } B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\sqrt{84}}{9}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{84}}{9}\right)} \cdot B \Leftrightarrow B^3 = 2 + 3 \sqrt[3]{1 - \frac{84}{81}} B \Leftrightarrow B^3 = 2 - B \Leftrightarrow B^3 + B - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (B-1)(B^2+B+2) = 0 \text{ mà } B^2+B+2 = \left(B+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ suy ra } B=1. \text{ Vậy } B \text{ là số nguyên.}$$

c. Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

$$\text{Ta có } x^3 = 2a + (1-2a)x \Leftrightarrow x^3 + (2a-1)x - 2a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2a) = 0 \quad (1)$$

Xét đa thức bậc hai x^2+x+2a với $\Delta = 1-8a \geq 0$

$$+ \text{ Khi } a = \frac{1}{8} \text{ ta có } x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1.$$

+ Khi $a > \frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1-8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x=1$. Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$

$$\text{ta có: } x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} = 1 \text{ là số tự nhiên.}$$

$$\text{d. Nhận xét: } (\sqrt{x^2+2019}+x)(\sqrt{x^2+2019}-x) = x^2+2019-x^2 = 2019.$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta suy ra } \sqrt{x^2+2019}-x = \sqrt{y^2+2019}+y$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2+2019}+y+\sqrt{x^2+2019}+x = \sqrt{x^2+2019}-x+\sqrt{y^2+2019}-y \Leftrightarrow x+y=0.$$

$$\text{Tổng quát ta có: } (\sqrt{x^2+a}+x)(\sqrt{y^2+a}+y) = a \text{ thì } x+y=0.$$

c. Nhân 2 vế đẳng thức với: $(x-\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1-x^2})$ ta có:

$$(x+\sqrt{y^2+1})(x-\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1-x^2})(y+\sqrt{x^2+1}) = (x-\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1-x^2}). \text{ Hay}$$

$$(x^2-y^2-1)(y^2-x^2-1) = xy - x\sqrt{1+x^2} - y\sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$(x^2-y^2-1)(y^2-x^2-1) = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - (x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2}).$$

$$\Leftrightarrow 1-(x^2-y^2)^2 = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1 \Leftrightarrow 2(1-xy) = (x^2-y^2)^2 + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$\text{Hay } 2(1-xy) = (x^2-y^2)^2 + 2\sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \Rightarrow (1-xy) \geq \sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \geq |xy-1|.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y \text{ hay } x+y=0.$$

Ví dụ 3

a, Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}.$$

b, Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^2 + 1942$. (Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015 - 2016).

c, Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015$.

Lời giải:

a, Ta có: $x^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right)^2 = 8 + 2\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{16 - 10 + 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} + 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5} + 1. \text{ Từ đó ta suy ra } (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4.$$

Ta biến đổi: $P = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1.$

b, Ta có $x = 1 + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - 1)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P = x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + x(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) + 1945 = 1945$$

c, Để ý rằng: $x = \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2} - 1$ để tận dụng hằng đẳng

thức: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Khi đó ta có: $(\sqrt[3]{2} - 1)x = (\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Ta biến đổi: $P = x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2015 = (x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x - 1) + 2016 = 2016.$

Ví dụ 4

a, Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - c^2} + c\sqrt{1 - a^2} = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$.

b, Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{2 - z^2} + z\sqrt{3 - x^2} = 3$.

(Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - Trường chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2014).

c, Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $2(x\sqrt{y - 4} + y\sqrt{x - 4}) = xy$.

d, Giả sử $(x; y)$ là các số thực thỏa mãn $(x + \sqrt{3 + x^2})(y + \sqrt{3 + y^2}) = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + xy + y^2$.

e, Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $P = \sqrt[4]{1 + x} + \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{1 - x^2}$.

Lời giải:

a, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (dpcm).}$$

b, Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6$.

Áp dụng bất đẳng thức: $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6. \text{ Suy ra } VT \leq VP.$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \sqrt{2}.$$

c, $a = \sqrt{x-4}, b = \sqrt{y-4}$ với $a, b \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành:

$2(a^2+4)b + 2(b^2+4)a = (a^2+4)(b^2+4)$. Chia 2 vế cho $(a^2+4)(b^2+4)$ thì phương trình trở thành: $\frac{2b}{b^2+4} + \frac{2a}{a^2+4} = 1$. Đề ý rằng $a=0$ hoặc $b=0$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $a, b > 0$. Theo bất đẳng thức AM - GM ta có: $b^2 + 4 \geq 2\sqrt{4b^2} = 4b$, $a^2 + 4 \geq 4a$. Suy ra $VT \leq \frac{2a}{4a} + \frac{2b}{4b} = 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = 8$. Vậy $x = 8, y = 8$ là nghiệm của phương trình.

$$d, \text{ Đặt } a = x + \sqrt{3+x^2} > 0 \Rightarrow a - x = \sqrt{3+x^2} \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a^2-3}{2a}.$$

$$\text{Tương tự đặt } b = y + \sqrt{3+y^2} > 0 \Rightarrow x = \frac{b^2-3}{2b}. \text{ Khi đó } x + y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{3}{2a} - \frac{3}{2b}.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } ab = 9 \Rightarrow x + y = \frac{a}{2} + \frac{9}{2a} - \frac{3}{2a} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3} + \frac{3}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a}} = 2. \text{ Lại có}$$

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 3. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 1. \text{ Vậy } (x^2 + xy + y^2)_{\min} = 3.$$

e, Đặt $a = \sqrt[4]{1+x}, b = \sqrt[4]{1-x} \Rightarrow a, b \geq 0, a^4 + b^4 = 2$. Ta có:

$P = a + b + ab$. Áp dụng bất đẳng thức ở (**) ta có

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \geq \left[\frac{1}{2}(a+b)^2 \right]^2 = \frac{(a+b)^4}{4} \Rightarrow (a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4) = 16 \Leftrightarrow a+b \leq 2.$$

Suy ra $P \leq a+b + \frac{(a+b)^2}{4} \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1 \Leftrightarrow x=0$.

Ta cũng có: $a^4 + b^4 \leq a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \sqrt{2}$, mà

$a^2 + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ với mọi $a, b \geq 0$. Suy ra $a+b \geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2}$. Vậy

$P = a+b+ab \geq a+b \geq \sqrt{2}$. dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $b=0$ tức là $x=1$ hoặc $x=-1$.

Ví dụ 5

Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

a. Tính giá trị biểu thức: $P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$;

b. Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$.

Lời giải:

a. Để ý rằng: $1+x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2; 1+z^2$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Suy ra $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

b. Tương tự như câu a)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} - \frac{z}{1+z^2} &= \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(z+y)(z+x)} \\ &= \frac{x(y+z) + y(z+x) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6

a. Tìm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn: $\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

b. Cho $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(40)$.

Lời giải:

a, Đẳng thức tương đương với: $(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1)^2 + (\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2)^2 + \dots + (\sqrt{x_n^2 - n^2} - n)^2 = 0$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, \dots, x_n = 2.n^2$

b, Đặt $x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

Suy ra $f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}(x^3 - y^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3})$. Áp dụng vào bài toán ta có: $f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \frac{1}{2}[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})] = \frac{1}{2}(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}) = 364$.

Ví dụ 7

a, Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Tính giá trị biểu thức sau theo n .

$$P = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2}}.$$

b, Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}.$$

Lời giải:

a, Với mọi số thực a, b, c khác 0 sao cho: $a + b + c = 0$ thì

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(-3)^2} = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

Áp dụng lần lượt với các số hạng còn lại ta thu được:

$$P = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}.$$

b, Đặt

$$x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 2 \Rightarrow 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2$$

suy ra $xy + yz + zx = 1$. dẫn đến $1 + a = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$,

tương tự $1 + b = (y + z)(y + x)$, $1 + c = (z + x)(z + y)$ suy ra

$$VT = \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} = \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$= \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}} \text{ đpcm.}$$

Dạng 2: Các câu hỏi liên quan giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức đại số.

Phương pháp: Để giải quyết các bài tập dạng này ta cần chú ý các tính chất cơ bản:

Với số thực $A, B \geq 0$ thì.

$$+ \sqrt{A} \geq 0.$$

+ $A + B \geq 2\sqrt{AB}$ (Bất đẳng thức AM-GM). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$.

$$+ \sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{C^2 + D^2} \geq \sqrt{(A+C)^2 + (B+D)^2} \text{ với các số thực } A, B, C, D \geq 0.$$

$$+ (A+B)^2 \leq 2(A^2 + B^2), (A+B)^3 \leq 4(A^3 + B^3) \text{ với } A, B \geq 0.$$

Ví dụ 1

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+1}}$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của $C = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{a-1}} + \frac{b}{\sqrt{b-2}} + \frac{c}{\sqrt{c-3}}$ với các số thực a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > 4, c > 9$.

d. Cho $x \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$.

(Tuyển sinh Hà Nội 2018).

e. Cho số thực x thỏa mãn: $0 \leq x \leq 5$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của.

$$P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}$$

f. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$.

g. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $G = \sqrt{5x-x^2} + \sqrt{18-3x-x^2}$.

Lời giải:

a. Điều kiện $x \geq 0$, ta viết lại $A = \frac{2(\sqrt{x+1})-1}{\sqrt{x+1}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ dẫn đến $A \geq 2-1=1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ khi đó giá trị nhỏ nhất của A là 1.

b. Điều kiện $x \geq 0$. Ta viết lại $B = \frac{(\sqrt{x+1})^2+4}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}}$, vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x+1} \geq 1$,

áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $A+B \geq 2\sqrt{AB}$ với các số thực không âm A, B

ta có: $\sqrt{x}+1+\frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x}+1}} = 4$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x}+1 = \frac{4}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 1 tại $x=1$.

c. Ta có $\frac{a}{\sqrt{a}-1} = \frac{a-1+1}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}+1+\frac{1}{\sqrt{a}-1} = \sqrt{a}-1+\frac{1}{\sqrt{a}-1}+2$. do $a>1$ nên $\sqrt{a}-1>0$, áp

dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có: $\sqrt{a}-1+\frac{1}{\sqrt{a}-1} \geq 2$ suy ra $\frac{a}{\sqrt{a}-1} \geq 4$.

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a}-1 = \frac{1}{\sqrt{a}-1} \Leftrightarrow \sqrt{a}-1=1 \Leftrightarrow a=4$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{\sqrt{b}-2} = \frac{b-4+4}{\sqrt{b}-2} = \sqrt{b}+2+\frac{4}{\sqrt{b}-2} = \sqrt{b}-2+\frac{4}{\sqrt{b}-2}+4 \geq 8$, dấu đẳng thức

xảy ra khi và chỉ khi $b=16$;

$\frac{c}{\sqrt{c}-3} = \frac{c-9+9}{\sqrt{c}-3} = \sqrt{c}+3+\frac{9}{\sqrt{c}-3} = \sqrt{c}-3+\frac{9}{\sqrt{c}-3}+6 \geq 12$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ

khi $c=36$,

Từ đó suy ra $C \geq 24$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4, b=16, c=36$.

Hay GTNN của C là 24 tại $x=4, b=16, c=36$.

d. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Ta viết lại $D = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$, do

$x \geq 0$ suy ra $\sqrt{1+x} + \sqrt{x} \geq 1$. Ta có $(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = x+1-x+2\sqrt{x(1-x)} = 1+2\sqrt{x(1-x)} \geq 1$

suy ra $D \geq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

e. Đặt $\sqrt{8-x}=a, \sqrt{x+3}=b$ do $0 \leq x \leq 5$ suy ra $\begin{cases} \sqrt{3} \leq a, b \leq \sqrt{8} \\ a^2+b^2=11 \end{cases}$.

Biểu thức P có dạng $P = (a^2-3)b + (b^2-3)a = ab(a+b) - 3(a+b)$

Đặt $a+b=t$ từ giả thiết ta có: $(a+b)^2 - 2ab = 11 \Leftrightarrow 4ab = 2t^2 - 22 \leq (a+b)^2 = t^2 \Rightarrow t \leq \sqrt{22}$.

Mặt khác ta cũng có:

$$\begin{cases} (a-\sqrt{3})(a-\sqrt{8}) \leq 0 \\ (b-\sqrt{3})(b-\sqrt{8}) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{8})a + \sqrt{24} \leq 0 \\ b^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{8})b + \sqrt{24} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 11 + 2\sqrt{24} \leq (\sqrt{3}+\sqrt{8})(a+b)$$

hay $a+b \geq 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$. vậy $2\sqrt{2}+\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{22}$

Ta có: $2P = 2ab(a+b) - 6(a+b) = (t^2-11)t - 6t = t(t^2-17)$. Từ đó ta có:

$$2P \geq (2\sqrt{2}+\sqrt{3}) \left[(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 17 \right] = (2\sqrt{2}+\sqrt{3})(4\sqrt{6}-6) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow P \geq 5\sqrt{3}, \text{ dấu đẳng thức}$$

xảy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{8}$ hoặc $a=\sqrt{8}, b=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=5$.

Ta có: $2P \leq 5\sqrt{22} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{\frac{11}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Cách khác:

Ta có: $0 \leq x \leq 5$ thì $P = x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3} \geq x\sqrt{3} + (5-x)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 5$.

Ta cũng có:

$$P^2 = [x\sqrt{8-x} + (5-x)\sqrt{x+3}]^2 = x^2(8-x) + (5-x)^2(x+3) + 2x(5-x)\sqrt{(8-x)(x+3)}$$

Hay $P^2 = 75 + (5x - x^2)(2\sqrt{(8-x)(x+3)} - 1)$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$5x - x^2 = x(5-x) \leq \frac{(x+5-x)^2}{4} = \frac{25}{4}. \quad 2\sqrt{(8-x)(x+3)} \leq 8-x+x+3=11 \text{ nên:}$$

$$P^2 \leq 75 + \frac{25}{4} \cdot 10 = \frac{275}{2} \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{22}}{2}. \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 8-x = x+3 \text{ và}$$

$$x = 5-x \text{ hay } x = \frac{5}{2}. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ là } 5\sqrt{3}, \text{ GTLN của } P \text{ là } \frac{5\sqrt{22}}{2}.$$

f. Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4}$$

$$+ \text{ Nếu } 4 < x < 8 \text{ thì } \sqrt{x-4}-2 < 0 \text{ nên } A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + \sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8 \text{ (Theo bất}$$

đẳng thức AM-GM). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

$$g. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 5x-x^2 \geq 0 \\ 18+3x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ (x+3)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5.$$

Ta viết lại $G = \sqrt{5x-x^2} + \sqrt{5x-x^2+18-2x}$. do $5x-x^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $0 \leq x \leq 5$ nên

ta có $G \geq \sqrt{18-2x} \geq \sqrt{18-2 \cdot 10} = \sqrt{8}$. dấu đẳng thức xảy ra tại $x = 5$. Vậy GTNN của G bằng

$2\sqrt{2}$ tại $x = 5$.

Ví dụ 2

- a, Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1}$.
- b, Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+9}$.
- c, Tìm giá trị lớn nhất của $C = \frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}+11}$.
- d, Tìm giá trị lớn nhất của $D = \sqrt{9-x} + \sqrt{x}$.
- e, Tìm giá trị lớn nhất của $E = -x^2 + 4\sqrt{(9-x)(1+3x)}$.
- f, Tìm giá trị lớn nhất của $F = \sqrt{5x-x^2} + \sqrt{18+3x-x^2}$.

Lời giải:

a, Điều kiện: $x \geq 0$ ta viết lại A thành: $A = \frac{\frac{1}{2}(2\sqrt{x}+1) + \frac{1}{2}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\sqrt{x}+1)}$. Vì $x \geq 0$ nên $2\sqrt{x}+1 \geq 1$ suy ra $\frac{1}{2(2\sqrt{x}+1)} \leq \frac{1}{2}$ dẫn đến $A \leq 1$. dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.
Vậy GTLN của A bằng 1 tại $x=0$.

b, Điều kiện: $x \geq 0$ ta có $x-2\sqrt{x}+9 = (\sqrt{x}-1)^2 + 8 > 0$ suy ra $B \geq 0$

+ Khi $x=0$ thì $B=0$ (1)

+ Khi $x > 0$ thì $B > 0$ ta có $\frac{1}{B} = \frac{x-2\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 2 + \frac{9}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số thực dương ta có: $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9} = 6$ suy ra $\frac{1}{B} \geq 4 \Rightarrow B \leq \frac{1}{4}$. dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=9$ (2)

Kết hợp (1),(2) ta suy ra GTLN của B bằng $\frac{1}{4}$ tại $x=9$.

Chú ý: Học sinh hay mắc sai lầm khi đưa về $\frac{1}{B}$ mà không xét $x=0$. (Biểu thức $\frac{1}{B}$ chỉ xác định khi $x > 0$).

c, Điều kiện $x \geq 0$ chú ý: $x-3\sqrt{x}+11 = \left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0$,

Nếu $x \leq 1$ thì $C \leq 0$ (3)

Xét $x > 1$ khi đó $C > 0$ ta có: $\frac{1}{C} = \frac{x-3\sqrt{x}+11}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}-1) + 9}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}-1} - 1$,

áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số thực dương ta có: $\sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}-1} \geq 6$ suy ra

$$\frac{1}{C} \geq 5 \Rightarrow C \leq \frac{1}{5}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x}-1 = \frac{9}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=3 \Leftrightarrow x=16 \quad (4).$$

Kết hợp (3),(4) ta suy ra GTLN của C bằng $\frac{1}{5}$ tại $x=16$.

d. Điều kiện $0 \leq x \leq 9$. Ta có $D^2 = 9 + 2\sqrt{x(9-x)}$ theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2\sqrt{x(9-x)} \leq x + 9 - x = 9 \text{ nên } D^2 \leq 18 \Leftrightarrow D \leq 3\sqrt{2}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 9 - x \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}. \text{ Vậy GTLN của } D \text{ bằng } 3\sqrt{2} \text{ tại } x = \frac{9}{2}.$$

e. Điều kiện $(9-x)(1+3x) \geq 0 \Leftrightarrow (3x-27)(3x+1) \leq 0$ do $3x-27 < 3x+1$ nên suy ra E xác

$$\text{định khi và chỉ khi } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3x-27 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $2\sqrt{(1+3x)(9-x)} \leq 1+3x+9-x=10+2x$ suy ra

$$E \leq -x^2 + 2(10+2x) = 20+4x-x^2 = 24-(x-2)^2 \leq 24, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x=2. \text{ Vậy GTLN của } E \text{ bằng } 24 \text{ khi } x=2.$$

$$f. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 5x-x^2 \geq 0 \\ 18+3x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(5-x) \geq 0 \\ (x+3)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5.$$

Ta viết lại $F = \sqrt{x(5-x)} + \sqrt{(6-x)(x+3)}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng

$$(AX+BY)^2 \leq (A^2+B^2)(X^2+Y^2) \text{ ta có } P^2 \leq (x+6-x)(5-x+x+3) = 48 \Rightarrow P \leq 4\sqrt{3}, \text{ dấu}$$

$$\text{đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x}{5-x} = \frac{6-x}{x+3} \Leftrightarrow x = \frac{15}{7}.$$

Dạng 3: Tìm điều kiện để biểu thức nhận giá trị nguyên.

Phương pháp:

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số nguyên, C nhận giá trị nguyên hoặc vô tỷ thì P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi C là số nguyên và C là ước số của B .

+ Đối với các biểu thức $P = A + \frac{B}{C}$ với A, B là số hữu tỷ, C nhận giá trị thực. Ta thường tìm cách đánh giá P , tức là chặn P theo kiểu $M \leq P \leq N$ từ đó suy ra các giá trị có thể của P .

Hoặc ta tìm điều kiện của P để tồn tại biến $x, y, \dots$ thỏa mãn yêu cầu bài toán từ đó suy ra các giá trị nguyên có thể của P .

+ Đối với các bài toán tổng hợp học sinh cần chú ý điều kiện ban đầu để loại các giá trị không thỏa mãn.

Ví dụ 1

- a, Tìm các giá trị nguyên của x để $P = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên.
 b, Tìm tất cả các số thực x để $P = \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$ là số nguyên.
 c, Chứng minh: Không tồn tại giá trị thực của x để $P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$ là số nguyên.

Lời giải:

a, Điều kiện $x \geq 0$. Ta viết lại $P = \frac{2(\sqrt{x}+1)+3}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$. Do x là số nguyên nên $\sqrt{x}+1$ nhận giá trị nguyên hoặc vô tỷ. Suy ra P là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x}+1$ là số nguyên và $\sqrt{x}+1$ là ước của 3. Chú ý $\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \in \{1; 3\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{0; 2\} \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$.

Vậy, $x \in \{0; 4\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

b, Điều kiện $x \geq 0$.

Do $x \geq 0$ nên $x - \sqrt{x} + 1 \geq \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ suy ra $P > 0$ ta có

$$P = \frac{2}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} < \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}, \text{ như vậy } 0 < P < \frac{8}{3}. \text{ Vì } P \text{ là số nguyên nên } P \text{ có thể}$$

nhận các giá trị $P \in \{1; 2\}$.

$$\text{TH1: } P = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{cases} \text{ do}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{TH2: } P = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy $x \in \left\{0; 1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

c, Điều kiện $x \geq 0$. dễ thấy P là số dương. Đề ý rằng: $P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} < \frac{3\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} = 3$ suy ra

$0 < P < 3$ vì P là số nguyên nên P có thể nhận các giá trị là 1 hoặc 2.

$$\text{TH 1: } P = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+5 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = -3 \text{ vô lý.}$$

$$\text{TH 2: } P = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+5 = 2(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ vô lý.}$$

Vậy không tồn tại x để P là số nguyên.

Cách khác: Giả sử tồn tại giá trị $x \geq 0$ để $P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$ là số nguyên. Khi đó ta có:

$$P = \frac{3\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow P\sqrt{x}+2P=3\sqrt{x}+5 \Leftrightarrow \sqrt{x}(P-3)=5-2P (*)$$

Nếu $P=3$ thì (*) có dạng $0=-1$ vô lý, vậy $P \neq 3$. Từ (*) ta cũng suy ra $\sqrt{x} = \frac{5-2P}{P-3}$,

do $x \geq 0$ ta suy ra P phải thỏa mãn: $\frac{5-2P}{P-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2P-5}{P-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2P-5}{2P-6} \leq 0$, để ý rằng

$2P-5 > 2P-6$ nên điều kiện $\frac{2P-5}{2P-6} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2P-5 \geq 0 \\ 2P-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq P < 3 (**)$, do P là số nguyên

nên (**) không thể xảy ra. Tóm lại P không thể nhận giá trị nguyên.



III. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔNG HỢP

BÀI 1 Cho $A = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}}$ ($x \geq 0$), $B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$.

a. Chứng minh khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $A = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}$.

b. Rút gọn B và tìm x để $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}}$.

Lời giải:

a. Ta có $x = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$ thay vào A ta có:

$$A = \frac{3+2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1+2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2}-1}{7}.$$

b. Ta có:

$$B = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)(4x+2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)} - \frac{(2\sqrt{x}+1)(4x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$= \left(\frac{4x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{4x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1} = 4 : \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4(2x-1)}{2x+1}$$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{x-2}{2+\sqrt{x}} : \frac{4(2x-1)}{2x+1} = \frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)}$, yêu cầu bài toán tương đương

$$\text{với } \frac{(x-2)(2x+1)}{4(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{x-2}{4\sqrt{x}} \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 0 \text{ hay } x = 2$$

$$\text{hoặc } \frac{2x+1}{(\sqrt{x}+2)(2x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} (*). \text{ Ta có } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x}(2x+1) = (\sqrt{x}+2)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu với điều kiện bài toán ta thấy $x = 1, x = 2$ thỏa mãn.

BÀI 2 Cho biểu thức: $A = \frac{x+9}{x-4}$; $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a. Rút gọn biểu thức B .

b. Đặt $P = A : B$. Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{36}$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải:

$$a. B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}-2)^2 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\Leftrightarrow P = A : B = \frac{x+9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+9}{6\sqrt{x}}$$

b, Khi $x = \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{6}$ ta có $P = \frac{\frac{1}{36} + 9}{6 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{325}{36}$.

c, $P = \frac{x+9}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \left(\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \right)$. Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} \geq 6$. Suy ra $P \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$. Vậy GTNN của P là 1 tại $x = 9$.

BÀI 3 Cho $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$, $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a, Rút gọn A .

b, Tính giá trị của A khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

c, Đặt $P = \frac{A}{B}$, tìm x để: $P \leq 4$.

Lời giải:

a, Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$

Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$

$$= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}.$$

b, Khi $x = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{3}$ thì $A = \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c, Ta có $P = \frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-4(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \leq 0$

Hay $\frac{3(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \geq 0$ (*).

TH 1: $\begin{cases} \sqrt{x}-3 \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 9$ đối chiếu với điều kiện suy ra $x > 9$.

TH 2: $\begin{cases} \sqrt{x}-3 \leq 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x < 4$ đối chiếu với điều kiện suy ra $0 \leq x < 4$.

Vậy $P \leq 4$ khi và chỉ khi $0 \leq x < 4$ hoặc $x > 9$.

BÀI 4 Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$, $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}$ ($x > 0, x \neq 4$).

a. Rút gọn B .

b. Tìm x sao cho $C = B : A$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

a. Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} = \frac{2(2\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}-2)-(5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}.$$

$$b. \text{ Ta có: } A = \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \text{ nên } C = B : A = \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4 \text{ nên } C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0 \text{ ta có: } C = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < C < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với điều kiện } C \text{ là một số nguyên suy ra } C \in \{1; 2\}.$$

$$+ \text{ Nếu } C = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$+ \text{ Nếu } C = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy $x = \frac{1}{9}$ thì C nhận giá trị là nguyên.

BÀI 5 Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a. Tìm x để $A = 2$.

b. Chứng tỏ A, B không phụ thuộc vào x .

c. Tìm x để $A \geq B$.

Lời giải:

$$a. \text{ Ta có } A = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

$$b. \text{ Ta có: } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \text{ Suy ra } A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

c. Ta có $A \geq B \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \geq 0.$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x} \geq 0 \text{ suy ra điều kiện là } (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy để $A \geq B$ thì điều kiện là: $x > 1$.

BÀI 6 Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- a, Rút gọn biểu thức P .
b, Tính giá trị của P biết $x = 3 - 2\sqrt{2}$.
c, Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a, Ta có: } P &= \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} = \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

$$\text{b, Với } x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}-1 \text{ thay vào } P \text{ ta có: } P = \frac{11-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}-4}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c, Ta có: } P &= \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2. \text{ Áp dụng bất đẳng thức} \\ \text{AM-GM ta có: } &\sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} \geq 2\sqrt{9} = 6 \Rightarrow P \geq 4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi} \\ &\sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Vậy GTNN của } P \text{ bằng 4 khi } x = 4. \end{aligned}$$

BÀI 7 Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-3}, B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq \frac{9}{16}$.

- a, Tính giá trị của A khi $x = 25$.
b, Rút gọn B .
c, Tìm x để $B = 2A$.

Lời giải:

$$\text{a, Khi } x = 25 \text{ thì } \sqrt{x} = 5 \text{ suy ra } A = \frac{5}{4 \cdot 5 - 3} = \frac{5}{17}.$$

$$\begin{aligned} \text{b, Ta có: } B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+3\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ \text{hay } B &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c, } B = 2A &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) = (\sqrt{x}+5)(4\sqrt{x}-3) \Leftrightarrow 2x+13\sqrt{x}-15=0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+15)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=-\frac{15}{2} \end{cases} \text{ do } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \text{ thỏa mãn hay } x=1. \end{aligned}$$

BÀI 8 Cho $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) + \frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a, Rút gọn P .
b, Tính giá trị của P khi $x = 4$.
c, Tìm các giá trị của x để P là số tự nhiên.

Lời giải:

a, Ta có

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \right) + \frac{9\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{9\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+11\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Hay } P = \frac{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+1},$$

b, Với $x = 4$ thì $\sqrt{x} = 2$ suy ra $P = \frac{2 \cdot 2 + 7}{2 + 1} = \frac{11}{3}$.

c, Ta có $P = \frac{2(\sqrt{x}+1)+5}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{5}{\sqrt{x}+1}$.

Do $x \geq 0$ nên $0 < \frac{5}{\sqrt{x}+1} \leq 5$ suy ra $2 < P \leq 7$. Vì P là số nguyên nên

$$P \in \{3; 4; 5; 6; 7\} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+1} \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in \left\{ 5; \frac{5}{2}; \frac{5}{3}; \frac{5}{4}; 1 \right\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{ 4; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; 0 \right\} \\ \Leftrightarrow x \in \left\{ 16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0 \right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x \in \left\{ 16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0 \right\}$ là các giá trị cần tìm.

Cách khác: Để P là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là: $\frac{5}{\sqrt{x}+1} = m$ (với m là số nguyên dương và $x \geq 0$).

Ta có: $\frac{5}{\sqrt{x}+1} = m \Leftrightarrow m\sqrt{x} + m = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5-m}{m}$, do $x \geq 0 \Rightarrow$ điều kiện $\frac{5-m}{m} \geq 0$, do

$$m > 0 \Rightarrow 5-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5 \text{ hay } 0 < m \leq 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \text{ suy ra } \sqrt{x} \in \left\{ 4; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; 0 \right\} \Rightarrow$$

$$x \in \left\{ 16; \frac{9}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{16}; 0 \right\}.$$

BÀI 9 Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) : \left(\frac{1}{b\sqrt{a}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \right)$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

- a, Chứng minh rằng $P = \sqrt{ab}$.
b, Tính giá trị biểu thức P khi $a = 3 - \sqrt{5}$ và $b = 0,5$.
c, Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a^2 + 4b^2 = 8$.

Lời giải:

a, Ta có:

$$P = \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{a}} \right) = \frac{a-(2\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\text{Hay } P = \frac{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{ab}.$$

$$\text{b, Khi } a = 3 - \sqrt{5}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 \Rightarrow P = \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

c, Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 4b^2} = 4ab \Rightarrow 4ab \leq 8 \Rightarrow ab \leq 2$. Vậy $P \leq \sqrt{2}$. dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = 4b^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2, b = 1$.

Vậy GTLN của P là $\sqrt{2}$.

BÀI 10 Cho 2 biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}, B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a, Rút gọn B , tìm x để $A = B$.

b, Tìm tất cả các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên dương.

Lời giải:

a, Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+3) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3) - 36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{12\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{12}{\sqrt{x}+3}$$

$$A = B \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow 12(2\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x}+3)(7\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow 7x - 5\sqrt{x} - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(7\sqrt{x}+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = -\frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}.$$

$$\text{b, Ta có: } \frac{7(2\sqrt{x}+1)-11}{(2\sqrt{x}+1)} < \frac{7(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)} < \frac{7}{2}. \text{ Vì } A \text{ là số nguyên dương nên ta có:}$$

$$0 < A < \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = 2 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } A = 1 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{25} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$\text{TH2: } A = 2 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$\text{TH3: } A = 3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

BÀI 11 Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

- a, Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P .
b, Tìm giá trị của x để $P = -\frac{4}{3}$.
c, Khi $x > 25$ hãy tìm GTNN của P .

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 9$; $x \neq 25$ (*).

a, Ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right]$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)-2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = -\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{5-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-5}.$$

b, $P = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-5} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x+4\sqrt{x}-20=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(3\sqrt{x}+10)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$
thỏa mãn (*).

c, Khi $x > 25$ thì $\sqrt{x}-5 > 0$. Ta có: $P = \frac{x}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}+5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} = \sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} + 10$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si dạng $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ta có: $\sqrt{x}-5 + \frac{25}{\sqrt{x}-5} \geq 2\sqrt{25} = 10$. Suy ra $P \geq 20$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}-5 = \frac{25}{\sqrt{x}-5} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-5)^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x}-5 = 5 \Leftrightarrow x=100$
thỏa mãn (*). Vậy GTNN của P là 20 khi $x=100$.

BÀI 12 Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right)$, $B = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- a, Rút gọn $P=A:B$.
b, Tìm các giá trị m để tồn tại x sao cho $P\sqrt{x} = m + \sqrt{x}$.

Lời giải:

a, Ta có $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$P = A:B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

b, Theo giả thiết ta có: $P\sqrt{x} = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow x-1 = m + \sqrt{x}$. Đặt $\sqrt{x} = t$, điều kiện $t > 0, t \neq 1$.

Phương trình trở thành: $t^2 - t - m - 1 = 0$. Để phương trình có nghiệm điều kiện là $\Delta = 1+4m+4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}$. Khi đó theo hệ thức Vi-et ta có: $t_1 + t_2 = 1 > 0$ suy ra trong hai

nghiệm tồn tại ít nhất 1 nghiệm dương. Như vậy ta chỉ cần tìm điều kiện để $t=1$ không phải là nghiệm. Tức là: $1-1-m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Vậy điều kiện cần tìm là: $m \geq -\frac{5}{4}, m \neq -1$.

BÀI 13 Cho biểu thức $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{x+\sqrt{x}}{x-1} \right] : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a. Rút gọn P .

b. Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c. Với giá trị nào của x thì $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$.

Lời giải:

a. Ta có:

$$P = \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] : \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}-1} : \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right).$$

b. Ta có: $x = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2}$ nên $P = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 = \frac{16\sqrt{x} - (\sqrt{x}+1)^2 - 8(\sqrt{x}+1)}{8(\sqrt{x}+1)} = \frac{-x + 6\sqrt{x} - 9}{8(\sqrt{x}+1)} = -\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)}$

Vì $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0, \forall x > 0, x \neq 1$ nên $-\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{8(\sqrt{x}+1)} \geq 0$ suy ra $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện đề bài ta suy ra $\frac{1}{P} - \frac{\sqrt{x}+1}{8} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

BÀI 14 Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a. Rút gọn P .

b. Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

c. Chứng minh: $P + \sqrt{x} > 3$.

Lời giải:

a. Ta có $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$$= \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$b, 2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow 2x + 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

$$c, \text{Ta có: } P + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}. \text{ Theo bất đẳng thức Cô si dạng } a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\text{ta có: } \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2 \text{ suy ra } P \geq 3. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1 \text{ không}$$

thỏa mãn điều kiện $x \neq 1$. Vậy $P > 3$ với mọi $x > 0, x \neq 1$.

BÀI 15 Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$.

a, Rút gọn P .

b, So sánh P với 4.

c, Tìm x thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{x} \cdot (P-2) + x + 4 = 3\sqrt{x^3+4x}$.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4$.

a, Ta có: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right)$

$$= \frac{x-x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}.$$

b, Ta có: $P - 4 = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow P \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

c, Tìm x thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{x} \cdot (P-2) + x + 4 = 3\sqrt{x^3+4x}$.

Ta có: $\left[\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 2 \right] x\sqrt{x} + x + 4 = 3\sqrt{x^3+4x} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x(x^2+4)}$. Chia hai

vế cho $x^2+4 > 0$ ta thu được: $1 + \frac{2x}{x^2+4} = 3\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$ với $t > 0$ ta có:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Nếu $t=1$, $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$ vô nghiệm. Do $\Delta = -15 < 0$.

Nếu $t = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Kết luận: $x = 2$.

I. HÀM SỐ BẬC NHẤT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

+ Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a và b là các số thực cho trước và $a \neq 0$.

+ Khi $b = 0$ thì hàm số bậc nhất trở thành hàm số $y = ax$, biểu thị tương quan tỉ lệ thuận giữa y và x .

2. Tính chất

a, Hàm số bậc nhất, xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.

b, Trên tập số thực, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

3. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ với ($a \neq 0$)

+ Đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{b}{a}$.

+ a gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

4. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$

+ Vẽ hai điểm phân biệt của đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua 2 điểm.

+ Thường vẽ đường thẳng đi qua 2 giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ là $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right), B(0; b)$.

+ Chú ý: Đường thẳng đi qua $M(m; 0)$ song song với trục tung có phương trình: $x - m = 0$, đường thẳng đi qua $N(0; n)$ song song với trục hoành có phương trình: $y - n = 0$

5. Kiến thức bổ sung

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Điểm $M(x; y)$ là trung điểm của AB thì $x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

6. Điều kiện để hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ và đường thẳng $(d_2): y = a'x + b'$ với $a, a' \neq 0$.

ĐỀ SỐ 01

Câu 1 Cho biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$, $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{9-4\sqrt{5}}$.
- b) Rút gọn B .
- c) Tìm các số thực x để $P = \frac{A}{B}$ là số nguyên.

Câu 2 Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km với vận tốc dự định. Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc trung bình thêm 4 km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc trung bình dự định của xe đạp khi đi từ A đến B .

Câu 3

- a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2x}{x+y} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 3 \\ \frac{3y}{x+y} - \sqrt{x} = -2 \end{cases}$$

b) Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

+ Chứng minh: Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

+ Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm m để: $x_1 + 1 = \sqrt{x_2}$.

Câu 4 Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AC = b, AB = c, (b > c)$. Vẽ đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (F nằm trên cung nhỏ CB) vuông góc BC tại M . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của E lên AB, AC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của F lên AB, AC .

- a) Chứng minh: $AIEJ, CMJE$ là các tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh: I, J, M thẳng hàng.
- c) Chứng minh: $IJ \perp HK$.
- d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c .

Câu 5 Cho các số thực $a, b \geq 0, 0 \leq c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN của $P = ab + bc + ca + 3(a+b+c)$.

LỜI GIẢI

Câu 1

a) Ta có $x = \frac{1}{9-4\sqrt{5}} = \frac{9+4\sqrt{5}}{9^2-(4\sqrt{5})^2} = 9+4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5}+2$. Suy ra

$$A = \frac{5}{\sqrt{5}+2+2} = \frac{5}{4+\sqrt{5}} = \frac{5(4-\sqrt{5})}{4^2-5} = \frac{5}{11}(4-\sqrt{5}).$$

b) Ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Ta có: $P = \frac{A}{B} = \frac{5}{\sqrt{x}+2} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{5(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}$, dễ thấy $\begin{cases} P \neq 5 \\ P \neq 0 \end{cases}$ ta viết lại biểu thức thành:

$$P(\sqrt{x}+2) = 5(\sqrt{x}-2) \Leftrightarrow \sqrt{x}(P-5) = -2(P+5) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-2(P+5)}{P-5}, \text{ do } x \geq 0$$

suy ra $\frac{-2(P+5)}{P-5} \geq 0$ hay $\frac{P+5}{P-5} \leq 0$ suy ra $P+5, P-5$ trái dấu do $P+5 > P-5$

$$\Rightarrow \begin{cases} P+5 \geq 0 \\ P-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq P < 5. \text{ Vì } P \text{ là số nguyên suy ra } P \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\} \text{ thay vào}$$

ta tính được: $\sqrt{x} \in \left\{ 0; \frac{2}{9}; \frac{1}{2}; \frac{6}{7}; \frac{4}{3}; \frac{14}{3}; 8; 18 \right\} \Rightarrow x \in \left\{ 0; \frac{4}{9}; \frac{1}{4}; \frac{36}{49}; \frac{16}{9}; 9; \frac{196}{9}; 64; 324 \right\}$

Câu 2 Gọi vận tốc dự định đi từ A đến B là x (km/h), điều kiện $x > 0$.

Vận tốc thực tế khi đi từ B về A là $x+4$ (km/h).

Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ giờ. Thời gian thực tế đi từ B về A là: $\frac{24}{x+4}$.

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{24}{x+4} + \frac{1}{2} = \frac{24}{x} \Leftrightarrow \frac{48+x+4}{2(x+4)} = \frac{24}{x} \Leftrightarrow x^2+4x-192=0 \Leftrightarrow (x-12)(x+16)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-16 \end{cases} \text{ đối}$$

chiếu với điều kiện ta suy ra $x=12$ thỏa mãn. Vậy vận tốc dự định đi từ A đến B là 12 km/h.

Câu 3

a) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1, x+y \neq 0$. Ta viết lại hệ phương trình thành:
$$\begin{cases} \frac{6x}{x+y} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} = 9 \\ \frac{6y}{x+y} - 2\sqrt{x} = -4 \end{cases}$$

Cộng 2 phương trình của hệ ta có: $\frac{6x}{x+y} + \frac{6y}{x+y} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} = 9-4$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 - (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-3\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)=0$$

Thay $x = 4$ vào ta tìm được $y = 0$, vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (4; 0)$.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 4 > 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Xét điều kiện: $x_i + 1 = \sqrt{x_i}$ (*)

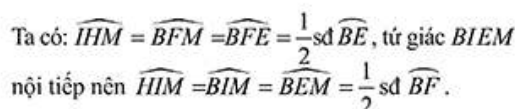
$$m-2=\sqrt{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m^2-5m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ m = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy $m = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ là giá trị cần tìm.

a) Học sinh tự chứng minh.

$\widehat{EJI} = \widehat{EAI} = \widehat{ECB} = \widehat{ECM} = 180^\circ - \widehat{EJM}$. Từ đó suy ra $\widehat{EJI} + \widehat{EJM} = 180^\circ$ hay I, J, M thẳng hàng.

c) Chứng minh tương tự câu b ta có 3 điểm H, M, K thẳng hàng.



Từ đó suy ra $\widehat{IHM} + \widehat{HIM} = \frac{1}{2} \widehat{sd BE} + \frac{1}{2} \widehat{sd BF} = \frac{1}{2} \widehat{sd EF} = 90^\circ$ hay $IM \perp HK$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OB = R$.

Dựng đường cao BN của tam giác ABC ($N \in AC$). Ta có:

$$BC^2 = BN^2 + NC^2 = BN^2 + (AC - AN)^2 = AC^2 + BN^2 + AN^2 - 2AC \cdot AN = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{Hay } BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc.$$

Do $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BOM} = 60^\circ$. Trong tam giác vuông BOM ta có:

$$\sin \widehat{BOM} = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow OB = \frac{BM}{\sin \widehat{BOM}} = \frac{BC}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - bc}{3}}. \text{ Vậy bán kính}$$

$$\text{đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \text{ là } R = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - bc}{3}}.$$

Câu 5

Ta viết lại $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 - 3$ thì

$$2P = (a + b + c)^2 + 6(a + b + c) - 3.$$

Từ đánh giá quen thuộc: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$. Ta cũng có

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{3} \text{ dấu đẳng thức xảy}$$

ra khi và chỉ khi 1 trong 2 số a hoặc b bằng 0 và $c = 0$.

$$\text{Từ đó ta có: } 3 + 6\sqrt{3} - 3 \leq 2P \leq 3^2 + 6 \cdot 3 - 3 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \leq P \leq 12.$$

GTNN của P bằng 12 tại $a = b = c = 1$, GTNN của P bằng $3\sqrt{3}$ khi $a = \sqrt{3}, b = 0, c = 0$ hoặc $a = 0, b = \sqrt{3}, c = 0$.



ĐỀ SỐ 02

Câu 1 Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

c) Chứng minh: $P + \sqrt{x} > 3$.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối, Hai Bà Trưng, Hà Nội.

Điện thoại: Biên tập (024) 39714896

Quản lý xuất bản: (024) 39728806; Tổng biên tập: (024) 39715011

Fax: (024) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập:

TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập chuyên ngành:	Trịnh Thị Thu Hà
Biên tập xuất bản:	Trịnh Thị Thu Hà
Sửa bản in:	Megabook
Chế bản:	Đỗ Xuân
Vẽ bìa:	Trọng Kiên

LIÊN KẾT XUẤT BẢN

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH VÀ GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN MEGABOOK

Tầng 5 Số 19 Lô N7B, Ngõ 125 Lê Văn Lương - KĐT Trung Hòa - Nhân Chính, Thanh Xuân, Hà Nội.

**TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ TRỌNG TÂM
THI VÀO
10 CHUYÊN
& HỌC SINH GIỎI
ĐẠI SỐ 9**

Mã số: 1L-555 PT2018

In 1.500 cuốn, khổ 20,5x29,5cm, tại Công ty TNHH In và Thương mại Hải Nam

Địa chỉ: Số 18 ngách 63/53/9, P. Quan Hoa, Q. Cầu Giấy, Hà Nội.

Số xác nhận ĐKXB: 3880-2018/CXBIPH/04-346/ĐHQGHN, ngày 26/10/2018

Quyết định xuất bản số: 593 LK-TN/QĐ - NXB ĐHQGHN, ngày 12/11/2018

In xong và nộp lưu chiểu năm 2018.

Mã ISBN: 978-604-62-5977-0