

*Các chuyên đề***BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ĐẲNG THỨC****BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI****LỚP 9**

$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Chương I

NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG

1.1. Năng lực giải toán về đẳng thức và bất đẳng thức.

Việc giải toán về đẳng thức (ĐT) và bất đẳng thức (BĐT) có thể giúp rất nhiều cho việc rèn luyện ở học sinh (HS) óc trừu tượng hoá và khái quát hoá. Do bài toán về ĐT và BĐT có nhiều phương pháp giải, mỗi bài ta có thể có nhiều con đường đi, có nhiều cách giải khác nhau để tìm đến kết quả cuối cùng nên việc tìm một lời giải hay, một con đường đi ngắn giúp rèn luyện cho HS tư duy sáng tạo, phương pháp khoa học trong suy nghĩ, biết giải quyết vấn đề bằng phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát... từ đó HS phát triển các phẩm chất tư duy như linh hoạt, độc lập, sáng tạo...

HS có năng lực giải toán (NLGT) về ĐT và BĐT có thể xác định hướng giải của bài toán một cách nhanh chóng, sau đó có thể phân tích, biến đổi biểu thức chính xác, rõ ràng. Từ bài toán đó lại có thể làm xuất hiện một lớp các bài toán có liên quan bằng cách đặt thêm câu hỏi hoặc khái quát hoá, tương tự hoá v.v...

Có thể xác định được NLGT về ĐT và BĐT của HS qua một số năng lực cụ thể như sau:

Năng lực 1: Năng lực nhận biết các hằng đẳng thức (HĐT) trong biến đổi đại số.

Ví dụ: Tính giá trị biểu thức.

$$A = x^2 - 5x - 2xy + 5y + y^2 + 4 \text{ biết } x - y = 1.$$

- Quan sát biểu thức A nhận thấy trong biểu thức có HĐT $(x - y)^2$

$$\text{Do đó: } A = (x^2 - 2xy + y^2) - 5(x - y) + 4$$

$$A = (x - y)^2 - 5(x - y) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0.$$

Năng lực 2: Năng lực sử dụng, vận dụng các HĐT.

Ví dụ: Biết rằng $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng (CMR):

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Trong bài toán này một suy nghĩ tự nhiên có thể nảy sinh là: HĐT nào cho ta mối quan hệ giữa $a + b + c$ và $a^2 + b^2 + c^2$; giữa $a^2 + b^2 + c^2$ và $a^4 + b^4 + c^4$. Hoặc là: Từ giả thiết có mối quan hệ $b + c = -a$. Vậy HĐT nào cho ta mối quan hệ giữa b^2, c^2 và a^2 ; giữa b^4, c^4 và a^4 ?

Bình phương 2 vế của ĐT $-a = (b + c)$ ta được:

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Leftrightarrow 2bc = a^2 - b^2 - c^2$$

Tiếp tục bình phương 2 vế của ĐT này ta được:

$$4b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2$$

$$\text{do đó } a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2$$

Cộng 2 vế của ĐT này với $a^4 + b^4 + c^4$, ta có:

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (\text{đpcm})$$

Nhận dạng và sử dụng tốt các HĐT xuất hiện trong bài toán giúp chúng ta thấy được bài toán rất quen thuộc, lời giải ngắn gọn.

Năng lực 3: Năng lực “nhìn” đối tượng (của bài toán) theo cách khác.

Ví dụ: Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2. \text{ Tính giá trị của biểu thức:}$$

$$P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Nhìn vào giả thiết $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$, nếu ta coi: $ab = x$; $bc = y$; $ca = z$ khi đó ta có $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, gần gũi với dạng $(x+y+z)^3$. Khi đó:

$$\frac{a}{b} = \frac{z}{y}; \frac{b}{c} = \frac{x}{z}; \frac{c}{a} = \frac{y}{x} \Rightarrow P = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

Ta có bài toán mới dễ làm hơn.

Năng lực 4: Năng lực tìm mối quan hệ giữa các đại lượng.

Để tìm được lời giải bài toán thì năng lực tìm ra quan hệ giữa các điều kiện cho trong giả thiết, giữa giả thiết và kết luận là rất cần thiết.

Ví dụ: CMR: Nếu $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$ thì $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Từ các ĐT đã cho trong bài toán khó có thể biểu diễn ở dạng tường minh a, b, c theo x, y, z hay ngược lại, ta phải dựa vào đại lượng trung gian.

Các biểu thức xuất hiện ở giả thiết và kết luận là thể hiện vai trò bình đẳng giữa x, y, z, giữa a, b, c. Nếu ta đặt các tỉ lệ thức ở giả thiết là k thì mối quan hệ đó được biểu thị một cách bình đẳng của a, b, c theo k, x, y, z.

* Đặt $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k$

$\Rightarrow a = \frac{x^2 - yz}{k}; b = \frac{y^2 - zx}{k}; c = \frac{z^2 - xy}{k}$

* Thay các giá trị của a, b, c vào điều phải tìm ta được:

$$\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{x^3 + y^3 + x^3 - 3xyz}{k^2}$$

$$\frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z} = \frac{x^3 + y^3 + x^3 - 3xyz}{k^2}$$

Vậy $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Ví dụ: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a - b}{a + b}$$

Cần nhận thấy mối quan hệ giữa kết luận và giả thiết: Trong giả thiết xuất hiện a^2 và b^2 , Vậy trong P phải làm xuất hiện a^2 và b^2 . Từ đó nghĩ đến việc bình phương 2 vế của biểu thức P.

Giả thiết có $3(a^2 + b^2) = 10ab$.

Để sử dụng được $a^2 + b^2 = \frac{10ab}{3}$ cần có $P^2 = \left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2$.

Từ đó ta có lời giải bài toán.

Năng lực 5: Năng lực thao tác thành thạo các dạng toán cơ bản.

Ví dụ 1: Giải các phương trình (PT):

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24 \quad (1)$$

Đây là những dạng toán cơ bản, đối với HS giỏi cần phải có năng lực thao tác thành thạo dạng toán cơ bản này.

Đối với PT (1) người ta thường nhân như sau:

$$(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$$

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

$$\text{Đặt } x^2 + 5x + 5 = t, \text{ thì PT (1) } \Leftrightarrow (t - 1)(t + 1) = 24$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5 \text{ từ đó tính được } x = 0; x = -5.$$

Năng lực 6: Năng lực qui lạ về quen.

Ví dụ: Sau khi đã cho HS làm quen với dạng toán phân tích thành nhân tử:

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15.$$

Bằng cách ghép từng cặp nhân tử một cách phù hợp, ta có:

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15.$$

$$= [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)] + 15$$

$$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } x^2 + 8x + 7 = a, \quad (*) \text{ trở thành}$$

$$a(a + 8) + 15 = a^2 + 8a + 15 = (a^2 + 8a + 16) - 1 = (a + 4)^2 - 1$$

$$= (a + 3)(a + 5).$$

Thay vào ta có:

$$(x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) = [(x + 4)^2 - 6][(x + 4)^2 - 2]$$

$$(x + 4 + \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})(x + 2)(x + 4)$$

Thì khi cho HS giải các bài toán:

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15.$$

+ Hay giải PT:

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15 = 0.$$

Gặp những bài toán này HS có thể qui về phương pháp quen thuộc ở bài toán ban đầu.

Ví dụ: Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{1 + \underbrace{99 \dots 9^2}_n + 0, \underbrace{99 \dots 9^2}_n}$$

Để làm được bài toán này, HS phải quen với cách viết: $\underbrace{99 \dots 9}_n = 10^n - 1$.

Ta có:

$$\underbrace{99 \dots 9^2}_n = (10^n - 1)^2 \text{ và } 0, \underbrace{99 \dots 9^2}_n = \left(\frac{10^n - 1}{10^n} \right)^2.$$

Khi đó đặt: $a = 10^n - 1$ thì $P = \sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}}$ bài toán quen thuộc.

$$P = \frac{1}{a+1} \sqrt{(a+1)^2 + a^2 (a+1)^2 + a^2}$$

$$P = \frac{1}{a+1} \sqrt{(a^2 + a + 1)^2} = \frac{(a^2 + a + 1)}{a+1}$$

Bài toán có thể lạ về nội dung; giả thiết, kết luận; hoặc là về phương pháp làm (phương pháp đặc biệt). Song trong mỗi bài đều có thể tìm ra một vài ý quen thuộc. Bởi vậy việc rèn luyện trí nhớ cũng rất cần đối với HS.

Năng lực 7: Năng lực khái quát hoá, đặc biệt hoá, tương tự.

Ví dụ: Tính các tổng sau:

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Từ bài toán này chúng ta có thể mở rộng và được hai bài toán tính tổng sau:

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+2)}, \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}, \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Đồng thời có thể tổng quát hoá bài toán:

Tính tổng:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (k+1)} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdots (k+2)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1) \cdots (k+n-1)}, \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Mặt khác chúng ta có thể có các bài toán tương tự sau:

Tính tổng:

$$M = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

$$T = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Như vậy từ bài toán ban đầu chúng ta có thể tương tự hoá theo 2 hướng:

- Thay đổi khoảng cách giữa các số trong tích ở mẫu.
- Tăng thêm thừa số ở mẫu số.

Năng lực 8: Năng lực phân tích tổng hợp:

Ví dụ: Tính giá trị của biểu thức:

$$S = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

Từ bài toán đã cho HS cần biết cách biến đổi biểu thức trong mỗi căn về dạng bình phương của một tổng $\Rightarrow$ làm mất căn bậc hai $\Rightarrow$ giản ước, rút gọn.

Xét biểu thức trong căn ở dạng tổng quát với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1-k} - \frac{1}{k}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{(k-1)k} - \frac{2}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{2}{k} \quad \left(\text{vì } \frac{2}{(k-1)k} = \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \Rightarrow 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} &= \left(1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2}} &= 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Cho $k = 3, 4, \dots, 100$ ta có:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= 98 + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = 98,49$$

Với một số bài toán khó, không có thuật toán để giải thì việc tìm ra hướng giải của bài toán phụ thuộc chủ yếu vào năng lực phân tích, tổng hợp của HS.

Ví dụ: Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 25 \\ \frac{b^2}{3} + c^2 = 9 \\ c^2 + ac + a^2 = 16 \end{cases}$$

Tính giá trị của $P = ab + 2bc + 3ac$

+ Phân tích, tổng hợp (3)(2)(1), ta có kết quả: $2c^2 = ab - ac$.

+ Xem xét $P^2 = (ab + 2bc + 3ac)^2 = \dots$

+ Tổng hợp từ (2)(3) $\Rightarrow$ có nhiều hạng tử đồng dạng với hạng tử của P^2

$\Rightarrow$ Xét $P^2 - 9 \cdot 6 \cdot 12$ với chú ý $2c^2 = ab - ac$.

$\Rightarrow$ Tính $P^2 - 9 \cdot 6 \cdot 12$ theo $2c^2 \Rightarrow$ kết quả.

Hướng dẫn:

Theo giả thiết: $\left(\frac{b^2}{3} + c^2\right) + (c^2 + ac + a^2) = a^2 + ab + \frac{b^2}{3}$

Ta có: $P^2 = (ab + 2bc + 3ac)^2 = a^2b^2 + 4b^2c^2 + 9a^2c^2 + 4ab^2c + 6a^2bc + 12a^2bc$

$\Rightarrow P^2 - 12\left(\frac{b^2}{3} + c^2\right)(c^2 + ac + a^2) = 0 \quad (1)$

Bằng cách thay $P = ab + 2bc + 3ac$ và $2c^2 = ab - ac$ vào (1)

Từ đó: $P^2 = 12\left(\frac{b^2}{3} + c^2\right)(c^2 + ac + a^2) \Rightarrow P^2 = 12 \cdot 9 \cdot 16 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 4^2$

Vậy $P = 24\sqrt{3}$

*) Ngoài các năng lực trên, HS cần có: Năng lực huy động các kiến thức đã học để nhận xét, so sánh, bác bỏ; cần có tư duy logic, khả năng trình bày vấn đề rõ

ràng, chặt chẽ. Năng lực dự đoán kết quả, kiểm tra dự đoán, biết cách liên hệ tới các vấn đề tương tự gần giống nhau, tổng hợp khái quát hoá... có phương pháp giải chung cho từng dạng bài và phương pháp "đặc biệt" với bài "đặc biệt", hoặc bài "không tầm thường".

1.2. Các dạng toán về ĐT.

Qua tìm hiểu các đề thi HS giỏi THCS, tuyển sinh vào THPT, THPT Năng khiếu (chuyên) và tài liệu, cho thấy bài tập về ĐT tập trung vào các dạng toán sau:

Dạng 1: Chứng minh ĐT.

Dạng 2: Chứng minh ĐT có điều kiện.

Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử.

Dạng 4: Rút gọn biểu thức.

Dạng 5: Tính giá trị của biểu thức.

1.3. Một số phương pháp chứng minh BĐT.

1.3.1. Phương pháp vận dụng định nghĩa và tính chất của BĐT

Phương pháp 1: Phương pháp dựa vào định nghĩa.

Phương pháp 2: Phương pháp biến đổi tương đương.

Phương pháp 3: Phương pháp làm trội.

Phương pháp 4: Phương pháp phản chứng.

1.3.2. Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về BĐT.

Để chứng minh BĐT $A \geq B$ nhiều khi cần sử dụng một số bài toán cơ bản về BĐT để làm bài toán phụ, giúp tìm đến lời giải bài toán.

Phương pháp 5: Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về phân số:

Ta có hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1: Với $a, b, c > 0$. CMR:

$$a/ \text{ Nếu } a < b \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$b/ \text{ Nếu } a \geq b \text{ thì } \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$$

Bài toán 2: Với $x, y, z > 0$. CMR:

$$a/ \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2};$$

$$b/ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y};$$

$$c/ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Phương pháp 6: Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về giá trị tuyệt đối

Kiến thức cần nhớ:

Đối với một số bài toán BĐT có chứa giá trị tuyệt đối, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về BĐT chứa giá trị tuyệt đối sau:

Bài toán 1: CMR:

$$a/ |a| + |b| \geq |a+b|. \text{ Dấu " = " xảy ra } \Leftrightarrow ab \geq 0.$$

$$b/ |a-b| \geq |a| - |b|. \text{ Dấu " = " xảy ra } \Leftrightarrow b(a-b) \geq 0.$$

Bài toán 2: CMR nếu x, y khác 0 thì $|\frac{x}{y}| + |\frac{y}{x}| \geq |\frac{x}{y} + \frac{y}{x}| \geq 2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm y$.

Từ đó suy ra nếu $m, n > 0$ ta có: 1) $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$; 2) $m + \frac{1}{m} \geq 2$

Phương pháp 7: Phương pháp vận dụng BĐT liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số.

$$1) 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \geq 4xy.$$

$$2) 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2 \geq 3(xy + xz + yz).$$

Phương pháp 8: Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về căn thức.

(BĐT Cauchy và BĐT Bunhiacôpxki)

Khi giải một số bài toán BĐT có chứa căn thức bậc hai, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về BĐT chứa căn thức.

Bài toán 1: Cho $a, b \geq 0$. CMR: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ (BĐT Cauchy)

Bài toán 2: CMR: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$ (BĐT Bunhiacôpxki)

1.3.3. Phương pháp vận dụng tính chất đặc biệt của biến.

Phương pháp 9: Phương pháp vận dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc 2.

Phương pháp 10: Phương pháp qui nạp toán học.

Phương pháp 11: Phương pháp dùng tọa độ, hình học.

Chương II

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC GIẢI TOÁN VỀ ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC CHO HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS

2.1. Các yêu cầu về kiến thức và kỹ năng đối với toán ĐT và BĐT thuộc chương trình toán lớp 9 THCS

2.1.1. HS cần nắm vững kiến thức về giải toán ĐT và BĐT

- Nắm vững khái niệm và tính chất của ĐT và BĐT.
- Nắm vững các HĐT đáng nhớ.
- Nắm vững các phép biến đổi đơn giản của căn thức, phân thức, đa thức.
- Nắm vững cách chứng minh ĐT.
- Nắm vững cách chứng minh ĐT có điều kiện.
- Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
- Rút gọn, tính giá trị của một biểu thức.
- Các phương pháp chứng minh BĐT (đã nêu ở chương 1).

2.1.2. HS có kỹ năng vận dụng các kiến thức vào giải toán

- Kỹ năng vận dụng các HĐT đáng nhớ.
- Kỹ năng tính toán giá trị của biểu thức.
- Kỹ năng rút gọn một biểu thức.
- Kỹ năng chứng minh ĐT.
- Kỹ năng chứng minh ĐT có điều kiện.
- Kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử.
- Kỹ năng chứng minh BĐT.

2.1.3. HS phát triển về những năng lực trí tuệ chung.

- Năng lực suy luận, lập luận.
- Năng lực phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa, xét tương tự, đặc biệt...

- Năng lực tiến hành những hoạt động phổ biến trong toán học như phân chia trường hợp, lập ngược vấn đề, sự liên hệ và phụ thuộc xét tính giải được...

2.2. Xác định những yêu cầu cơ bản của hệ thống bài tập dành cho HS giỏi về toán.

Hệ thống bài tập xây dựng với mục đích rèn luyện năng lực, tư duy sáng tạo cho HS giỏi toán phải là hệ thống bài tập nâng cao có tác dụng đến từng yếu tố của năng lực, tư duy sáng tạo. Để đạt được mục đích đó, các bài tập cần đảm bảo các yêu cầu sau:

- Có tác dụng củng cố vững chắc các kiến thức, kỹ năng trong chương trình học.
- Bài tập phải gọi được ở HS sự ham thích tìm tòi.
- Có tính tổng hợp, tức là những bài tập đòi hỏi phải sử dụng đến nhiều nội dung kiến thức khác nhau, phải nhạy bén trong việc lựa chọn những kiến thức có liên quan để giải quyết yêu cầu do bài tập đặt ra.

Để đạt được các yêu cầu trên, các dạng bài tập đưa ra phải phong phú, gồm nhiều thể loại ...

2.3. Hệ thống bài tập về ĐT và BĐT nhằm rèn luyện năng lực giải toán cho HS giỏi về toán lớp 9 THCS.

Năng lực giải toán chỉ có thể hình thành và phát triển trong quá trình hoạt động của HS. Giải bài tập toán học là một trong những hoạt động quan trọng của học tập, do đó người thầy cần phải xác định được hệ thống bài tập sao cho vừa có tác dụng khắc sâu kiến thức, rèn luyện kỹ năng, vừa có tác dụng phát triển tư duy độc lập sáng tạo để chuẩn bị có hiệu quả cho việc vận dụng kiến thức vào học tập và thực tiễn của các em sau này. Với tư tưởng đó, hệ thống bài tập đề xuất về ĐT gồm 5 nội dung đó là: Bài tập về chứng minh ĐT, chứng minh ĐT có điều kiện, phân tích đa thức thành nhân tử, rút gọn biểu thức và tính giá trị của biểu thức; hệ thống bài tập về BĐT đề xuất gồm 11 nội dung tương ứng với 11 phương pháp chứng minh BĐT phù hợp với kiến thức bậc THCS.

2.3.1. Bồi dưỡng năng lực về ĐT.

1. Các kiến thức cơ bản.

Cần nhớ:

Để chứng minh các ĐT đại số, thường sử dụng các HĐT quen thuộc (đáng nhớ) sau:

$$1. (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

$$3. (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

$$4. (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

$$5. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$6. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$

$$7. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$= (a - b)^3 + 3ab(a - b).$$

Một cách tổng quát:

$$8. a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}.b + \dots + b^{2n})$$

$$9. a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \dots + b^{n-1}).$$

2. Rèn luyện các kỹ năng giải bài toán về ĐT

Dạng 1: Bài tập về chứng minh ĐT

Bài 1: CMR: $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

Giải: Biến đổi về phải, ta được:

$$\begin{aligned} (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 &= (a^2x^2 + b^2y^2 + 2axby) + (a^2y^2 + b^2x^2 - 2axby) \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

ĐT được chứng minh.

Bài 2: CMR: $(x+y)(x+y)^3 = x(x + 2y)^3 - y(2x + y)^3$

Hướng dẫn:

Biến đổi về phải, ta được điều cần chứng minh. (Tương tự bài 1)

Bài 3: CMR: $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$

Giải: Viết ĐT đã cho dưới dạng:

$$2(x^2 + xy + y^2)^2 - x^4 - y^4 = (x + y)^4$$

Biến đổi về trái, ta được:

$$\begin{aligned}
2(x^2 + xy + y^2)^2 - x^4 - y^4 &= [(x^2 + xy + y^2)^2 - x^4] + [(x^2 + xy + y^2)^2 - y^4] \\
&= (xy + y^2)(2x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy)(x^2 + xy + 2y^2) \\
&= (x + y) [y(2x^2 + xy + y^2) + x(x^2 + xy + 2y^2)] \\
&= (x + y) [x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3] = (x + y)(x + y)^3 = (x + y)^4.
\end{aligned}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 4: Cho a, b, c. CMR:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Giải: Biến đổi về trái, ta được:

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a^3 + b^3) + c^3 - 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\
&= [(a + b)^3 + c^3] - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c)^3 - 3(a + b).c(a + b + c) - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab] \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
\end{aligned}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 5: Chứng minh rằng, nếu ít nhất có hai trong ba số a, b, c khác nhau thì:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} = \frac{a + b + c}{2}$$

Hướng dẫn: Biến đổi tử số của phân thức ở về trái như bài 4, ta được:

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
&= \frac{a + b + c}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]
\end{aligned}$$

Vậy về trái của ĐT đã cho bằng:

$$\frac{\frac{a + b + c}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} = \frac{a + b + c}{2}$$

ĐT được chứng minh.

Bài 6: CMR:

$$a/ \quad \sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$$

Hướng dẫn:

$$49 + 20\sqrt{6} = 25 + 20\sqrt{6} + 24 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2]^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^4$$

$$49 - 20\sqrt{6} = 25 - 20\sqrt{6} + 24 = (5 - 2\sqrt{6})^2 = [(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2]^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$$

$$b/ \sqrt[3]{x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y}} + \sqrt[3]{x^3 + 3xy - (3x^2 + y)\sqrt{y}} = 2x$$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức ở vế trái, ta được:

$$x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x(\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y})^3 = (x + \sqrt{y})^3$$

$$x^3 + 3xy - (3x^2 + y)\sqrt{y} = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3x(\sqrt{y})^2 - (\sqrt{y})^3 = (x - \sqrt{y})^3$$

$$c/ \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

$$\text{Giải: Đặt } x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$\text{Ta có: } x^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 4 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0$$

$$\text{Chú ý rằng: } x^2 + x + 4 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0. \text{ Do đó } x - 1 = 0 \text{ tức là } x = 1$$

Vậy ĐT được chứng minh.

$$f/ \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25} = 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Nhận xét: } \sqrt[3]{2} > 1 ; \sqrt[3]{20} > \sqrt[3]{8} = 2 ; \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow \text{vế trái dương.}$$

$\Rightarrow$ Để chứng minh ĐT chỉ cần bình phương 2 vế và rút gọn được ĐT đúng.

$$\text{Bài 7: } a/ \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{2} = a ; 2 = a^3.$$

ĐT cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt[3]{a-1} = \frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9(a-1)} = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow (a^2 - a + 1)^3 = 9(a-1)$$

$$\text{Ta biến đổi: } (a^2 - a + 1)^3 = (a^2 - a + 1)^2(a^2 - a + 1) = 3(a^2 - 1)(a^2 - a + 1)$$

$$= 3(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1) = 3(a-1)(a^3 + 1)$$

$$= 3(a-1)(2+1) = 9(a-1)$$

Vậy ĐT được chứng minh.

$$\text{b/ CMR: } \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1} = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}}$$

$$\text{Giải: Đặt } \sqrt[4]{5} = a \Leftrightarrow 5 = a^4$$

$$\text{Cần chứng minh: } \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4 = \frac{3+2a}{3-2a}$$

$$\text{Khai triển: } \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4 = \frac{(a+1)^4}{(a-1)^4} = \frac{2(3+2a)(1+a^2)}{2(3-2a)(1+a^2)} = \frac{3+2a}{3-2a}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 8: Chứng minh các ĐT sau:

$$\text{a) } \sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$$

Hướng dẫn: Bình phương 2 vế của ĐT đã cho, ta được:

$$x+\sqrt{y} = \frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2} + \frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2} + 2\sqrt{\frac{(x+\sqrt{x^2-y})(x-\sqrt{x^2-y})}{4}}$$

Biến đổi vế phải, ta được:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2} + \frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2} + 2\sqrt{\frac{(x+\sqrt{x^2-y})(x-\sqrt{x^2-y})}{4}} = x + 2\sqrt{\frac{y}{4}} = x + \sqrt{y}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

$$\text{b) } \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} - \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$$

(Chứng minh tương tự a/)

$$\text{c) } \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{x}}$$

Hướng dẫn: Nhân 2 vế với $\sqrt[4]{x}$, ta được:

$\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}}=\sqrt{2x+4}$; Tiếp theo áp dụng kết quả câu a/ ta được điều cần chứng minh.

$$d) \quad \sqrt{\frac{abx+c^2}{bc}}+\sqrt{\frac{4ax}{b}}+\sqrt{\frac{abx+c^2}{bc}}-\sqrt{\frac{4ax}{b}}=\sqrt{\frac{4ax}{c}}$$

Hướng dẫn:

Cách 1: Nhân 2 vế với $\sqrt{bc}$, ta được:

$$\sqrt{abx+c^2}+\sqrt{4abxc^2}+\sqrt{abx+c^2}-\sqrt{4abxc^2}=\sqrt{4abx},$$

$$\text{Hay } |c+\sqrt{abx}|+|c-\sqrt{abx}|=\sqrt{4abx}.$$

Cách 2:

Bình phương rồi biến đổi về trái, rút gọn được điều phải chứng minh.

Bài 9. Chứng minh các ĐT:

$$a) \quad \frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x$$

$$b) \quad \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$$

$$c) \quad \frac{(b+c)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=a+b+c-x$$

Hướng dẫn: Lần lượt thay $x = a, b, c$ vào vế trái ta được các giá trị tương ứng a, b, c . Từ đó suy ra đồng nhất thức.

b) và c) tiến hành tương tự a).

Bài 10. Chứng minh ĐT:

$$a) \quad \sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}=-\sqrt{2}$$

Cách 1: Đặt

$$A=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}} \Rightarrow A^2=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\sqrt{9-5} \Rightarrow A^2=6-2\sqrt{4}=2$$

Do $A < 0 \Rightarrow$ từ $A^2 = 2 \Rightarrow A = -\sqrt{2}$. Vậy ĐT được chứng minh.

Cách 2: Nhân A với $\sqrt{2}$, ta được:

$$\begin{aligned} A\sqrt{2} &= \sqrt{(3-\sqrt{5}) \cdot 2} - \sqrt{(3+\sqrt{5}) \cdot 2} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}-1 - \sqrt{5}-1 = -2 \\ \Rightarrow A\sqrt{2} &= -2 \Rightarrow A = -\sqrt{2}. \text{ ĐT được chứng minh} \end{aligned}$$

Cách 3: Vì 2 vế ĐT đã cho đều âm $\Rightarrow$ Nhân 2 vế với (-1) $\Rightarrow$ Bình phương 2 vế, rút gọn ta được ĐT đúng.

$$\text{b)} \quad \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$$

Hướng dẫn: Biến đổi vế trái, ta được:

$$\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}-1$$

ĐT đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3}-1 = \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}. \text{ Lập phương 2 vế, rút gọn ta được ĐT đúng.}$$

Bài 11. Chứng minh HĐT:

$$\text{a)} \quad \left(\frac{1-a}{a^2-1} + 2 \right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2} \right) = \frac{a^2-1}{2a^2+a-1} \quad (\text{Với } a \neq \pm 1; a \neq \pm \frac{1}{2})$$

Hướng dẫn: Biến đổi vế trái, ta được:

$$\left(\frac{1-a}{a^2-1} + 2 \right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2} \right) = \frac{-1+2(a-1)}{a+1} \cdot \frac{1-a^2}{1-4a^2} = \frac{(1+2a)(1-a)}{(1+2a)(1-2a)} = \frac{a-1}{2a-1}$$

Biến đổi vế phải bằng $\frac{a-1}{2a-1}$. Vậy ĐT được chứng minh.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \left(\frac{x+y}{x^2-xy} + \frac{1}{y-x} \right) : \left(\frac{y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} \right) &= \frac{x^2-y^2}{x^3-x^2y} \\ &(\text{Với } x \neq 0; y \neq 0; x \pm y \neq 0) \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự a/.

Bài 12. Cho a, b, c là 3 số khác nhau. CMR:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Hướng dẫn: Ta có:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{a-c-a+b}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}$$

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{b-a-b+c}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{c-b-c+a}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$$

Cộng từng vế của ba ĐT trên ta được điều cần chứng minh.

*** Nhận xét:**

- Để chứng minh một ĐT ta có thể thực hiện việc biến đổi biểu thức (thực hiện phép tính) ở vế này (thường là vế phức tạp hơn) của ĐT để được một biểu thức ở vế kia.

- Trong một số trường hợp, để chứng minh một ĐT ta có thể biến đổi đồng thời cả hai vế của ĐT sao cho chúng cùng bằng một biểu thức thứ ba, hoặc cũng có thể lấy biểu thức VT trừ biểu thức VP (hoặc biểu thức VP trừ biểu thức VT) và biến đổi có kết quả bằng 0.

Dạng 2: Chứng minh ĐT có điều kiện.

Bài 13: Cho $a + b + c = 0$. CMR: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Giải: Ta có $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ (1)

Vì $a + b + c = 0$, nên suy ra: $a + b = -c$; $b + c = -a$; $c + a = -b$

Từ đó theo (1) ta có: $0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Suy ra: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 14: Cho $a + b = 1$, $ab \neq 0$. CMR:

$$a) \frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3} \quad ; \quad b) \frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

Giải:

a/ Biến đổi về trái:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a}{(b-1)(b^2+b+1)} + \frac{b}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{a}{-a(b^2+b+1)} + \frac{b}{-b(a^2+a+1)} \\ &= \frac{-1}{b^2+b+1} + \frac{-1}{a^2+a+1} = \frac{-(a^2+a+1+b^2+b+1)}{(b^2+b+1)(a^2+a+1)} \\ &= \frac{-[(a+b)^2-2ab+3]}{a^2b^2+ab(a+b)+a^2+b^2+ab+2} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+(a^2+2ab+b^2)+2} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3} \end{aligned}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

b) Chứng minh tương tự a/.

Bài 15: Cho $x+y+z=A$. CMR: $x^3+y^3+z^3=A^3-3A(xy+yz+zx)+3xyz$

Giải: Ta có:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \\ \Rightarrow x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x) \\ &= A^3-3(A-z)(A-x)(A-y) \\ &= A^3-3[A^3-A^2(x+y+z)+A(xy+yz+zx)-xyz] \\ &= A^3-3[A^3-A^3+A(xy+yz+zx)-xyz] \\ &= A^3-3A(xy+yz+zx)+3xyz \end{aligned}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 16: CMR nếu có: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ thì $a=b=c$. (1)

Giải: Bình phương 2 vế của (1), ta được:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(ab+bc+ca)^2.$$

Hay: $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=0$.

* Nếu $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, thì:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0.$$

$$\text{Hay } (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \quad \text{hay } a=b=c.$$

* Nếu $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$.

Tương tự ta có: $a + b = b + c = c + a = 0$. Suy ra $a = b = c = 0$.

Vậy cả hai trường hợp ta đều có $a = b = c$.

Bài 17: CMR nếu có: $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ thì $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Giải:

Bình phương 2 vế của ĐT đã cho, ta được:

$$x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} + \sqrt[3]{x^2 y^4} + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2})(y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4})} = a^2 \quad (1)$$

$$\text{Mà } (x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2})(y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}) = \sqrt[3]{x^4 y^2} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^2$$

Do vậy vế trái của (1) bằng:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} + \sqrt[3]{x^2 y^4} + 2\sqrt[3]{x^2 y^2} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) \\ &= x^2 + y^2 + 3\sqrt[3]{x^4 y^2} + 3\sqrt[3]{x^2 y^4} = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Bài 18: Đặt $m_1 = \frac{a+b}{a-b}$; $m_2 = \frac{c+d}{c-d}$; $m_3 = \frac{ac-bd}{ad+bc}$

CMR: $m_1 + m_2 + m_3 = m_1 m_2 m_3$

$$\begin{aligned} \text{Giải: Ta có: } m_1 + m_2 + m_3 &= \frac{a+b}{a-b} + \frac{c+d}{c-d} + \frac{ac-bd}{ad+bc} \\ &= \frac{(a+b)(c-d) + (c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)} + \frac{ac-bd}{ad+bc} \\ &= \frac{2(ac-bd)}{(a-b)(c-d)} + \frac{ac-bd}{ad+bc} = \frac{(ac-bd)[2(ad+bc) + (a-b)(c-d)]}{(a-b)(c-d)(ad+bc)} \\ &= \frac{(ac-bd)(a+b)(a+c)}{(a-b)(c-d)(ad+bc)} = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \end{aligned}$$

Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 19: Cho: $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$

CMR: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.

Hướng dẫn: Lần lượt nhân 2 vế của ĐT đã cho với $\frac{1}{b-c}; \frac{1}{c-a}; \frac{1}{a-b}$ sau đó cộng lại. Rút gọn ta được ĐT cần chứng minh.

Bài 20: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$

CMR: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 &\Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) \\ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 - 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) = 1 - \frac{2(cxy + ayz + bzx)}{abc}. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{cxy + ayz + bzx}{abc} = 0 \Rightarrow cxy + ayz + bzx = 0$.

Do đó $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 21: Cho $a + b + c = 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. CMR: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Bài 22: CMR, nếu: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a + b + c = abc$ thì ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

(Bài 21 & bài 22 chứng minh tương tự bài 19)

Bài 23: Cho $ab = 1$. CMR:

$$a^5 + b^5 = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b)$$

Hướng dẫn: Biến đổi vế phải:

$$(a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b) = a^5 + b^5 + a^3b^3 + a^2b^3 - (a + b) = \dots = a^5 + b^5$$

Bài 24: Cho $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$; $x^2 + y^2 = 1$. CMR:

a) $bx^2 = ay^2$

b) $\frac{x^{2000}}{a^{1000}} + \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{2}{(a+b)^{1000}}$

Giải:

a) Ta có $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a+b} \Rightarrow (a+b)(bx^4 + ay^4) = ab(x^2 + y^2)^2$

$$\Rightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0 \Rightarrow bx^2 = ay^2.$$

$$\text{b) Từ } bx^2 = ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{1}{a + b}.$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{1}{a + b} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{a + b}\right)^{1000} \Rightarrow \frac{x^{2000}}{a^{1000}} = \frac{1}{(a + b)^{1000}}$$

$$\text{Và } \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1000} = \left(\frac{1}{a + b}\right)^{1000} \Rightarrow \frac{y^{2000}}{b^{1000}} = \frac{1}{(a + b)^{1000}}$$

Suy ra đpcm.

Bài 25: Cho $a + b + c = 0$. CMR: $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2)^2$

$$\text{Giải: Từ } a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -a \Rightarrow (b + c)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = a^2 \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc \Rightarrow (a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

$$\Rightarrow 2(a^4 + b^4 + c^4) = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

$$\Rightarrow 2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Bài 26: CMR, nếu: $x + y + z = 0$ thì $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Chứng minh tương tự bài 25.

$$\text{Từ } x + y + z = 0 \Rightarrow y + z = -x \Rightarrow (y + z)^5 = -x^5.$$

Khai triển, rút gọn được điều cần chứng minh.

Bài 27: CMR, nếu: $xyz = 1$ thì:

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1$$

$$\text{Giải: Đặt } S = \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

$$= \frac{z}{z + zx + xyz} + \frac{xz}{xz + xyz + xyz^2} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

$$= \frac{z}{z + zx + 1} + \frac{xz}{xz + 1 + z} + \frac{1}{1 + z + zx} = \frac{z + zx + 1}{z + zx + 1} = 1.$$

Vậy ĐT được chứng minh.

Bài 28: CMR nếu: $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$

thì: $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

Hướng dẫn:

$$* \text{ Tính } (1+x)(1+y)(1+z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$* \text{ Tính } (1-x)(1-y)(1-z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

Bài 29: Cho a, b, c là ba số khác không thỏa mãn:

$$\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$$

$$\text{CMR: } (ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\text{Giải: Đặt } k = \frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a} \Rightarrow$$

$$k = \frac{cay-cbx}{c^2} = \frac{bcx-baz}{b^2} = \frac{abz-acy}{a^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{cay-cbx+bcx-baz+abz-acy}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow ay-bx = cx-az = bz-cy = 0$$

$$\Rightarrow (ay-bx)^2 = (cx-az)^2 = (bz-cy)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\text{Bài 30: Cho: } \frac{x^2-yz}{a} = \frac{y^2-zx}{b} = \frac{z^2-xy}{c}$$

$$\text{Chứng minh: } \frac{a^2-bc}{x} = \frac{b^2-ca}{y} = \frac{c^2-ab}{z}$$

$$\text{Hướng dẫn: Đặt } k = \frac{x^2-yz}{a} = \frac{y^2-zx}{b} = \frac{z^2-xy}{c}$$

$$\Rightarrow a = \frac{x^2-yz}{k}; b = \frac{y^2-zx}{k}; c = \frac{z^2-xy}{k}.$$

Sau đó tính a^2-bc ; b^2-ca ; c^2-ab theo x, y, z, k.

Rồi suy ra $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Bài 31: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn: $b \neq c, a + b \neq c$ và $c^2 = 2(ac + bc - ab)$

CMR: $\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}$

Hướng dẫn:

Ta có: Từ số $a^2 + (a - c)^2 = a^2 + c^2 - c^2 + (a - c)^2$
 $= a^2 + c^2 - 2(ac + bc - ab) + (a - c)^2$
 $= 2(a - c)(a - c + b)$

Tương tự ta có mẫu số $b^2 + (b - c)^2 = 2(b - c)(b - c + a)$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}$$

Bài 32: Cho biết $ax + by + cz = 0; a + b + c = \frac{1}{2000}$

CMR: $\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ac(x - z)^2 + ab(x - y)^2} = 2000$

Hướng dẫn:

* Từ $(ax + by + cz)^2 = 0 \Rightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -2(abxy + bcyz + cazx)$

* Xét mẫu số: $bc(y - z)^2 + ac(x - z)^2 + ab(x - y)^2$

$$= bcy^2 + bcx^2 + caz^2 + cax^2 + abx^2 + aby^2 - 2(abxy + bcyz + cazx)$$

$$= bcy^2 + bcx^2 + caz^2 + cax^2 + abx^2 + aby^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

$$= (ax^2 + by^2 + cz^2)(c + b + a)$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ac(x - z)^2 + ab(x - y)^2} = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(ax^2 + by^2 + cz^2)(a + b + c)} = \frac{1}{a + b + c} = 2000$$

Bài 33: Cho $a + b + c + d = 0$

CMR: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$

Giải:

Từ $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d)$

$$\Rightarrow (a + b)^3 = -(c + d)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 - d^3 - 3cd(c + d).$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd).$$

Bài 34: Cho x, y là 2 số thỏa mãn:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases} \quad \text{CMR: } a^3+b^3+c^3=3abc$$

Hướng dẫn:

Cộng 3 đẳng thức ta có

$$(a+b+c)x + (a+b+c)y = a+b+c.$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(x+y-1)=0$$

$$1/ \text{Hoặc là: } a+b+c=0$$

$$\text{Dùng HĐT: } a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$2/ \text{Hoặc là: } x+y-1=0 \Rightarrow x+y=1. \text{ Thay vào giả thiết, suy ra}$$

$$a=b=c \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử.

Bài 35:

$$\begin{aligned} a/ A &= (a-1)(a-2)(a-3) + (a-1)(a-2) - (a-1) \\ &= (a-1)[(a-2)(a-3) + (a-2) - 1] \\ &= (a-1)(a^2-5a+6+a-2-1) = (a-1)(a^2-4a+3) \\ &= (a-1)(a-1)(a-3) \\ &= (a-1)^2(a-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b/ A &= (a-b)(a^2-c^2) - (a-c)(a-b)^2 \\ &= (a-b)(a-c)[(a+b) - (a-c)(a-b)] \\ &= (a-b)(a-c)(a+b-a^2+ab+ac-bc) \end{aligned}$$

Bài 36:

$$\begin{aligned} a/ M &= ab(a+b) - bc(b+c) - ac(c-a) \\ &= ab(a+b) - bc[(a+b) + (c-a)] - ac(c-a) \\ &= ab(a+b) - bc(a+b) - bc(c-a) - ac(c-a) \\ &= (a+b)(ab-bc) - (c-a)(bc+ac) \\ &= (a+b).b(a-c) - (c-a).c(b+a) \\ &= (a+b)(a-c).b + (a-c).c(b+a) \\ &= (a+b)(a-c)(b+c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b/N &= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \quad (\text{Tương tự phần a}) \\
&= a(b^2 - c^2) - b(a^2 - c^2) + c(a^2 - b^2) \\
&= a(b^2 - c^2) - b[(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2)] + c(a^2 - b^2) \\
&= a(b^2 - c^2) - b(a^2 - b^2) - b(b^2 - c^2) + c(a^2 - b^2) \\
&= (b^2 - c^2)(a - b) - (a^2 - b^2)(b - c) \\
&= (b - c)(b + c)(a - b) - (a - b)(a + b)(b - c) \\
&= (a - b)(b - c) [(b + c) - (a + b)] = (a - b)(b - c)(b + c - a - b) \\
&= (a - b)(b - c)(c - a)
\end{aligned}$$

Bài 37:

$$\begin{aligned}
A &= x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 \\
&= x^4 + x^3 + 2x^2 - x^2 - x - 2 \\
&= x^2(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2) \\
&= (x^2 - 1)(x^2 + x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 2)
\end{aligned}$$

Bài 38:

$$\begin{aligned}
a/f(x) &= x^3 - x - 6 \\
&= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6 \\
&= x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 3(x - 2) \\
&= (x - 2)(x^2 + 2x + 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b/f(x) &= x^5 + x + 1 \\
&= x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\
&= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)
\end{aligned}$$

Bài 39:

$$\begin{aligned}
a/A &= 2x^3 + x^2 + x - 1 \\
&= (x^3 - 1) + (x^3 + x^2 + x) \\
&= (x - 1)(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(2x - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b/B &= 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \\
&= (x^3 - 1) + (2x^3 + 2x^2 + 2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(3x - 1)
 \end{aligned}$$

Bài 40:

$$\begin{aligned}
 a/ A &= 6x^2 - 5x + 1 \\
 &= 6x^2 - 3x - 2x + 1 \\
 &= 3x(2x - 1) - (2x - 1) \\
 &= (2x - 1)(3x - 1)
 \end{aligned}$$

$$b/ A = 2x^2 - 5xy + 2y^2 \quad (\text{Tương tự a/})$$

Bài 41:

$$\begin{aligned}
 a/ A &= 4x^2 - 4x - 3 \\
 &= 4x^2 - 4x + 1 - 4 = (2x - 1)^2 - 2^2 \\
 &= (2x - 1 + 2)(2x - 1 - 2) \\
 &= (2x + 1)(2x - 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b/ C &= 4x^2 - 11x + 6 = 4x^2 - 8x - 3x + 6 \\
 &= 4x(x - 2) - 3(x - 2) \\
 &= (4x - 3)(x - 2)
 \end{aligned}$$

Bài 42:

$$\begin{aligned}
 a/ A &= x^4 + 5x^2 + 9 \\
 &= x^4 + 6x^2 + 9 - x^2 = (x^2 + 3)^2 - x^2 \\
 &= (x^2 + 3 - x)(x^2 + 3 + x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b/ B &= x^4 + x^2y^2 + y^4 \\
 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\
 &= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)
 \end{aligned}$$

$$c/ C = x^4 + 3x^2 + 4 \quad (\text{Tương tự phần b})$$

Bài 43:

$$\begin{aligned}
 a/ C &= 4x^4 + 1 \\
 &= (2x^2)^2 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x^2) \\
 &= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)
 \end{aligned}$$

$$b/ D = 64x^4 + 81 \quad (\text{Tương tự a/})$$

Bài 44:

$$\begin{aligned}
a/ A &= (x^2 - 4x)^2 + 8(x^2 - 4x) + 15 \\
&= (x^2 - 4x)^2 + 2 \cdot 4(x^2 - 4x) + 16 - 1 \\
&= (x^2 - 4x + 4)^2 - 1 = (x^2 - 4x + 4 + 1)(x^2 - 4x + 4 - 1) \\
&= (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 3) \\
&= (x^2 - 4x + 5)(x - 3)(x - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b/ B &= x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 \\
&= (x + y)^2 + 2(x + y) - 3 = (x + y + 1)^2 - 2^2 \\
&= (x + y + 3)(x + y - 1)
\end{aligned}$$

Bài 45:

$$\begin{aligned}
A &= a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + cb^2 + c^2b + 2abc \\
&= ab(a + b) + c^2(a + b) + c(a^2 + b^2 + 2ab) \\
&= ab(a + b) + c^2(a + b) + c(a + b)^2 = (a + b)(ab + c^2 + ca + cb) \\
&= (a + b)[(a(b + c) + c(b + c))] \\
&= (a + b)(b + c)(a + c)
\end{aligned}$$

Bài 46:

$$\begin{aligned}
P &= a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \\
&= a^2(b - c) + c^2(a - b) - b^2(a - c) \\
&= a^2(b - c) + c^2(a - b) - b^2[(a - b) + (b - c)] \\
&= a^2(b - c) + c^2(a - b) - b^2(a - b) - b^2(b - c) \\
&= (a^2 - b^2)(b - c) + (a - b)(c^2 - b^2) = (a - b)(b - c)[a + b - c - b] \\
&= (a - b)(b - c)(a - c)
\end{aligned}$$

Bài 47:

$$\begin{aligned}
Q &= a^3 + 4a^2 - 29a + 24 = a^3 - a^2 + 5a^2 - 5a - 24a + 24 \\
&= a^2(a - 1) + 5a(a - 1) - 24(a - 1) = (a - 1)(a^2 + 5a - 24) \\
&= (a - 1)(a^2 - 3a + 8a - 24) = (a - 1)(a - 3)(a + 8).
\end{aligned}$$

Bài 48:

$$\begin{aligned}
a/ A &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 6x + 1 \\
&= x^2(x + 3)^2 - 2x(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x - 1)^2 \\
b/ B &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1) = (x+1)(x^2 + 5x + 6) \\
&= (x+1)(x^2 + 2x + 3x + 6) = (x+1)(x+2)(x+3)
\end{aligned}$$

Bài 49:

$$\begin{aligned}
a/ \quad A &= (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 \\
&= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 16 - 1
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } y = x^2 + 8x + 11 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= (y-4)(y+4) + 16 - 1 = y^2 - 16 + 16 - 1 = y^2 - 1 \\
&= (y+1)(y-1) \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$A = (x^2 + 8x + 11 + 1)(x^2 + 8x + 11 - 1) = (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10)$$

$$A = [(x+4)^2 - 2^2][(x+4)^2 - 2^2] = (x+2)(x+6)(x+4 + \sqrt{6})(x+4 - \sqrt{6})$$

$$\begin{aligned}
b/ \quad B &= (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 \\
&= 3(x-y)(y-z)(z-x)
\end{aligned}$$

$$\text{Vì } x - y + y - z + z - x = 0$$

Áp dụng ĐT: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (nếu $a + b + c = 0$)

$$\begin{aligned}
c/ \quad C &= (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 \\
&= (x+y)^3 + z^3 + 3z(x+y)(x+y+z) - x^3 - y^3 - z^3 \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 + 3z(x+y)(x+y+z) - x^3 - y^3 - z^3 \\
&= 3xy(x+y) + 3z(x+y)(x+y+z) = 3(x+y)(xy+xz+yz+z^2) \\
&= 3(x+y)(y+z)(x+z)
\end{aligned}$$

Bài 50:

$$\begin{aligned}
P &= x^4 + 2000x^2 + 1999x + 2000 \\
&= x^4 - x + 2000x^2 + 2000x + 2000 = x(x^3 - 1) + 2000(x^2 + x + 1) \\
&= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2000(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2000)
\end{aligned}$$

* **Nhận xét:** Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi một đa thức thành một tích của các đa thức khác có bậc khác không. Ta cũng lưu ý rằng lũy thừa của một đa thức với số mũ lũy thừa lớn hơn 1 là một tích các đa thức với các nhân tử bằng nhau. Có nhiều phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

Phương pháp 1: Phương pháp đặt nhân tử chung.

Làm xuất hiện nhân tử giống nhau ở các hạng tử của đa thức. Đặt nhân tử chung đó ra ngoài ngoặc.

Phương pháp 2: Dùng HĐT.

Biến đổi đa thức cần phân tích về dạng một vế của HĐT quen thuộc.

Phương pháp 3: Phương pháp nhóm các hạng tử.

Sử dụng tính chất kết hợp của phép cộng ta nhóm các hạng tử của đa thức cần phân tích một cách hợp lý để có thể sử dụng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc phương pháp dùng HĐT.

Phương pháp 4: Phương pháp tách một hạng tử thành một tổng.

Tách một hạng tử của đa thức thành một tổng để có thể sử dụng phương pháp nhóm các hạng tử cho đa thức mới nhận được.

Phương pháp 5: Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử.

Ngoài các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử ở trên còn một số phương pháp khác như phương pháp hệ số bất định, phương pháp đặt biến phụ ...

Khi làm loại toán trên, HS hãy tìm các cách giải khác nhau và hãy chọn cách làm ngắn gọn nhất. Trong các phương pháp trên thì thường ưu tiên số một là dùng cách đặt nhân tử chung, rồi đến dùng HĐT và sau đó là nhóm các hạng tử, v.v... Căn cứ vào từng bài, hãy làm thử rồi chọn cách phân tích; thông thường trong quá trình giải mỗi bài toán phân tích đa thức thành nhân tử cũng vẫn phải phối hợp, vận dụng linh hoạt các phương pháp trên.

Dạng 4: Rút gọn biểu thức:

Bài 51: Rút gọn biểu thức:

$$a) \quad M = \frac{a}{ab-2b^2} - \frac{2}{a^2+a-2ab-2b} \cdot \left(1 + \frac{3a+a^2}{a+3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{b(a-2b)} - \frac{2}{a(a-2b)+(a-2b)} \left(1 + \frac{3a+a^2}{a+3} \right) \\
&= \frac{a}{b(a-2b)} - \frac{2}{(a+1)(a-2b)} \cdot \frac{a+3+3a+a^2}{a+3} \\
&= \frac{a}{b(a-2b)} - \frac{2(a^2+4a+3)}{(a+1)(a-2b)(a+3)} \\
&= \frac{a}{b(a-2b)} - \frac{2(a+1)(a+3)}{(a+1)(a-2b)(a+3)} \\
&= \frac{a}{b(a-2b)} - \frac{2}{(a-2b)} = \frac{a-2b}{b(a-2b)} \\
&= \frac{1}{b} \quad (\text{Điều kiện: } b \neq 0; a \neq -1; a \neq -3; a \neq 2b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } N &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \right] : \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \\
&= \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}-(2\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad (\text{Điều kiện: } a > 0; b > 0; \sqrt{a} \neq \pm\sqrt{b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } P &= \left(\frac{x+y}{2x-2y} - \frac{x-y}{2x+2y} - \frac{2y^2}{y^2-x^2} \right) : \frac{2y}{x-y} \\
&= \left(\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} \right) : \frac{2y}{x-y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2 + 4y^2}{2(x^2 - y^2)} \cdot \frac{x-y}{2y} = \frac{4xy + 4y^2}{2(x^2 - y^2)} \cdot \frac{x-y}{2y} \\
&= \frac{4y(x+y)(x-y)}{2(x^2 - y^2) \cdot 2y} = 1 \quad (\text{Điều kiện: } x \neq 0; x \neq \pm y)
\end{aligned}$$

Bài 52: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1} \quad \text{Với } x < 0$

$$A = \frac{1-x+(-x)+x}{3x^2-3x-x+1} = \frac{1-x}{(x-1)(3x-1)} = \frac{1}{1-3x}$$

b) $B = \frac{3|x-1| + 5|x-3|}{x^2 - 12x + 36} = \frac{3(x-1) + 5(3-x)}{(x-6)(x-6)}$

$$= \frac{-2(x-6)}{(x-6)(x-6)} = \frac{-2}{(x-6)} = \frac{2}{6-x} \quad \cdot \quad \text{Với } 1 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x-3| = 3-x \end{cases}$$

Bài 53: Rút gọn biểu thức:

$$A = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

a) $A^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
 $A^2 = 4 + 2 = 6$
 $\Rightarrow A = \sqrt{6}$

b) $B = \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$
 $\Rightarrow B^2 = 8 - 2\sqrt{15} + 8 + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{64-4 \cdot 15}$
 $B^2 = 16 - 2\sqrt{4} = 16 - 4 = 12$
 $\Rightarrow B = -2\sqrt{3} \quad (\text{Do } B < 0)$

c) $C = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$
 $= \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$
 $= \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}$
 $= |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|$

$$\Rightarrow C = 2\sqrt{x-1}, \text{ Nếu } x \geq 2; C = 2, \text{ Nếu } x < 2$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad D &= \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}} \\ \sqrt{2}D &= \sqrt{8+2\sqrt{15}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} - 2\sqrt{6-2\sqrt{5}} \\ \sqrt{2}D &= \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \\ \sqrt{2}D &= |\sqrt{3}+\sqrt{5}| + |\sqrt{3}-\sqrt{5}| - 2|\sqrt{5}-1| \\ \sqrt{2}D &= \sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}+2 \\ \sqrt{2}D &= 2 \Rightarrow D = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow D = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 54:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad M &= \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{2+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{x(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ĐK: } x > 0; x \neq 1$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad N &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{3}{4x+1} - \frac{2}{2\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{4x+1}{4x-1} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1} - \frac{3}{4x-1} - \frac{2}{2\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{4x+1+4x-1}{4x-1} \right) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{x}+1-3-2(2\sqrt{x}-1)}{4x-1} \right) : \frac{8x}{4x-1} = \frac{2\sqrt{x}+1-3-4\sqrt{x}+2}{4x-1} : \frac{8x}{4x-1} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}}{4x-1} \cdot \frac{4x-1}{8x} = \frac{-\sqrt{x}}{4x} \quad \text{Điều kiện: } x \neq 1/4; x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad P &= \frac{x+1-\sqrt{x^2-1}}{x+1+\sqrt{x^2-1}} + \frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{x+1-\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{(x+1-\sqrt{x^2-1})^2(x+1+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+1)^2 - (\sqrt{x^2-1})^2} \\
&= \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{x^2-1} + (\sqrt{x^2-1})^2 + (x+1)^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2-1} + (\sqrt{x^2-1})^2}{(x+1)^2 - (\sqrt{x^2-1})^2} \\
&= \frac{x^2 + 2x + x^2 - 1 + x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 1} = \frac{2(2x^2 + 2x)}{2(x+1)} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)} = 2x
\end{aligned}$$

ĐK: $x < -1$ hoặc $x \geq 1$

Bài 55: Đơn giản biểu thức:

$$\begin{aligned}
A &= (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) \\
&= (2+1)(2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) \\
&= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) = (2^{16}-1)(2^{16}+1)(2^{32}+1) \\
&= (2^{32}-1)(2^{32}+1) = 2^{64} - 1
\end{aligned}$$

Bài 56: Đơn giản biểu thức:

$$Q = \frac{(a-x)^2}{a(b-a)(c-a)} + \frac{(b-x)^2}{b(a-b)(c-b)} + \frac{(c-x)^2}{c(a-c)(b-c)}$$

TXĐ: $abc \neq 0$; $a \neq b \neq c$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{(a-x)^2}{a(a-b)(c-a)} + \frac{(b-x)^2}{b(a-b)(b-c)} + \frac{(c-x)^2}{c(c-a)(b-c)} \right] \\
&= - \left[\frac{bc(a-x)^2(b-c)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{ac(b-x)^2(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{ab(c-x)^2(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} \right] \\
&= - \left[\frac{bc(a-x)^2(b-c) + ac(b-x)^2(c-a) + ab(c-x)^2(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} \right] (*)
\end{aligned}$$

• Phân tích tử thức (*) ta có:

$$\begin{aligned}
&bc(a-x)^2(b-c) + ac(b-x)^2(c-a) + ab(c-x)^2(a-b) \\
&= bc(a-x)^2(b-c) - ac(b-x)^2(b-c) - ac(b-x)^2(a-b) + ab(c-x)^2(a-b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c(b-c)[b(a-x)^2 - a(b-x)^2] - a(a-b)[c(b-x)^2 - b(c-x)^2] \\
&= c(b-c)(ba^2 - 2abx + bx^2 - ab^2 + 2abx - ax^2) - a(a-b)(cb^2 - 2bcx + cx^2 - bc^2 + 2bcx - bx^2) \\
&= c(b-c)(a-b)(ab - x^2) - a(a-b)(b-c)(bc - x^2) \\
&= (b-c)(a-b)(abc - cx^2 - abc + ax^2) \\
&= x^2(b-c)(a-b)(a-c) \\
\Rightarrow Q &= -\frac{x^2(b-c)(a-b)(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{x^2(b-c)(a-b)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{x^2}{abc}
\end{aligned}$$

Bài 57. Rút gọn:

$$a/ A = \frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

Giải:

$$A^2 = \frac{2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{(\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1})(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1})}}{(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1})^2}$$

$$A^2 = \frac{2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{(\sqrt[4]{8})^2 - (\sqrt{\sqrt{2}-1})^2}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$A^2 = \frac{2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$A^2 = \frac{2(\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1})}{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}} = 2. \text{ Vậy } A = \sqrt{2}.$$

$$b/ B = \frac{1 - \sqrt[3]{a}}{1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} - \frac{1 + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}$$

$$\text{Giải: } B = \frac{(1 - \sqrt[3]{a})(1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}) - (1 + \sqrt[3]{a})(1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})}{(1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})(1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})}$$

$$= \dots = \frac{-4\sqrt[3]{a} - 2a}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2} + 1}$$

Bài 58: Rút gọn:

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2011\sqrt{2010}+2010\sqrt{2011}}$$

Giải: * Ta có $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

* Thay $n = 1, 2, \dots, 2010$ vào, ta được:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

...

$$\frac{1}{2010\sqrt{2009}+2009\sqrt{2010}} = \frac{1}{\sqrt{2009}} - \frac{1}{\sqrt{2010}}$$

$$\frac{1}{2011\sqrt{2010}+2010\sqrt{2011}} = \frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}}$$

$$\text{Do đó } S = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2010}} - \frac{1}{\sqrt{2011}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2011}}$$

Bài 59: Rút gọn:

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$$

Giải: Điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|}{|x-2|} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$* x > 2 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$* 1 < x < 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$b/ \quad B = \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt[4]{a}} + \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^2 - \frac{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}}{1+\sqrt{a}}$$

Với $a > 0; a \neq 1$

Giải: Điều kiện: $a > 0; a \neq 1$

$$B = \left(\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}-1)}{1-\sqrt{a}} + \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^2 - \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)^2}}{1+\sqrt{a}}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} - \sqrt[4]{a} \right)^2 - \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)^2}}{1+\sqrt{a}}$$

$$= \left(\frac{(1+\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} - 2\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt[4]{a} + \sqrt{a} \right) - \frac{\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}}$$

= ...

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 0. \text{ Vậy với } a > 0; a \neq 1 \text{ Thì } B = 0$$

Bài 60:

a) Cho $0 < a < 1$ rút gọn biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}+a-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right).$$

Hướng dẫn:

$$P = \left(\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \right) \left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} \right) = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a} = -1$$

b) $B = \sqrt{2x-1+2\sqrt{x^2-x}} + \sqrt{2x-1-2\sqrt{x^2-x}}$ với $x \geq 1$.

Hướng dẫn:

$$B^2 = 2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x} + 2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x} + 2\sqrt{(2x-1)^2 - (2\sqrt{x^2-x})^2}$$

$$= \dots = 4x$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}. \text{ Vậy } B = 2\sqrt{x}$$

c) $C = \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147}$

Hướng dẫn:

$$C = \sqrt{16 \cdot 3} - 2\sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 3} - \frac{1}{7}\sqrt{49 \cdot 3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

Bài 61: Cho biểu thức:

$$P = 1 - \left(\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1}$$

Rút gọn P.

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{1}{4} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} P &= 1 - \left[\frac{(2x+2\sqrt{x})-(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2x+\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} \\ &= 1 - \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} \\ &= 1 - \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{(x-\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} \\ &= 1 - \left[\frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} \right] \\ &= 1 - \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-x)}{x-\sqrt{x}+1} \right] \end{aligned}$$

$$= 1 - \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x)}{x-\sqrt{x}+1} \right]$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x-\sqrt{x}+1} = \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}. \quad \text{Vậy } P = \frac{1}{x-\sqrt{x}+1}.$$

Bài 62: Cho $Q = \left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$

a) Tìm điều kiện của a, b để Q có nghĩa.

b) Rút gọn Q.

Giải:

a/ Tìm điều kiện của a, b để Q có nghĩa:

Ta thấy $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \neq \sqrt{b} \Rightarrow a \neq b$.

$$\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{(a^{-1})^2 - (b^{-1})^2}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})}{a^{-1} - b^{-1}} = a^{-1} + b^{-1} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0.$$

Vậy với $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ thì Q có nghĩa.

b/ Rút gọn Q:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } Q &= \left(\frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) : \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b) - \sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})} : \frac{(a^{-1})^2 - (b^{-1})^2}{a^{-1} - b^{-1}} \\ &= (a + b) : (a^{-1} + b^{-1}) = (a + b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = (a + b) : \frac{a + b}{ab} = ab. \end{aligned}$$

Vậy $Q = ab$

Bài 63: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \geq 2$

b) $B = \sqrt{2x - \sqrt{12x - 9}} + \sqrt{2x + \sqrt{12x - 9}}$ với $x \geq \frac{3}{2}$

Giải: a/ $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ Với $x \geq 2$.

$$\Rightarrow A^2 = x - \sqrt{x^2 - 4} + x + \sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2x - 2\sqrt{x^2 - (\sqrt{x^2 - 4})^2} = 2x - 4. \text{ Do } x \geq 2 \Rightarrow 2x - 4 \geq 0$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{2x - 4}.$$

b/ Giải tương tự.

Bài 64: Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$.

$$\text{Hướng dẫn: } \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{8 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} &= \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{(5 + 3\sqrt{2})^2} = 5 + 3\sqrt{2}. \text{ Vậy } P = 5 + 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

* **Nhận xét:**

- Rút gọn phân thức: Có thể làm như sau:

+ Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.

+ Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung (nếu có).

(Trong quá trình phân tích tử, mẫu cần lựa chọn đa thức nào “dễ” phân tích hơn để làm trước và dựa trên cơ sở đó ta phân tích đa thức còn lại).

- Rút gọn các biểu thức có căn: Thường làm như sau:

+ Biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng A^2 , rồi sử dụng HĐT: $\sqrt{A^2} = |A|$

+ Nếu biểu thức có hai căn bậc hai, căn bậc ba mà biểu thức dưới dấu căn là liên hợp của nhau, thường tính A bằng cách tính A^2, A^3 .

- Sử dụng, vận dụng thành thạo, linh hoạt các HĐT đáng nhớ.

- Sử dụng các phép biến đổi đơn giản của căn thức, phân thức, đa thức.

Dạng 5: Tính giá trị của biểu thức.

Bài 65:

a/ Cho $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a-b}{a+b}$

$$\text{Giải: Xét } P^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab} = \frac{10ab - 6ab}{10ab + 6ab} = \frac{4ab}{16ab}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4}, \text{ mà } P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } a, b > 0)$$

b/ Cho $x > y > 0$ và $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính giá trị của biểu thức: $E = \frac{x+y}{x-y}$

Chứng minh tương tự phần a/.

$$\text{Xét } E^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \dots = 9 \Rightarrow E = 3$$

Bài 66: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = x^2 - 5x - 2xy + 5y + y^2 + 4 \quad \text{biết rằng } x - y = 1$$

$$\text{Hướng dẫn: } A = (x^2 - 2xy + y^2) - 5(x - y) + 4 = \dots = 0.$$

Bài 67: a) Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}$

Giải:

Trước hết ta chứng minh: Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Thật vậy: Vì $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y) \Rightarrow z^3 = -(x + y)^3$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = -3xy(x + y) = -3xy(-z) \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

Áp dụng vào bài toán đã cho, ta suy ra:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = -\frac{3}{abc}$$

$$\text{Do đó } P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = \frac{abc}{c^3} + \frac{abc}{a^3} + \frac{abc}{b^3} = abc \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) = abc \cdot \frac{3}{abc} = 3.$$

Vậy $P = 3$.

b) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Giải: Thay $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ vào giả thiết ta có

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc = 0$$

$\Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \end{cases}$$

* Nếu $a+b+c=0$

$$\Rightarrow A = \frac{b+a}{b} \cdot \frac{c+b}{c} \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{(-c)}{b} \cdot \frac{(-a)}{c} \cdot \frac{(-b)}{a} \Rightarrow A=1$$

$$* a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$$

$\Leftrightarrow a=b=c$. Khi đó:

$$A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

(Lưu ý: Từ giả thiết $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0)$$

Bài 68: a) Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính giá trị của biểu thức:

$$B = a^4 + b^4 + c^4$$

a/ Hướng dẫn:

$$* \text{ Từ } a^2+b^2+c^2=14 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=14^2=196$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=196-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$* \text{ Từ } a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca=...$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2=...$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=...$$

Từ đó suy ra $a^4+b^4+c^4=98$.

b/ Cho các số $x=by+cz$, $y=ax+cz$, $z=ax+by$ và $x+y+z \neq 0$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } Q = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

Giải: Ta có $x+y+z=by+cz+ax+cz+ax+by=2(ax+by+cz)$.

$$\text{Thay } z=ax+by \Rightarrow x+y+z=2(z+cz)=2z(1+c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$$

$$\frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

Bài 69: a) Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Giải: Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 = \frac{c+a-b}{b}$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$$

Xét 2 trường hợp:

$$* a+b+c=0 \Rightarrow \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc} = -1$$

$$* a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow P = 2.2.2 = 8.$$

b/ Cho 3 số x, y, z thỏa mãn đồng thời:

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y^2 + 2z + 1 = 0 \\ z^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \text{ tính giá trị của biểu thức: } A = x^{2000} + y^{2000} + z^{2000}$$

Giải: Cộng từng vế các BĐT ta có:

$$x^2 + 2y + 1 + y^2 + 2z + 1 + z^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (-1)^{2000} + (-1)^{2000} + (-1)^{2000} = 1 + 1 + 1 = 3$$

(Có thể mở rộng và sáng tạo bài toán mới)

Bài 70: a) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ yz + y + z = 8 \\ zx + z + x = 15 \end{cases} \quad \text{tính giá trị của biểu thức: } P = x + y + z$$

Giải: Từ $xy + x + y = 3 \Rightarrow x(y+1) + (y+1) = 4 \Rightarrow (x+1)(y+1) = 4$.

Từ $yz + y + z = 8 \Rightarrow (y+1)(z+1) = 9$.

Từ $xz + z + x = 15 \Rightarrow (x+1)(z+1) = 16$.

Nhân từng vế $\Rightarrow (x+1)^2 (y+1)^2 (z+1)^2 = 4.9.16$.

Vì $x, y, z > 0 \Rightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 2.3.4 = 24$.

$$\Rightarrow \begin{cases} z+1 = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow z = 5 \\ y+1 = \frac{24}{16} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x+1 = \frac{24}{9} \Rightarrow x = \frac{15}{9} \end{cases} \quad \text{Vậy suy ra } P = x+y+z = \frac{15}{9} + \frac{1}{2} + 5 = \frac{129}{18}$$

b/ Cho 2 số x, y thỏa mãn: $xy + x + y = -1$; $x^2y + xy^2 = -12$

Tính giá trị của biểu thức: $P = x^3 + y^3$

Giải: Ta có $\begin{cases} xy = (x+y) = -1 \\ xy(x+y) = -12 \end{cases}$

Đặt $xy = a$ và $b = x + y \Rightarrow a + b = -1$; $ab = -12$

$\Rightarrow a = -b - 1 \Rightarrow b(-b - 1) = -12 \Rightarrow b^2 + b - 12 = 0$

$\Rightarrow (b^2 - 16) + (b - 4) = 0 \Rightarrow (b + 4)(b - 3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \Rightarrow a = 3 \\ b = 3 \Rightarrow a = -4 \end{cases}$

* Với $\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = -4 \end{cases} \Rightarrow P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = -28$

* Với $\begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = -4 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 63$

Bài 71: a) Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn: $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$.

Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

b) Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn:

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 3 \\ z + zx + x = 7 \end{cases} \quad \text{Tính giá trị của biểu thức: } M = x^1 + y^2 + z^3$$

(Chứng minh tương tự bài 70a)

Bài 72: a) Cho $\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \end{cases}$ Tính $x^3 + y^3 + z^3$ theo a, b, c.

Giải:

* Áp dụng HĐT:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + a[b^2 - (xy + yz + zx)]$$

Cần tính $xy + yz + zx$ và xyz theo a, b, c.

$$\text{Ta có } a^2 = (x + y + z)^2 \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$* \text{ Từ } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{c} \Rightarrow xyz = c(xy + yz + zx) \Rightarrow xyz = c \cdot \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = \frac{3c(a^2 - b^2) + a(3b^2 - a^2)}{2}$$

b/ Cho $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{cases}$ Tính giá trị của biểu thức: $P = xy + yz + zx$.

$$\text{Đặt } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ak; y = bk; z = ck$$

$$\Rightarrow P = k^2(ab + bc + ca)$$

$$\text{Từ } a + b + c = 1 \Rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = 0 \Rightarrow P = 0.$$

$$c/ \text{ Cho } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Tính: } P = a + b^2 + c^3$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } Q = a^{1998} + b^{1999} + c^{29000}$$

$$\text{Giải: Từ } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\Rightarrow 1 - 3abc = 1 \cdot (1 - ab - bc - ca) \Rightarrow 3abc = ab + bc + ca.$$

$$\text{Mà } 1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 0 \Rightarrow 3abc = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$* \text{ Nếu } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} b + c = 1 \\ b^2 + c^2 = 1 \\ b^3 + c^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 1 \Rightarrow 2bc = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow c = 1 \\ c = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow P = a + b^2 + c^3 = 1$$

$$Q = a^{1998} + b^{1999} + c^{29000} = 1$$

$$* \text{ Nếu } b = 0, \text{ làm tương tự, ta có } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$* \text{ Nếu } c = 0, \text{ làm tương tự, ta có } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Như vậy trong mọi trường hợp, ta đều có $P = 1$ & $Q = 1$

$$\text{Bài 73: a) Cho } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ và } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$$

$$\text{Tính giá trị biểu thức: } A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Giải: Từ $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right)$

$\Rightarrow A = 1 - 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) = 1 - 2\left(\frac{cxy}{abc} + \frac{ayz}{abc} + \frac{bzx}{abc}\right)$

Từ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bzx + cxy}{xyz} = 0 \Rightarrow ayz + bzx + cxy = 0$

$\Rightarrow A = 1 - \frac{0}{abc} = 1$. Vậy $A = 1$

b/ Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $abc = 2000$

Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{2000a}{ab + 2000a + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Hướng dẫn: Thay $2000 = abc$.

$\Rightarrow P = \frac{abc \cdot a}{ab + abc \cdot a + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1}$

$\Rightarrow \frac{ca}{1 + ca + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} \Rightarrow P = 1$

Bài 74: a/ Cho a, b, c khác không và $a + b + c = 0$. Tính giá trị biểu thức:

$$Q = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2}$$

Giải:

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$.

Tương tự $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$; $c^2 + a^2 - b^2 = -2ca$

Thay vào ĐT cần chứng minh ta $\Rightarrow Q = 0$.

b) Cho a, b, c đôi một khác nhau. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Hướng dẫn: $P = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Phân tích tử số thành nhân tử bằng cách thay:

$$c - b = -(a - c) - (b - a)$$

$$\text{Ta có } P = \frac{(b-a)(a-c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

Bài 75: a) Cho a, b, c là ba số khác nhau. CMR giá trị của biểu thức sau là một hằng số (không phụ thuộc vào a, b, c).

$$S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0. \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

b) Cho a, b, c là ba số khác nhau, liên hệ bởi biểu thức $a + b + c = 1$. CMR giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào a, b, c

$$T = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \end{aligned}$$

Phân tích tử số $= (b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$.

$\Rightarrow T = a + b + c$, theo giả thiết ta có $a + b + c = 1 \Rightarrow T = 1$.

Vậy T không phụ thuộc vào a, b, c .

Bài 76: Cho các số a, b, c đôi một phân biệt

$$\text{Đặt } S_k = \frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} \quad \text{với } k \in \mathbb{N}$$

Tính S_0, S_1, S_2, S_3 .

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } * S_0 &= \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} \end{aligned}$$

$$= \frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0.$$

$$\begin{aligned} * S_1 &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * S_2 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \end{aligned}$$

$$\text{Tử số} = a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c).$$

$$= (b-c)(a^2 - ab - ac + bc) = (b-c)(a-b)(a-c) \quad \text{Vậy } S_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} * S_3 &= \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \end{aligned}$$

$$\text{Phân tích tử số} = (b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c).$$

$$\text{Vậy } S_3 = a + b + c.$$

(Bài 76 là tổng quát của bài 74b và bài 75)

Bài 77: a) Cho các số khác không a, b, c. Tính giá trị biểu thức:

$$T = x^{2003} + y^{2003} + z^{2003}$$

Biết x, y, z thỏa mãn điều kiện sau:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Hướng dẫn:

Từ giả thiết suy ra:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = 0. (*)$$

$$\text{Do } \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} > 0,$$

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} > 0,$$

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} > 0.$$

Suy ra $x = y = z = 0 \Rightarrow T = 0$

b) Cho $x > 0$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị biểu thức:

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

Hướng dẫn: Từ giả thiết suy ra: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$ (vì $x > 0$).

$$\text{Do } 21 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ nên } x^3 + \frac{1}{x^3} = 18.$$

$$\text{Để thấy } 7 \cdot 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = \left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right), \text{ suy ra:}$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$$

Bài 78: Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ với:

$$\text{a) } x = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}; y = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } x = 4 - \sqrt{15}; y = 4 + \sqrt{15}$$

Hướng dẫn:

$$\text{a) Ta có } 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$$

Từ đó $\Rightarrow A = \dots$

$$\text{b) Tính } A^2 = x + y - 2\sqrt{xy} = 4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}$$

$$= 8 - 2\sqrt{16 - 15} = 8 - 2 = 6 \Rightarrow A = \pm\sqrt{6}, \text{ do } x < y \text{ nên } A = -\sqrt{6}$$

Bài 79:

$$\text{a) Tính: } \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$$

Hướng dẫn:

Ta có:

$$6\sqrt{3} + 10 = (\sqrt{3})^3 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 1^2 + 1^3 = (\sqrt{3} + 1)^3$$

$$6\sqrt{3} - 10 = (\sqrt{3} - 1)^3$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

b) Tính giá trị của biểu thức:

$$A = (3x^3 + 8x^2 + 2)^{2012}, \text{ với } x = \frac{(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Rút gọn: } x = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3} \cdot (\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}} = \frac{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 3^{2012}.$$

Bài 80: a) Tính giá trị biểu thức:

$$A = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$$

$$\text{Tại } x = \sqrt[3]{1995}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Xét } A^3 = x^3 - 3x + 3A\sqrt[3]{\frac{4}{4}} \Leftrightarrow A^3 = x^3 - 3x + 3A \Leftrightarrow A^3 - 3A - x^3 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - x)(A^2 + Ax + x^2) - 3(A - x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (A - x)(A^2 + Ax + x^2 - 3) = 0.$$

$$* A - x = 0 \Leftrightarrow A = x = \sqrt[3]{1995}$$

* $A^2 + Ax + x^2 - 3 = 0$ có $\Delta = 3(4 - x^2) < 0$ vì $x = \sqrt[3]{1995}$. Do đó PT cuối vô nghiệm.

$$\text{Vậy } A = \sqrt[3]{1995}.$$

b) Cho $x, y, z > 0$, thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Giải:

$$\text{Xét: } (1+y^2) = xy + yz + zx + y^2 = x(y+z) + y(y+z) = (y+z)(x+y).$$

Tương tự: $(1 + z^2) = (x + z)(z + y)$.

$$(1 + x^2) = (x + y)(x + z).$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + y^2)(1 + z^2)}{1 + x^2} = \frac{(y + z)^2(y + x)(z + x)}{(x + y)(x + z)} = (y + z)^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(1 + y^2)(1 + z^2)}{1 + x^2}} = \sqrt{(y + z)^2} = y + z.$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{(1 + z^2)(1 + x^2)}{1 + y^2}} = z + x$

$$\sqrt{\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{1 + z^2}} = x + y$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } P &= x(y + z) + y(z + x) + z(x + y) \\ &= 2(xy + yz + zx) = 2\end{aligned}$$

Vậy $P = 2$.

Bài 81: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{1 + 2x}{1 + \sqrt{1 + 2x}} + \frac{1 - 2x}{1 - \sqrt{1 - 2x}}$ với $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Giải: Ta có: $1 + 2x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4}$.

$$1 - 2x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4 \left[1 + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right]} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4 \left[1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right]} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2(3 + \sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2(3 - \sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow A = 1$$

b) $B = x^2 + \sqrt{x^4 + x + 1}$ với $x = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$

Giải:

Ta có: $8x = 4\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \sqrt{2} \Leftrightarrow 8x + \sqrt{2} = \sqrt{16\sqrt{2} + 2}$

$$\Leftrightarrow (8x + \sqrt{2})^2 = 16\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 64x^2 + 16x\sqrt{2} + 2 = 16\sqrt{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = \sqrt{2} - x\sqrt{2}.$$

Đặt $C = \sqrt{x^4 + x + 1} - x^2$.

Ta có: $B = \sqrt{x^4 + x + 1} + x^2$

$\Rightarrow BC = x + 1 \Rightarrow B(-C) = -(x + 1)$

$$B - C = 2x^2 = \frac{\sqrt{2} - x\sqrt{2}}{2} = \frac{1-x}{\sqrt{2}}$$

Có thể xem B và $(-C)$ là các nghiệm của PT

$t^2 - \frac{(1-x)}{\sqrt{2}}t - (x+1) = 0$. Giải PT này ta có 2 nghiệm:

$t_1 = \sqrt{2}$ và $t_2 = -\frac{x-1}{\sqrt{2}}$

Suy ra $B = \sqrt{2}$ (vì $B > 0$)

Bài 82: a) Cho $x > 2$ và $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = a$. Tính giá trị của biểu thức:

$A = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4x - x^2}}}{x-2}$ theo a

Giải: $A = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{x(4-x)}}}{\sqrt{2}(x-2)} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{x(4-x)}}}{\sqrt{2}(x-2)}$
 $= \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x(4-x)} + 4 - x}}{\sqrt{2}(x-2)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x} - \sqrt{4-x})^2}}{\sqrt{2}(x-2)} \Rightarrow A = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{4-x}|}{\sqrt{2}(x-2)}$

Bởi vì $x > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 4 - x \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{4-x}$.

$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{2}(x-2)} = \frac{[x - (4-x)]}{\sqrt{2}(x-2)(\sqrt{x} - \sqrt{4-x})} \Rightarrow A = \frac{2(x-2)}{\sqrt{2}(x-2) \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

b) Cho $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ và $\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x} = a$. Tính:

$B = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{9 - 4x^2}}}{x}$ theo a (x khác 0).

Giải: Ta có: $6 + 2\sqrt{9 - 4x^2} = (3 - 2x) + 2\sqrt{(3 - 2x)(3 + 2x)} + (3 + 2x)$
 $= (\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{3 + 2x})^2$

$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{3 + 2x}}{x} = \frac{(3 + 2x) - (3 - 2x)}{x \cdot (\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{3 + 2x})} = \frac{4x}{x \cdot a}$. Vậy $B = \frac{4}{a}$.

Bài 83: a) Cho $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, trong đó $a > 0, b > 0$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } x^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 - 1 = \frac{(a-b)^2}{4ab}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{2|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2|a-b|}{a+b-|a-b|}.$$

$$* \text{ Nếu } a \geq b \Rightarrow A = \frac{2(a-b)}{a+b-(a-b)} = \frac{a-b}{b}$$

$$* \text{ Nếu } a < b \Rightarrow A = \frac{-2(a-b)}{a+b+a-b} = \frac{-2(a-b)}{2a} = \frac{b-a}{a}$$

b) Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{xy - \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}} \quad \text{với } x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \text{ và } y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right), \text{ Với } a, b \geq 1$$

Hướng dẫn:

$$\text{Tính } x^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \right) - 1 = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \right) = \frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{a} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \quad \text{vì } a \geq 1.$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right) \quad \text{vì } b \geq 1.$$

$$\text{Đáp số: } P = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 + 1}$$

Bài 84: a) Cho $E = \frac{1+xy}{x+y} + \frac{1-xy}{x-y}$. Tính giá trị của E, biết:

$$x = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$y = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$$

Hướng dẫn:

Ta rút gọn x và y.

$$x = \sqrt{2(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})} = \sqrt{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

$$y = \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Từ đó } E = \frac{5}{8}.$$

$$\text{b) Tính } P = \sqrt{1+1999^2 + \frac{1999^2}{2000^2}} + \frac{1999}{2000}.$$

Giải: Ta có: $2000^2 = (1999 + 1)^2 = 1999^2 + 2 \cdot 1999 + 1$.

$$\Rightarrow 1 + 1999^2 = 2000^2 - 2 \cdot 1999.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \sqrt{2000^2 - 2 \cdot 1999 + \frac{1999^2}{2000^2}} + \frac{1999}{2000} \\ &= \sqrt{\left(2000 - \frac{1999}{2000}\right)^2} + \frac{1999}{2000} = 2000 - \frac{1999}{2000} + \frac{1999}{2000} = 2000 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2000$.

Bài 85: Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a) } T = (a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} + (a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}. \text{ Trong đó } x = (a-1); a = 4 + 2\sqrt{2}$$

Giải: Ta có:

$$a+x^{\frac{1}{2}} = a+\sqrt{4(a-1)} = (a-1) + 2\sqrt{a-1} + 1 = (\sqrt{a-1}+1)^2$$

$$a-x^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{a-1}-1)^2. \text{ Do vậy:}$$

$$\left[(\sqrt{a-1}+1)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[(\sqrt{a-1}-1)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\sqrt{a-1}+1|} + \frac{1}{|\sqrt{a-1}-1|} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{a-1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{|\sqrt{a-1}+1|} + \frac{1}{|\sqrt{a-1}-1|} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

b) $M = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$. Trong đó $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$; $0 < a < 1$

Hướng dẫn:

* Biến đổi biểu thức, ta được:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2a\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)} = \frac{2a(1+x^2+x\sqrt{1+x^2})}{1+x^2-x^2} \\ &= 2a(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}) = a(2+2x^2+2x\sqrt{1+x^2}) \\ &= a[(1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+x^2)+1] = a[(\sqrt{1+x^2}+x)^2+1] \quad (*) \end{aligned}$$

* Mặt khác:

$$\begin{aligned} 1+x^2 &= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{a} + \frac{a}{1-a} - 2\sqrt{\frac{(1-a)\cdot a}{a\cdot(1-a)}}\right) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-2a+a^2+a^2}{a-a^2} - 2\right) \\ &= \dots = \frac{1}{4a(1-a)}. \\ \Rightarrow (*) &= a\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{a(1-a)}}\right)^2 + 1\right] = \dots = \\ &= a\left[\frac{(1-2a+1)^2}{4a(1-a)} + 1\right] = a\left[\frac{(1-a)^2}{a(1-a)} + 1\right] = a\left[\frac{(1-a)}{a} + 1\right] = 1. \end{aligned}$$

Vậy $M = 1$.

c) $A = \sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$ với $x = \sqrt[3]{25}$

Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, ta được:

$$A^3 = \frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2} + \frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2} + 3AB$$

Trong đó: $B = \sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = 1$

Vậy $A^3 = x^3 - 3x + 3A$, hay $A^3 - x^3 - 3(x - A) = 0$.

Hay $(A-x)(A^2-Ax+x^2-3) = 0$. Do $x^2 > 3$; $A > 0$ và $x > 0 \Rightarrow A-x = 0$.

$$\Rightarrow A = x. \text{ Vậy } A = \sqrt[3]{25}.$$

Bài 86: Tính giá trị của biểu thức

$$a) P = \sqrt{1 + \underbrace{99\dots 9^2}_n + 0, \underbrace{99\dots 9^2}_n}$$

Hướng dẫn: Ta có: $\underbrace{99\dots 9^2}_n = (10^n - 1)^2$

$$\underbrace{0,99\dots 9^2}_n = \frac{(10^n - 1)^2}{10^{2n}}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{1 + (10^n - 1)^2 + \left(\frac{10^n - 1}{10^n}\right)^2}$$

Đặt $a = 10^n - 1$; khi đó:

$$P = \sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}} = \frac{1}{1+a} \sqrt{(a+1)^2 + a^2(a+1)^2 + a^2}$$

$$P = \dots$$

$$P = \frac{1}{1+a} \sqrt{(a^2 + a + 1)^2} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$$

Suy ra:

$$P = \frac{10^{2n} - 10^n + 1}{10^n} = 10^n - \frac{10^n - 1}{10^n} = 10^n - \underbrace{0,99\dots 9}_n$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow P = \underbrace{99\dots 9,00\dots 01}_n$$

$$b) S = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

Hướng dẫn:

Xét với $k \in N, k \geq 2$ ta có:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{(k-1)k} - \frac{2}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{2}{k} \quad \left(\text{vì } \frac{2}{(k-1)k} = \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \Rightarrow 1 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1^2 + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2}} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

cho $k = 3, 4, \dots, 100$ ta có:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(1 + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 98 + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = 98,49 \end{aligned}$$

Bài 87: a) Cho $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}$. Tính $P = x^3 + 3x + 2$

Hướng dẫn: Đặt $u = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

$$v = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}} \quad \text{thì} \quad \begin{cases} x = u - v \\ u.v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= (u-v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v) = \sqrt{2}-1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3x \\ &= \sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}+1) - 3x = \sqrt{2}-1 - \sqrt{2}-1 - 3x \\ &= -3x - 2. \text{ Do đó } P = 0 \end{aligned}$$

b) Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 25 \\ \frac{b^2}{3} + c^2 = 9 \\ c^2 + ac + a^2 = 16 \end{cases}$$

Tính giá trị của $P = ab + 2bc + 3ac$

Hướng dẫn:

$$\text{Theo giả thiết: } \left(\frac{b^2}{3} + c^2\right) + (c^2 + ac + a^2) = a^2 + ab + \frac{b^2}{3}$$

$$\text{Ta có: } P^2 = (ab + 2bc + 3ac)^2 = a^2b^2 + 4b^2c^2 + 9a^2c^2 + 4ab^2c + 6a^2bc + 12a^2bc$$

$$\Rightarrow P^2 - 12\left(\frac{b^2}{3} + c^2\right)(c^2 + ac + a^2) = 0 \quad (1)$$

Bằng cách thay $P = ab + 2bc + 3ac$ và $2c^2 = a(b-c)$ vào (1)

$$\text{Từ đó: } P^2 = 12\left(\frac{b^2}{3} + c^2\right)(c^2 + ac + a^2)$$

$$\Rightarrow P^2 = 12.9.16$$

$$\text{Vậy } P = 24\sqrt{3}$$

2.3.2. Bồi dưỡng năng lực về chứng minh BĐT.

1/ Các kiến thức cơ bản.

a/ Định nghĩa.

BĐT là hai biểu thức nối với nhau bởi một trong các dấu $>$ (lớn hơn), $<$ (nhỏ hơn), $\geq$ (lớn hơn hoặc bằng), $\leq$ (nhỏ hơn hoặc bằng).

$$\text{Ta có } A > B \Leftrightarrow A - B > 0$$

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0.$$

- Trong BĐT $A > B$ (hoặc $A < B$, $A \geq B$, $A \leq B$), A gọi là vế trái, B gọi là vế phải của BĐT.

- Các BĐT $A > B$ và $C > D$ gọi là hai BĐT cùng chiều.

- Các BĐT $A > B$ và $E < F$ gọi là hai BĐT trái (ngược) chiều.

- Nếu ta có $A > B \Rightarrow C > D$ Ta nói BĐT $C > D$ là hệ quả của BĐT $A > B$.

- Nếu ta có $A > B \Leftrightarrow E > F$. Ta nói BĐT $A > B$ và bất đẳng thức $E > F$ là hai BĐT tương đương.

- $A > B$ (hoặc $A < B$) là BĐT ngặt; $A \geq B$ (hoặc $A \leq B$) là BĐT không ngặt.

- $A \geq B$ là $A > B$ hoặc $A = B$.

- $A \neq B$ cũng là một BĐT.

- Hai BĐT cùng chiều hợp thành một dãy không mâu thuẫn gọi là BĐT kép.

$$\text{Ví dụ: } A < B < C.$$

b/ Tính chất:

$$\text{Tính chất 1. } a > b \Leftrightarrow b < a$$

$$\text{Tính chất 2. } a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a > c \text{ (tính chất bắc cầu)}$$

$$\text{Tính chất 3. } a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$$

$$\text{Hệ quả: } a > b + c \Leftrightarrow a - c > b.$$

$$\text{Tính chất 4. } a > b \text{ và } c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

Tính chất 5. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc, & c > 0 \\ ac < bc, & c < 0 \end{cases}$

Tính chất 6. $a > b > c$ và $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

Tính chất 7. $a > b > 0$, n nguyên dương $\Rightarrow a^n > b^n$.

Tính chất 8. $a > b > 0$, n nguyên dương $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: $a, b \geq 0, \quad a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$

Tính chất 9. $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Tính chất 10. $a > 1$, m và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m > a^n$;

$0 < a < 1$, m và n nguyên dương, $m > n \Rightarrow a^m < a^n$.

c/Chứng minh BĐT.

Muốn chứng minh một BĐT, ta phải dựa vào những BĐT đúng đã biết.

Ghi nhớ: $\forall a$

. $a^2 \geq 0, -a^2 \leq 0$, Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

. $|a| \geq 0$, Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

. $-|a| \leq a \leq |a|$, Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$.

Có hai cách cơ bản để chứng minh BĐT:

- Biến đổi BĐT cần chứng minh thành một BĐT tương đương mà ta đã biết là đúng.

- Biến đổi tương đương BĐT đã biết thành BĐT cần chứng minh, hoặc ngược lại.

Sau đây là một số phương pháp chứng minh BĐT. Khi giải một bài toán chứng minh BĐT, cần phải căn cứ vào đặc thù của bài toán mà chọn phương pháp thích hợp.

Mỗi bài toán có thể được giải bằng các phương pháp khác nhau, cũng có khi phải phối hợp nhiều phương pháp.

2/ Một số phương pháp chứng minh BĐT

a/ Phương pháp vận dụng định nghĩa và tính chất của BĐT

Bài toán chứng minh: $A \geq B$.

Phương pháp 1: Phương pháp dựa vào định nghĩa. (Bài 1 $\rightarrow$ bài 6)

- Lập hiệu: $A - B$
- Biến đổi biểu thức ($A - B$) và chứng minh $A - B \geq 0$
- Kết luận $A \geq B$
- Xét trường hợp $A = B$ khi nào ?

Bài 1: CMR: $(a + b)^2 \geq 4ab$

$$\begin{aligned}\text{Xét hiệu: } (a + b)^2 - 4ab &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 2: CMR: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ Với mọi $a, b > 0$

$$\text{Xét hiệu: } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b$$

Bài 3: CMR: $x^2 + 2y^2 + z^2 \geq 2xy - 2yz$

$$\text{Xét hiệu: } x^2 + 2y^2 + z^2 - (2xy - 2yz)$$

$$= x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2yz$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2$$

$$= (x - y)^2 + (y + z)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2y^2 + z^2 \geq 2xy - 2yz$$

Bài 4: CMR: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$$\text{Xét hiệu: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae$$

$$= (b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2) + (c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2) + (d^2 - ad + \frac{1}{4}a^2) + (e^2 - ae + \frac{1}{4}a^2)$$

$$= (b - \frac{1}{2}a)^2 + (c - \frac{1}{2}a)^2 + (d - \frac{1}{2}a)^2 + (e - \frac{1}{2}a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{1}{2}a$$

$$\text{Bài 5: CMR: } \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu: } \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2 &= \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2. \text{ Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Bài 6: Cho } a \geq 1; b \geq 1. \text{ CMR: } a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$$

Giải: Lập hiệu

$$ab - (a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}) = \frac{1}{2}(2ab - 2a\sqrt{b-1} - 2b\sqrt{a-1})$$

=...

$$= \frac{1}{2}[a(\sqrt{b-1})^2 + b(\sqrt{a-1})^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$$

Phương pháp 2: Phương pháp biến đổi tương đương. (Bài 7 → bài 12)

Để chứng minh $A \geq B$, ta dùng các tính chất của BĐT, biến đổi tương đương BĐT cần chứng minh đến một BĐT đã biết là đúng.

$$\text{Bài 7: CMR: } 3(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a + b + c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0$$

BĐT cuối cùng đúng, BĐT cần chứng minh đúng.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c$$

Bài 8: CMR:

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2 \geq 3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(ab)^2 + 2(bc)^2 + 2(ca)^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab - ac)^2 + (bc - ba)^2 + (ca - bc)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2 \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$\Rightarrow$ BĐT cuối đúng $\Rightarrow$ BĐT cần chứng minh đúng.

Bài 9: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ ($a, b > 0$)

$$\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq 0$$

BĐT cuối cùng $\Rightarrow$ BĐT cần chứng minh đúng.

Bài 10: Cho $a, b, c, d \geq 0$. CMR: $\sqrt{(a+b)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

Giải:

$$\sqrt{(a+b)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+d) \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd}$$

$$\Leftrightarrow ab + ad + cb + cd \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd}$$

$$\Leftrightarrow ad + cb - 2\sqrt{abcd} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{ad} - \sqrt{cb})^2 \geq 0$$

BĐT cuối đúng $\Rightarrow$ BĐT cần chứng minh đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Bài 11: Cho $a, b \geq 1$. CMR:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Giải:

$$\left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[-a(1+b^2)+b(1+a^2)] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(ab-1) \geq 0$$

BĐT trên đúng, do đó BĐT đã cho đúng

Bài 12:

a/ CMR: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Giải:

* Nếu $\frac{a+b}{2} \leq 0$, ta có BĐT phải chứng minh.

* Nếu $\frac{a+b}{2} > 0$, ta có

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \leq 2a^2+2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \text{ BĐT cuối đúng } \Rightarrow \text{ BĐT cần CM đúng}$$

b/ Cho a, b, c với $a > c, b > c > 0$ CMR: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)} \leq ab \Leftrightarrow \left(c - \sqrt{(a-c)(b-c)}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ca - c^2 + cb - c^2 + 2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)} \leq ab$$

$\Rightarrow$ BĐT cuối đúng $\Rightarrow$ BĐT cần chứng minh đúng.

Phương pháp 3: Phương pháp làm trội. (Bài 13 $\rightarrow$ bài 17)

Để chứng minh $A \geq B$ nhiều khi ta phải chứng minh $A \geq C$, với $C \geq B$.

Từ đó ta có $A \geq B$, hoặc ta chứng minh $D \geq B$, với $D \leq A$, từ đó ta có $A \geq B$.

Bài 13: CMR: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ Với $n \in \mathbb{N}; n > 1$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$$

.....

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Cộng từng vế của các BĐT cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (n \text{ số hạng})$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 14: CMR: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Cộng vế với vế của các BĐT cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

(n số hạng) $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 15: CMR: $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$

Giải:

$$\text{Với } k > 0 \text{ ta có } \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad (1)$$

$$\text{Và } \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) ta có } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Từ (2) ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 1 + 2(-1 + \sqrt{n}) = 2\sqrt{n} - 1.$$

Vậy suy ra đpcm.

Bài 16: CMR: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n^2 + (n+1)^2)} < \frac{1}{2}$ (với $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$)

Ta có: vì $n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1 < 2n^2 - 2n$ nên

$$\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2n^2 + 2n} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{5} < \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{13} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

...

$$\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Cộng vế với vế của các BĐT cùng chiều ta được:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{2} \text{ (đpcm)}$$

Bài 17: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. CMR:

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc.$$

Giải: Ta có $a^2 - (b - c)^2 \leq a^2$, vì $(b - c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b - c)(a - b + c) \leq a^2$

a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên $a + b > c$ và $a + c > b$.

Do đó $a + b - c > 0$ và $a - b + c > 0$.

$$\text{Ta có: } 0 < (a + b - c)(a - b + c) \leq a^2 \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } 0 < (a + b - c)(-a + b + c) \leq b^2 \quad (2).$$

$$0 < (-a + b + c)(a - b + c) \leq c^2 \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta có: $[(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)]^2 \leq (abc)^2$

$$\Rightarrow (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc.$$

Phương pháp 4: Phương pháp phản chứng. (Bài 18 $\rightarrow$ bài 21)

Để chứng minh $A \geq B$, ta giả sử $A < B$, từ đó lập luận để dẫn đến điều vô lý.
 Như vậy, ta đã dùng phương pháp chứng minh phản chứng.

Bài 18: CMR: $|a| + |b| \geq |a + b|$ (1)

Giải: Giả sử $|a| + |b| < |a + b| \Leftrightarrow (|a| + |b|)^2 < (a + b)^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2|ab| + b^2 < a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow |ab| < ab \text{ Vô lí } \Rightarrow \text{BĐT (1) đúng (đpcm).}$$

Bài 19: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$; $abc > 0$.

CMR: $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$.

Giả sử $a \leq 0$

+ Nếu $a = 0$ thì $abc = 0 \Rightarrow$ trái với $abc > 0$.

+ Nếu $a < 0$ do $a + b + c > 0 \Rightarrow b + c > 0$.

Do $abc > 0 \Rightarrow bc < 0 \Rightarrow a(b+c) + bc < 0 \Leftrightarrow ab+ac+bc < 0$ trái với giả thiết.

Vậy $a > 0$.

Chứng minh tương tự ta có $b > 0$; $c > 0$

Bài 20: Chứng tỏ rằng một trong các BĐT sau là sai:

$$a - \sqrt{bc} < 0; b - \sqrt{ac} < 0; c - \sqrt{ab} < 0 \quad (a, b, c > 0)$$

Giả sử cả 3 BĐT đều đúng. Cộng vế với vế của 3 BĐT ta được.

$$a + b + c - (\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}) < 0$$

$$2(a + b + c) - 2(\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}) < 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 < 0 \text{ vô lí,}$$

$$\text{vì } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0; (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0; (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0.$$

Vậy một trong các BĐT là sai.

Bài 21: Cho 3 số dương $a, b, c < 2$. CMR: có ít nhất một trong các BĐT sau là sai: $a(2 - b) > 1$; $b(2 - c) > 1$; $c(2 - a) > 1$.

Giải: Giả sử các BĐT đều đúng.

$$\text{Ta có } a(2 - b) > 1; b(2 - c) > 1; c(2 - a) > 1.$$

$$\Rightarrow a(2-b) \cdot b(2-c) \cdot c(2-a) > 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } a(2-a) &= 2a - a^2 = 1 - (1 - 2a + a^2) \\ &= 1 - (1-a)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{và do } 0 < a < 2 \Rightarrow a(2-a) > 0.$$

$$\text{Ta có } 0 < a(2-a) \leq 1.$$

$$\text{Tương tự } 0 < b(2-b) \leq 1, 0 < c(2-c) \leq 1.$$

$$\text{Do đó } a(2-a) \cdot b(2-b) \cdot c(2-c) \leq 1.$$

$$\Rightarrow a(2-b) \cdot b(2-c) \cdot c(2-a) \leq 1. \quad (2).$$

(1) và (2) mâu thuẫn. Do đó có ít nhất một BĐT sai.

b/ Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về BĐT.

Để chứng minh BĐT $A \geq B$ nhiều khi cần sử dụng một số bài toán cơ bản về BĐT để làm bài toán phụ, giúp tìm đến lời giải bài toán.

Phương pháp 5: Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về phân số:

(Bài 22 $\rightarrow$ bài 27)

Kiến thức cần nhớ: Một số bài toán BĐT có dạng phân thức thường vận dụng các bài toán cơ bản về phân số, ta có hai bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1: Với $a, b, c > 0$. CMR:

$$a/ \text{ Nếu } a < b \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$b/ \text{ Nếu } a \geq b \text{ thì } \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$$

Lời giải:

$$a/ a < b \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ab + ac < ab + bc \Rightarrow a(b+c) < b(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

b/ Chứng minh tương tự.

Bài toán 2: Với $x, y, z > 0$. CMR:

$$a/ \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2} ; b/ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} ; c/ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Lời giải:

$$a/ (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$$

* Các bài toán dạng “>, <” thường dùng bài toán 1, các bài toán dạng “≥, ≤” thường dùng bài toán 2; khi dùng đến các bài toán này ta cần phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Bài 22: Cho a, b, c, d > 0. CMR: $\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Vì a, b, c, d > 0 nên a < a + b + c. Theo bài toán 1a) ta có

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} , \text{ tương tự}$$

$$\frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Bài 23: Cho x, y, z > 0. CMR: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} < 0$

(Chứng minh tương tự bài 22)

Bài 24: CMR: $\frac{9^{125} + 4}{9^{123} + 4} > \frac{9^{123} + 1}{9^{121} + 1}$

Vì $9^{125} + 4 > 9^{123} + 4$ (Theo bài 1b/)

$$\Leftrightarrow \frac{9^{125} + 4}{9^{123} + 4} > \frac{9^{125} + 4 + 77}{9^{123} + 4 + 77} = \frac{9^2(9^{123} + 1)}{9^2(9^{121} + 1)} = \frac{9^{123} + 1}{9^{121} + 1} \Rightarrow \text{BĐT được chứng minh.}$$

Bài 25: Cho a, b > 0. CMR: $\frac{1}{4a^2 + 4b^2} + \frac{1}{8ab} \geq \frac{1}{(a+b)^2}$

Giải: Vì $a, b > 0$ nên $4a^2 + 4b^2 > 0$ và $8ab > 0$. Theo bài toán 2b) ta có

$$\frac{1}{4a^2 + 4b^2} + \frac{1}{8ab} \geq \frac{4}{4a^2 + 4b^2 + 8ab} = \frac{4}{4(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^2} \Rightarrow \text{Đpcm.}$$

Bài 26: Cho $a, b, c > 0$. CMR: $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{3}{a+b+c}$

Giải: $a, b, c > 0 \Rightarrow 2a+b > 0; 2b+c > 0; 2c+a > 0$.

Theo bài 2c) ta có

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{9}{2a+b+2b+c+2c+a} = \frac{9}{3(a+b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{3}{a+b+c}$$

Bài 27: a) Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $a+b=1$. CMR:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 6$$

Giải: $a, b > 0$. Theo bài toán 2, ta có:

$$\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{2ab+a^2+b^2} = \frac{4}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq 4+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 6 \quad (\text{đpcm})$$

b) Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+b \leq 1$. Chứng tỏ rằng:

$$\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geq 14$$

Tương tự phần a)

Phương pháp 6: Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về giá trị tuyệt đối.
(Bài 28 $\rightarrow$ bài 32)

Kiến thức cần nhớ: Đối với một số bài toán BĐT có chứa giá trị tuyệt đối, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về BĐT chứa giá trị tuyệt đối sau:

Bài toán 1: CMR:

$$a/ \quad |a| + |b| \geq |a + b|$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

$$b/ \quad |a - b| \geq |a| - |b|$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$.

Bài toán 2: CMR nếu x, y khác 0 thì $|\frac{x}{y}| + |\frac{y}{x}| \geq |\frac{x}{y} + \frac{y}{x}| \geq 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm y$.

Từ đó suy ra nếu $m, n > 0$ ta có:

$$1) \quad \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2; \quad 2) \quad m + \frac{1}{m} \geq 2$$

Dùng biến đổi tương đương ta dễ dàng chứng minh được các bài toán này.

* Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Bài 28: CMR: $|x| + |y| + |x - 3| + |y - 5| \geq 8 \quad (1)$

Theo bài toán 1 ta có:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

$$\begin{aligned} |x| + |y| + |3 - x| + |5 - y| &= (|x| + |3 - x|) + (|y| + |5 - y|) \geq \\ |x + 3 - x| + |y + 5 - y| &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x| + |y| + |x - 3| + |y - 5| \geq 8$$

Bài 29: CMR: $\sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a + 15 - 8\sqrt{a - 1}} \geq 2 \quad (\text{Đk: } a \geq 1) \quad (1)$

Từ (1) suy ra:

$$VT = \sqrt{(\sqrt{a - 1} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a - 1} - 4)^2} = |\sqrt{a - 1} - 2| + |\sqrt{a - 1} - 4|$$

Áp dụng BĐT: $|a| + |b| \geq |a + b|$ ta có:

$$|\sqrt{a - 1} - 2| + |4 - \sqrt{a - 1}| \geq |\sqrt{a - 1} - 2 + 4 - \sqrt{a - 1}| = |2| = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a + 3 - 4\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a + 15 - 8\sqrt{a - 1}} \geq 2$$

Bài 30: Cho $a, b, c > 0$. CMR: $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$

$$\begin{aligned}\text{Giải: } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \right) + \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + b \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + c \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \right] \geq \frac{1}{2} (a \cdot 2 + b \cdot 2 + c \cdot 2) = a + b + c\end{aligned}$$

(Theo bài toán 2)

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c \text{ (đpcm)}$$

Bài 31: Cho $|x| \geq 3, |y| \geq 3, |z| \geq 3$. CMR: $\left| \frac{xy + yz + xz}{xyz} \right| \leq 1$

Ta có $|x| \geq 3; |y| \geq 3; |z| \geq 3$ nên $\Rightarrow \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} \leq 1$. Theo bài toán 1, ta có

$$\left| \frac{xy + yz + xz}{xyz} \right| = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right| \leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} \leq 1$$

Bài 32: Cho $a, b \neq 0$. CMR: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4 \geq 0$

Giải: Đặt $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ta có $|x| \geq 2$.

$$\text{Ta có } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4 =$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 2$$

$$= x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1) \geq 0.$$

$$\text{Vì } |x| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow (x - 2) \text{ và } (x - 1) \text{ cùng dấu}$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) \geq 0 \text{ do đó } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 4 \geq 0$$

Phương pháp 7: Phương pháp vận dụng BĐT liên hệ giữa tổng bình phương, bình phương của tổng, tích hai số. (Bài 33 $\rightarrow$ bài 35)

Bài toán 1: $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \geq 4xy$.

Bài toán 2: $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$.

* Khi cần dùng đến các bài toán này, ta phải chứng minh rồi mới vận dụng.

Bài 33. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \geq 1$. CMR: $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$

Giải: Áp dụng bài toán 1, ta có

$$x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \geq \frac{\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]^2}{2} \geq \frac{1}{8}$$

Bài 34: CMR: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

Giải: Áp dụng bài toán 2, ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) = abc(a + b + c)$$

Bài 35: CMR: $\sqrt{a^2 + 2bc} + \sqrt{b^2 + 2ca} + \sqrt{c^2 + 2ab} \leq \sqrt{3}(a + b + c)$, với $a, b, c > 0$

Giải: Áp dụng bài toán 2, ta có

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{a^2 + 2bc} + \sqrt{b^2 + 2ca} + \sqrt{c^2 + 2ab} \right)^2 \leq 3 \left[\left(\sqrt{a^2 + 2bc} \right)^2 + \left(\sqrt{b^2 + 2ca} \right)^2 + \left(\sqrt{c^2 + 2ab} \right)^2 \right] \\ & = 3(a^2 + 2bc + b^2 + 2ca + c^2 + 2ab) = 3(a + b + c)^2 \\ & \Rightarrow \sqrt{a^2 + 2bc} + \sqrt{b^2 + 2ca} + \sqrt{c^2 + 2ab} \leq \sqrt{3}(a + b + c) \end{aligned}$$

Phương pháp 8: Phương pháp vận dụng các bài toán cơ bản về căn thức

(BĐT Cauchy và BĐT Bunhiacôpxki)

(Bài 36 $\rightarrow$ bài 43)

Khi giải một số bài toán BĐT có chứa căn thức bậc hai, ta có thể vận dụng các bài toán cơ bản về BĐT chứa căn thức.

Bài toán 1: Cho $a, b \geq 0$. CMR: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ (Bất đẳng thức Cauchy)

Bài toán 2: CMR: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$ (BĐT Bunhiacôpxki)

* Khi dùng đến bài toán 1 (không phải chứng minh) còn bài toán 2 phải chứng minh rồi mới được vận dụng.

Bài 36: Cho $a, b, c \geq 0$. CMR: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Giải: Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm, ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

$$\text{Do đó } (a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Bài 37: Cho $a, b, c \geq 0$ CMR: $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$

Giải: Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm, ta được

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$a + \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{a}, \quad b + \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} &= \frac{a+b}{2} + \left(a + b + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{a+b}{2} \left[\left(a + \frac{1}{4}\right) \left(b + \frac{1}{4}\right) \right] \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \end{aligned}$$

Bài 38: Cho $x > y$, $xy = 1$. CMR: $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$

$$\text{Giải: Ta có } \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{x - y} = (x - y) + \frac{2}{x - y}$$

Mà $x > y \Rightarrow x - y > 0$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương $x - y$ và $\frac{2}{x - y}$, ta được $(x - y) + \frac{2}{x - y} \geq 2\sqrt{(x - y) \cdot \frac{2}{x - y}} = 2\sqrt{2}$.

Bài 39: Cho $a, b, c > 0$. CMR: $\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq 4(a+b+c)$

Giải: $a, b, c > 0$ nên $\frac{a+b}{c} > 0, \frac{b+c}{a} > 0, \frac{c+a}{b} > 0$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương, ta được

$$\frac{(a+b)^2}{c} + 4c \geq 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{c} \cdot 4c} = 4(a+b)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{(b+c)^2}{a} + 4a \geq 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{a} \cdot 4a} = 4(b+c)$$

$$\frac{(c+a)^2}{b} + 4b \geq 2\sqrt{\frac{(c+a)^2}{b} \cdot 4b} = 4(c+a)$$

Do đó: $\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} + 4a + 4b + 4c \geq 4(a+b) + 4(b+c) + 4(c+a)$
 $\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq 4(a+b+c)$

Bài 40: Cho $x^2 + 4y^2 = 1$. CMR: $|x+y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$

Giải: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki, ta có

$$|x-y| = \left| x \cdot 1 + 2y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right| \leq \sqrt{(x^2 + 4y^2) \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vì $x^2 + 4y^2 = 1$

Bài 41: Cho $x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = 1$ CMR: $|a(x-y) + b(x+y)| \leq \sqrt{2}$

Giải: Áp dụng bài toán phụ (BĐT Bunhiacôpxki) ta có

$$|a(x-y) + b(x+y)| \leq \sqrt{(a^2 + b^2) [(x-y)^2 + (x+y)^2]}$$

$$\Rightarrow |a(x-y) + b(x+y)| \leq \sqrt{1 \cdot 2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2}$$

Bài 42: CMR: $|3(a+b) + 4(1-ab)| \leq 5\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Giải: áp dụng bài toán phụ (BĐT Bunhiacôpxki) ta có

$$|3(a+b) + 4(1-ab)| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2) [(a+b)^2 + (1-ab)^2]}$$

$$= \sqrt{25(a^2 + b^2 + 2ab + 1 - 2ab + a^2b^2)} = 5\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$$

Bài 43: Cho $a, b > 0$. CMR: $(4\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) \leq 25(a+b)$

Giải: Áp dụng bài toán phụ (BĐT Bunhiacôpxki) ta có

$$4\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = |4\sqrt{a} + 3\sqrt{b}| \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(a+b)} = 5\sqrt{a+b}$$

$$3\sqrt{a} + 4\sqrt{b} = |3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(a+b)} = 5\sqrt{a+b}$$

$$\text{Do đó } (4\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) \leq 5\sqrt{a+b} \cdot 5\sqrt{a+b} = 25(a+b)$$

c/ Phương pháp vận dụng tính chất đặc biệt của biến.

Phương pháp 9: Phương pháp vận dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc 2.

(Bài 44 – bài 47)

Đối với một số bài toán chứng minh BĐT nhiều khi ta phải vận dụng điều kiện có nghiệm của PT bậc 2.

Kiến thức cần nhớ: PT $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$ PT vô nghiệm.

$\Delta = 0$ PT có một nghiệm kép: $x = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$ PT có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$,

Khi $b = 2b'$:

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$\Delta' < 0$ PT vô nghiệm.

$\Delta' = 0$ PT có một nghiệm kép: $x = -\frac{b'}{a}$

$\Delta' > 0$ PT có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

Bài 44: Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = xy - x + 2y$. CMR: $\frac{-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Giải: $x^2 + y^2 = xy - x + 2y \Leftrightarrow y^2 - (x+2)y + x^2 + x = 0$ (*)

Xem (*) là PT bậc hai ẩn y .

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (x+2)^2 - 4(x^2 + x) \geq 0$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Bài 45: Cho $x \geq 1, y \geq 0$ thỏa mãn $\sqrt{x-1} y^2 + \sqrt{x-1}$ CMR: $x^3 \leq \frac{125}{64}$

Giải: Điều kiện $x \geq 1$

* $x=1$: $y=0$ ta có $x^3 = 1 < \frac{125}{64}$ (đúng)

* $x > 1$: Từ $\sqrt{x-1} y^2 + \sqrt{x-1} = y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} y^2 - y + \sqrt{x-1} = 0 \quad (*)$$

Xem (*) là PT bậc 2 ẩn y.

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4(x-1) \Leftrightarrow 1 - 4x + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^3 \leq \frac{125}{64} x^3$$

Bài 46: Cho các số x, y, z thỏa mãn $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5y - 10y + 2z - 5$.

CMR: $1 \leq x - 2y \leq 4$

Giải: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4xy + 5y - 10y + 2z - 5$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + (x^2 + 4y^2 - 4xy) - (5x - 10y) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + (x - 2y)^2 - 5(x - 2y) + 5 = 0 \quad (*)$$

Xem (*) là PT bậc hai ẩn z.

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (x - 2y)^2 + 5(x - 2y) - 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2y - 1)(x - 2y - 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 \geq 0, x - 2y - 4 \leq 0 \\ x - 2y - 1 \leq 0, x - 2y - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y \geq 1, x - 2y \leq 4 \\ x - 2y \leq 1, x - 2y \geq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x - 2y \leq 4$$

Bài 47: Cho a, b là 2 số thực thỏa mãn $a^2 + 4b^2 = 1$. CMR: $|a - b| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Giải: Đặt $a - b = x \Leftrightarrow a = x + b$.

Thay vào $a^2 + 4b^2$ ta được $(x + b)^2 + 4b^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2bx + b^2 + 4b^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 + 2bx + x^2 - 1 = 0. \quad (*)$$

Xem (*) là PT ẩn b.

$$\Delta' = x^2 - 5x^2 + 5 = -4x^2 + 5.$$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } |a - b| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Phương pháp 10: Phương pháp qui nạp toán học. (Bài 48 $\rightarrow$ bài 50)

Một số bài toán BĐT cần chứng minh đúng với mọi $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) ta có thể vận dụng phương pháp qui nạp toán học.

Các bước chứng minh theo phương pháp qui nạp:

B1: Kiểm tra BĐT đúng với $n = 1$.

B2: Giả sử BĐT đúng với $n = k \geq 1$. Chứng minh BĐT đúng với $n = k + 1$.

Bước 3: Kết luận BĐT đúng với mọi n nguyên dương.

Bài 48: CMR: $2^{n+2} > 2n + 5$. Với mọi n nguyên dương.

Giải:

Với $n = 1$, ta có $2^{1+2} > 2 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow 8 > 7$ BĐT đúng.

Giả sử BĐT đúng với $n = k \geq 1$, tức là $2^{k+2} > 2k + 5$.

Cần chứng minh BĐT đúng khi $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2^{(k+1)+2} &= 2^{k+3} = 2 \cdot 2^{k+2} > 2 \cdot (2k + 5) \\ &= 4k + 10 > 2k + 2 + 5 = 2(k + 1) + 5. \end{aligned}$$

Vậy BĐT $2^{k+2} > 2k + 5$ đúng với mọi n nguyên dương.

Bài 49: CMR: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ Với mọi n nguyên dương.

Giải: Với $n = 1$ ta có $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}}$, BĐT đúng.

Giả sử BĐT đúng với $n = k \geq 1$, tức là:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

Cần chứng minh BĐT đúng với $n = k + 1$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \quad (1)$$

$$\text{Ta CMR: } \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3k+1} \cdot \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} \leq \frac{1}{3k+4}.$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow k \geq 0. \text{ BĐT đúng.}$$

$$\text{Từ (1) \& (2) ta có } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{3(k+1)+1}.$$

$$\text{BĐT đúng khi } n = k + 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \text{ Với mọi } n \text{ nguyên dương.}$$

Bài 50: Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. CMR:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \text{ với } n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \text{ dấu “=” xảy ra khi nào ?}$$

(BĐT Cauchy cho n số không âm)

$$\text{Giải: Với } n = 2 \text{ ta có } \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0, \text{ BĐT đúng.}$$

Giả sử BĐT đúng với $n = k$, nghĩa là

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \dots a_k} \quad (*)$$

với $a_1, a_2, \dots, a_k$ không âm bất kỳ.

Cần chứng minh BĐT đúng với $n = k + 1$.

Vai trò của các phần tử như nhau nên ta giả sử

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1}$$

$$\text{Suy ra } a_{k+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

$$\text{Đặt } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} = x, (x \geq 0)$$

$a_{k+1} = x + y$ với $y \geq 0$.

Mà $x^k \geq a_1 a_2 \dots a_k$ (suy ra từ (*))

$$\text{Ta có } \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} = \left(\frac{kx + x + y}{k+1} \right)^{k+1} = \left(x + \frac{y}{k+1} \right)^{k+1}$$

$$\geq x^{k+1} + (k+1) \cdot \frac{y}{k+1} \cdot x^k = x^{k+1} + x^k \cdot y = x^k (x + y) \geq a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$$

Vậy BĐT $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Phương pháp 11: Phương pháp dùng tọa độ và hình học. (Bài 51 → 52)

Một số bài toán BĐT mà các biến là các số dương, ta dễ dàng tìm ra lời giải nếu sử dụng bằng phương pháp hình học. Đặc biệt một số bài toán BĐT có chứa căn thức dạng $\sqrt{A^2 + B^2}$, phương pháp tọa độ giúp ta có lời giải hay độc đáo.

Kiến thức cần nhớ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy có A (x_A, y_A), B (x_B, y_B) thì $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

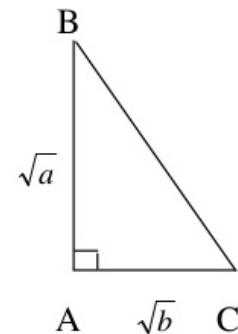
Bài 51: Cho $a, b > 0$. CMR: $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Giải: Xét ΔABC Có $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = \sqrt{a}$, $AC = \sqrt{b}$.

Theo định lý Pytago, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a + b \Rightarrow BC = \sqrt{a+b}.$$

ΔABC có $AB + AC > BC \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.



Bài 52: CMR: $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 12x + 136} \geq 13$

Giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{(x-1)^2 + 4} = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2}$$

$$\sqrt{x^2 - 12x + 136} = \sqrt{(x-6)^2 + 100} = \sqrt{(x-6)^2 + (0+10)^2}$$

Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy xét các điểm $A(x;0)$, $B(1;2)$, $C(6;-10)$. Dễ thấy B và C nằm khác phía với trục hoành, A thuộc trục hoành (Hình vẽ minh họa).

Xét 3 điểm A, B, C. Ta có $AB + AC \geq BC$ với:

$$AB = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

$$AC = \sqrt{(x-6)^2 + (0+10)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 136}$$

$$BC = \sqrt{(1-6)^2 + (2+10)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

$$\text{Do đó: } \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 12x + 136} \geq 13.$$

2.3.3. Các bài toán BĐT giải bằng nhiều phương pháp:

* Các bài 1; 3; 4; 6; 7; 8; 11. giải bằng ba cách khác nhau.

(Lời giải đã trình bày ở mục 2.3.2)

- Sử dụng các **phương pháp 1, 2 và 4**.

* **Bài 9** giải bằng hai cách khác nhau.

(Lời giải đã trình bày ở mục 2.3.2)

- Sử dụng các **phương pháp 2 và 11**.

* **Bài 12b/** giải bằng bốn cách khác nhau.

(Lời giải đã trình bày ở mục 2.3.2)

- Sử dụng các **phương pháp 2, 4, 8, 11**.

2.3.4. Những sai lầm của HS trong quá trình giải các bài toán chứng minh

BĐT:

Trong quá trình chứng minh BĐT, HS thường mắc phải một trong những sai lầm sau:

- Trừ từng vế hai BĐT cùng chiều.
- Nhân từng vế hai BĐT cùng chiều mà không có giả thiết các vế không âm.
- Bình phương hai vế của BĐT mà không có giả thiết hai vế không âm.
- Khử mẫu khi chưa biết dấu của biểu thức dưới mẫu.
- Nghịch đảo hai vế và đổi chiều BĐT khi chưa có giả thiết hai vế cùng dấu.
- Thừa nhận $x^m > x^n$ với m, n nguyên dương và $m > n$ khi chưa biết điều kiện của x .

Cụ thể có thể qui về một số sai lầm sau:

* logic: $\left. \begin{matrix} A > B \\ B < C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A > C$

* Điều kiện áp dụng đối với biến: Bất đẳng thức Cauchy.

Phương pháp hình học.

* Sai kiến thức: Nhân chéo, bình phương không có điều kiện:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

$$a > b \Rightarrow a^2 > b^2$$

2.3.5. Áp dụng BDT để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

a/ Các bước giải một bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) (Bài toán cực trị).

* Để tìm GTNN của một biểu thức $A(x)$ trong tập xác định (TXĐ) D ta làm như sau:

- Chứng minh $A(x) \geq m$ với m là hằng số.

- Chỉ ra $A(a) = m$, ($a \in D$)

- Kết luận GTNN của A là m . Ký hiệu $\min A(x) = m$ khi $x = a$.

* Để tìm GTLN của một biểu thức $A(x)$ trong TXĐ D ta làm như sau:

- Chứng minh $A(x) \leq M$ với M là hằng số.

- Chỉ ra $A(a) = M$, ($a \in D$)

- Kết luận GTLN của A là M . Ký hiệu $\max A(x) = M$ khi $x = a$.

Chú ý:

+ Có khi phải thay bài toán đã cho bởi một bài toán tương đương.

$$A > 0$$

$$\min A \Leftrightarrow \min A^2$$

$$\min A \Leftrightarrow -\max A$$

(tương tự bài toán cho max)

+ Có khi phải tìm cực trị trong từng khoảng của biến rồi so sánh để tìm cực trị trên TXĐ D của biểu thức.

b/ Các kiến thức cần nhớ:

$$+ x^2 \geq 0, x^{2n} \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*); |x| \geq 0$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = 0.$$

$$+ |A| \geq A$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A \geq 0$.

$$+ |A| \geq -A$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A \leq 0$.

c/ Bài tập:

Bài 1:

a/ Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)

Tìm giá trị nhỏ nhất của P

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 4x + 7$

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

d/ Tìm giá trị lớn nhất của $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$

Giải:

$$a/ \text{Ta có: } P = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{Vì } a > 0 \text{ nên } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } x + \frac{b}{2a} = 0 \text{ hay } x = -\frac{b}{2a}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ khi } x = -\frac{b}{2a}.$$

b/ Hướng dẫn:

$$A = (x^2 - 4x + 4) + 3 = (x - 2)^2 + 3 \geq 3.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3 $\Leftrightarrow x = 2$

$$c/ \text{Ta có: } |x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq |(x-1) + (3-x)| = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (x-1)(3-x) \geq 0 \text{ hay } 1 \leq x \leq 3$$

$$\text{còn } |x-2| \geq 0, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = 2.$$

Vậy $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2 + 0 = 2$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Do đó $\min T = 2$ khi $x = 2$.

d/ Ta có $y = \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2} = 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 1$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$

Do đó $\max y = 1$ khi $x = 1$

Bài 2: a/ CMR:

i/ Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

ii/ Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng:

i/ Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^3(16 - x^3)$ với ($0 < x^3 < 16$)

ii/ Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{(x+2004)^2}{x}$ ($x > 0$)

Giải:

a/

i/ Giả sử $x, y > 0$ có $x + y = k$ (không đổi)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số x, y ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{k^2}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{k}{2}$

$$\text{Do đó } \max(xy) = \frac{k^2}{4} \text{ khi } x = y = \frac{k}{2}$$

ii/ Giả sử $x, y > 0$ và $xy = k$ (không đổi).

$$\text{Ta có: } 2\sqrt{xy} \leq x + y \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \min(x + y) = 2\sqrt{k} \text{ khi } x = y.$$

b/ Áp dụng:

i/ Ta có $x^3 + (16 - x^3) = 16$ (không đổi)

nên tích $x^3(16 - x^3)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^3 = 16 - x^3$

hay $x^3 = 8$ hay $x = 2$.

Vậy $\max A = 2^3(16 - 2^3) = 16$ khi $x = 2$.

ii/ Ta có:

$$B = \frac{x^2 + 2 \cdot 2004x + 2004^2}{x} = x + \frac{2004^2}{x} + 2 \cdot 2004$$

x và $\frac{2004^2}{x}$ là các số dương có tích $x \cdot \frac{2004^2}{x} = 2004^2$ không đổi nên tổng $x + \frac{2004^2}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{2004^2}{x}$ hay $x = 2004$

Vậy $\min B = 3 \cdot 2004$ khi $x = 2004$.

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của x thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} x + a + b + c = 7 \\ x^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 13 \end{cases} \quad \text{với } a, b, c \text{ là tham số.}$$

Giải: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(a + b + c)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \text{ hay } (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

(Có thể chứng minh công thức này bằng biến đổi tương đương)

Từ giả thiết ta có: $a + b + c = 7 - x$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 13 - x^2$

$$\text{Do đó } (7 - x)^2 \leq 3(13 - x^2) \Rightarrow 4x^2 - 14x + 19 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Vậy x đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $a = b = c = 2$

x đạt giá trị lớn nhất là $\frac{5}{2}$ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$a/ A = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

Hướng dẫn:

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{(x^2 - 4x + 4) - 1} = \sqrt{(x - 2)^2 - 1} \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1$.

$$b/ \sqrt{a^2 - 2a + 5} + \sqrt{a^2 - 12a + 136}$$

Hướng dẫn:

Trong cùng hệ trục vuông góc xét các điểm $A(a;0)$; $B(1;2)$; $C(6;-10)$. Dễ thấy B và C nằm khác phía đối với trục hoành và A thuộc trục hoành $x'x$.

Do đó $AB + AC \geq BC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(a-6)^2 + (0+10)^2} \geq \sqrt{(1-6)^2 + (2+10)^2} = 13$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 2a + 5} + \sqrt{a^2 - 12a + 136} \geq 13.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A$ là giao điểm của BC và trục $x'x$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{a^2 - 2a + 5} + \sqrt{a^2 - 12a + 136}$ là 13.

2.3.6. Áp dụng BĐT để giải PT và hệ PT.

a/ Kiến thức cần nhớ:

* Lưu ý đến dấu đẳng thức xảy ra của các bất đẳng thức: $A \geq B$, $A \leq B$

* Nếu $\begin{cases} A \leq B \\ A \geq B \end{cases}$ Thì $A = B$

b/ Bài tập:

Bài 1: Giải PT:

$$a/ \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$$

Giải:

* Cách 1:

Điều kiện: $x \geq 0$, $y \geq 1$, $z \geq 2$

Áp dụng BĐT cauchy cho 2 số không âm, ta có:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x \cdot 1} \leq \frac{x+1}{2}$$

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{(y-1) \cdot 1} \leq \frac{(y-1)+1}{2} = \frac{y}{2}$$

$$\sqrt{z-2} = \sqrt{(z-2) \cdot 1} \leq \frac{(z-2)+1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

Suy ra:

$$VT = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} \leq \frac{1}{2}(x + y + z)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 1 = 1 \\ z - 2 = 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy PT có nghiệm là: (1, 2, 3).

* Cách 2:

PT đã cho tương đương với:

$$(x - 2\sqrt{x} + 1) + (y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1) + (z - 2 - 2\sqrt{z-2} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 1)^2 + (\sqrt{z-2} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{z-2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy PT có nghiệm là: (1, 2, 3).

b/ Giải PT: $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$.

Hướng dẫn: Điều kiện $2 \leq x \leq 10$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm, ta có:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = \frac{\sqrt{(x-2) \cdot 4}}{2} + \frac{\sqrt{(10-x) \cdot 4}}{2} \leq \frac{x-2+4}{4} + \frac{10-x+4}{4} = 4.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ 10-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$

Mà $x^2 - 12x + 40 = (x^2 - 12x + 36) + 4 = (x - 6)^2 + 4 \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Bài 2: Giải hệ PT: $\begin{cases} (x-1) \cdot \sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = 2\sqrt{xy} & (1) \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $x, y \geq 1$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 1.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{(y-1) \cdot 1} \leq \frac{y-1+1}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq \frac{1}{2}$$

Tương tự: $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

$x = 2, y = 2$ cũng thỏa mãn (1).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

$$\text{b/ Giải hệ PT: } \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x \end{cases}$$

Giải: Rõ ràng $x = y = z = 0$ là nghiệm của hệ.

Với $xyz \neq 0$, ta có

$$y = \frac{2x^2}{x^2+1} \leq \frac{2x^2}{2x} = x$$

$$z = \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} \leq \frac{3y^3}{3y^2} = y$$

$$x = \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} \leq \frac{4z^4}{4z^3} = z$$

Suy ra: $y \leq x \leq z \leq y \Rightarrow x = y = z$

Từ PT thứ nhất của hệ suy ra:

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = x \Leftrightarrow 2x = 1 + x^2 \text{ (vì } x \neq 0 \text{) } \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy hệ PT có 2 nghiệm: $(0, 0, 0)$ và $(1, 1, 1)$.

KẾT LUẬN

Việc xây dựng và sử dụng hệ thống các dạng bài tập trong quá trình dạy học nói chung và trong bồi dưỡng HSG nói riêng đã góp phần rèn luyện năng lực giải toán về ĐT và BĐT cho HS. Các em dần tạo thành thói quen thay thế các dữ kiện của bài toán bằng các dữ kiện tương đương, thói quen đặc biệt hóa hay khái quát hoá bài toán một cách tự nhiên, thói quen tìm nhiều giải pháp cho một tình huống để vươn tới sự hoàn thiện, thói quen nhìn nhận một vấn đề dưới nhiều góc độ khác nhau. Và như vậy, việc giải quyết được mỗi một bài tập đặt ra hay phát hiện ra một bài toán mới là một quá trình tìm tòi sáng tạo, huy động linh hoạt các kiến thức – kỹ năng – thủ thuật và các phẩm chất của trí tuệ. Do đó HS thực sự cảm thấy mình

là chủ thể của nhận thức, các em được học tập bằng hoạt động của chính mình dưới sự hướng dẫn khuyến khích của người thầy.