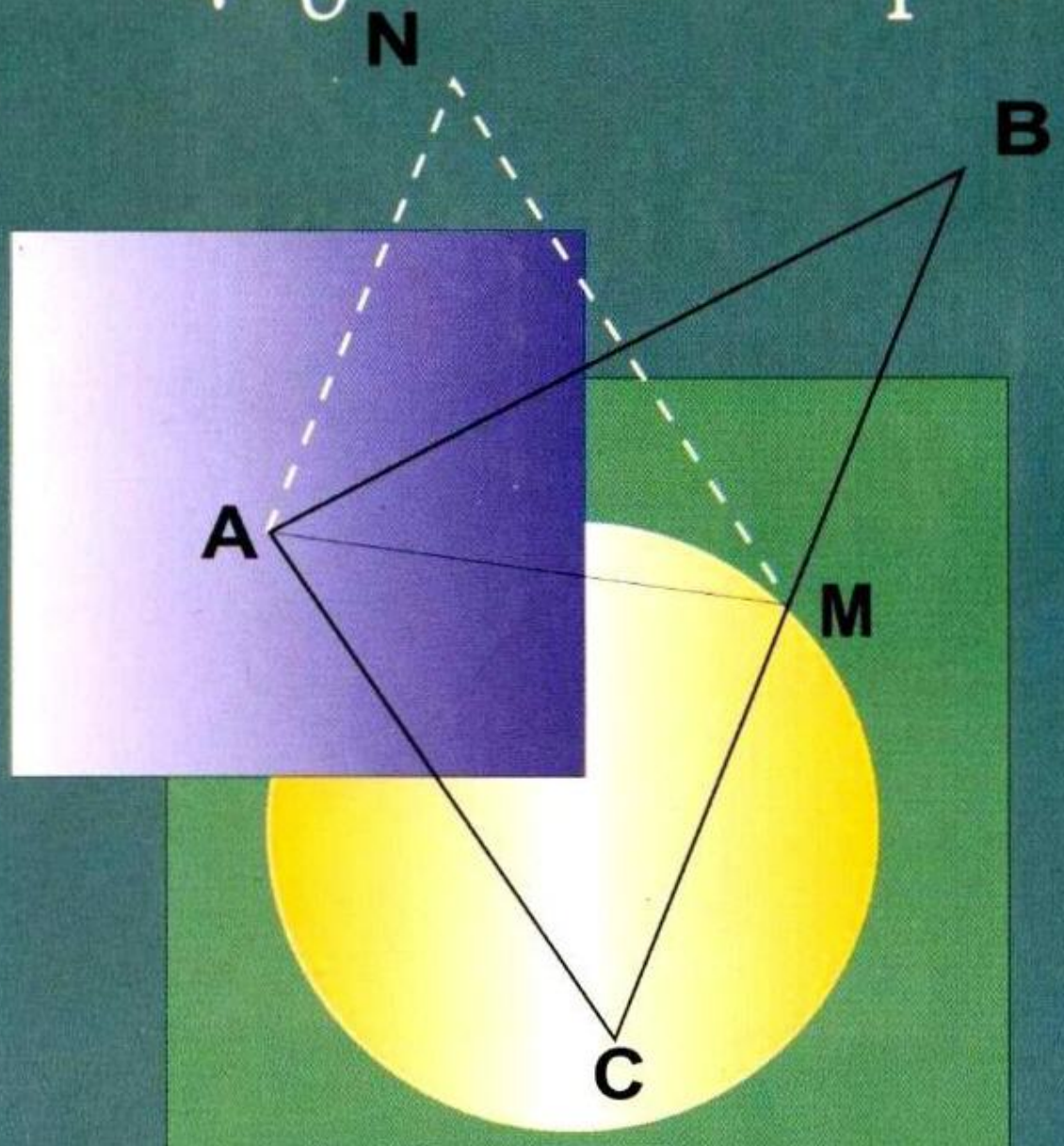
LÊ HẢI CHÂU -NGUYỄN XUÂN QUỲ

TỔNG ÔN LUYỆN TOÁN

Theo trọng điểm cuối cấp THCS



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU - NGUYỄN XUÂN QUỲ

TỔNG ÔN LUYỆN TOÁN THEO TRỌNG ĐIỂM CUỐI CẤP PTCS

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2001

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc NGUYỄN VĂN THOẢ
Tổng biên tập NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập và sửa bản in:

NGỌC QUYÊN
TƯỜNG GIANG

Trình bày bìa:

TRẦN TIỂU LÂM

TỔNG ÔN LUYỆN TOÁN THEO TRỌNG ĐIỂM
CUỐI CẤP PTCS

Mã số : 01.107.ĐH2000 - 1398.2000
In 1000 cuốn tại Nhà in Khoa học Kĩ thuật
Số xuất bản : 34/1398/CXB. Số trích ngang 48 KH/XB.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2/2001.

Vài dòng mở đầu

Cuốn sách này nhằm hai mục đích:

1. Giúp các em học sinh lớp 8 và lớp 9 tổng ôn tập theo trọng điểm những nội dung toán học thiết yếu để nắm được vững chắc kiến thức toán học các lớp cuối cấp và rèn luyện kĩ năng giải thành thạo những bài toán điển hình về đại số và hình học.

2. Giúp các em học sinh lớp 9 tổng ôn tập một cách có hệ thống và toàn diện để chuẩn bị thi tốt nghiệp PTCS đạt hiệu quả và chất lượng, đồng thời thi vào lớp 10 (ở những tỉnh có tổ chức kỳ thi này) có kết quả cao.

Nội dung sách bao gồm:

a. Những trọng điểm về đại số và hình học ghi bằng dấu xoắn §.

b. Giới thiệu một số đề thi tốt nghiệp PTCS ở một số tỉnh và thành phố năm 1999 và năm 2000.

** Mỗi xoắn § đều gồm:*

A. Kiến thức cần nắm vững

B. Bài toán ôn luyện

- Các bài toán điển hình (5 bài)

- Các bài toán kiểm tra (3 bài)

C. Sơ lược cách giải

** Các đề thi đều ghi đầy đủ câu hỏi lý thuyết và bài toán bắt buộc, nhưng chỉ giới thiệu cách giải sơ lược bài toán, còn câu hỏi lý thuyết các em học sinh xem SGK để trả lời.*

** Cách sử dụng sách tốt nhất nên làm như sau: đối với*

mỗi xoắn §, mỗi bài toán, trước hết hãy tự mình suy ngẫm để nhớ lại các kiến thức cần vận dụng, tìm cách giải bài toán, sau đó mới đối chiếu với các chỉ dẫn trong sách.

Mong rằng cuốn sách này góp phần thiết thực giúp các em học sinh cuối cấp PTCS tổng ôn tập môn toán với chất lượng tốt nhất và chúc các em lớp 9 thi tốt nghiệp PTCS đạt kết quả cao nhất.

Hà Nội, Xuân Canh Thìn 2000

Các tác giả

MỤC LỤC

HÌNH HỌC

Giới thiệu **MỘT SỐ ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THCS CỦA CÁC TỈNH VÀ THÀNH PHỐ NĂM 1999 VÀ 2000**

Năm 1999

Năm 2000

§1. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Cho A, B là các biểu thức, có 7 hằng đẳng thức đáng nhớ:

1. Bình phương của một tổng hai biểu thức bằng bình phương biểu thức thứ nhất, cộng hai lần tích của biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai, cộng với bình phương của biểu thức thứ hai:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (1)$$

2. Bình phương của một hiệu hai biểu thức bằng bình phương biểu thức thứ nhất, trừ hai lần tích biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai, cộng với bình phương biểu thức thứ hai:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \qquad (2)$$

3. Lập phương của một tổng hai biểu thức bằng lập phương của biểu thức thứ nhất, cộng ba lần tích của bình phương biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai, cộng ba lần tích của biểu thức thứ nhất với bình phương biểu thức thứ hai, cộng lập phương biểu thức thứ hai:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad (3)$$

4. Lập phương của một hiệu hai biểu thức bằng lập phương của biểu thức thứ nhất, trừ ba lần tích của bình phương biểu thức thứ nhất với biểu thức thứ hai, cộng ba lần tích của biểu thức thứ nhất với bình phương biểu thức thứ hai, trừ lập phương biểu thức thứ hai:

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \qquad (4)$$

5. Hiệu hai bình phương của hai biểu thức bằng tích giữa tổng và hiệu của hai biểu thức đó:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \qquad (5)$$

6. Tổng hai lập phương của hai biểu thức bằng tích giữa tổng của hai biểu thức và bình phương thiếu hiệu của chúng:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \qquad (6)$$

7. **Hiệu hai lập phương của hai biểu thức** bằng tích giữa hiệu của hai biểu thức và bình phương thiếu tổng của chúng:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \qquad (7)$$

Chú ý: Khi giải bài toán cụ thể cần xác định đúng các biểu thức A, B và áp dụng đúng công thức theo chiều từ trái qua phải hay từ phải qua trái tuỳ thuộc yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1: Tính: $\left(2x^2y + \frac{1}{3}xy^2\right)^2$

Ở đây: $A = 2x^2y$ và $B = \frac{1}{3}xy^2$. Áp dụng công thức (1) theo chiều từ trái qua phải:

$$\left(2x^2y + \frac{1}{3}xy^2\right) = \left(2x^2y\right)^2 + 2.2x^2y.\frac{1}{3}xy^2 + \left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2$$

$$= 4x^4y^2 + \frac{4}{3}x^3y^3 + \frac{1}{9}x^2y^4.$$

Ví dụ 2: Tính $(0,1x + y^2)(0,01x^2 - 0,1xy^2 + y^4)$

Ở đây $A = 0,1x$ và $B = y^2$. Áp dụng công thức (6) theo chiều từ phải qua trái:

$(0,1x + y^2)(0,01x^2 - 0,1xy^2 + y^4)$

$= (0,1x + y^2)[(0,1x)^2 - (0,1x)y^2 + (y^2)^2]$

$= (0,1x)^3 + (y^2)^3 = 0,001x^3 + y^6.$

Cần phân biệt rõ:

"Bình phương của một hiệu" với "Hiệu hai bình phương":

$(A - B)^2 \neq A^2 - B^2$

"Lập phương của một hiệu" với "Hiệu hai lập phương": $(A - B)^3 \neq A^3 - B^3$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $5(x + 1)^2 - 3(x - 3)^2 - 4(x + 2)(x - 2)$;

b) $3x(x - 1)^2 - 2x(x + 3)(x - 3) + 4x(x - 4)$;

c) $(x + 1)^3 - x(x - 2)^2 - 1$;

d) $(x - 3)^3 - x^2(x - 9)$;

e) $(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)$.

Bài 2. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = (y - x)(x + y) + 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2$ với $x = -0,75$; $y = -\frac{1}{2}$

b) $B = 3(x + 4)(x - 4) + (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ với $x = -3$.

Bài 3. Tìm x biết:

a) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = -36$;

b) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 20$.

Bài 4. Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến:

a) $A = x^2 - 4x + y^2 + 2y + 12$;

b) $B = x^2 - x + 5$.

Bài 5. Chứng minh hằng đẳng thức:

a) $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$;

b) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

c) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Giá trị của biểu thức sau có phụ thuộc vào biến x không?

a) $A = 9x^3 - 37 - (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$;

b) $B = (x + 1)^3 - (x - 1)^3$.

Bài 7. Tìm các số x và y biết:

a) $x^3 - y^3 = 98$; $x^2 + xy + y^2 = 49$ và $x + y = 8$;

b) $x^3 + y^3 = 133$; $x^2 - xy + y^2 = 19$ và $x - y = 3$.

Bài 8. Tìm giá trị của biểu thức:

a) $A = x^3 - 3x^2 + 3x + 99$ với $x = 11$;

b) $B = x^3 + 3x^2 + 3x - 1999$ với $x = 99$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) $5(x + 1)^2 - 3(x - 3)^2 - 4(x + 2)(x - 2)$

$= 5(x^2 + 2x + 1) - 3(x^2 - 6x + 9) - 4(x^2 - 4)$

$= 5x^2 + 10x + 5 - 3x^2 + 18x - 27 - 4x^2 + 16$

$= -2x^2 + 28x - 6$.

b) $3x(x - 1)^2 - 2x(x + 3)(x - 3) + 4x(x - 4)$

$= 3x(x^2 - 2x + 1) - 2x(x^2 - 9) + 4x(x - 4)$

$= 3x^3 - 6x^2 + 3x - 2x^3 + 18x + 4x^2 - 16x$

$= x^3 - 2x^2 + 5x$.

c) $(x + 1)^3 - x(x - 2)^2 - 1$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x(x^2 - 4x + 4) - 1$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 7x^2 - x$.

d) $(x - 3)^3 - x^2(x - 9)$

$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - (x^3 - 9x^2)$

$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 9x^2 = 27x - 27$.

e) $(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)$

$=[(x + 2)(x^2 - 2x + 4)]\ [(x - 2)(x^2 + 2x + 4)]$
$= (x^3 + 2^3)(x^3 - 2^3) = (x^3)^2 - (2^3)^2 = x^6 - 64.$

Bài 2. a) $A = (y - x)(x + y) + 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2$

$= -(x - y)(x + y) + 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2$
$= -(x^2 - y^2) + 3(x^2 - 2xy + y^2) - 2(x^2 + 2xy + y^2)$
$= -x^2 + y^2 + 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$
$= 2y^2 - 10xy.$

Tính giá trị của $A = 2y^2 - 10xy = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 10\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 2 \times \frac{1}{4} - 5 \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{15}{4} = -\frac{13}{4} = -3\frac{1}{4}.$

b) $B = 3(x + 4)(x - 4) + (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
$= 3(x^2 - 16) + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 + 8)$
$= 3x^2 - 48 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 8 = 3x - 57.$

Tính giá trị của $B = 3x - 57 = 3(-3) - 57 = -9 - 57 = -66.$

Bài 3. a) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 36$

$3(x^2 + 4x + 4) + (4x^2 - 4x + 1) - 7(x^2 - 9) = 36$
$3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 - 4x + 1 - 7x^2 + 63 = 36$

hay $8x + 76 = 36$

$8x = -112$. Vậy $x = -14$.

b) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 20$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 27) + 3x^2 - 12 = 20$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 27 + 3x^2 - 12 = 20$

hay $3x - 40 = 20$

$3x = 60 \Rightarrow x = 20.$

Bài 4.

a) $A = x^2 - 4x + y^2 + 2y + 12$
$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + 7$
$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) + 7$
$= (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 7$

Vì $(x - 2)^2 \geq 0$ và $(y + 1)^2 \geq 0$ nên

$A = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 7 > 0$ với mọi giá trị của x và y.

b) $B = x^2 - x + 5 = x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$

$$= \left[x^2 - 2x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 4\frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}.$$

Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ nên $B = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0$ với mọi giá trị của x.

Bài 5. a) Biến đổi vế trái:

$(a + b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$

$= a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$

Vế trái bằng vế phải, hằng đẳng thức đã cho đúng.

b) Biến đổi vế trái:

$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Vế trái bằng vế phải, hằng đẳng thức đã cho đúng.

c) Biến đổi vế trái:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3 - (3a^2b - 3ab^2) = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$

Vế trái bằng vế phải, hằng đẳng thức đã cho đúng.

Chú ý: Để chứng minh các hằng đẳng thức trên, có thể biến đổi vế phải để có vế trái. Chẳng hạn, với câu b):

Biến đổi vế phải:

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$= (a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2$

$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = (a + b + c)^2.$

Bạn hãy tự chứng minh đối với câu a, câu c.

Bài 6

a) $A = 9x^3 - 37 - (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$

$= 9x^3 - 37 - [(3x)^3 + 1] = 9x^3 - 37 - 27x^3 - 1 = -18x^3 - 38.$

Biểu thức A đã cho phụ thuộc vào biến x.

b) $B = (x + 1)^3 - (x - 1)^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 6x^2 + 2.$

Biểu thức B đã cho phụ thuộc vào biến x.

Bài 7. a) Ta có: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y).49 = 98$, suy ra $x - y = 98 : 49 = 2$.

Biết $x - y = 2$ và $x + y = 8$, suy ra $x = 5$ và $y = 3$.

b) Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)\ 19 = 133$, suy ra $x + y = 133 : 19 = 7$.

Biết $x + y = 7$ và $x - y = 3$ suy ra $x = 5$ và $y = 2$.

Bài 8. a) $A = x^3 - 3x^2 + 3x + 99$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 + 99 = (x - 1)^3 + 100.$

Tính giá trị của $A = (x - 1)^3 + 100 = (11 - 1)^3 + 100$

$= 10^3 + 100 = 1100.$

b) $B = x^3 + 3x^2 + 3x - 1999$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 - 1999$

$= (x + 1)^3 - 2000.$

Tính giá trị của $B = (x + 1)^3 - 2000$

$= (99 + 1)^3 - 2000 = 100^3 - 2000$

$= 998\ 000.$

§2. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

* Phân tích đa thức thành nhân tử (thừa số) là biến đổi đa thức thành tích của nhiều đơn thức và đa thức khác.

Ví dụ: $x^{m+3} - x^m = x^m(x^3 - 1) = x^m(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

* Có 3 phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

a) Đặt nhân tử chung

b) Dùng hằng đẳng thức đáng nhớ

c) Nhóm nhiều hạng tử

Trong thực hành giải toán, người ta thường phối hợp ba phương pháp kể trên để có thể phân tích đa thức thành nhân tử.

Ví dụ: $3x - 3y + x^2 - 2xy + y^2$

$= (3x - 3y) + (x^2 - 2xy + y^2)$ (nhóm các hạng tử)

$= 3(x - y) + (x - y)^2$ (đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức)

$= (x - y)(3 + x - y)$ (đặt nhân tử chung)

Ngoài ra, để phân tích đa thức thành nhân tử có thể dùng vài phương pháp khác như: tách một hạng tử thành nhiều hạng tử hoặc thêm bớt cùng một hạng tử.

Ví dụ: a) $x^2 - 5x + 4$

$= x^2 - x - 4x + 4 = (x^2 - x) - (4x - 4)$

$= x(x - 1) - 4(x - 1) = (x - 1)(x - 4)$.

b) $324x^4 + 1$

$= (18x^2)^2 + 36x^2 + 1 - 36x^2$

$= (18x^2)^2 + 2.18x^2.1 + 1 - (6x)^2$

$= (18x^2 + 1)^2 - (6x)^2 = (18x^2 + 6x + 1)(18x^2 - 6x + 1).$

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x - y^3)^3 - x^3 + y^3$ b) $5x^{2m+5} + 10x^5$

c) $x(x - 2) + (2 - x)^2$ d) $3x(x - 1)^2 - (1 - x)^3$.

Bài 2. Tìm x biết:

a) $3x(x - 1) - (1 - x) = 0$ b) $3x(x + 2) = 9(x + 2)$

c) $x^2(x + 1) + 2x(x + 1) = 0$ d) $x^5 = x^3$.

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ b) $\frac{8}{5}x^2y^2 - 4x^4 - \frac{4}{25}y^4$

c) $8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$ d) $8x^3 - 0,001$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \in Z$ ta có:

a) $(4n + 3)^2 - 25$ chia hết cho 8

b) $(2n + 3)^2 - 9$ chia hết cho 4.

Bài 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $1 - 2x + 2xz + x^2 - y^2 - z^2$

b) $x^2 + 3zt(2 - 3zt) - 10xy - 1 + 25y^2$

c) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$

d) $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 2x - 3$; b) $x^4 + 5x^3 + 15x - 9$;

c) $x^4y^4 + 4$; d) $x^6 - y^6$.

Bài 7. Hãy tìm đủ 4 cách để phân tích đa thức sau đây thành nhân tử: $x^2 - 4x + 3$.

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + x = 12$; b) $8x^3 + 2x^2 = x$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1

a) $(x - y)^3 - x^3 + y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 - x^3 + y^3$

$= 3xy^2 - 3x^2y = 3xy\,(y - x)$

b) $5x^{2m+5} + 10x^5 = 5x^5\,(x^{2m} + 2)$

c) $x(x - 2) + (2 - x)^2 = x(x - 2) + (x - 2)^2$

$= (x - 2)\,(x + x - 2) = 2(x - 1)(x - 2)$

d) $3x(x - 1)^2 - (1 - x)^3 = 3x(x - 1)^2 + (x - 1)^3$

$= (x - 1)^2(3x + x - 1) = (x - 1)^2(4x - 1)$.

Bài 2. a) $3x(x - 1) - (1 - x) = 0$

$3x(x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\,(3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1;\ x = -\dfrac{1}{3}$.

b) $3x(x + 2) = 9(x + 2) \Leftrightarrow 9(x + 2) - 3x(x + 2) = 0$

$(x + 2)(9 - 3x) = 0 \Leftrightarrow 3(x + 2)(3 - x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2;\ x = 3$.

c) $x^2(x + 1) + 2x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2x) = 0$

$x(x + 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = -1;\ x = -2$.

d) $x^5 = x^3 \Leftrightarrow x^5 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1) = 0$

$x^3(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = 1;\ x = -1$.

Bài 3. a) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2.2x.3y + (3y)^2$

$= (2x - 3y)^2$.

b) $\dfrac{8}{5}x^2y^2 - 4x^4 - \dfrac{4}{25}y^4 = -\left(4x^4 - \dfrac{8}{5}x^2y^2 + \dfrac{4}{25}y^4\right)$

$= -\left[\left(2x^2\right)^2 - 2.2x^2\,\dfrac{2}{5}y^2 + \left(\dfrac{2}{5}y^2\right)^2\right]$.

$$= -\left(2x^2 - \frac{2}{5}2y^2\right)^2$$

c) $8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3$

$= (2x)^3 + 3(2x)^2.5 + 3.2x(5y)^2 + (5y)^3 = (2x + 5y)^3$.

d) $8x^3 - 0,001 = (2x)^3 - (0,1)^3$

$= (2x - 0,1)(4x^2 + 0,2x + 0,01)$.

Bài 4. a) Ta có: $(4n + 3)^2 - 25 = (4n + 3)^2 - 5^2$

$= (4n + 3 + 5)(4n + 3 - 5) = (4n + 8)(4n - 2)$

$= 4(n + 2).2(2n - 1) = 8(n + 2)(2n - 1)$.

Vì $n \in Z$ nên $(n + 2)(2n - 1) \in Z$ do đó $8(n + 2)(2n - 1) \vdots 8$.

Vậy $(4n + 3)^2 - 25$ chia hết cho 8 với mọi $n \in Z$.

b) Ta có $(2n + 3)^2 - 9 = 4n^2 + 12n + 9 - 9$

$= 4n^2 + 12n = 4n(n + 3)$.

Vì $n \in Z$ nên $4n(n + 3) \in Z$ do đó $4n(n + 3) \vdots 4$.

Vậy $(2n + 3)^2 - 9$ chia hết cho 4 với mọi $n \in Z$.

Bài 5

a) $1 - 2x + 2yz + x^2 - y^2 - z^2 = (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2yz + z^2)$

$= (x - 1)^2 - (y - z)^2 = (x + y - z - 1)(x - y + z - 1)$.

b) $x^2 + 3zt(2 - 3zt) - 10xy - 1 + 25y^2$

$= (x^2 - 10xy + 25y^2) + [3zt(2 - 3zt) - 1]$

$= (x - 5y)^2 + (6zt - 9z^2t^2 - 1)$

$= (x - 5y)^2 - [(3zt)^2 - 2.3zt.1 + 1] = (x - 5y)^2 - (3zt - 1)^2$

$= (x - 5y + 3zt - 1)(x - 5y - 3zt + 1)$.

c) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2 = x^2 - (y^2 + 2yz + z^2)$

$= x^2 - (y + z)^2 = (x + y + z)(x - y - z)$.

d) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2)$

$= x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1)$

$= (x - 2)(x - 1)(x + 1)$.

Bài 6. a) $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x + x - 3 = (x^2 - 3x) + (x - 3)$

$= x(x - 3) + (x - 3) = (x - 3)(x + 1)$

b) $x^4 + 5x^3 + 15x - 9 = (x^4 - 9) + (5x^3 + 15x)$

$= (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 5x(x^2 + 3)$

$= (x^2 + 3)(x^2 + 5x - 3)$.

c) $x^4y^4 + 4 = (x^2y^2)^2 + 4x^2y^2 + 4 - 4x^2y^2$

$= (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 = (x^2y^2 + 2xy + 2)(x^2y^2 - 2xy + 2)$.

d) $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Bài 7

Cách 1: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x - 1) - 3(x - 1)$

$= (x - 1)(x - 3)$

Cách 2: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x^2 - 4x + 4) - 1$

$= (x - 2)^2 - 1 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1)$

$= (x - 1)(x - 3)$

Cách 3: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x - 1 + 4 = (x^2 - 1) - (4x - 4)$

$= (x - 1)(x + 1) - 4(x - 1)$

$= (x - 1)(x + 1 - 4) = (x - 1)(x - 3)$

Cách 4: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x - 9 + 12 = (x^2 - 9) - (4x - 12)$

$= (x - 3)(x + 3) - 4(x - 3)$

$= (x - 3)(x + 3 - 4) = (x - 1)(x - 3)$

Bài 8. a) $x^2 + x = 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 9) + (x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3;\ x = -4$.

b) $8x^3 + 2x^2 = x \Leftrightarrow 8x^3 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 + 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x[4x(2x + 1) - (2x + 1)] = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1)(4x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0;\ x = -\frac{1}{2};\ x = \frac{1}{4}$.

§3. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ: ĐỊNH NGHĨA - TÍNH CHẤT

A- KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Định nghĩa: Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A,B là những đa thức và $B \neq 0$.

Ví dụ: $\frac{x^3+1}{x-1}$; $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$ là các phân thức.

Tập xác định của một phân thức là tập các giá trị của biến làm cho mẫu khác 0.

Ví dụ: - Phân thức $\frac{x^3+1}{x-1}$ có tập xác định

TXĐ = $\{x | x \in Q, x \neq 1\}$;

- Phân thức $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$ có tập xác định:

TXĐ = $\{x, y \mid x \in Q, y \in Q, x \neq y\}$.

2. Tính chất cơ bản của phân thức

Nếu nhân hoặc chia tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C}; \quad \frac{A}{B} = \frac{A:C}{B:C} \text{ (với } C \neq 0)$$

Ví dụ: $\frac{3x^2y^2}{4z} = \frac{3x^2y^2.5x^3y^4}{4z.5x^3y^4} = \frac{15x^5y^6}{20x^3y^4z}$;

$$\frac{x^3-y^3}{(x-y)(2x^2+4)}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2):(x-y)}{(x-y)(2x^2+4):(x-y)}=\frac{x^2+xy+y^2}{2x^2+4}$$

với $x \neq y$.

3. Áp dụng tính chất cơ bản của phân thức:

* *Rút gọn phân thức*: Muốn rút gọn một phân thức ta phải:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử chung
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.

Ví dụ: Rút gọn phân thức $\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^3-7x^2+14x-8}$.

Ta có: $\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^3-7x^2+14x-8}=\frac{(x^3-x)-(4x^2-4)}{(x^3-8)-(7x^2-14x)}$

$$=\frac{x(x^2-1)-4(x^2-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)-7x(x-2)}=\frac{(x-1)(x+1)(x-4)}{(x-2)(x^2+2x+4-7x)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x-4)}{(x-2)(x^2-x-4x+4)}=\frac{(x-1)(x+1)(x-4)}{(x-2)[x(x-1)-4(x-1)]}$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{(x-1)(x+1)(x-4):(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-4):(x-1)(x-4)}=\frac{x+1}{x-2}$$

với $x \neq 1$; $x \neq 4$; $x \neq 2$.

* *Quy đồng mẫu:*

a. Tìm mẫu chung: Muốn tìm mẫu chung của các phân thức đã cho, ta phải:

- Phân tích các mẫu thành nhân tử;
- Lấy tích của BCNN của các hệ số với các lũy thừa có mặt trong các mẫu, số mũ của mỗi lũy thừa là số mũ cao nhất của nó trong các mẫu.

Ví dụ: Tìm mẫu chung của các phân thức sau:

$$\frac{x+2y}{4(x+y)^2};\quad \frac{5x-y^2}{9(x-y)^2};\quad \frac{x^3+y}{18(x^4-y^4)}.$$

Ta có thể làm như sau:

+ Phân tích mẫu thành nhân tử:

$18(x^4-y^4)=18(x^2-y^2)(x^2+y^2)=18(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

+ BCNN (4, 9, 18) = 36

Mẫu chung của các phân thức đã cho là

$MC = 36(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)$

b. Quy đồng mẫu: Muốn quy đồng mẫu các phân thức, ta phải:

- Tìm mẫu chung;
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ của nó (nhân tử phụ là thương của mẫu chung với từng mẫu)

Ví dụ: Quy đồng mẫu các phân thức sau:

$$\frac{x+2y}{4(x+y)^2};\quad \frac{5x-y^2}{9(x-y)^2};\quad \frac{x^3+y}{18(x^4-y^4)}.$$

Ở ví dụ trên, ta đã tìm được mẫu chung của ba phân thức đã cho là: $36(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)$

Tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức:

$36(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2) : 4(x + y)^2 = 9(x - y)^2(x^2 + y^2)$

$36(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2) : 9(x - y)^2 = 4(x + y)^2(x^2 + y^2)$

$36(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2) : 18(x - y)(x + y)(x^2+y^2) = 2(x^2-y^2)$

Các phân thức đã cho có mẫu chung

$MC = 36(x - y)^2(x + y)^2(x^2 + y^2)$, là các phân thức sau:

$$\frac{x+2y}{4(x+y)^2}=\frac{(x+2y).9(x-y)^2(x^2+y^2)}{4(x+y)^2.9(x-y)^2(x^2+y^2)}=\frac{9(x+2y)(x-y)^2(x^2+y^2)}{MC}$$

$$\frac{5x-y^2}{9(x-y)^2}=\frac{(5x-y^2).4(x+y)^2(x^2+y^2)}{9(x-y)^2.4(x+y)^2(x^2+y^2)}=\frac{4(5x-y^2)(x+y)^2(x^2+y^2)}{MC}$$

$$\frac{x^3+y}{18(x^4-y^4)}=\frac{(x^3+y).2(x^2-y^2)}{18(x^4-y^4).2(x^2-y^2)}=\frac{2(x^3+y)(x^2-y^2)}{MC}.$$

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Tìm tập xác định của các phân thức sau:

a) $\dfrac{x+5}{x^2-x+2}$ b) $\dfrac{3x+2y}{(x-1)^2+(y+5)^2}$

c) $\dfrac{6x-5y}{x^2+2x-15}$; d) $\dfrac{x(x+7)}{x^2-2x+2}$.

Bài 2. Với giá trị nào của biến thì mỗi phân thức sau có giá trị bằng 0?

a) $\dfrac{(x+3)(x-1)}{2x-7}$; b) $\dfrac{x-2}{x^2-3x-8}$;

c) $\dfrac{xy-x-y+1}{x^2+y^2+3}$; d) $\dfrac{8xyz}{x^2+y^4+z^8+7}$.

Bài 3. Chứng minh đẳng thức:

a) $\dfrac{-x-2}{x-1}=\dfrac{x^3+8}{(1-x)(x^2-2x+4)}$; b) $\dfrac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)}=\dfrac{x-2}{-x}$;

c) $\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Bài 4. Rút gọn phân thức sau:

a) $\dfrac{4x^2+12x+9}{2x^2-x-6}$; b) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-8x+15}$;

c) $\dfrac{x^2+y^2-4+2xy}{x^2-y^2+4+4x}$; d) $\dfrac{2|x-5|}{x^2-x-20}$.

Bài 5. Quy đồng mẫu các phân thức:

a) $\dfrac{x-1}{2x+2}$, $\dfrac{x+1}{3x-3}$, $\dfrac{xy}{1-x^2}$;

b) $\dfrac{1}{x^3+1}$, $\dfrac{3}{5x+5}$, $\dfrac{7}{x^2-x+1}$;

c) $\dfrac{3x}{x^3-27}$, $\dfrac{4x}{x^2-6x+9}$, $\dfrac{11}{x^2+3x+9}$;

d) $\dfrac{30}{4x^3-x}$, $\dfrac{5}{x-2x^2}$, $\dfrac{23}{2x^2+x}$.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Cho phân thức:

$$A = \frac{6x^2 + 2x - 3xy - y}{6x - 3y}.$$

a) Tìm tập xác định của phân thức A;

b) Rút gọn phân thức A rồi tìm giá trị của nó với: $x = -0,5$; $y = 3$.

Bài 7. Cho phân thức:

$$B = \frac{1 + x^4 - x^3 - x}{2 + 2x + 3x^2 + x^3 + x^4}.$$

a) Rút gọn phân thức B;

b) Phát biểu nhận xét về phân thức B sau khi đã rút gọn.

Bài 8. Quy đồng mẫu các phân thức sau:

a) $\frac{2x}{9y^2z}$, $\frac{-y}{15xz^2}$, $\frac{13z}{63x^2y^3}$;

b) $\frac{1}{xy - 2y^2}$, $\frac{y}{x + 2y}$, $\frac{x}{4xy^2 - x^3}$;

c) $\frac{18x}{2x + 4}$, $\frac{5}{1 - x^2}$, $\frac{x + 7}{x^2 - 3x + 2}$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) $\frac{x+5}{x^2 - x - 2} = \frac{x+5}{x^2 + x - 2x - 2} = \frac{x+5}{x(x+1) - 2(x+1)}$

$= \frac{x+5}{(x+1)(x-2)}$. TXĐ: $\{x \mid x \in Q, x \neq -1; x \neq 2\}$

b) TXĐ = $\{x, y \mid x \in Q, y \in Q, x \neq 1, y \neq -5\}$

c) $\frac{6x - 5y}{x^2 + 2x - 15} = \frac{6x - 5y}{x^2 + 5x - 3x - 15} = \frac{6x - 5y}{x(x+5) - 3(x+5)}$

$= \dfrac{6x-5y}{(x+5)(x-3)}$; TXĐ = $\{x \mid x \in Q; x \neq -5; x \neq 3\}$

d) $\dfrac{x(x+7)}{x^2-2x+2} = \dfrac{x(x+7)}{x^2-2x+1+1} = \dfrac{x(x+7)}{(x-1)^2+1}$;

TXĐ = $\{x \mid x \in Q\}$.

Bài 2. a) Phân thức có giá trị bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0.

$$\begin{cases}(x+3)(x-1)=0\\2x-7\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3 \text{ hoặc } x=1\\x\neq \dfrac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=-3 \text{ hoặc } x=1.$$

Cách khác: Ta thấy tử bằng 0 khi x = - 3 hoặc x = 1. Với x =- 3 thì mẫu bằng 2(-3) - 7 = - 6 - 7 = -13 ≠ 0. Với x = 1 thì mẫu bằng 2.1- 7 = 2 - 7=- 5 ≠ 0.

Vậy với x = -3 hoặc x = 1 thì phân thức có giá trị bằng 0.

b) Tử bằng 0 khi x = 2.

Với x = 2 thì mẫu bằng 2^2 -3.2 - 8 = 4 - 6 - 8 = - 10 ≠ 0.

Vậy với x = 2 thì phân thức có giá trị bằng 0.

c) TXĐ = $\{ x, y \mid x \in Q, y \in Q \}$

Tử xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (y - 1)(x - 1)

(y - 1)(x - 1) bằng 0 khi x = 1 hoặc y = 1.

Vậy phân thức có giá trị bằng 0 khi x = 1, y bất kì hoặc x bất kì, y = 1.

d) TXĐ = $\{x, y, z \mid x \in Q, y \in Q, z \in Q\}$

Tử 8xyz bằng 0 khi có ít nhất một trong các biến x, y, z bằng 0.

Vậy phân thức có giá trị bằng 0 khi x = 0; y, z bất kì hoặc y = 0; x, z bất kì hoặc z = 0; x, y bất kì.

Bài 3. a) Biến đổi vế phải, dùng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có:

$$B = \frac{x^3+8}{(1-x)(x^2-2x+4)} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(1-x)(x^2-2x+4)}$$

Biết x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = $(x - 1)^2$ + 3, luôn khác

0 với mọi x, nên theo tính chất cơ bản của phân thức có:

$$B = \frac{x+2}{1-x}.$$

Biến đổi vế trái, theo quy tắc đổi dấu phân thức, có:

$$A = \frac{-x-2}{x-1} = \frac{(x+2)}{-(1-x)} = \frac{x+2}{1-x}.$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$A = \frac{8-x^3}{x(x^2+2x+4)} = \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{x(x^2+2x+4)}.$$

Biết $x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 1) + 3 = (x + 1)^2 + 3$ luôn khác 0 với mọi x, nên theo tính chất cơ bản của phân thức có:

$$A = \frac{2-x}{x}.$$

Đổi dấu phân thức $A = \frac{2-x}{x} = \frac{-(-2+x)}{-x} = \frac{x-2}{-x}$.

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

c) Biến đổi vế trái:

$$A = \frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x-1} = \frac{x^3(x+1)+(x+1)}{(x^4-x^3+x^2)+(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x^3+1)}{x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+1)}.$$

Biết $x^2 - x + 1 = x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ luôn khác 0 với mọi x, nên theo tính chất cơ bản của phân thức có $A = \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)}$.

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

Bài 4. a) $\dfrac{4x^2+12x+9}{2x^2-x-6}=\dfrac{(2x)^2+2.2x.3+3^2}{2x^2-4x+3x-6}=\dfrac{(2x+3)^2}{2x(x-2)+3(x-2)}$

$$=\frac{(2x+3)^2}{(x-2)(2x+3)}=\frac{2x+3}{x-2}\left(\text{với } x\neq-\frac{3}{2};\ x\neq 2\right).$$

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-8x+15}=\dfrac{x^2-2.x.3+3^2}{x^2-3x-5x+15}=\dfrac{(x-3)^2}{x(x-3)-5(x-3)}$

$$=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-3}{x-5}\ (\text{với } x\neq 3;\ x\neq 5).$$

c) $\dfrac{x^2+y^2-4+2xy}{x^2-y^2+4+4x}=\dfrac{(x^2+2xy+y^2)}{(x^2+4x+4)-y^2}=\dfrac{(x+y)^2-2^2}{(x+2)^2-y^2}$

$$=\frac{(x+y+2)(x+y-2)}{(x+2+y)(x+2-y)}=\frac{x+y-2}{x-y+2}\ (\text{với } x+2\neq y,\ x+y\neq -2)$$

d) Với phân thức $\dfrac{2|x-5|}{x^2-x-20}$, trước hết cần làm mất dấu giá trị tuyệt đối ở tử, muốn vậy phải sử dụng định nghĩa của giá trị tuyệt đối:

$$|A|=\begin{cases}A & \text{nếu } A\geq 0\\ -A & \text{nếu } A<0\end{cases}$$

Ta có $x^2 - x - 20 = x^2 - 5x + 4x - 20 = x(x - 5) + 4(x - 5)$
$= (x - 5)(x + 4)$.

Phân thức có tập xác định là:

TXĐ = $\{x \mid x \in Q,\ x \neq -4,\ x \neq 5\}$

Xét các giá trị của x thuộc tập xác định của phân thức, ta có:

* Nếu $x > 5$ tức là $x - 5 > 0$ thì $|x - 5| = x - 5$. Do đó:

$$\frac{2|x-5|}{x^2-x-20}=\frac{2(x-5)}{(x-5)(x+4)}=\frac{2}{x+4}\ \text{với } x\neq -4.$$

* Nếu $x < 5$ tức là $x - 5 < 0$ thì $|x - 5| = -(x - 5)$. Do đó:

$$\frac{2|x-5|}{x^2-x-20}=\frac{-2(x-5)}{(x-5)(x+4)}=\frac{-2}{x+4}\ \text{với } x\neq -4$$

Bài 5. a) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$\frac{x-1}{2x+2}=\frac{x-1}{2(x+1)},\quad \frac{x+1}{3x-3}=\frac{x+1}{3(x-1)},\quad \frac{xy}{1-x^2}=\frac{-xy}{(x-1)(x+1)}.$$

Mẫu chung: $6(x-1)(x+1)$

Nhân tử phụ: $3(x-1)$, $2(x+1)$, 6

Ta có: $\dfrac{x-1}{2x+2}=\dfrac{3(x-1)^2}{6(x-1)(x+1)}$, $\dfrac{x+1}{3x-3}=\dfrac{2(x+1)^2}{6(x-1)(x+1)}$,

$$\frac{xy}{1-x^2}=\frac{-6xy}{6(x-1)(x+1)}.$$

b) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},\quad \frac{3}{5x+5}=\frac{3}{5(x+1)},\quad \frac{7}{x^2-x+1}.$$

Mẫu chung: $5(x+1)(x^2-x+1)$

Nhân tử phụ: 5; x^2-x+1; $5(x+1)$

Ta có:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{5}{5(x+1)(x^2-x+1)},\quad \frac{3}{5x+5}=\frac{3(x^2-x+1)}{5(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{7}{x^2-x+1}=\frac{35(x+1)}{5(x+1)(x^2-x+1)}.$$

c) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$\frac{3x}{x^3-27}=\frac{3x}{(x-3)(x^2+3x+9)},\quad \frac{4x}{x^2-6x+9}=\frac{4x}{(x-3)^2},\quad \frac{11}{x^2+3x+9}.$$

Mẫu chung: $(x-3)^2(x^2+3x+9)$

Nhân tử phụ: $x-3$, x^2+3x+9, $(x-3)^2$

Ta có:

$$\frac{3x}{x^3-27}=\frac{3x(x-3)}{(x-3)^2(x^2+3x+9)},\quad \frac{4x}{x^2-6x+9}=\frac{4x(x^2+3x+9)}{(x-3)^2(x^2+3x+9)}$$

$$\frac{11}{x^2+3x+9}=\frac{11(x-3)^2}{(x-3)^2(x^2+3x+9)}.$$

d) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$\frac{30}{4x^3 - x} = \frac{30}{x(2x+1)(2x-1)}, \quad \frac{5}{x - 2x^2} = \frac{-5}{x(2x-1)};$$

$$\frac{23}{2x^2 + x} = \frac{23}{x(2x+1)}.$$

Mẫu chung: $x(2x + 1)(2x + 1)$

Nhân tử phụ: $1; 2x + 1; 2x - 1$.

Ta có:

$$\frac{30}{4x^3 - x} = \frac{30}{x(2x+1)(2x-1)}, \quad \frac{5}{x - 2x^2} = \frac{-5(2x+1)}{x(2x+1)(2x-1)},$$

$$\frac{23}{2x^2 + x} = \frac{23(2x-1)}{x(2x+1)(2x-1)}.$$

Bài 6. a) $6x - 3y = 3(2x - y)$ khác 0 khi $2x \neq y$ hay $x \neq \frac{1}{2}y$.

TXĐ = $\{x, y \mid x \in Q, y \in Q; x \neq \frac{1}{2}y\}$

b) $A = \frac{6x^2 + 2x - 3xy - y}{6x - 3y} = \frac{(6x^2 + 2x) - (3xy + y)}{6x - 3y}$

$$= \frac{2x(3x+1) - y(3x+1)}{3(2x-y)} = \frac{(3x+1)(2x-y)}{3(2x-y)} = \frac{3x+1}{3}.$$

Tính giá trị $A = \frac{3x+1}{3} = \frac{3.(-0,5)+1}{3} = \frac{-0,5}{3} = -\frac{1}{6}$.

Bài 7. a) $B = \frac{1 + x^4 - x^3 - x}{2 + 2x + 3x^2 + x^3 + x^4} = \frac{(x^4 - x^3) - (x-1)}{2 + 2x + 2x^2 + x^2 + x^3 + x^4}$

$$= \frac{x^3(x-1) - (x-1)}{(2 + 2x + 2x^2)(x^2 + x^3 + x^4)} = \frac{(x-1)(x^3 - 1)}{2(1 + x + x^2) + x^2(1 + x + x^2)}$$

$$= \frac{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}{(1 + x + x^2)(x^2 + 2)} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2}.$$

Biết $1 + x + x^2 = x^2 + 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ luôn dương và $x^2 + 2$ cũng luôn dương nên TXĐ = $\{x \mid x \in Q\}$.

b) Ta biết $(x - 1)^2 \geq 0$ và $x^2 + 2 > 0$ nên $B = \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \geq 0$, do đó có thể phát biểu nhận xét sau: Phân thức B luôn có giá trị không âm đối với x.

Bài 8. a) Mẫu chung: $315x^2y^3z^2$

Nhân tử phụ: $35x^2y^3z$; $9xy^3$; $5z^2$.

Ta có:

$$\frac{2x}{9y^2z} = \frac{70x^3y^3z}{315x^2y^3z^2}, \quad \frac{-y}{15xz^2} = \frac{-9xy^4}{315x^2y^3z^2}, \quad \frac{13z}{63x^2y^3} = \frac{65z^3}{315x^2y^3z^2}.$$

b) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$\frac{1}{xy-2y^2} = \frac{1}{y(x-2y)}; \quad \frac{y}{x+2y}; \quad \frac{x}{4zy^2-z^3} = \frac{-x}{x(x^2-4y^2)} = \frac{-x}{x(x+2y)(x-2y)}.$$

Mẫu chung: $xy(x + 2y)(x - 2y)$;

Nhân tử phụ: $x(x + 2y)$; $xy(x - 2y)$; y

Ta có:

$$\frac{1}{xy-2y^2} = \frac{x(x+2y)}{xy(x+2y)(x-2y)}; \quad \frac{y}{x+2y} = \frac{xy^2(x-2y)}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

$$\frac{x}{4xy^2-x^3} = \frac{-x}{x^3-4xy^2} = \frac{-xy}{xy(x+2y)(x-2y)}.$$

c) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$\frac{18x}{2x+4} = \frac{18x}{2(x+2)} = \frac{9x}{x+2}; \quad \frac{5}{1-x^2} = \frac{-5}{x^2-1} = \frac{-5}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x+7}{x^2-3x+2} = \frac{x+7}{x^2-x-2x+2} = \frac{x+7}{x(x-1)-2(x-1)} = \frac{x+7}{(x-1)(x-2)}.$$

Mẫu chung: $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Nhân tử phụ: $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$; $(x - 2)(x + 2)$

$$(x + 1)(x + 2).$$

Ta có:

$$\frac{18x}{2x+4} = \frac{9x}{x+2} = \frac{9x(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{5}{1-x^2} = \frac{-5}{x^2-1} = \frac{-5(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x+7}{x^2-3x+2} = \frac{x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+7)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}.$$

§4. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Phép cộng

a. Cộng nhiều phân thức cùng mẫu: Muốn cộng nhiều phân thức cùng mẫu, ta:

- Cộng các tử với nhau
- Giữ nguyên mẫu
- Rút gọn phân thức vừa tìm được.

Ví dụ:

$$\frac{x^3}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^3+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = x^2 - x + 1 \text{ (với } x \neq -1)$$

b. Cộng nhiều phân thức không cùng mẫu: Muốn cộng nhiều phân thức không cùng mẫu, ta:

- Quy đồng mẫu
- Cộng các phân thức có cùng mẫu vừa tìm được.

Ví dụ: $\dfrac{x^2y^2}{m^2n^2}+\dfrac{(x^2-m^2)(y^2-m^2)}{m^2(m^2-n^2)}+\dfrac{(x^2-n^2)(y^2-n^2)}{n^2(n^2-m^2)}$

$$=\frac{x^2y^2}{m^2n^2}+\frac{(x^2-m^2)(y^2-m^2)}{m^2(m^2-n^2)}+\frac{-(x^2-n^2)(y^2-n^2)}{n^2(m^2-n^2)}$$

$$=\frac{x^2y^2(m^2-n^2)+n^2(x^2-m^2)(y^2-m^2)-m^2(x^2-n^2)(y^2-n^2)}{m^2n^2(m^2-n^2)}$$

$$=\frac{x^2y^2m^2-x^2y^2n^2+x^2y^2n^2-x^2m^2n^2-y^2m^2n^2}{m^2n^2(m^2-n^2)}+$$

$$+\frac{m^4n^2-x^2y^2m^2+x^2m^2n^2+y^2m^2n^2-m^2n^2}{m^2n^2(m^2-n^2)}$$

$$=\frac{m^4n^2-m^2n^4}{m^2n^2(m^2-n^2)}=\frac{m^2n^2(m^2-n^2)}{m^2n^2(m^2-n^2)}=1$$

(với $m \neq 0$; $n \neq 0$; $m \neq n$).

2. Phép trừ

Phép trừ hai phân thức là phép cộng phân thức bị trừ với phân thức đối của phân thức trừ:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)$$

Ví dụ: $\dfrac{x+2}{x^2+3x}-\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{x+2}{x(x+3)}+\dfrac{-(x+1)}{(x+3)(x-3)}$

$$=\frac{(x+2)(x-3)-x(x+1)}{x(x+3)(x-3)}=\frac{x^2-3x+2x-6-x^2-x}{x(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{-2x-6}{x(x+3)(x-3)}=\frac{-2(x+3)}{x(x+3)(x-3)}=\frac{-2}{x(x-3)}$$ (với $x \neq -3$, $x \neq 0$, $x \neq 3$)

3. Phép nhân

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử với nhau, các mẫu với nhau. Kết quả là một phân thức với tử bằng tích các tử; mẫu bằng tích các mẫu của hai phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$$

Ví dụ: $\dfrac{x^2y^2-36}{4m^3-m}.\dfrac{2m^2+m}{xy-6}=\dfrac{(x^2y^2-36)(2m^2+m)}{(4m^3-m)(xy-6)}$

$=\dfrac{(xy-6)(xy+6).(2m+1)m}{m(2m+1)(2m-1)(xy-6)}=\dfrac{xy+6}{2m-1}$

(với $m \neq 0$; $m \neq \pm\dfrac{1}{2}$; $xy \neq 6$).

4. Phép chia

Thương của phân thức $\dfrac{A}{B}$ và phân thức $\dfrac{C}{D} \neq 0$ là tích của $\dfrac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\dfrac{C}{D}$.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C} \quad \left(\frac{C}{D}\neq 0\right)$$

Ví dụ: $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)$

$=\dfrac{(x+y)^2+x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}:\dfrac{(x-y)(x^2-xy+y^2)-(x^3-y^3)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$

$=\dfrac{x^2+2xy+y^2+x^2+y^2}{(x-y)(x+y)}.\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2-xy+y^2)-(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

$=\dfrac{2(x^2+y^2+xy)}{(x-y)(x+y)}.\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{-2xy(x-y)}$

$=\dfrac{(x^2+y^2+xy)(x+y)(x^2+y^2-xy)}{-xy(x+y)(x-y)^2}=\dfrac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{-xy(x-y)^2}$

$=-\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2}{xy(x-y)^2}=-\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{xy(x-y)^2}$

(với $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x \neq \pm y$).

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Thực hiện phép cộng:

a) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2-x}$ b) $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x^2-5x+6}+\frac{3}{4x-x^2-3}$

c) $a-x+\frac{x^2}{a+x}$ d) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}$.

Bài 2. Thực hiện phép trừ:

a)

$\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}$ b) $\frac{x^2-1}{2x^2-4x+2}-\frac{x+3}{2x+2}$

c) $\frac{4-2x+x^2}{2+x}-2-x$.

Bài 3. Chứng minh đẳng thức:

a) $\frac{2x+1}{4x-2}+\frac{1-2x}{4x+2}-\frac{2}{1-4x^2}=\frac{2}{2x-1}\left(x\neq\pm\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{4x^2-(x-3)^2}{9(x^2-1)}-\frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2}+\frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2}=1$ (với $x\neq\pm1$, $x\neq\pm3$).

Bài 4. Thực hiện phép tính sau:

a) $\frac{3x+3x}{x^2-2xy+y^2}.\frac{ax-ay+bx-by}{6x+6y}$ b) $\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2}-\frac{x^3+y^3}{x^3y-x^2y^2+xy^3}$

c) $\frac{2x^3-2}{x+1}:\frac{2x^2+2x+2}{x^2+2x+1}$ d) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+y^3}:\frac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2}$.

Bài 5. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

a) $A=\frac{8x^3}{x^3-y^3}:\frac{4x^2}{x^2+xy+y^2}+\frac{x}{x-y}$ với $x=0,75$, $y=-0,25$

b) $B=\left(\frac{y}{x^2-xy}-\frac{x}{xy-y^2}\right).\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$ với $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Thực hiện phép tính sau:

a) $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{6x-x^2-8}-\dfrac{1}{5x-x^2-6}$;

b) $\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{2}{(x+4)(x+6)}+\dfrac{1}{x+6}$.

Bài 7. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = x:\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x^3+3x(x-1)-1}{2x^2+2x}.\dfrac{-4x}{x^2+1-2x}-\dfrac{4x^2}{x^2-1}$ với $x = 0,5$;

b) $B=\left[\left(\dfrac{2}{x-y}-\dfrac{2x}{x^3+y^3}.\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right):\dfrac{4y^2}{x^2+y^2-2xy}\right].\dfrac{x+y}{x-y}$

với $x = 2$; $y = 0,01$;

c) $C=\dfrac{x-z}{x^2+xy+y^2}.\dfrac{x^3-y^3}{x^2y-yz^2}.\left(1+\dfrac{z}{x-z}-\dfrac{1+z}{z}\right):\dfrac{z(1+z)-x}{yz}$

với $x=\dfrac{3}{4}$; $y=-\dfrac{1}{2}$; $z=\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên và tìm giá trị nguyên đó của phân thức:

a) $A=\dfrac{x^3-5x^2+9x-2}{x-3}$; b) $B=\dfrac{x^3-3x^2+4x-7}{x^2+4}$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) $\dfrac{x^2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{2-x}$

$$=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2-x}=\frac{x^2+x-2-2(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2+x-2-2x-4}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x^2-4)-(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x-3}{x-2}\ (\text{với } x\neq\pm2).$$

b) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{4x-x^2-3}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{3}{(1-x)(x-3)}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{2}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{-3}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{x-3+2(x-1)-3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{x-3+2x-2-3x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ (với $x\neq 1$; $x\neq 2$; $x\neq 3$).

c) $a-x+\dfrac{x^2}{a+x}=(a-x)+\dfrac{x^2}{a+x}=\dfrac{a^2-x^2+x^2}{a+x}$

$=\dfrac{a^2}{a+x}$ (với $x\neq -a$).

d) $\dfrac{1}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(x-y)}$

$=\dfrac{(z-x)+(x-y)+(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=\dfrac{0}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$

với $x\neq y\neq z$.

Bài 2. a) $\dfrac{1}{6x-4y}-\dfrac{1}{6x+4y}-\dfrac{3x}{4y^2-9x^2}$

$=\dfrac{1}{2(3x-2y)}-\dfrac{1}{2(3x+2y)}+\dfrac{3x}{(3x)^2-(2y)^2}$

$=\dfrac{3x+2y-(3x-2y)+6x}{2(3x-2y)(3x+2y)}=\dfrac{3x+2y-3x+2y+6x}{2(3x-2y)(3x+2y)}$

$=\dfrac{4y+6x}{2(3x-2y)(3x+2y)}=\dfrac{2(2y+3x)}{2(3x+2y)(3x-2y)}=\dfrac{1}{3x-2y}$

$\left(\text{với } x\neq \pm\dfrac{2}{3}y\right)$.

b) $\dfrac{x^2-1}{2x^2-4x+2}-\dfrac{x+3}{2x+2}$

$$=\frac{x^2-1}{2(x^2-2x+1)}-\frac{x+3}{2(x+1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)^2}-\frac{x+3}{2(x+1)}$$

$$=\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{x+3}{2(x+1)}=\frac{(x+1)^2-(x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+x-3x+3}{2(x-1)(x+1)}=\frac{4}{2(x^2-1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

với $x \neq \pm 1$.

c) $\dfrac{4-2x+x^2}{2+x}-2-x=\dfrac{4-2x+x^2}{2+x}-(2+x)$

$$=\frac{4-2x+x^2-(2+x)^2}{2+x}=\frac{4-2x+x^2-4-4x-x^2}{2+x}=\frac{-6x}{2+x}$$

(với $x \neq 2$).

Bài 3. a) Biến đổi vế trái:

$$\frac{2x+1}{4x-2}+\frac{1-2x}{4x+2}-\frac{2}{1-4x^2}=\frac{2x+1}{2(2x-1)}+\frac{1-2x}{2(2x+1)}+\frac{2}{(2x)^2-1}$$

$$=\frac{(2x+1)^2-(2x-1)(2x-1)+4}{2(2x-1)(2x+1)}=\frac{4x^2+4x+1-4x^2+4x-1+4}{2(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{8x+4}{2(2x-1)(2x+1)}=\frac{4(2x+1)}{2(2x-1)(2x+1)}=\frac{2}{2x-1}\left(\text{với } x \neq \pm\frac{1}{2}\right).$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\frac{4x^2-(x-3)^2}{9(x^2-1)}-\frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2}+\frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x+x-3)(2x-x+3)}{9(x^2-1)}-\frac{(x-3)(x+3)}{(2x+3+x)(2x+3-x)}+\frac{(2x-3+x)(2x-3-x)}{(2x+x+3)(2x-x-3)}$$

$$=\frac{3(x-1)(x+3)}{9(x-1)(x+1)}-\frac{(x-3)(x+3)}{3(x+1)(x+3)}+\frac{3(x-1)(x-3)}{3(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x+3}{3(x+1)} - \frac{x-3}{3(x+1)} + \frac{x-1}{x+1} \text{ (với } x \neq \pm 1;\ x \neq \pm 3)$$

$$= \frac{x+3-x+3+3x-3}{3(x+1)} = \frac{3x+3}{3(x+1)} = 1.$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

Bài 4. a) $\frac{3x+3y}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{ax-ay+bx-by}{6x+6y}$

$$= \frac{3(x+y)}{(x-y)^2} \cdot \frac{a(x-y)+b(x-y)}{6(x+y)}$$

$$= \frac{3(x+y)}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)(a+b)}{6(x+y)} = \frac{a+b}{2(x-y)} \text{ (với } x \neq \pm y).$$

b) $\frac{x^3-x^2y}{x^2-y^2} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^3y-x^2y^2+xy^3}$

$$= \frac{x^2(x-y)}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy(x^2-xy+y^2)} = \frac{x}{y}$$

(với $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x \neq \pm y$).

c) $\frac{2x^3-2}{x+1} : \frac{2x^2+2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2(x^3-1)}{x+1} : \frac{2(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2(x-1)(x^2+x+1).(x+1)^2}{(x+1).2(x^2+x+1)} = x^2-1 \text{ (với } x \neq -1).$$

d) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+y^3} : \frac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2}$

$$= \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} : \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2-xy+y^2}$$

$$= \frac{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{x^2-y^2}$$

(với $x \neq \pm y$).

$$= \frac{2x}{x-y} + \frac{x}{x-y} = \frac{3x}{x-y} \text{ (với } x \neq y).$$

Tính giá trị $A = \frac{3x}{x-y} = \frac{3 \times 0,75}{0,75 + 0,25} = 2,25$

b) $B = \left(\frac{y}{x^2 - xy} - \frac{x}{xy - y^2}\right) . \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$

$$= \left[\frac{y}{x(x-y)} - \frac{x}{y(x-y)}\right] . \frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{xy(x-y)} . \frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{-(x-y)(x+y).xy(x+y)}{xy(x-y)(x+y)(x-y)} = -\frac{x+y}{x-y} \text{ (với } x \neq \pm y).$$

Tính giá trị: $B = -\frac{x+y}{x-y} = -\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{5}.$

Bài 6. a) $\frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{6x - x^2 - 8} - \frac{1}{5x - x^2 - 6}$

$$= \frac{1}{x^2 - 3x - 4x + 12} + \frac{1}{2x - x^2 + 4x - 8} - \frac{1}{2x - x^2 + 3x - 6}$$

$$= \frac{1}{x(x-3) - 4(x-3)} + \frac{1}{x(2-x) - 4(2-x)} - \frac{1}{x(2-x) - 3(2-x)}$$

$$= \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(2-x)(x-4)} - \frac{1}{(2-x)(x-3)}$$

$$= \frac{1}{(x-3)(x-4)} - \frac{1}{(x-2)(x-4)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x-2-(x-3)+x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{x-2-x+3+x-4}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{x-3}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{1}{(x-2)(x-4)} \text{ (với } x \neq 2;\ x \neq 3;\ x \neq 4).$$

b) Nhận thấy: $\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$; $\frac{2}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$

và $\frac{2}{(x+4)(x+6)} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$, do đó:

$$\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6}$$

$$= \frac{1}{x} \text{ (với } x \neq 0;\ x \neq -2;\ x \neq -4;\ x \neq -6).$$

Bài 7. a) Rút gọn:

$$A = x : \frac{x-1}{2} - \frac{x^3 + 3x(x-1) - 1}{2x^2 + 2x} \cdot \frac{-4x}{x^2 + 1 - 2x} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= x.\frac{2}{x-1} - \frac{(x^3 - 1) + 3x(x-1)}{2x(x+1)} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x}{x-1} - \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 3x)}{2x(x+1)} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x}{x-1} - \frac{4(x-1)(x^2 + 4x + 1)}{2x(x+1)(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x}{x-1} - \frac{-2(x^2 + 4x + 1)}{x^2 - 1} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x(x+1) + 2(x^2 + 4x + 1) - 4x^2}{x^2 - 1} = \frac{10x + 2}{x^2 - 1} \text{ (với } x \neq 0;\ x \neq \pm 1).$$

Tính giá trị:

$$A = \frac{10x + 2}{x^2 - 1} = \frac{10.\frac{1}{2} + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{5 + 2}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{7}{-\frac{3}{4}} = -\frac{28}{3} = -9\frac{1}{3}.$$

b) Rút gọn:

$$B = \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{x^3+y^3}.\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right) : \frac{4y^2}{x^2+y^2-2xy}\right].\frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}.\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right) : \frac{4y^2}{(x-y)^2}\right].\frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x-y)}\right) : \frac{4y^2}{(x-y)^2}\right].\frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\frac{2(x+y)-2x}{(x+y)(x-y)}.\frac{(x-y)^2}{4y^2}\right].\frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\frac{2x+2y-2x}{x+y}.\frac{x-y}{4y^2}\right].\frac{x+y}{x-y}$$

$$= \frac{x-y}{2y(x+y)}.\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2y} \text{ (với } x \neq \pm y;\ y \neq 0).$$

Tính giá trị:

$$B = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2.0{,}01} = \frac{1}{0{,}02} = 50.$$

c) Rút gọn:

$$C = \frac{x-z}{x^2+xy+y^2}.\frac{x^3-y^3}{x^2y-yz^2}.\left(1+\frac{z}{x-z}-\frac{1+z}{z}\right) : \frac{z(1+z)-x}{yz}$$

$$= \frac{x-z}{x^2+xy+y^2}.\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y(x-z)(x+z)}.\frac{z(x-z)+z^2-(1+z)(x-z)}{z(x-z)} : \frac{z+z^2-x}{yz}$$

$$= \frac{x-y}{y(x+z)}.\frac{xz-z^2+z^2-x+z-xz+z^2}{z(x-z)}.\frac{yz}{z^2+z-x}$$

$$= \frac{x-y}{y(x+z)}.\frac{z^2+z-x}{z(x-z)}.\frac{yz}{z^2+z-x}$$

$$= \frac{x-y}{x^2-z^2} \text{ (với } x \neq \pm z;\ y \neq 0;\ z \neq 0)$$

Tính giá trị:

$$C = \frac{x-y}{x^2-z^2} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}{\frac{9}{16}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{16}} = 4.$$

Bài 8. a) $A = \frac{x^3-5x^2+9x-2}{x-3} = x^2-2x+3+\frac{7}{x-3}$

A có giá trị nguyên khi $\frac{7}{x-3}$ là nguyên, như vậy phải có x - 3 là ước của 7. Ước của 7 là ±1; ± 7. Do đó:

$x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$ $\quad$ $x - 3 = 1$ $\quad$ $\Rightarrow x = 4$;

$x - 3 = -7 \Rightarrow x = -4$ $\quad$ $x - 3 = 7$ $\quad$ $\Rightarrow x = 10$.

Vậy với x bằng -4; 2; 4; 10 thì A là các số nguyên sau:

$$A = x^2 - 2x + 3 + \frac{7}{x-3} = (-4)^2 - 2(-4) + 3 + \frac{7}{-4-3} = 26$$

$$A = x^2 - 2x + 3 + \frac{7}{x-3} = 2^2 - 2.2 + 3 + \frac{7}{2-3} = -4$$

$$A = x^2 - 2x + 3 + \frac{7}{x-3} = 4^2 - 2.4 + 3 + \frac{7}{4-3} = 18$$

$$A = x^2 - 2x + 3 + \frac{7}{x-3} = 10^2 - 2.10 + 3 + \frac{7}{10-3} = 84.$$

b) $B = \frac{x^3-3x^2+4x-7}{x^2+4} = x-3+\frac{5}{x^2+4}$.

B có giá trị nguyên khi $\frac{5}{x^2+4}$ là nguyên, như vậy phải tìm số nguyên x để $x^2 + 4$ là ước của 5. Ta thấy x = ± 1.

Vậy với x bằng -1; 1 thì B là các số nguyên sau:

$$B = x-3+\frac{5}{x^2+4} = -1-3+\frac{5}{(-1)^2+4} = -3;$$

$$B = x-3+\frac{5}{x^2+4} = 1-3+\frac{5}{1^2+4} = -1.$$

§5.CÁC LOẠI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Giả sử A(x) và B(x) là hai biểu thức một biến. Khi nói A(x) = B(x) là một *phương trình*, ta hiểu rằng phải tìm giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức này bằng nhau.

Biến x được gọi là ẩn. Giá trị tìm được của ẩn gọi là nghiệm. Mỗi biểu thức gọi là một vế của phương trình.

- Mỗi phương trình có thể có 1, 2, 3, ..., nghiệm, hoặc có vô số nghiệm, hoặc vô nghiệm.

Kí hiệu S là tập hợp nghiệm.

Phương trình gọi là vô nghiệm nếu $S = \phi$.

2. Các loại phương trình bậc nhất

- Phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a, b là những hằng số, $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn; b được gọi là hạng tử tự do.

Nghiệm duy nhất là $x = -\frac{b}{a}$.

Cách giải phương trình đưa được về dạng bậc nhất:

+ Quy đồng mẫu hai vế rồi khử mẫu

+ Thực hiện các phép tính và chuyển vế đưa phương trình về dạng ax = c.

Ví dụ: a) Giải phương trình: $\dfrac{2x - \dfrac{4-3x}{5}}{15} = \dfrac{7x - \dfrac{x-3}{2}}{5} - x + 1$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu, ta có:

$$2x - \frac{4-3x}{5} = 3.\frac{14x - x + 3}{2} - 15x + 15$$

Giải ra được $x = -1\frac{13}{19}$.

b) Giải phương trình $\frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} + \frac{x+1}{3} = x + \frac{7}{12}$

Ta có: 3.3(2x + 1) - 2(5x + 3) + 4(x + 1) = 12x + 7.

Giải ra được: 0x = 0

Vậy nghiệm của phương trình là bất kỳ số nào (phương trình có vô số nghiệm).

- Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

+ Tìm tập xác định (TXĐ) của phương trình;

+ Quy đồng mẫu, rồi khử mẫu;

+ Giải phương trình vừa tìm được;

+ Nghiệm của phương trình là các giá trị tìm được của ẩn thuộc TXĐ (các giá trị của ẩn không thuộc TXĐ được gọi là nghiệm ngoại lai).

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$.

TXĐ = $\{x \mid x \in Q, x \neq -2, x \neq -3\}$

Ta có: $\frac{5(x-2)(x+3) - 2(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}$

Thực hiện các phép tính được: $x = -1\frac{1}{2}$.

Vì $x = -4\frac{1}{2} \in$ TXĐ nên nghiệm của phương trình là: $x = -4\frac{1}{2}$.

b) $\frac{8-x}{x-7} - 8 = \frac{1}{x-7}$.

TXĐ = $\{x \mid x \in Q, x \neq 7\}$

Ta có: $\frac{(8-x)-8(x-7)}{x-7} = \frac{1}{x-7}$.

Giải ra được x = 7.

Vì x = 7 $\notin$ TXĐ nên không phải là nghiệm, phương trình đã cho vô nghiệm.

- Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng

A(x).B(x)...C(x) = 0

Cách giải: Giải các phương trình A(x) = 0, B(x) = 0... C(x) = 0. Tất cả các nghiệm tìm được đều là nghiệm của phương trình đã cho (và chỉ có chúng).

Ví dụ: Giải phương trình

a) $\frac{13}{2x^2+x-21} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{x^2-9}$.

Ta có: $\frac{13}{2x^2-6x+7x-21} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$,

hay $\frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$

TXĐ = $\{x \mid x \in Q, x \neq \pm 3; x \neq -\frac{7}{2}\}$

Giải ra được (x - 3)(x + 4) = 0. Từ đó $x_1 = 3$; $x_2 = -4$.

Vì 3 $\notin$ TXĐ và - 4 $\in$ TXĐ nên phương trình có một nghiệm x = -4.

b) $\frac{6(x+1)}{x+3} + \frac{10}{x-1} = \frac{28}{(x+3)(x-1)}$.

TXĐ = $\{x \mid x \in Q; x \neq 1; x \neq -3\}$

Ta có: 6(x + 1) (x - 1) + 10 (x + 3) = 28.

Giải ra được: $2(3x^2 + 5x - 2) = 0$, hay

$2(3x-1)(x+2) = 0$. Từ đó $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -2$.

Vì $x_1 = \frac{1}{3} \in$ TXĐ; $x_2 = -2 \in$ TXĐ, nên tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-2; \frac{1}{3}\right\}$.

- Phương trình có hệ số chữ

Giải phương trình có hệ số chữ cũng tương tự như giải phương trình với hệ số bằng số. Tuy nhiên, cần chú ý là mỗi khi chia cho một biểu thức chứa chữ, phải đặt điều kiện cho các chữ trong biểu thức để biểu thức khác 0.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$\frac{x+a-b}{a} - \frac{x+b-a}{b} = \frac{b^2-a^2}{ab}.$$

(Điều kiện: $a \neq 0$; $b \neq 0$)

Ta có: $b(x + a - b) - a(x + b - a) = b^2 - a^2$

Thực hiện các phép tính được:

$(b - a)x = 2(b^2 - a^2)$.

Nếu $b - a \neq 0$ tức $b \neq a$ thì $x = \frac{2(b^2-a^2)}{b-a} = 2(b+a)$

Nếu $b - a = 0$ tức $b = a$ thì phương trình có dạng $0x = 0$, phương trình có vô số nghiệm.

Vậy: + Với $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $b \neq a$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2(b + a)$.

+ Với $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $b = a$ thì phương trình có vô số nghiệm x tuỳ ý.

- Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Muốn giải các phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta cần dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số (hoặc biểu thức):

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

và dựa vào các điều kiện đã biết để khử dấu giá trị tuyệt

đối bằng cách thay biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối bởi chính nó hoặc biểu thức đối của nó. Sau khi tìm được giá trị của ẩn, cần đối chiếu giá trị ấy với điều kiện đã cho, nếu thỏa mãn thì giá trị đó là nghiệm.

Ví dụ: a) Tìm các giá trị của x sao cho $3 < x < 7$ và nghiệm đúng phương trình

$|x - 3| + 3|x - 7| = 10$.

Vì $3 < x < 7$ nên $x - 3 > 0$ và $x - 7 < 0$, do đó:

$|x - 3| = x - 3$ và $|x - 7| = -(x - 7) = 7 - x$.

Phương trình đã cho trở thành:

$x - 3 + 3(7 - x) = 10$. Từ đó $x = 4$.

Giá trị $x = 4$ thỏa mãn điều kiện $3 < x < 7$, vậy giá trị phải tìm của x là $x = 4$.

b) Giải phương trình: $|x - 2| - 3x = 6$.

+ Nếu $x - 2 \geq 0$ hay $x \geq 2$ thì $|x - 2| = x - 2$, phương trình đã cho có dạng:

$x - 2 - 3x = 6$. Từ đó $x = -4$.

Giá trị $x = -4$ không thỏa mãn $x \geq 2$ nên bị loại.

+ Nếu $x - 2 < 0$ hay $x < 2$ thì $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$, phương trình đã cho có dạng:

$2 - x - 3x = 6$. Từ đó $x = -1$.

Giá trị $x = -1$ thỏa mãn điều kiện $x < 2$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Giải phương trình:

a) $2(x - 3) + 1 = 2(x + 1) - 9$;

b) $\dfrac{9x - 0,7}{4} - \dfrac{5x - 1,5}{7} = \dfrac{12x - 2,1}{3}$;

c) $\dfrac{x - 12}{77} + \dfrac{x - 11}{78} = \dfrac{x - 74}{15} + \dfrac{x - 73}{16}$;

d) $\frac{109-x}{91}+\frac{107-x}{93}+\frac{105-x}{95}+\frac{103-x}{97}+4=0$.

Bài 2. Với giá trị nào của x thì hai biểu thức sau có giá trị bằng nhau?

a) $\frac{7x}{8}-5(x-9)$ và $\frac{20x+1,5}{6}$;

b) $1,5(x-5)+11$ và $7(x-8)-50,5$;

c) $\frac{x+1}{65}+\frac{x+2}{64}$ và $\frac{x+3}{63}+\frac{x+4}{62}$.

Bài 3. Giải phương trình:

a) $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$;

b) $\frac{x-1}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{7x-3}{9-x^2}$;

c) $\frac{2}{x+\frac{1}{1+\frac{x+1}{x-2}}}=\frac{6}{3x-1}$;

d) $\frac{2}{x^2+2x+1}-\frac{5}{x^2-2x+1}=\frac{3}{1-x^2}$.

Bài 4. Giải phương trình:

a) $x^2+2x+1=4(x^2-2x+1)$;

b) $x^2-9x+20=0$;

c) $(x^2-1)^2=4x+1$;

d) $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{6x-2}{x-2}$.

Bài 5. Giải phương trình:

a) $\frac{ax-1}{a+1}-\frac{x+a}{1-a}=\frac{a^2+1}{a^2-1}$;

b) $x - \frac{a}{5} - \left(2x - \frac{a}{10}\right) = 3x - \frac{a}{4} + 4x - \frac{37a}{20}$

c) $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$

d) $\frac{x}{(a-1)(a-2)} - \frac{2x}{(a-1)(a-3)} + \frac{3x}{(a-2)(a-3)} = \frac{4a}{(a-2)(a-3)}$.

Bài 6. Giải phương trình:

a) $|x - 1| + 3|x - 4| = 7$ (với $1 < x < 4$)

b) $|x - 2| - 3x = 5$

c) $|x - 3| - 5x = 7$

d) $|3x - 5| = |x + 2|$.

Bài 7. Với giá trị nào của x thì:

a) $A = 2x^2 - 20x + 81$ có giá trị nhỏ nhất?

b) $B = -5x^2 + \frac{10}{7}x - 1$ có giá trị lớn nhất?

Bài 8. Giải phương trình:

a) $\frac{x}{(a-b)(a-c)} + \frac{x}{(b-a)(b-c)} + \frac{x}{(c-a)(c-b)} = 2$

b) $\frac{a}{x-a} + \frac{1}{x+1} = \frac{a-1}{x-a} + \frac{a+1}{x+1}$

c) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$

d) $|2x - 1| = |x - 1|$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bai 1.a) $2(x - 3) + 1 = 2(x + 1) - 9$

Ta có: $2x - 6 + 1 = 2x + 2 - 9$

Từ đó: $0.x = -2$, phương trình vô nghiệm.

b) $\frac{9x-0,7}{4} - \frac{5x-1,5}{7} = \frac{12x-2,1}{3}$

Ta có: $21(9x - 0,7) - 12(5x - 1,5) = 28(12x - 2,1)$.

Giải ra được: x = 0,3.

Vậy nghiệm của phương trình là x = 0,3.

c) $\frac{x-12}{77}+\frac{x-11}{78}=\frac{x-74}{15}+\frac{x-73}{16}$

Ta có:

$$\left(\frac{x-12}{77}-1\right)+\left(\frac{x-11}{78}-1\right)=\left(\frac{x-74}{15}-1\right)+\left(\frac{x-73}{16}-1\right)$$

$$\frac{x-89}{77}+\frac{x-89}{78}=\frac{x-89}{15}+\frac{x-89}{16}$$

$$(x-89)\left(\frac{1}{77}+\frac{1}{78}\right)=(x-89)\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)$$

Nhận thấy $\frac{1}{77}+\frac{1}{78}\neq\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$, nên phương trình đã cho tồn tại khi x - 89 = 0, suy ra x = 89.

d) $\frac{109-x}{91}+\frac{107-x}{93}+\frac{105-x}{95}+\frac{103-x}{97}+4=0$

Ta có:

$$\left(\frac{109-x}{91}+1\right)+\left(\frac{107-x}{93}+1\right)+\left(\frac{105-x}{95}+1\right)+\left(\frac{103-x}{97}+1\right)=0$$

$$\frac{109-x+91}{91}+\frac{107-x+93}{93}+\frac{105-x+95}{95}+\frac{103-x+97}{97}=0$$

$$\frac{200-x}{91}+\frac{200-x}{93}+\frac{200-x}{95}+\frac{200-x}{97}=0$$

$$(200-x)\left(\frac{1}{91}+\frac{1}{93}+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}\right)=0.$$

Nhận thấy $\frac{1}{91}+\frac{1}{93}+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}\neq 0$, nên phương trình đã cho tồn tại khi 200 - x = 0, suy ra x = 200.

Bài 2. a) Giải phương trình:

$$\frac{7x}{8} - 5(x-9) = \frac{20x+1,5}{6}.$$

Thực hiện phép tính, giải ra được x = 6.

Vậy với x = 6 thì hai biểu thức đã cho có giá trị bằng nhau.

b) Giải phương trình:

1,5(x - 5) + 11 = 7(x - 8) - 50,5.

Thực hiện phép tính, giải ra được x = 20.

Vậy với x = 20 thì hai biểu thức đã cho có giá trị bằng nhau.

c) Giải phương trình:

$$\frac{x+1}{65} + \frac{x+2}{64} = \frac{x+3}{63} + \frac{x+4}{62}.$$

Ta có:

$$\left(\frac{x+1}{65}+1\right) + \left(\frac{x+2}{64}+1\right) = \left(\frac{x+3}{63}+1\right) + \left(\frac{x+4}{62}+1\right)$$

$$\frac{x+1+65}{65} + \frac{x+2+64}{64} = \frac{x+3+63}{63} + \frac{x+4+62}{62}$$

$$\frac{x+66}{65} + \frac{x+66}{64} = \frac{x+66}{63} + \frac{x+66}{62}$$

$$(x+66)\left(\frac{1}{65}+\frac{1}{64}\right) = (x+66)\left(\frac{1}{63}+\frac{1}{62}\right).$$

Nhận thấy $\frac{1}{65}+\frac{1}{64} \neq \frac{1}{63}+\frac{1}{62}$, nên để có phương trình trên thì x + 66 = 0, suy ra x = - 66.

Vậy với x = - 66 thì hai biểu thức đã cho có giá trị bằng nhau.

Bài 3. a) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-4} = \frac{10}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$

TXĐ = { x | x ∈ Q, x ≠ 2, x ≠ 3, x ≠ 4 }

Ta có: 3(x - 3)(x-4) - 2(x-2)(x - 4) -(x - 2)(x - 3) =10.

Giải ra, tìm được x = 1.

Với x = 1 ∈ TXĐ nên phương trình có nghiệm là x = 1.

b) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{7x-3}{9-x^2}$.

TXĐ = {x | x ∈ Q, x ≠ ± 3}

Ta có: $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{-(7x-3)}{x^2-9}$.

Giải ra tìm được: 0x = 0

Với mọi x ≠ ±3 đều là nghiệm của phương trình.

c) Trước hết biến đổi:

$$x + \frac{1}{1+\frac{x+1}{x-2}} = x + \frac{1}{\frac{x-2+x+1}{x-2}} = x + \frac{x-2}{2x-1}$$

$$= \frac{x(2x-1)+x-2}{2x-1} = \frac{2(x^2-1)}{2x-1}.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{6}{3x-1}$$

TXĐ = { x | x ∈ Q; x ≠ ± 1; x ≠ $\frac{1}{3}$}

Giải ra tìm được x = 1,4.

Với x = 1,4 ∈ TXĐ nên phương trình có nghiệm là x = 1,4.

d) $\frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{5}{x^2-2x+1} = \frac{3}{1-x^2}$.

TXĐ = {x | x ∈ Q, x ≠ ± 1}

Ta có: $\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{5}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+1)(x-1)}$

hay $2(x-1)^2 - 5(x+1)^2 = -3(x^2-1)$.

Giải ra tìm được: $x = -\frac{3}{7}$.

Với $x = -\frac{3}{7}$ ∈ TXĐ nên phương trình có nghiệm là

$x = -\frac{3}{7}$.

Bài 4. a) $x^2 + 2x + 1 = 4(x^2 - 2x + 1)$.

Ta có: $(x + 1)^2 = 4(x - 1)^2$ hay $(x + 1)^2 - [2(x - 1)]^2 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 3$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = 3$.

b) $x^2 - 9x + 20 = 0$.

Ta có: $x^2 - 4x - 5x + 20 = 0$; $x(x - 4) - 5(x - 4) = 0$ hay $(x - 4)(x - 5) = 0$. Từ đó $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

c) $(x^2 - 1)^2 = 4x + 1$ hay $x^4 - 2x^2 + 1 = 4x + 1$

Ta có: $x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = 4x + 1 + 4x^2$

hay $(x^2 + 1)^2 = (2x + 1)^2$;

$(x^2 + 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$

Giải ra được $x(x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$.

Do $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

d) $\frac{2x-1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{6x-2}{x-2}$.

TXĐ = $\{ x \mid x \in Q; x \neq 1, x \neq 2\}$

Ta có: $(2x - 1)(x - 2) + x = (6x - 2)(x - 1)$.

Giải ra được $4x(x - 1) = 0$

Từ đó $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Vì $x_1 = 0 \in$ TXĐ, $x_2 = 1 \notin$ TXĐ nên phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Bài 5. a) $\frac{ax-1}{a+1} - \frac{x+a}{1-a} = \frac{a^2+1}{a^2-1}$.

Ta có: $\frac{ax-1}{a+1} + \frac{x+a}{a-1} = \frac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}$ (điều kiện $a \neq \pm 1$)

Giải ra được $(a^2 + 1)x = 0$.

Vì $a^2 + 1 \neq 0$ nên phương trình có một nghiệm là $x = 0$ (với $a \neq \pm 1$).

b) $x - \frac{a}{5} - \left(2x - \frac{a}{10}\right) = 3x - \frac{a}{4} + 4x - \frac{37a}{20}$.

Ta có: $x - \frac{a}{5} - 2x + \frac{a}{10} = 3x - \frac{a}{4} + 4x - \frac{37a}{20}$.

Giải ra được $x = \frac{a}{4}$.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{a}{4}$.

c) $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$.

TXĐ = $\{ x \mid x \in Q; x \neq \pm 1\}$

Ta có: $(ax - 1)(x + 1) + 2(x - 1) = a(x^2 + 1)$.

Giải ra được $(a + 1)x = a + 3$.

Nếu $a + 1 \neq 0$ hay $a \neq -1$ thì $x = \frac{a+3}{a+1}$. Giá trị này là nghiệm nếu $\frac{a+3}{a+1} \neq 1$ và $\frac{a+3}{a+1} \neq -1$. Giải các điều kiện trên được $a \neq 2$.

Vậy nếu $a \neq -1$ và $a \neq 2$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{a+3}{a+1}$.

d) $\frac{x}{(a-1)(a-2)} - \frac{2x}{(a-1)(a-3)} + \frac{3x}{(a-2)(a-3)} = \frac{4a}{(a-2)(a-3)}$

(điều kiện $a \neq 1$; $a \neq 2$; $a \neq 3$).

Ta có: $x(a - 3) - 2x(a - 2) + 3x(a - 1) = 4a(a - 1)$

Giải ra được $2(a - 1)x = 4a(a - 1)$.

Từ điều kiện suy ra $x = \frac{4a(a-1)}{2(a-1)} = 2a$.

Vậy với $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$ phương trình có nghiệm là $x = 2a$.

Bài 6. a) Với $1 < x < 4$ thì $x - 1 > 0$ và $x - 4 < 0$, do đó $|x - 1| = x - 1$, và $|x - 4| = 4 - x$.

Phương trình $|x - 1| + 3|x - 4| = 7$ trở thành:

$x - 1 + 3(4 - x) = 7$. Từ đó $x = 2$.

Vậy với $x = 2$ thỏa mãn $1 < x < 4$ nên nghiệm của phương trình là $x = 2$.

b) - Nếu $x - 2 \geq 0$ hay $x \geq 2$ thì $|x - 2| = x - 2$, phương trình $|x - 2| - 3x = 5$ trở thành:

$x - 2 - 3x = 5$. Từ đó $x = -3,5$

Vì $x = -3,5$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 2$, nên bị loại.

- Nếu $x - 2 < 0$ hay $x < 2$ thì $|x - 2| = 2 - x$ phương trình $|x - 2| - 3x = 5$ trở thành:

$2 - x - 3x = 5$. Từ đó $x = -\frac{3}{4}$

Giá trị $x = -\frac{3}{4}$ thỏa mãn điều kiện $x < 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{3}{4}$.

c) - Nếu $x - 3 \geq 0$ hay $x \geq 3$ thì $|x - 3| = x - 3$, phương trình $|x - 3| - 5x = 7$ trở thành:

$x - 3 - 5x = 7$. Từ đó $x = -2\frac{1}{2}$

Vì $x = -2\frac{1}{2}$ không thỏa mãn điều kiện $x \geq 3$ nên bị loại.

- Nếu $x - 3 < 0$ hay $x < 3$ thì $|x - 3| = 3 - x$, phương trình $|x - 3| - 5x = 7$ trở thành:

$3 - x - 5x = 7$. Từ đó $x = -\frac{2}{3}$

Giá trị $x = -\frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x < 3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{3}$.

d) Biết rằng: hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau khi chúng bằng nhau hoặc đối nhau, do đó cần xét hai trường hợp sau:

- Nếu $3x - 5 = x + 2$ hay $2x = 7$ suy ra $x = 3,5$;
- Nếu $3x - 5 = -(x + 2)$ hay $3x - 5 = -x - 2$ suy ra $x = 0,75$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3,5$; $x_2 = 0,75$.

Bài 7. a) Có $A = 2x^2 - 20x + 81 = 2x^2 - 20x + 50 + 31$

$= 2(x^2 - 10x + 25) + 31 = 2(x - 5)^2 + 31$

Biết rằng: $(x - 5)^2 \geq 0$, nên $2(x - 5)^2 \geq 0$,

do đó $2(x - 5)^2 + 31 \geq 31$.

Như vậy $A \geq 31$, nên A có giá trị nhỏ nhất khi $2(x - 5)^2 + 31 = 31$ hay khi $2(x - 5)^2 = 0$ tức là $x = 5$.

Vậy với $x = 5$ thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là 31.

b) Có $B = -5x^2 + \frac{10}{7}x - 1 = -5\left(x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{49}\right) - \frac{44}{49}$

$$= -5\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{44}{49}$$

Biết rằng: $\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 \geq 0$ nên $-5\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 \leq 0$, do đó

$$-5\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{44}{49} \leq -\frac{44}{49}.$$

Như vậy $B \leq -\frac{44}{49}$, nên B có giá trị lớn nhất khi $-5\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{44}{49} = -\frac{44}{49}$ hay khi $5\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 = 0$ tức là $x = \frac{1}{7}$.

Vậy với $x = \frac{1}{7}$ thì biểu thức B có giá trị lớn nhất là $-\frac{44}{49}$.

Bài 8. a) $\dfrac{x}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{x}{(c-a)(c-b)}=2.$

Ta có: $\dfrac{x}{(a-b)(a-c)}-\dfrac{x}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{x}{(a-c)(b-c)}=2$.

Mẫu chung: $(a - b)(a - c)(b - c)$ với $a \neq b \neq c$.

Giải ra được: $0x = 2(a - b)(a - c)(b - c)$

Phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a-1}{x-a}+\dfrac{a+1}{x+1}$.

TXĐ = $\{x \mid x \in Q; x \neq a; x \neq -1\}$

Giải ra được $(a - 1)x = a^2 + 1$.

Nếu $a \neq 1$ thì $x=\dfrac{a^2+1}{a-1}$. Giá trị này là nghiệm nếu $\dfrac{a^2+1}{a-1}\neq a$ và $\dfrac{a^2+1}{a-1}\neq -1$.

Giải các điều kiện này được $a \neq -1$, $a \neq 0$.

Vậy nếu $a \neq 0$; $a \neq \pm 1$ thì phương trình có một nghiệm là $x=\dfrac{a^2+1}{a-1}$.

Trường hợp còn lại: vô nghiệm.

c) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$.

Ta có: $(x^3 + 6x^2 + 9x) - (x^2 + 6x - 9) = 0$

Giải ra được $(x - 1)(x + 3) = 0$. Từ đó $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -3\}$.

d) Biết rằng hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau khi chúng bằng nhau hoặc đối nhau, do đó cần xét hai trường hợp sau:

- Nếu $2x - 1 = x - 1$ thì $x = 0$;
- Nếu $2x - 1 = -x + 1$ thì $x=\dfrac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$.

§6.GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Ở §5, các phương trình bậc nhất đã được cho cụ thể, vấn đề cơ bản là tìm cách giải để có được nghiệm của phương trình.

Ở §6 này, từ các bài toán có văn, chẳng hạn như bài toán sau đây: "Người ta dự định chia số học sinh thành một số tổ nhất định để tham gia hoạt động hè. Nếu chia 9 người thành một tổ thì thừa một học sinh, nếu chia 10 người một tổ thì thiếu 7 học sinh. Tính số tổ dự định chia và số học sinh tham gia sinh hoạt hè".

Lời giải của bài toán trên được trình bày như sau: Gọi số tổ dự định là x (x nguyên dương).

Nếu chia 9 người một tổ thì thừa một học sinh, nên số học sinh tham gia hoạt động hè là $(9x + 1)$ học sinh.

Nếu chia 10 người một tổ thì thiếu 7 học sinh, nên số học sinh tham gia hoạt động hè là $(10x - 7)$ học sinh.

Vì số học sinh tham gia hoạt động hè là không đổi, nên có phương trình:

$9x + 1 = 10x - 7$, giải phương trình có $x = 8$.

Giá trị $x = 8$ là nguyên dương, thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thử lại: $9x + 1 = 9.8 + 1 = 73$

$10x - 7 = 10.8 - 7 = 73$

Trả lời: - Số tổ dự định chia là 8;

- Số học sinh tham gia sinh hoạt hè là 73 em.

Như vậy là với bài toán có văn như trên, vấn đề đặt ra trước hết phải lập được phương trình từ bài toán đã cho, sau đó mới là cách giải phương trình để tìm nghiệm thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Giải bài toán bằng cách lập phương trình thường có các bước phải làm như sau:

Bước 1. Lập phương trình, gồm có:

+ Chọn ẩn và xác định điều kiện của ẩn;

+ Biểu thị các số liệu (dữ kiện) của các đại lượng cần biết qua ẩn;

+ Tìm mối liên hệ giữa các số liệu để lập phương trình.

Bước 2. Giải phương trình

Bước 3. Chọn kết quả thích hợp, thử lại, trả lời.

Ở các bước trên thì bước 1 là quan trọng nhất vì có lập đúng được phương trình phù hợp với đề bài mới có được kết quả của bài toán đã ra. Đây là khâu khó nhất, nhưng sẽ quen dần một khi đã bỏ công sức vào việc suy nghĩ và luyện giải các dạng bài thường gặp.

Để có thể giải đúng, nhanh, bài toán giải bằng cách lập phương trình, rất cần chú ý:

+ Đọc kĩ đề bài và tóm tắt bài toán để hiểu rõ: số phải tìm, các số liệu đã cho;

+ Thường chọn trực tiếp số phải tìm làm ẩn;

+ Xem xét các tình huống sẽ xảy ra và các đại lượng nào mà số liệu chưa biết ngay được;

+ Khi đã chọn số chưa biết của một đại lượng trong một tình huống là ẩn thì khi lập phương trình phải tìm mối liên quan giữa các số liệu của một đại lượng khác hoặc trong tình huống khác. Mối liên hệ này được thể hiện bởi so sánh (bằng, lớn hơn, bé hơn, gấp mấy lần...)

Ví dụ: Để đi đoạn đường từ A đến B, một xe máy đã đi

hết 3h20 phút, còn một ô tô chỉ đi hết 2h 30 phút. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe đạp là 20km/h.

Giải

Để vừa có thể tóm tắt đề bài, vừa có thể biểu thị các đại lượng đã biết và chưa biết khi chọn quãng đường làm ẩn, ta lập bảng như sau:

	Quãng đường (km)	Thời gian (h)	Vận tốc (km/h)
Xe máy	x	3h20ph = $\frac{10}{3}$h	x: $\frac{10}{3} = \frac{3x}{10}$
Ô tô	x	2h30ph = $\frac{5}{2}$h	x : $\frac{5}{2} = \frac{2x}{5}$

Phương trình: $\frac{2x}{5} - \frac{3x}{10} = 20$

Giải phương trình $x = 200$(km).

Cũng có thể chọn vận tốc của ô tô làm ẩn, ta lập bảng sau:

	Vận tốc (km/h)	Thời gian (h)	Quãng đường (km)
Ô tô	x	2h30ph = $\frac{5}{2}$h	$\frac{5}{2}x$
Xe máy	x - 20	3h20ph = $\frac{10}{3}$h	$\frac{10}{3}(x-20)$

Phương trình: $\frac{5}{2}x = \frac{10}{3}(x-20)$

Giải phương trình: $x = 80$(km/h).

Quãng đường AB: $80.\frac{5}{2} = 200$(km).

Cũng có thể chọn vận tốc của xe máy làm ẩn, ta lập bảng sau:

	Vận tốc (km/h)	Thời gian (h)	Quãng đường (km)
Xe máy	x	3h20ph = $\frac{10}{3}$h	$\frac{10}{3}x$
Ô tô	x + 20	2h30ph = $\frac{5}{2}$h	$\frac{5}{2}(x+20)$

Phương trình: $\frac{10}{3}x = \frac{5}{2}(x+20)$

Giải phương trình $x = 60$(km).

Quãng đường AB: $60.\frac{10}{3} = 200$(km).

Chú ý: a) Trong ba cách lập phương trình của bài toán kể trên thì cách lập phương trình thứ nhất tức là chọn ẩn là quãng đường cần tìm.

b) Ở bài toán chia học sinh thành một số tổ nhất định để tham gia hoạt động hè, có thể chọn ẩn x là số học sinh tham gia lao động hè, ta có phương trình: $\frac{x-1}{9} = \frac{x+7}{10}$ (Giải phương trình có x = 73 (học sinh), từ đó suy ra số tổ là $\frac{73-1}{9} = 8\left(\text{hoặc } \frac{73+7}{10} = 8\right)$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Một ô tô đi quãng đường AB gồm một đoạn đường đang sửa chữa và một đoạn đường nhựa. Trên đoạn đường đang sửa, xe chạy với vận tốc 30km/h, còn trên đoạn đường nhựa xe chạy với vận tốc 45km/h. Tính chiều dài quãng đường AB biết rằng quãng đường đang sửa bằng $\frac{2}{3}$ quãng đường nhựa.

Bài 2. Có hai thùng dầu: thùng dầu I chứa gấp đôi số dầu ở thùng II. Nếu lấy bớt ở thùng thứ I 20 lít và đổ thêm vào thùng II 10 lít thì số dầu ở thùng I gấp $\frac{4}{3}$ lần số dầu ở thùng II. Tính xem lúc đầu mỗi thùng có bao nhiêu lít dầu.

Bài 3. Một đội thuyền ra khơi đánh bắt cá dự định mỗi ngày đánh bắt được 30 tấn cá. Đội đã đánh bắt được 40 tấn cá mỗi ngày nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn đánh bắt thêm được 20 tấn cá nữa. Tính số tấn cá phải đánh bắt theo kế hoạch.

Bài 4. Tổng của hai số bằng 150, biết rằng $\frac{1}{9}$ của số này và $\frac{1}{3}$ của số kia bằng 42. Tìm hai số đó.

Bài 5. Người ta pha 3kg nước nóng ở nhiệt độ 90°C và 2 kg nước lạnh ở nhiệt độ 20°C. Hỏi nhiệt độ nước sau khi pha là bao nhiêu?

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Cho 200 gam dung dịch có nồng độ muối là 10%. Phải pha thêm vào dung dịch đó bao nhiêu gam nước để dung dịch lúc sau có nồng độ muối là 8%?

Bài 7. Có hai vòi nước, vòi I chảy đầy bể trong 1,5 giờ, vòi II chảy đầy bể trong 2 giờ. Người ta đã cho vòi I chảy trong một thời gian, rồi khoá lại và cho vòi II chảy tiếp, tổng cộng trong 1,8 giờ thì đầy bể. Hỏi mỗi vòi đã chảy trong bao nhiêu lâu?

Bài 8. Một canô đi xuôi dòng từ A đến B hết 1h20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2h. Biết rằng vận tốc dòng nước là 3km/h, tính vận tốc riêng của canô.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. Gọi độ dài quãng đường nhựa là x km (x > 0), độ dài quãng đường đang sửa chữa sẽ là $\frac{2}{3}x$ km. Như vậy thời gian xe chạy trên quãng đường đang sửa chữa là $\frac{2x}{3}:30=\frac{2x}{90}$(h) và thời gian xe chạy trên quãng đường nhựa là $\frac{x}{45}$(h). Theo đầu bài, có phương trình:

$$\frac{2x}{90}+\frac{x}{45}=4.$$

Giải phương trình được x = 90(km) thỏa mãn điều kiện.

Vậy quãng đường AB dài $90+\frac{2}{3}.90=150$(km).

Bài 2. Gọi số lít dầu có lúc đầu ở thùng II là x lít (x > 0), số lít dầu có lúc đầu ở thùng I sẽ là 2x lít.

Thùng I bớt 20 lít thì còn (2x - 20) lít, thùng II đổ thêm vào 10 lít thì có (x + 10) lít.

Theo đầu bài có phương trình:

$$2x-20=\frac{4}{3}(x+10).$$

Giải phương trình được x = 50 thỏa mãn điều kiện, do đó 2x = 100.

Vậy lúc đầu thùng I có 100 lít và thùng II có 50 lít dầu.

Bài 3. Gọi số tấn cá định đánh bắt theo kế hoạch là x tấn (x > 0), số tấn cá đã đánh bắt được sẽ là (x + 20) tấn.

Dự định mỗi ngày đánh bắt 30 tấn cá thì số ngày dự định đánh bắt cá là $\frac{x}{30}$ ngày. Nhưng mỗi ngày đã đánh

bắt được 40 tấn cá nên số ngày đã đánh bắt cá là $\frac{x+20}{40}$ ngày.

Do hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, nên có phương trình:

$$\frac{x}{30} - \frac{x+20}{40} = 3.$$

Giải phương trình có x = 420 thỏa mãn điều kiện.

Vậy số tấn cá dự định bắt theo kế hoạch là 420 tấn.

Bài 4. Gọi số thứ nhất là x (x > 0), số thứ hai sẽ là 150 - x. Như vậy $\frac{1}{9}$ số thứ nhất là $\frac{x}{9}$ và $\frac{1}{3}$ số thứ hai là $\frac{150-x}{3}$.

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{x}{9} + \frac{150-x}{3} = 42.$$

Giải phương trình được x = 36, thỏa mãn điều kiện.

Vậy số thứ nhất là 36 và số thứ hai là 150 - 36 = 114.

Bài 5. Gọi nhiệt độ cuối cùng của nước sau khi pha là x độ C (x > 0) thì nhiệt lượng tỏa ra là 3c(90 - x) kilocalo và nhiệt lượng hấp thụ là 2c(x - 20) kilocalo, trong đó c là nhiệt dung riêng của nước.

Do nhiệt lượng thu được bằng nhiệt lượng toả ra, có phương trình:

$$3c(90 - x) = 2c(x - 20).$$

Giải phương trình được x = 62, thỏa mãn điều kiện.

Vậy nhiệt độ của nước sau khi pha là 62°C.

Bài 6. Gọi khối lượng nước phải pha thêm vào là x gam (x > 0), như vậy khối lượng của dung dịch có lúc sau là (200 + x) gam.

Trong 200gam dung dịch lúc đầu có nồng độ muối là

10% thì khối lượng muối có trong dung dịch lúc đầu là: $200.\frac{10}{100} = 20(\text{gam})$.

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{20}{200+x} = \frac{8}{100}.$$

Vậy lượng nước phải pha thêm vào là 50gam.

Bài 7. Vòi I chảy riêng làm đầy bể trong 1,5 giờ = $\frac{3}{2}$ giờ thì trong 1 giờ chảy vào được $\frac{2}{3}$ bể.

Vòi II chảy riêng làm đầy bể trong 2 giờ thì trong 1 giờ chảy vào được $\frac{1}{2}$ bể.

Gọi thời gian mà vòi I đã chảy là x giờ ($0 < x < 1,8$), thời gian vòi II đã chảy sẽ là $(1,8 - x)$ giờ.

Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}(1,8 - x) = 1.$$

Giải phương trình được $x = 0,6$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy vòi I đã chảy trong 0,6 giờ còn vòi II đã chảy trong 1,2 giờ.

Bài 8. Gọi vận tốc riêng của canô là xkm/h ($x > 0$) thì lúc xuôi dòng canô chạy với vận tốc $(x + 3)$km/h và lúc ngược dòng canô chạy với vận tốc $(x - 3)$km/h.

Khi đi từ A đến B hết 2h nên quãng đường AB sẽ là $2(x - 3)$km. Do đó có phương trình:

$$\frac{4}{3}(x+3) = 2(x-3).$$

Giải phương trình được $x = 15$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy vận tốc riêng của canô là 15km/h.

§7.SỐ VÔ TỈ - SỐ THỰC - CĂN BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Số vô tỉ - Số thực

1) Mỗi số hữu tỉ đều biểu diễn được dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, và ngược lại.

Ví dụ: $\frac{5}{8} = 0,625$; $-\frac{1}{99} = -0,010101... = -0,(01)$.

2) Mỗi số vô tỉ đều biểu diễn được dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn, và ngược lại.

Ví dụ: $\pi = 3,14159...$, $\sqrt{2} = 1,4142...$

3) Một số thực đều biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn (trường hợp số hữu tỉ) hoặc vô hạn không tuần hoàn (trường hợp số vô tỉ).

Tập hợp số thực được kí hiệu là R.

4) Các điểm hữu tỉ không lấp đầy trục số mà các điểm hữu tỉ và vô tỉ mới lấp đầy trục số. Do đó trục số còn gọi là trục số thực.

2. Căn bậc hai

1. Căn bậc hai của một số a không âm ($a \geq 0$) là số không âm $x = \sqrt{a}$ ($\sqrt{a} \geq 0$) có bình phương bằng a ($x^2 = a$).

Mỗi số thực dương có 2 căn bậc hai là hai số đối nhau: $\sqrt{a} > 0$ gọi là căn bậc hai dương hay căn bậc hai số học và $-\sqrt{a} < 0$ gọi là căn bậc hai âm.

Ví dụ: Căn bậc hai số học của 1,21 là 1,1 viết là $\sqrt{1,21} = 1,1$; căn bậc hai số học của 6,25 là 2,5 viết là $\sqrt{6,25} = 2,5$.

2. Kí hiệu $\sqrt{A}$ (A là biểu thức chứa biến và hằng) được

gọi là căn thức bậc hai.

$\sqrt{A}$ chỉ có nghĩa khi $A \geq 0$

3. Ta có hằng đẳng thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Ví dụ: $\sqrt{(2a-8)^2} = |2a-8| = \begin{cases} 2a-8 & \text{nếu } a \geq 4 \\ -2a+8 & \text{nếu } a < 4. \end{cases}$

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. So sánh:

a) $\frac{3}{7}$ và 0,(4); b) $\frac{7}{10}$ và $\frac{23}{33}$.

Bài 2. Tìm m biết:

a) $m^2 = 72,25$; b) $(m - 2)^2 = \frac{49}{81}$.

Bài 3. Tính:

a) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$; b) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$; c) $p + \sqrt{(p-7)^2}$.

Bài 4. Rút gọn:

a) $\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}$; b) $\frac{y-4\sqrt{y}+4}{\sqrt{y}-2}$ $(y \geq 0;\ y \neq 4)$.

Bài 5. Chứng minh và cho ví dụ minh họa:

a) $\sqrt{m+p} < \sqrt{m} + \sqrt{p}$ $(m, p > 0)$;

b) $\sqrt{m-p} > \sqrt{m} - \sqrt{p}$ $(m > p > 0)$.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Viết dưới dạng một tích:

a) $\sqrt{7} + 7$; b) $11 - 5\sqrt{11}$; c) $m^2 - 15$.

Bài 7. Chứng minh

a) $m\sqrt{p} - p\sqrt{m} = \sqrt{m}(\sqrt{m} - \sqrt{p}).\sqrt{p}$ $(m, p > 0, m \neq p)$;

b) $m - \sqrt{m}.\sqrt{p} + p > 0$ $(m, p > 0, m \neq p)$.

Bài 8. Giải phương trình

a) $\sqrt{(4-x)^2}.\sqrt{81} = 36$;

b) $\dfrac{y + \sqrt{y} + 1}{\sqrt{y}} = 3$;

c) $\dfrac{\sqrt{z-5}}{\sqrt{z-4}} = 1$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) $\dfrac{3}{7} = 0,(428571)$. Do đó $\dfrac{3}{7} < 0,(4)$.

b) $\dfrac{7}{10} = 0,7$; $\dfrac{23}{33} = 0,(69)$. Do đó $\dfrac{23}{33} > \dfrac{7}{10}$.

Bài 2. Áp dụng tính chất:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

Ta có: $m^2 = 72,25 = (8,5)^2 \Leftrightarrow m = \pm 8,5$.

$(m - 2)^2 = \dfrac{49}{81} = \left(\dfrac{7}{9}\right)^2 \Leftrightarrow m - 2 = \pm\dfrac{7}{9}$. Từ đó:

$$m - 2 = \frac{7}{9}, m = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$$

$$m - 2 = -\frac{7}{9}, m = 2 - \frac{7}{9} = \frac{11}{9}.$$

Bài 3

a) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2} = \left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2$ (vì $\sqrt{5} > 2$);

b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$ (vì $\sqrt{3} < \sqrt{5}$)

c) $p + \sqrt{(p-7)^2} = p + |p-7| = \begin{cases} 2p-7 & \text{nếu } p \geq 7 \\ 7 & \text{nếu } p < 7. \end{cases}$

Bài 4. a) $\dfrac{\sqrt{x}-6}{x-36}$ (điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 36$)

Ta có thể viết: $\dfrac{\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+6}$.

b) Biểu thức có thể viết:

$$\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2 - 2.2\sqrt{y} + (2)^2}{\sqrt{y}-2} = \frac{\left(\sqrt{y}-2\right)^2}{\sqrt{y}-2} = \sqrt{y}-2.$$

Bài 5. Ta có $\sqrt{m} > 0, \sqrt{p} > 0, \sqrt{m+p} > 0$ và $\sqrt{m-p} > 0$.

a) Bình phương hai vế được:

$$|m+p| < m + 2\sqrt{m}.\sqrt{p} + p$$

hay $\quad m + p < m + p + 2\sqrt{m}.\sqrt{p}$ (vì $\sqrt{m}.\sqrt{p} > 0$).

Ví dụ:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ \sqrt{64} + \sqrt{16} = 8 + 4 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{64+16} < \sqrt{64} + \sqrt{16}$$

b) Bình phương hai vế được:

$$m - p > m - 2\sqrt{m}.\sqrt{p} + p$$

hay $\quad m - p > m + p - 2\sqrt{m}.\sqrt{p}$.

Ví dụ:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{49-9} = \sqrt{40} \\ \sqrt{49} - \sqrt{9} = 7 - 3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{49-9} > \sqrt{49} - \sqrt{9}$$

Bài 6.

a) $\sqrt{7} + 7 = \sqrt{7} + \sqrt{7}.\sqrt{7} = \sqrt{7}(1+\sqrt{7})$

b) $11-5\sqrt{11}=\sqrt{11}.\sqrt{11}-5\sqrt{11}=\sqrt{11}(\sqrt{11}-5)$;

c) $m^2-15=m^2-(\sqrt{15})^2=\left(m+\sqrt{15}\right)\left(m-\sqrt{15}\right)$.

Bài 7

a) Vế phải có thể viết:

$m\sqrt{p}-p\sqrt{m}=\sqrt{m}\sqrt{m}\sqrt{p}-\sqrt{p}\sqrt{m}\sqrt{p}=\sqrt{m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{p}\right)\sqrt{p}$,

đúng bằng vế trái.

b) $m-\sqrt{m}.\sqrt{p}+p=\left(\sqrt{m}\right)^2-2\sqrt{m}.\dfrac{\sqrt{p}}{2}+\left(\dfrac{\sqrt{p}}{2}\right)^2+p-\left(\dfrac{\sqrt{p}}{2}\right)^2$

$=\left(\sqrt{m}-\dfrac{\sqrt{p}}{2}\right)^2+\dfrac{3p}{4}>0$ (vì mỗi số hạng của tổng đều dương).

Bài 8

a) $|4-x|.9=36$ hay $|4-x|=4$.

Từ đó: $4-x=\pm 4$. Ta có:

$4-x=4$, $x=0$

$4-x=-4$, $x=8$.

b) $y+\sqrt{y}+1=3\sqrt{y}$ (điều kiện $y>0$)

hay $y-2\sqrt{y}+1=\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0$.

Từ đó $\sqrt{y}=1$. Vậy $y=1$ (thỏa mãn).

c) $\sqrt{z-5}=\sqrt{z-4}$. Điều kiện $z\geq 5$, $z>4 \Leftrightarrow z\geq 5$

Bình phương hai vế:

$z-5=z-4$. Phương trình vô nghiệm.

§8.CÁC PHÉP TÍNH VỀ CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Khai phương một tích, một thương

a) $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ (với $A \geq 0$, $B \geq 0$)

Ví dụ:

$$\sqrt{0,36.900} = \sqrt{0,36}.\sqrt{9.100} = 0,6.3.10 = 18$$

b) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0$, $B > 0$)

Ví dụ:

$$\sqrt{\frac{121a^2}{256b^3}} = \frac{\sqrt{121}.\sqrt{a^2}}{\sqrt{256}.\sqrt{b^2.b}} = \frac{11|a|}{16b.\sqrt{b}} \quad (b > 0)$$

2. Biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

a) Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn

$\sqrt{A^2B} = |A|.\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$)

Ví dụ:

$$\sqrt{720m^4} = \sqrt{5.9.16.m^4} = \sqrt{5}.3.4.m^2 = 12m^2\sqrt{5}$$

b) Đưa thừa số vào trong dấu căn

$|A|.\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $B \geq 0$)

Ví dụ: $\dfrac{9}{11}\sqrt{\dfrac{11}{.9}} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{11}\right)^2.\dfrac{11}{9}} = \sqrt{\dfrac{9}{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

c) Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}.\dfrac{B}{B}} = \dfrac{1}{|B|}.\sqrt{AB}$ (với $AB \geq 0$, $B \neq 0$)

Ví dụ:

$$\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}{8}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}{8}.\frac{8}{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}.\left|2-\sqrt{5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}.(\sqrt{5}-2).$$

d) Trục căn thức ở mẫu:

- Mẫu là căn bậc hai của một đơn thức

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b} \text{ (với } b>0)$$

Ví dụ:

$$\frac{7}{\sqrt{40}}=\frac{7}{\sqrt{40}}.\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{40}}=\frac{7.\sqrt{4.10}}{40}=\frac{7\sqrt{10}}{20}.$$

- Mẫu là tổng hoặc hiệu của một biểu thức hữu tỉ và một căn bậc hai

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}.\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=\frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c} \text{ và } \frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

(với $c>0$, $c\neq b^2$)

(Hai biểu thức $b+\sqrt{c}$ và $b-\sqrt{c}$ là hai biểu thức liên hợp)

- Mẫu là tổng hoặc hiệu của hai căn bậc hai

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c} \text{ và}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c} \text{ (với } b>0,\ c>0).$$

3. Cộng và trừ căn thức bậc hai

Ví dụ:

$$\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{125}-\sqrt{80}=\sqrt{4.5}-\sqrt{9.5}+\sqrt{25.5}-\sqrt{16.5}$$

$$=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-4\sqrt{5}=0$$

4. Nhân và chia căn thức bậc hai

a) $\sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}=\sqrt{A.B.C}$ (với $A, B, C\geq 0$)

Ví dụ: $\sqrt{5m}.\sqrt{m}.\sqrt{45}=\sqrt{5m.m.45}=\sqrt{225m^2}=15|m|$.

b) $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$ (với $A\geq 0$, $B>0$)

Ví dụ: $\dfrac{\sqrt{320}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{320}{5}} = \sqrt{64} = 8$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})(5\sqrt{5}+3\sqrt{3})}$ $\qquad$ $\sqrt{16m^2(9p^2-42p+49)}$

b) $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^2}$ $\qquad$ $(\sqrt{1-m}-\sqrt{m})(\sqrt{1-m}+\sqrt{m})$

c) $\sqrt{\dfrac{33(p-5)^2}{57}}$ $\qquad$ $(7-2x)\sqrt{\dfrac{36-60x+25x^2}{(7-2x)^2}}$.

Bài 2. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn và ngược lại:

a) $\sqrt{98(2m+p)^3}$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{5(x^2-2xy+y^2)}{9(x^2+2xy+y^2)}}$

b) $\dfrac{4}{x+y}\sqrt{\dfrac{8x^2-8y^2}{4}}$ $\qquad$ $\dfrac{p-q}{p+q}\sqrt{\dfrac{p^2+pq}{p^2-2pq+q^2}}$.

Bài 3. 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\dfrac{18x^4}{540}}$ $\qquad$ $\sqrt{m+\dfrac{5}{3mp}-\dfrac{3}{2m}}$

b) $3m^2y\sqrt{\dfrac{12}{my}}$ $\qquad$ $2x\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}$.

2. Trục căn ở mẫu:

$\dfrac{m+3}{\sqrt{m^2-9}}$ $\qquad$ $\dfrac{9}{2\sqrt{3}-3}$ $\qquad$ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$.

Bài 4. Cộng trừ căn bậc hai

a) $0{,}1\sqrt{200}-2\sqrt{0{,}08}+4\sqrt{0{,}5}+0{,}4\sqrt{50}$

b) $\dfrac{2}{3}m\sqrt{9m}+6m\sqrt{\dfrac{m}{4}}-m^2\sqrt{\dfrac{1}{m}}$

c) $2xy\sqrt{343xy} - 3\sqrt{112x^3y^3} + 6x\sqrt{63xy^3} - 5y\sqrt{28x^3y}$.

Bài 5. Nhân chia căn bậc hai

a) $\left(\sqrt{mp} + 2\sqrt{\frac{p}{m}} - \sqrt{\frac{m}{p}} + \sqrt{\frac{1}{mp}}\right)\sqrt{mp}$

b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2$ $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} - xy\right) : \sqrt{xy}$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}}\right) : \frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6.1. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{\frac{(x-y)^3}{x^4}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}}$ khi $y > 1$.

2. Đưa một thừa số vào trong dấu căn:

a) $xy\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ b) $\frac{7}{m-p}\sqrt{\frac{p^2-m^2}{7}}$ khi $0 < m < p$

3. Trục căn ở mẫu:

a) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$ b) $\frac{20}{8\sqrt{5}-10\sqrt{3}}$ c) $\frac{\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}$.

Bài 7. Chứng minh rằng:

a) $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{(x-y)^2}} = \begin{cases} \sqrt{x+y} & \text{nếu } x > y \\ -\sqrt{x+y} & \text{nếu } x < y \end{cases}$

b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c) $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}} = \left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

d) Biểu thức $M = 4m^3 - 8m^2 + 2m + 3$ có giá trị bằng 1 khi $m=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8. 1. Thực hiện phép cộng và trừ:

a) $3\sqrt{8p}-\sqrt{18p}-5\sqrt{\frac{1}{2}p}+\sqrt{4\frac{1}{2}p}+\sqrt{50p}-\sqrt{32p}+\sqrt{72p}$

b) $2m\sqrt{x-m}+x\sqrt{\frac{1}{x-m}}-x\sqrt{\frac{a}{ax-am}}-\sqrt{x^3-mx^2}+$

$+\sqrt{mx^2\left(\frac{x}{m}-1\right)}-m^2\sqrt{\frac{4(x-m)}{m^2}}$.

2. Thực hiện phép nhân và chia:

a) $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{1,2}+\sqrt{2}-4\sqrt{0,2}\right)$;

b) $\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{2y}}-0,4\sqrt{\frac{2}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{2x}{3y}}$.

3. Tính:

a) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$;

b) $\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1

a) $\sqrt{\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{125-27}=\sqrt{98}$

$\sqrt{16m^2\left(9p^2-42p+49\right)}=\sqrt{16m^2(3p-7)^2}=|m.(3p-7)|$

khi $m>0,\ p>\frac{7}{3}$

b) $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^2}=\sqrt{4x^4y^2(x^2+3)}=2x^2|y|.\sqrt{x^2+3}$

$$\left(\sqrt{1-m}-\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{1-m}+\sqrt{m}\right)=\left(\sqrt{1-m}\right)^2-\left(\sqrt{m}\right)^2$$

$= 1 - m - m = 1 - 2m.$

c) $\sqrt{\dfrac{33(p-5)^2}{57}}=\sqrt{\dfrac{3.11(p-5)^2}{3.19}}=\sqrt{\dfrac{11}{19}}.|p-5|$ khi $p>5$

$$(7-2x)\sqrt{\frac{36-60x+25x^2}{(7-2x)^2}}=(7-2x)\sqrt{\frac{(5x-6)^2}{(7-2x)^2}}=$$

$(7-2x)\dfrac{5x-6}{7-2x}=5x-6$ khi $x<3{,}5$.

Bài 2. a) $\sqrt{98(2m+p)^3}=\sqrt{49.2.(2m+p)^2(2m+p)}=$

$=7(2m+p)\sqrt{2(2m+p)};$

$$\sqrt{\frac{5(x^2-2xy+y^2)}{9(x^2+2xy+y^2)}}=\sqrt{\frac{5(x-y)^2}{9(x+y)^2}}=\frac{\sqrt{5}(x-y)}{3(x+y)} \text{ khi } x>\pm y.$$

b) $\dfrac{4}{x+y}\sqrt{\dfrac{8x^2-8y^2}{4}}=\dfrac{4}{x+y}\sqrt{\dfrac{8(x^2-y^2)}{4}}=\dfrac{4}{x+y}\sqrt{2(x^2-y^2)}$

$$=4\sqrt{\frac{2(x^2-y^2)}{(x+y)^2}}=4\sqrt{\frac{x(x-y)}{x+y}}$$

$$\frac{p-q}{p+q}\sqrt{\frac{p^2+pq}{p^2-2pq+q^2}}=\frac{p-q}{p+q}\sqrt{\frac{p(p+q)}{(p-q)^2}}=$$

$=\dfrac{p-q}{|p-q|}.\dfrac{\sqrt{p(p+q)}}{p+q}=\dfrac{\sqrt{p(p+q)}}{p+q}$ khi $p>q$.

Bài 3. 1. a) $\sqrt{\dfrac{15x^4}{540}}=\sqrt{\dfrac{15x^4}{36.15}}=\dfrac{x^2}{6}$

$$\sqrt{m+\frac{5}{3mp}-\frac{3}{2m}}=\sqrt{\frac{6m^2+10-9p}{6mp}}=\sqrt{\frac{6m^2p+10-9p}{6mp}.\frac{6mp}{6mp}}$$

$=\dfrac{1}{6mp}\sqrt{6mp(6m^2p+10-9p)}$ khi $mp>0$..

b) $3m^2y\sqrt{\frac{12}{my}} = 3m^2y\sqrt{\frac{12.my}{my.my}} = \frac{3m^2y}{my}\sqrt{4.3my} =$

$= 6m\sqrt{3my}$ khi $my > 0$.

$2x\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = 2x\sqrt{\frac{x+1}{x^4}} = \frac{2x}{x^2}\sqrt{x+1} = \frac{2}{x}\sqrt{x+1}$

với điều kiện $x \geq -1$ và $x \neq 0$.

2) $\frac{m+3}{\sqrt{m^2-9}} = \frac{m+3}{\sqrt{m^2-9}}.\frac{\sqrt{m^2-9}}{\sqrt{m^2-9}} = \frac{(m+3)\sqrt{m^2-9}}{m^2-9} = \frac{\sqrt{m^2-9}}{m-3}$

khi $m^2 > 9$

$\frac{9}{2\sqrt{3}-3} = \frac{9}{2\sqrt{3}-3}.\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3} = \frac{9(2\sqrt{3}+3)}{12-9} = 3(2\sqrt{3}+3)$

$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}.\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{45-32}$

$= \frac{2\sqrt{2}(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{13}$.

Bài 4. a) $0,1\sqrt{200} - 2\sqrt{0,08} + 4\sqrt{0,5} + 0,4\sqrt{50} =$

$= 0,1\sqrt{2.100} - 2\sqrt{\frac{8}{100}} + 4\sqrt{\frac{1}{2}} + 0,4\sqrt{2.25}$

$= 0,1.10\sqrt{2} - \frac{2}{10}\sqrt{8} + 4\frac{1}{\sqrt{2}} + 0,4.5\sqrt{2}$

$= \sqrt{2} - \frac{1}{5}.2\sqrt{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{2}{5}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,6\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3}m\sqrt{9m} + 6m\sqrt{\frac{m}{4}} - m^2\sqrt{\frac{1}{m}} =$

$= \frac{2}{3}m3\sqrt{m} + \frac{6m}{2}\sqrt{m} - m^2.\frac{1}{\sqrt{m}} = 2m\sqrt{m} + 3m\sqrt{m} - m\sqrt{m} = 4m\sqrt{m}$.

c) $2xy\sqrt{343xy} - 3\sqrt{112x^3y^3} + 6x\sqrt{63xy^3} - 5y\sqrt{28x^3y} =$

$= 2xy\sqrt{49.7xy} - 3\sqrt{16.7x^3y^3} + 6x\sqrt{9.7xy^3} - 5y\sqrt{4.7x^3y}$

$= 14xy\sqrt{7xy} - 12xy\sqrt{7xy} + 18xy\sqrt{7xy} - 10xy\sqrt{7xy}$

$= 10xy\sqrt{7xy}$.

Bài 5. a) $\left(\sqrt{mp} + 2\sqrt{\frac{p}{m}} - \sqrt{\frac{m}{p}} + \sqrt{\frac{1}{mp}}\right)\sqrt{mp} =$

$= mp + 2\sqrt{\frac{p}{m}.mp} - \sqrt{\frac{m}{p}mp} + \sqrt{\frac{1}{mp}.mp} = mp + 2p - m + 1$

khi $p > 0$, $m > 0$.

b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 = 2 + 3 + 6 + 2\sqrt{2}.\sqrt{3} + 2\sqrt{2}.\sqrt{6} + 2\sqrt{3}.\sqrt{6}$

$= 11 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{12} + 2\sqrt{18} = 11 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 = 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)} + 3 + \sqrt{5}$

$= 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 4 = 2$

c) $\left(\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} - xy\right) : \sqrt{xy} = \sqrt{x^3y : xy} + \sqrt{xy^3 : xy} - \frac{xy}{\sqrt{xy}}$

$= \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} - xy.\frac{\sqrt{xy}}{xy} = x + y - \sqrt{xy}$ khi $x > 0$, $y > 0$

$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}}\right) : \frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{8}{25}\sqrt{5}\right) : \frac{2}{15}\sqrt{2}$

$= \frac{15}{8} - \frac{15}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{15}{8} - \frac{15}{8}\sqrt{6} + \frac{6}{5}\sqrt{10}$

$= \frac{75 - 75\sqrt{6} + 48\sqrt{10}}{40}$.

Bài 6. 1.a) $\sqrt{\frac{(x-y)^3}{x^4}} = \frac{x-y}{x^2}\sqrt{x-y}$ khi $x \geq y > 0$

b) $\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}}=\sqrt{\frac{y-1}{y^2}}=\frac{1}{|y|}\sqrt{y-1}=\frac{\sqrt{y-1}}{y}$ khi $y \geq 1$.

2.a) $xy\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=xy\sqrt{\frac{x+y}{xy}}=\sqrt{\frac{x^2y^2(x+y)}{xy}}=\sqrt{xy(x+y)}$

b) $\frac{7}{m-p}\sqrt{\frac{p^2-m^2}{7}}=-\sqrt{\frac{49}{(p-m)^2}.\frac{(p-m)(p+m)}{7}}$

vì $0 < m < p$ nên $m - p < 0$ hay $p - m > 0$. Do đó ta có thể đưa $p - m > 0$ vào trong dấu căn và thêm dấu trừ (-) trước dấu căn.

Vậy biểu thức đã cho trở thành: $-\sqrt{\frac{7(p+m)}{p-m}}$.

3.a) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}=\frac{8(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}=\frac{8(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2})^2-16}=$

$=\frac{8(3\sqrt{2}+4)}{18-16}=4(3\sqrt{2}+4)$

b) $\frac{20}{8\sqrt{5}-10\sqrt{3}}=\frac{20(8\sqrt{5}+10\sqrt{3})}{(8\sqrt{5})^2-(10\sqrt{3})^2}=\frac{20(8\sqrt{5}+10\sqrt{3})}{320-300}=8\sqrt{5}+10\sqrt{3}$;

c) $\frac{\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\left(\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{x^2-y^2-(x^2+y^2)}$

$=\frac{\left(\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{-2y^2}=\frac{x^2-y^2+x^2+y^2+2\sqrt{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}}{-2y^2}$

$=\frac{2x^2+2\sqrt{x^4-y^4}}{-2y^2}=-\frac{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}{y^2}$ khi $x^2 > \pm y^2$; $y \neq 0$.

Bài 7. a) Nếu $x > y$ thì $\sqrt{(x-y)^2}=x-y$, do đó:

$$(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{(x-y)^2}}=\frac{x-y}{x-y}.\sqrt{x+y}=\sqrt{x+y}.$$

Nếu $x < y$ thì $\sqrt{(x-y)^2} = -(x-y)$, do đó:

$$(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{(x-y)^2}} = \frac{x-y}{-(x-y)}\sqrt{x+y} = -\sqrt{x+y}$$

b) Trước hết trục căn ở vế trái:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).$$

Vế trái đúng bằng vế phải. Đẳng thức được chứng minh.

c) Trước hết ta phân tích mẫu thành một tích như sau:

$$2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10} = \left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Trục căn ở vế trái:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{(5-4)(2-1)} = \left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Vế trái đúng bằng vế phải. Đẳng thức được chứng minh.

d) Thay giá trị $m = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ vào biểu thức đã cho, ta có:

$$M = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^3 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right) + 3$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}\right) - 2\left(1+2\sqrt{3}+3\right) + 1 + \sqrt{3} + 3$$

$$= 5+3\sqrt{3}-8-4\sqrt{3}+4+\sqrt{3} = 1.$$

Đẳng thức được chứng minh.

Bài 8. 1.a) $3\sqrt{8p} - \sqrt{18p} - 5\sqrt{\frac{1}{2}p} + \sqrt{4\frac{1}{2}p} + \sqrt{50p} - \sqrt{32p} + \sqrt{72p}$

$$= 3\sqrt{4.2p} - \sqrt{9.2p} - 5\sqrt{\frac{2p}{4}} + \sqrt{\frac{9p}{2}.\frac{2}{2}} + \sqrt{25.2p} - \sqrt{16.2p} + \sqrt{36.2p}$$

$$= 6\sqrt{2p} - 3\sqrt{2p} - \frac{5}{2}\sqrt{2p} + \frac{3}{2}\sqrt{2p} + 5\sqrt{2p} - 4\sqrt{2p} + 6\sqrt{2p}$$

$= 9\sqrt{2p}$ khi $p > 0$.

b) $2m\sqrt{x-m} + x\sqrt{\frac{1}{x-m}} - x\sqrt{\frac{a}{ax-am}} - \sqrt{x^3 - mx^3} + \sqrt{mx^2\left(\frac{x}{m} - 1\right)}$

$$- m^2\sqrt{\frac{4(x-m)}{m^2}} = 2m\sqrt{x-m} + x\sqrt{\frac{1}{x-m}} - x\sqrt{\frac{a}{a(x-m)}}$$

$$- \sqrt{x^2(x-m)} + \sqrt{x^2 m.\frac{x-m}{m}} - m^2.\frac{2}{|m|}.\sqrt{x-m} =$$

$$= 2m\sqrt{x-m} + x\sqrt{\frac{1}{x-m}} - x\sqrt{\frac{1}{x-m}} - |x|\sqrt{x-m} + |x|\sqrt{x-m} - 2m\sqrt{x-m} = 0$$

khi $m > 0$, $x > m$.

2.a) $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{1,2} + \sqrt{2} - 4\sqrt{0,2}\right) =$

$$= \sqrt{1,2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3\frac{1}{3}}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3\frac{1}{3}}\right) -$$

$$- 4\sqrt{0,2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{3,6} + \sqrt{2,4} + \sqrt{\frac{10}{3}.1,2} + \frac{4}{3}\sqrt{6} + 2 + \sqrt{\frac{10}{3}.2} - \frac{16}{3}\sqrt{0,6} -$$

$$- 4\sqrt{0,4} - 4\sqrt{\frac{10}{3}.0,2} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{9.2}{5}} + \sqrt{\frac{4.3}{5}} + \sqrt{4} + \frac{4}{3}\sqrt{6} + 2 + \sqrt{\frac{4.5}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{2}{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5}} + 2 + \frac{4}{3}\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} + 4 + \frac{4}{3}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Khử mẫu của biểu thức lấy căn được:

$$-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{3}{5}.\frac{5}{5}}+4+\frac{4}{3}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{5}{3}.\frac{3}{3}}-4\sqrt{\frac{2}{3}.\frac{3}{3}}=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{15}+4+\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{4}{3}\sqrt{6}+\frac{2}{3}\sqrt{15}=4.$$

b) $$\left(\frac{3x}{2}\sqrt{\frac{x}{2y}}-0,4\sqrt{\frac{2}{xy}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{xy}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{2x}{3y}}$$

$$=\frac{3x}{2}.\frac{15}{4}.\sqrt{\frac{x}{2y}.\frac{3y}{2x}}-0,4.\frac{15}{4}.\sqrt{\frac{2}{xy}.\frac{3y}{2x}}+\frac{1}{3}.\frac{15}{4}.\sqrt{\frac{xy}{2}.\frac{3y}{2x}}$$

$$=\frac{45x}{8}\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{x^2}}+\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3y^2}{4}}=\frac{45x}{16}\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2x}+\frac{5}{8}y\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{45x}{16}-\frac{3}{2x}+\frac{5y}{8}\right)\text{ khi } x>0,\ y>0.$$

3. a) $$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)+\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}$$

$$=\frac{2x}{x^2-(x^2-y^2)}=\frac{2x}{y^2}.$$

b) $$\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}+\sqrt{xy}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2.\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}=1\text{ khi } x>0,\ y>0.$$

§9. HÀM SỐ BẬC NHẤT - ĐỊNH NGHĨA TÍNH CHẤT VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số thực xác định ($a \neq 0$)

2. Hàm số bậc nhất xác định với mọi giá trị x thuộc **R.**

Trong tập xác định R, hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến nếu $a > 0$ và nghịch biến nếu $a < 0$.

3. Đồ thị của hàm số bậc nhất

a) Đồ thị của hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) với $x \in$ **R** là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ O (0; 0) và từ trái sang phải:

- hướng đi lên và nằm trong góc vuông I và III nếu $a > 0$;
- hướng đi xuống và nằm trong góc vuông II và IV nếu $a < 0$.

Đặc biệt, đồ thị hàm số $y = x$ là phân giác thứ nhất (phân giác của hai góc vuông I và III), đồ thị hàm số $y = -x$ là phân giác thứ hai (phân giác của hai góc vuông II và IV)

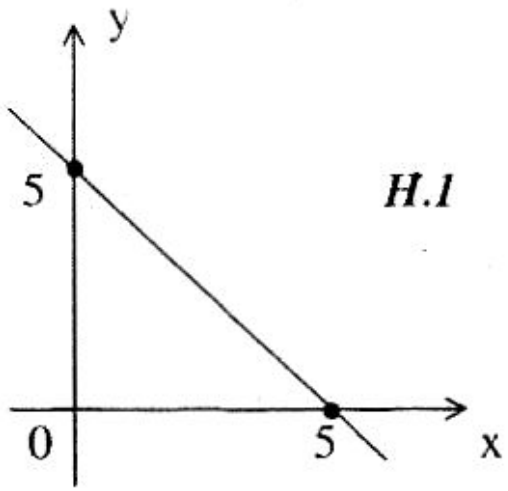
b) Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng (song song với đường thẳng $y = ax$) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b nếu $b \neq 0$, trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$ (b được gọi là tung độ góc của đường thẳng) và từ trái sang phải:

- hướng đi lên nếu $a > 0$
- hướng đi xuống nếu $a < 0$.

Muốn vẽ đồ thị của hàm số $y = -x + 5$ chẳng hạn. thông thường ta xác định hai điểm là giao điểm của đồ thị với hai trục

toạ độ (hình 1).

x	0	5
y	5	0



H.1

4) Do sự liên quan giữa hệ số a và góc tạp bởi đường thẳng $y = ax + b$ với tia Ox nên a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

a) Hai đường thẳng $y_1 = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y_2 = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ là song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$; $b \neq b'$ và trung nhau khi và chỉ khi $a = a'$; $b = b'$.

b) Hai đường thẳng trên sẽ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

Đặc biệt nếu $a \neq a'$, $b = b'$ thì chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

* *Lưu ý:* Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với tia Ox là góc nhọn nếu $a > 0$ và là góc tù nếu $a < 0$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. a) Tìm TXĐ của các hàm số $y = -9x + 8$;

$y = 3x^2 - 4x + 5$ $\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{49 - x^2}}$ $\quad y = \sqrt{3 - 6x}$.

b) Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số bậc nhất? Xác định các hệ số a, b của hàm số đó:

$y = \dfrac{3}{x} + x$; $y = 7 - 8x$; $y = \sqrt{5}(x - 1) - \sqrt{6}$; $y = -x^2 + 1$

Bài 2. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x\sqrt{2}$

b) Gọi A, B, C là các điểm thuộc đồ thị có hoành độ lần lượt là - 2; 1; 2. Hãy tìm các khoảng cách OA, OB, OC.

Bài 3. a) Vẽ đồ thị các hàm số $y_1 = -2x + 5$ và $y_2 = 2x - 5$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Có nhận xét gì về các đồ thị đó?

b) Qua điểm M(0, 5) vẽ đường thẳng y_3 vuông góc với đường thẳng y_1, tìm hệ số góc của đường thẳng này.

Bài 4. Với điều kiện nào thì hai đường thẳng $y_1 = a_1x + b_1$ và $y_2 = a_2x + b_2$:

a) song song với nhau;

b) trùng nhau;

c) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

Bài 5. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm A trên trục tung có tung độ bằng - 5 và điểm B trên trục hoành có hoành độ bằng 5, rồi tính diện tích của tam giác OAB.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ đồ thị bốn hàm số:

$$y_1 = \frac{1}{2}x + 2; \quad y_2 = \frac{1}{2}x - 2; \quad y_3 = -\frac{1}{2}x + 2; \quad y_4 = -\frac{1}{2}x - 2$$

a) Tìm tọa độ giao điểm của mỗi đường thẳng với hai trục toạ độ.

b) Có nhận xét gì về bốn đường thẳng y_1, y_2, y_3, y_4? Tính diện tích của tứ giác tạo thành.

Bài 7. Cho hàm số $y = (2 - k)x$. Tìm giá trị của k để:

a) hàm số nghịch biến;

b) đồ thị hàm số trùng với trục hoành;

c) đồ thị hàm số trùng với tia phân giác thứ hai.

Bài 8. Vẽ đồ thị của:

a) Hàm số $y = |2x - 1|$;

b) Hàm số $y = |x - |x||$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) Các hàm số $y = -9x + 8$ và $y = 3x^2 - 4x + 5$ có TXĐ là mọi $x \in \mathbf{R}$.

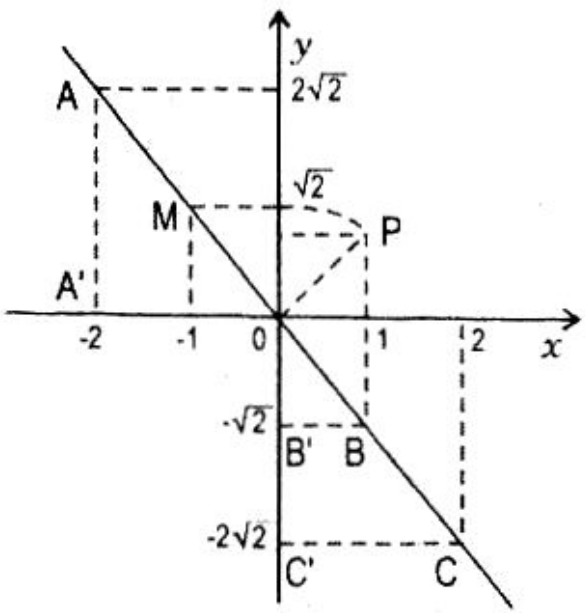
Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{49 - x^2}}$ có TXĐ $-7 < x < 7$ vì $49 - x^2 > 0$

Hàm số $y = \sqrt{3 - 6x}$ có TXĐ $x \le \dfrac{1}{2}$ vì $3 - 6x \ge 0$

b) Các hàm số $y = 7 - 8x$ và $y = \sqrt{5}(x - 1) - \sqrt{6}$ là hàm số bậc nhất. Với $y = 7 - 8x$ thì $a = -8$, $b = 7$; với $y = \sqrt{5}x - \sqrt{5} - \sqrt{6}$ thì $a = \sqrt{5}$; $b = -\sqrt{5} - \sqrt{6}$.

Bài 2. a) Đồ thị hàm số $y = -x\sqrt{2}$ $(a = -\sqrt{2})$ là đường thẳng OM đi qua điểm gốc toạ độ O và điểm $M\left(-1; \sqrt{2}\right)$.

Để có giá trị $\sqrt{2}$ ta lấy đoạn $OP = \sqrt{2}$ (hình 2) và đặt nó lên trục tung. Đường thẳng $y = -x\sqrt{2}$ nằm trong hai góc vuông II và IV (vì $a < 0$)



H.2

b) Ta có tọa độ các điểm A, B, C theo thứ tự là $A\left(-2; 2\sqrt{2}\right)$; $B\left(1; -\sqrt{2}\right)$; $C\left(2; -2\sqrt{2}\right)$.

Xét các tam giác vuông OA'A, OB'B, OC'C áp dụng định lý Pitago ta lần lượt có:

$OA^2 = (-2)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 8 = 12$ từ đó $OA = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Tương tự: $OB = \sqrt{3}$, $OC = 2\sqrt{3}$.

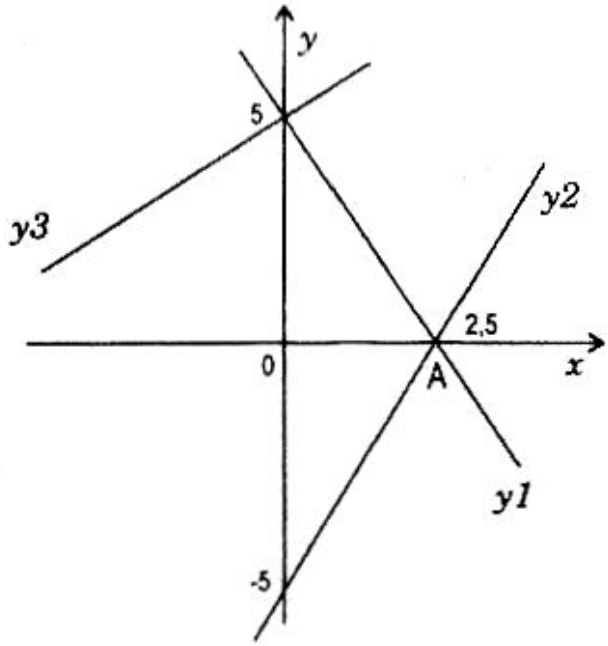
Bài 3. a) Để vẽ đồ thị của y_1 và y_2 chỉ cần xác định hai giao điểm của mỗi đồ thị trên hai trục toạ độ:

x	0	2,5
y_1	5	0

x	0	2,5
y_2	-5	0

Đồ thị như hình 3. Hai đường thẳng y_1 và y_2 cùng đi qua điểm A (2, 5, 0) trên trục hoành, đối xứng nhau qua trục hoành.

b) Do hai đường thẳng y_1 và y_3 vuông góc với nhau nên tích hai hệ số góc $a_1.a_3 = -1$ mà $a_1 = 2$ nên $a_3 = -\frac{1}{2}$.



H.3

Bài 4. Điều kiện để hai đường thẳng $y_1 = a_1x + b_1$ và $y_2 = a_2x + b_2$:

a) song song với nhau là $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$

b) trùng nhau là $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

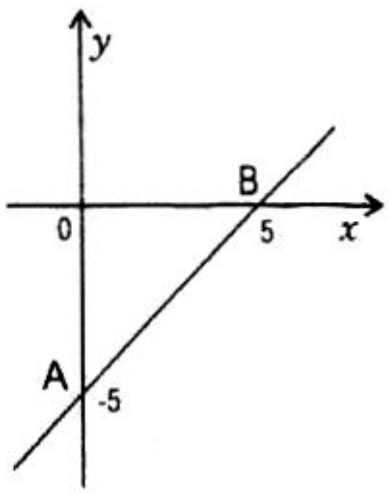
c) cắt nhau tại một điểm trên trục tung là $a_1 \neq a_2$, $b_1 = b_2$.

Bài 5. Đường thẳng có dạng $y = ax + b$, ta có ngay tung độ gốc $b = -5$.

Thay x và y bằng toạ độ điểm B ta có:

$0 = a.5 - 5$. Suy ra $a = +1$

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = x - 5$ (hình 4).



H.4

Diện tích tam giác vuông OAB là:

$\frac{1}{2}.5.5 = 12,5$ (đơn vị diện tích)

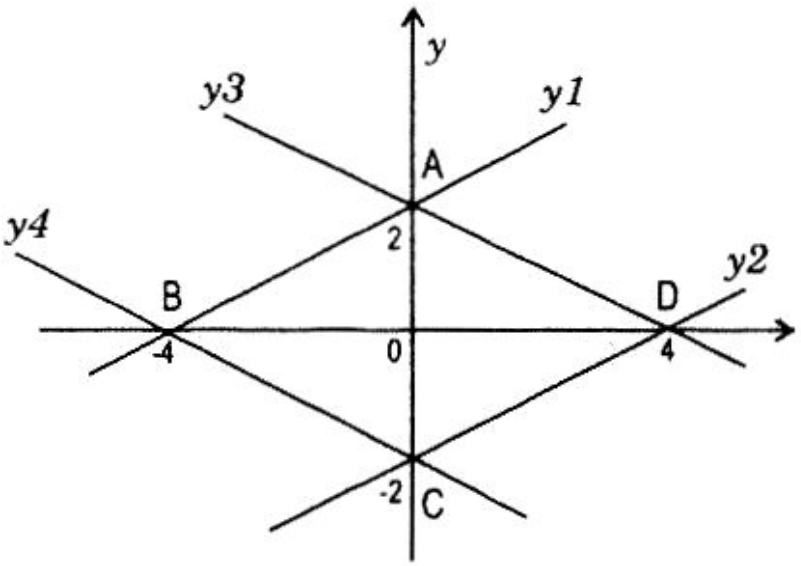
Bài 6. Ta lập các bảng sau để xác định tọa độ giao điểm các đồ thị với hai trục tọa độ:

x	0	-4
y_1	2	0

x	0	4
y_2	-2	0

x	0	4
y_3	2	0

x	0	-4
y_4	-2	0



H.5

Đồ thị là 4 đường thẳng như ở hình 5.

a) Tọa độ các giao điểm là A(0, 2), B(- 4, 0), C(0, -2), D (4, 0).

b) Bốn đường thẳng này cắt nhau tại 4 điểm A, B, C, D trong đó AB//CD vì hệ số góc của y_1 và y_2 bằng nhau, AD//BC vì hệ số góc của y_3 và y_4 bằng nhau.

Tứ giác tạo thành là một hình thoi (hình bình hành ABCD có hai đường chéo vuông góc tại O) có diện tích bằng:

$\frac{8.4}{2} = 16$ (đơn vị diện tích)

Bài 7. a) Muốn hàm số y = ax nghịch biến thì hệ số a phải âm, tức là 2 - k < 0. Suy ra k > 2

b) Muốn đồ thị trùng với trục hoành thì 2 - k = 0 tức là k = 2 vì phương trình của trục hoành là y = 0.

c) Muốn đồ thị trùng với tia phân giác thứ hai tức là trùng với đường thẳng y = -x thì 2 - k = -1, tức là k = 3.

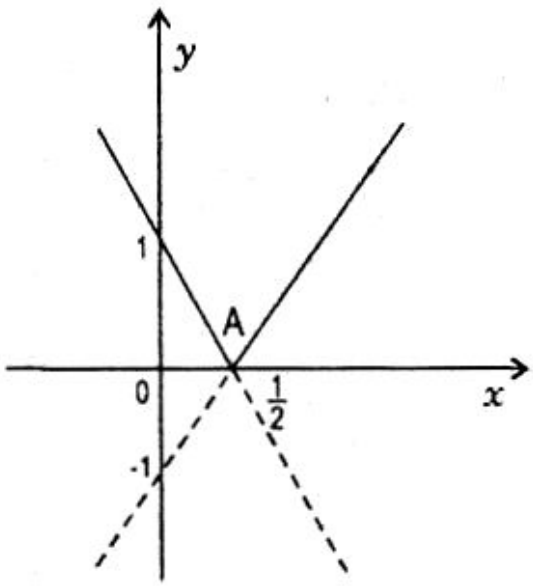
Bài 8. a) Ta có $y = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy đồ thị của hàm số $y = |2x-1|$ gồm hai tia có chung điểm gốc là $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ trên trục hoành và nằm phía trên trục hoành (hình 6).

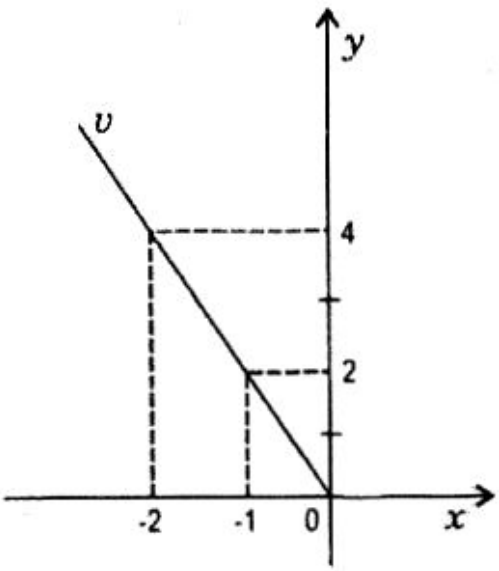
b) Ta có

$$y = |x - |x|| = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số gồm hai tia Ox và Ov (hình 7)



H.6



H.7

§10. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN - CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by = c$ có vô số nghiệm. Tập các nghiệm biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là một đường thẳng gọi là đường thẳng $ax + by = c$.

Đặc biệt, nếu $a = 0$, $b \neq 0$ thì đường thẳng $y = m$ $\left(m \neq \frac{c}{b}\right)$ song song với trục hoành nếu $c \neq 0$, trùng với trục hoành nếu $c = 0$.

Còn nếu $b = 0$, $a \neq 0$ thì đó là đường thẳng $x = n$ $\left(n = \frac{c}{a}\right)$ song song với trục tung nếu $c \neq 0$, trùng với trục tung nếu $c = 0$.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng:

$$\begin{cases} ax + b = c \\ a'x + b' = c' \end{cases}$$

Một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể có một nghiệm duy nhất, có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại.

Lưu ý:

Hai hệ phương trình vô nghiệm đều được coi là tương đương với nhau:

Ví dụ

hệ $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$ và hệ $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 6. \end{cases}$

Hai hệ phương trình có vô số nghiệm đều được coi là tương đương với nhau.

Ví dụ:

hệ $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5x - 5y = 15 \end{cases}$ và hệ $\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 8x - 10y = 12. \end{cases}$

3. Có 2 cách giải cơ bản là:

a. Giải bằng phương pháp cộng

Làm cho giá trị tuyệt đối của các hệ số của một ẩn bằng nhau, rồi cộng hoặc trừ từng vế các phương trình. Giải phương trình có một ẩn đã tìm được.

Ví dụ:

$$\begin{cases} 6x - 7y = 40 \\ 5y - 2x = -8 \end{cases} \Bigg| 3 \Bigg| \qquad \begin{cases} 6x - 7y = 40 & (1) \\ -6x + 15y = -24 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng với (2) được 8y = 16, y = 2 thay vào (1) được x = 9.

Vậy nghiệm của hệ là (x = 9, y = 2)

b) Giải bằng phương pháp thế

Rút một ẩn chẳng hạn x từ một phương trình rồi thay vào phương trình kia. Giải phương trình có một ẩn là y.

Ví dụ:

$$\begin{cases} x + 5y = 7 & (1) \\ 3x - 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Rút x từ (1) được x = 7 - 5y, rồi thay vào (2) được

3(7 - 5y) - 2y - 4 = 0, được y = 1. Từ đó x = 7 - 5 = 2.

Vậy nghiệm của hệ là (x = 2, y = 1).

Lưu ý: a) Khi hệ số của một ẩn bằng 1 hoặc -1 thì dùng phương pháp thế lợi hơn là dùng phương pháp cộng.

Ngoài ra có thể minh hoạ cách giải bằng đồ thị bằng cách vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ hai đường thẳng ax + by = c và a'x + b'y = c', rồi xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đó: hai đường thẳng này có thể cắt nhau (hệ có nghiệm

duy nhất) song song với nhau (hệ vô nghiệm) hoặc trùng nhau (hệ có vô số nghiệm).

b) Có thể giải hệ phương trình bằng cách dùng ẩn phụ. Chẳng hạn để giải hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{3}{8} \end{cases}$ ta đặt $X = \dfrac{1}{x+y}$, $Y = \dfrac{1}{x-y}$ để biến đổi hệ đã cho về dạng có hai ẩn X và Y (ẩn phụ) với điều kiện $x \neq \pm y$.

Giải hệ $\begin{cases} X + Y = \dfrac{5}{8} \\ Y - X = \dfrac{3}{8} \end{cases}$ bằng phương pháp cộng được $X = \dfrac{1}{8}$, $Y = \dfrac{1}{2}$.

Như vậy: $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{8}$ hay $x + y = 8$, $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{2}$ hay $x - y = 2$.

Biết tổng và hiệu của hai số x và y ta có ngay $x = 5$, $y = 3$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Giải bằng phương pháp cộng:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x-4y}{5} + \dfrac{5x-3y}{3} = x+1 \\ \dfrac{2x-3y}{3} + \dfrac{4x-3y}{2} = y+1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{u+3}{v+8} = \dfrac{u+1}{v+1} \\ \dfrac{3(5u-6)}{5v+7} = \dfrac{3u-3}{v+1}. \end{cases}$

Bài 2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} (m+1)x - y = 3 \\ mx + y = m. \end{cases}$$

a) Giải hệ khi $m = -\sqrt{2}$;

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất sao cho tổng x + y dương.

Bài 3. Giải bằng hai phương pháp cộng và thế:

a) $\begin{cases} x + y = 24 \\ \dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{7} = 2\dfrac{8}{9}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 12 = 0. \end{cases}$

Bài 4. a) Viết phương trình của đường thẳng y = ax + b đi qua hai điểm M (1; -2) và N (2; 3); P (0; 1) và Q (8; -1).

b) Với những giá trị nào của a thì hệ phương trình:

$\begin{cases} x - y = 3 \\ ax + b = a \end{cases}$ có một nghiệm, có vô số nghiệm, vô nghiệm?

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau bằng cách dùng ẩn phụ:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 10 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -25; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{4}{z + 2t} - \dfrac{1}{z - 2t} = 1 \\ \dfrac{20}{z + 2t} + \dfrac{3}{z - 2t} = 1. \end{cases}$

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Tìm các giá trị của $k \neq 0$ để:

a) Hệ phương trình: $\begin{cases} kx - y = 2 \\ 3x + ky = 5 \end{cases}$ có nghiệm thỏa mãn hệ thức: $x + y = \dfrac{3}{k^2 + 3}$;

b) Hệ phương trình $\begin{cases} y - kx = 3 \\ y + |x + 1| = 2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 7. Tìm u, v và s trong các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{u}{5} = \dfrac{v}{7} = \dfrac{s}{3} \\ 2u - v + 4s = 30; \end{cases}$ b) $\begin{cases} v - 2|u| = -3 \\ |v| + u = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2u^2 - v^2 = 7 \\ u^2 + 2v^2 = 66. \end{cases}$

Bài 8. 1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{mnp}{m+n} = 2 \\ \dfrac{mnp}{n+p} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{mnp}{p+m} = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} m+n+p = 21 \\ n+p+q = 24 \\ p+q+m = 23 \\ q+m+n = 22. \end{cases}$

2. Tìm m và p thỏa mãn phương trình:

$$\left(3\sqrt{m} - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(p - \sqrt{m}\right)^2 = 0.$$

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) MC: 15 và 6. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta được:

$\begin{cases} 9x - 12y + 25x - 15y = 15x + 15 \\ 4x - 6y + 12x - 9y = 6y + 6 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 19x - 21y = 15 \\ 16x - 21y = 6. \end{cases}$

Giải ra tìm được x = 3, y = 2

Vậy nghiệm của hệ là x = 3, y = 2.

b) Điều kiện $v \neq -8$, $v \neq -5$, $v \neq -7$ và $v \neq -1$

Nhân chéo mỗi phương trình ta được:

$$\begin{cases} (u+3)(v+5) = (u+1)(v+8) \\ 3(5u-6)(v+1) = (5v+7)(3u-3) \end{cases}$$

hay $\begin{cases} uv + 5u + 3v + 15 = uv + 8u + v + 8 \\ 15uv + 15u - 18 = 15uv - 15v + 21u - 21 \end{cases}$ hay $\begin{cases} -3u + 2v = -7 \\ -6u - 3v = -3. \end{cases}$

Giải ra được: $u = \dfrac{9}{7}$; $v = -\dfrac{11}{7}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của hệ là $\left(u = \dfrac{9}{7};\ v = -\dfrac{11}{7}\right)$.

Bài 2. a) Khi $m = -\sqrt{2}$ ta có hệ:

$$\begin{cases}\left(1-\sqrt{2}\right)x - y = 3\\ -\sqrt{2}x + y = -\sqrt{2}\end{cases}$$

Giải ra tìm được :

$$x = \frac{3-\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}} = \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)}{1-8} = -\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)}{7}$$

$$y = \frac{2+2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}} = \frac{\left(2+2\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)}{1-8} = -\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)}{7}.$$

b) Cộng từng vế hai phương trình của hệ đã cho được:
$(2m + 1)x = m + 3$.

- Nếu $2m + 1 \neq 0$ tức là $m \neq -\frac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{m+3}{2m+1};\ y = \frac{m^2-2m}{2m+1}$$

- Muốn tổng x + y dương ta phải có

$$x + y = \frac{m^2-m+3}{2m+1} > 0. \text{ Do tử } m^2 - m + 3 = \left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

nên chỉ cần mẫu $2m + 1 > 0$, tức là $m > -\frac{1}{2}$.

Bài 3. a) Hệ phương trình đã cho có thể viết:

$$\begin{cases}x + y = 24\\ 7x + 9y = 182.\end{cases}$$

Giải ra bằng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế, ta đều được $x = 17$, $y = 7$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x = 17, y = 7)$.

b) Hệ đã cho có thể viết:

$$\begin{cases}3x + 4y = 5\\ 2x - 5y = -12.\end{cases}$$

Giải ra bằng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế ta đều được: $x = -1$, $y = 2$.

Vậy nghiệm của hệ là $x = -1$, $y = 2$.

Bài 4. a) Đường thẳng đi qua hai điểm M và N nên tọa độ của M và của N phải thỏa mãn phương trình y = ax + b, tức là:

$$\begin{cases} -2 = a.1 + b & (1) \\ 3 = a.2 + b & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế: (2) - (1) được a = 5. Thay a = 5 vào (1) được b = -2 - a = - 7.

Vậy phương trình đường thẳng MN là y = 5x - 7.

* Tương tự như trên, toạ độ của P và Q phải thỏa mãn phương trình y = ax + b, tức là:

$$\begin{cases} 1 = a.0 + b \\ -1 = 8a + b \end{cases}$$

Giải ra, tìm được $a = -\frac{1}{4}$; $b = 1$.

Vậy phương trình đường thẳng PQ là $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

b) Cộng từng vế hai phương trình được (a + 1)x = a + 3

- Nếu a + 1 ≠ 0 hay a ≠ -1 và a + 3 ≠ 0 hay a ≠ -3, ta có:

$$x = \frac{a+3}{a+1}; \quad y = x - 3 = \frac{a+3}{a+1} - \frac{3(a+1)}{a+1} = \frac{-2a}{a+1}.$$

Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất.

- Nếu a = -1 và a = -3 thì phương trình thứ hai có dạng 0x = 0- Hệ đã cho có vô số nghiệm: x là bất kì giá trị nào, còn y = x - 3.

- Nếu a = -1 và a ≠ -3 thì phương trình thứ hai có dạng 0x = 2, vô nghiệm. Do đó hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 5. a) Đặt $\frac{1}{x} = X$, $\frac{1}{y} = Y$, hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ 2X - 3Y = -25. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $X = 1 = \frac{1}{x}$; $Y = 9 = \frac{1}{y}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x = 1$; $y = \frac{1}{9}$.

b) Đặt $\frac{1}{z+2t} = X$. $\frac{1}{z-2t} = Y$, hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} 4X - Y = -1 \\ 20X + 3Y = 1 \end{cases}$$ với điều kiện $z \neq \pm 2t$

Giải ra tìm được $X = \frac{1}{8} = \frac{1}{z+2t}$; $Y = -\frac{1}{2} = \frac{1}{z-2t}$.

Ta phải giải tiếp hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{z+2t} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{z-2t} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} z + 2t = 8 \\ z - 2t = -2. \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm $z = 3$, $t = 2,5$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x = 3$, $t = 2,5$.

Bài 6. a) Với $k \neq 0$, giải hệ đã cho ta được $x = \frac{2k+5}{k^2+3}$ $y = \frac{5k-6}{k^2+3}$.

Muốn cho nghiệm tìm được thỏa mãn hệ thức $x + y = \frac{3}{k^2+3}$, ta phải giải phương trình:

$\frac{2k+5}{k^2+3} + \frac{5k-6}{k^2+3} = \frac{3}{k^2+3}$, hay $2k + 5 + 5k - 6 = 3$.

Giải ra tìm được $k = \frac{4}{7}$.

b) Từ phương trình thứ nhất ta có $y = 3 + kx$. Thay vào phương trình thứ hai được:

$$|x + 1| = -kx - 1 \ (*)$$

- Nếu $x > -1$ thì $(k + 1)x = -2$. Từ đó với $k = -1$ thì $0x = -2$, phương trình (*) vô nghiệm; với $k \neq -1$ thì $x = -\frac{2}{k+1} > -1$ hay $\frac{k-1}{k+1} > 0$. Suy ra $|k| > 1$ và ta có $y = \frac{k+3}{k+1}$.

- Nếu $x < -1$ thì $(k - 1)x = 0$. Từ đó với $k = 1$ thì $0x = 0$, phương trình (*) có vô số nghiệm với mọi $x \leq -1$, với $k \neq 1$ thì $x = 0$, phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy muốn hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì $|k| > 1$.

Bài 7. a) Đặt $\frac{u}{5} = \frac{v}{7} = \frac{s}{3} = k$ ta có $u = 5k$, $v = 7k$, $s = 3k$. Thay vào phương trình thứ hai được:

$$10k - 7k + 12k = 30, \text{ hay } 15k = 30, k = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(u = 10, v = 14, s = 6)$.

b) Ta hãy xét các trường hợp sau:

* $u \geq 0$, $v \geq 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} v - 2u = -3 \\ v + u = 3 \end{cases} \text{ mà nghiệm là } u_1 = 2, v_1 = 1.$$

* $u \geq 0$, $v < 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} v - 2u = -3 \\ -v + u = 3 \end{cases} \text{ mà nghiệm là } u_2 = 0, v_2 = -3.$$

* $u < 0$, $v < 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} v + 2u = -3 \\ -v + u = 3 \end{cases} \text{ mà nghiệm là } u_3 = -6, v_3 = 9.$$

Vậy bốn nghiệm của hệ đã cho là:

$$(u, v) = (2, 1); (0, -3); (-6, 9); (0, -3)$$

c) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 được $4u^2 - 2v^2 = 14$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 4u^2 - 2v^2 = 14 \\ u^2 + 2v^2 = 66. \end{cases}$$

Từ đó tìm được $5u^2 = 80$, $u^2 = 16$, $u = \pm 4$. Thay giá trị của u^2 vào phương trình thứ hai được:

$2v^2 = 66 - 16 = 50$, $v^2 = 25$, $v = \pm 5$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $u = \pm 4$, $v = \pm 5$.

Bài 8. 1. a) Hệ phương trình đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} \dfrac{m+n}{mnp} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{n+p}{mnp} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{p+m}{mnp} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{np} + \dfrac{1}{mp} = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \dfrac{1}{mp} + \dfrac{1}{mn} = \dfrac{5}{6} & (2) \\ \dfrac{1}{np} + \dfrac{1}{mn} = \dfrac{2}{3} & (3) \end{cases}$$

với điều kiện $mnp \neq 0$, $m + n \neq 0$, $n + p \neq 0$, $p + m \neq 0$.

Cộng từng vế ba phương trình này được:

$$\frac{1}{mn} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{np} = 1 \qquad (4)$$

Lấy (4) trừ từng vế với (1), (2), (3) ta có:

$$\begin{cases} mn = 2 \\ mp = 3 \\ np = 6. \end{cases}$$

Nhân từng vế ba phương trình cuối này được $(mnp)^2 = 36$ hay $mnp = \pm 6$. Từ đó ta có $m = \pm 1$, $n = \pm 2$, $p = \pm 3$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là:

$(m, n, p) = (1; 2; 3); (-1; -2; -3)$

b) Cộng từng vế bốn phương trình đã cho được:

$3(m + n + p + q) = 90$; $m + n + p + q = 30$.

Lấy phương trình này trừ từng vế với mỗi phương trình của hệ, ta sẽ tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$(m, n, p, q) = (6; 7; 8; 9)$

2. Vế trái là tổng của hai biểu thức không âm nên mỗi biểu thức phải bằng 0. Vậy phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 3\sqrt{m} - \dfrac{6}{5} = 0 \\ p - \sqrt{m} = 0. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $m = \dfrac{4}{25}$; $p = \dfrac{2}{5}$.

Vậy nghiệm của hệ là $\left(m = \dfrac{4}{25}; p = \dfrac{2}{5}\right)$.

§11. TOÁN BẬC NHẤT (GIẢI BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH)

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Cách giải theo đúng các bước đã trình bày ở §6 (Giải bài toán bằng cách lập phương trình). Bước khó nhất là lập được hệ phương trình sau khi chọn ẩn và xác định điều kiện của ẩn.

Vấn đề còn lại là giải hệ phương trình bằng các phương pháp đã trình bày ở § 10. Cuối cùng luôn lưu ý sau khi đã tìm được nghiệm phải đối chiếu với điều kiện của ẩn để chọn kết quả thích hợp. Sau đó phải thử lại nghiệm tìm được (thử vào bài ra, chứ không phải vào hệ phương trình).

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Tổng của chữ số hàng chục và hai lần chữ số hàng

đơn vị của một số có hai chữ số là 18. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số mới lớn hơn số ban đầu là 54. Tìm số ban đầu.

Bài 2. Hai người thợ quét vôi cùng làm chung thì 12 giờ xong công việc. Sau khi làm chung 8 giờ thì một người phải đi làm việc khác nên người còn lại phải làm nốt trong 5 giờ nữa mới xong. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải mấy giờ mới xong?

Bài 3. Hai tổ công nhân A và B theo kế hoạch phải may xong 110 sơ mi. Do thi đua tăng năng suất tổ A đã vượt mức 14%, tổ B vượt mức 10% nên đã may được 123 sơ mi. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải may bao nhiêu sơ mi?

Bài 4. Một đám đất hình chữ nhật có chu vi 124m. Nếu tăng chiều dài 5m và tăng chiều rộng 3m thì diện tích sẽ tăng $225m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của đám đất.

Bài 5. Một người đi xe máy dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B trong một thời gian nhất định. Người đó tính rằng nếu đi với vận tốc 45km/h thì sẽ tới B chậm mất nửa giờ, nhưng nếu đi với vận tốc 60km/h thì sẽ đến B sớm hơn 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. a) Tìm số có hai chữ số biết rằng chữ số hàng đơn vị gấp ba chữ số hàng chục và khi chia số đó cho tổng các chữ số thì được thương là 3 và dư 3.

b) Một hợp kim gồm đồng và kẽm có khối lượng 124,5 gam. Tính khối lượng đồng và kẽm trong hợp kim, biết rằng khối lượng riêng của đồng là $800kg/m^3$, của kẽm là $7100kg/m^3$ và của hợp kim là $8300kg/m^3$.

Bài 7. a) Khối lớp 8 và khối lớp 9 của trường có 300 học sinh tham gia đồng diễn thể dục. Nếu chuyển 20 học sinh từ

khối 8 sang khối 9 thì $\frac{2}{3}$ số học sinh khối 8 sẽ bằng $\frac{4}{9}$ số học sinh khối 9. Tính số học sinh của mỗi khối tham gia đồng diễn thể dục.

b) Tính hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết rằng nếu tăng cạnh lớn thêm 5cm và tăng cạnh nhỏ thêm 3cm thì diện tích tam giác tăng thêm $80cm^2$ và nếu giảm mỗi cạnh đi 2cm thì diện tích sẽ giảm đi $35cm^2$.

Bài 8. a) Hai vòi nước cùng chảy vào một bể lớn thì trong 10 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 6 giờ và vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì bể chỉ đầy được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì phải trong bao lâu mới đầy bể?

b*) Tìm tất cả những cặp số nguyên dương (m, p) sao cho hiệu các bình phương của hai số đó bằng 75.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. Gọi x là chữ số hàng chục, y là chữ số hàng đơn vị ($0 < x \le 9$, $0 \le y \le 9$). Số ban đầu là $10x + y$, số đã đổi chỗ hai chữ số là $10y + x$.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 10y + x - (10x + y) = 54 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + 2y = 18 \\ 9(y - x) = 54. \end{cases}$$

Giải ra được x = 2, y = 8, thỏa mãn điều kiện đã nêu.

Vậy số ban đầu là 28.

(Bạn đọc tự thử lại: 2 + 8.2 = 18; 82 - 28 = 54)

Bài 2. Gọi số giờ mà người thứ nhất làm một mình xong công việc là x, số giờ mà người thứ hai làm một mình xong công việc là y (x, y > 0).

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người

thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc, cả hai cùng làm chung được $\frac{1}{12}$ công việc.

Cả hai làm chung trong 8 giờ được $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ công việc, nên phần công việc còn lại là $\frac{1}{3}$ công việc.

Theo đầu bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} = \frac{5}{y}. \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 60, y = 15, thỏa mãn điều kiện.

Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất phải làm trong 60 giờ, người thứ hai phải làm trong 15 giờ.

Bài 3. Gọi x và y theo thứ tự là số sơ mi mà tổ A và tổ B phải làm theo kế hoạch (x, y nguyên dương).

Thực tế tổ A đã may được $x + \frac{14}{100}x$, tổ B đã may được $y + \frac{10}{100}y$. Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ x + \frac{14}{100}x + y + \frac{10}{100}y = 123. \end{cases}$$

Giải ra, tìm được x = 50, y = 60, thỏa mãn điều kiện.

Vậy theo kế hoạch tổ A phải may 50 sơ mi, tổ B phải may 60 sơ mi.

Bài 4. Gọi chiều dài và chiều rộng của đám đất là x và y mét (x, y > 0). Nửa chu vi là 124 : 2 = 62 (m), diện tích là $xy(m^2)$.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ (x + 5)(y + 3) = xy + 225. \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 35, y = 27 thỏa mãn điều kiện.

Vậy đám đất có chiều dài 35m và chiều rộng 27m.

Bài 5. Gọi độ dài quãng đường AB là x km, thời gian dự định đi là y giờ (x, y > 0).

Thời gian đi với vận tốc 45km/h là $\frac{x}{45}$ giờ, với vận tốc 60km/h là $\frac{x}{60}$ giờ. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{45} = y + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{60} = y - \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 225, y = $4\frac{1}{2}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy quãng đường AB dài 225km, thời gian dự định đi là 4 giờ rưỡi.

Bài 6. a) Gọi x và y theo thứ tự là chữ số hàng chục và hàng đơn vị ($0 < x \leq 3$, $0 \leq y \leq 9$).

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 10x + y = 3(x + y) + 3. \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 3, y = 9, thỏa mãn điều kiện.

Vậy số phải tìm là 39.

b) Gọi khối lượng đồng là x kg, khối lượng kẽm là y kg (x > 0, y > 0). Thể tích của đồng sẽ là $\frac{x}{8900}$, của kẽm là

$\frac{y}{7100}$ và của hợp kim là $\frac{0,1245}{8300}$. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 0,1245 \\ \frac{x}{8900} + \frac{y}{7100} = \frac{0,1245}{8300}. \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 0,089; y = 0,355, thỏa mãn điều kiện. Vậy khối lượng của đồng là 89 gam, của kẽm là 35,5 gam.

Bài 7. a) Gọi số học sinh khối lớp 8 là x người, số học sinh khối lớp 9 là y người (x, y nguyên dương).

Nếu chuyển 20 học sinh của khối lớp 8 thì còn x - 20, lúc đó khối lớp 9 có số học sinh là y + 20.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ \frac{2}{3}(x - 20) = \frac{4}{9}(y + 20). \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 140, y = 160, thỏa mãn điều kiện.

Vậy số học sinh khối 8 là 140 học sinh và số học sinh khối lớp 9 là 160 học sinh.

b) Gọi độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông là x và y cm (x > y > 0).

Diện tích hình tam giác vuông là $\frac{xy}{2}cm^2$. Diện tích sau khi tăng thêm hai cạnh là $\frac{(x+5)(y+3)}{2}$, diện tích sau khi giảm hai cạnh là $\frac{(x-2)(y-2)}{2}$.

Theo bài ra có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+5)(y+3)}{2} = \dfrac{xy}{2} + 80 \\ \dfrac{(x-2)(y-2)}{2} = \dfrac{xy}{2} - 35 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (x+5)(y+3) = xy + 160 \\ (x-2)(y-2) = xy - 70 \end{cases}$$

Giải ra, tìm được x = 20, y = 17, thỏa mãn điều kiện.

Vậy hai cạnh góc vuông là 20cm và 17 cm.

Bài 8. a) Gọi x và y theo thứ tự là số giờ mà vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình sẽ đầy bể (x, y > 0).

Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy vào được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai được $\frac{1}{y}$ bể, trong 6 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{6}{x}$ bể và vòi thứ hai trong 3 giờ chảy được $\frac{3}{y}$ bể.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Giải ra tìm được x = 30, y = 15 thỏa mãn điều kiện.

Vậy nếu chảy một mình vòi thứ nhất phải chảy trong 30 giờ và vòi thứ hai chảy trong 15 giờ thì mới đầy bể.

b*) Gọi cặp số nguyên dương phải tìm là (x, y). Theo bài ra ta có phương trình: $x^2 - y^2 = 75$.

Phương trình này có thể viết $(x + y)(x - y) = 75$. Suy ra $x - y > 0$ hay $x > y$ và $x - y < x + y$. Như vậy số 75 được phân tích thành hai thừa số trong đó thừa số nhỏ $x - y < 8$ vì $(x - y)^2$ phải nhỏ hơn 75.

Do đó x - y chỉ có thể lấy những ước của 75 nhỏ hơn 8, đó là 1; 3; 5. Vậy ta phải giải 3 hệ phương trình sau:

$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 75 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 25 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 15. \end{cases}$

Giải ra tìm được ba cặp số sau:

(38, 37); (14, 11); (10, 5).

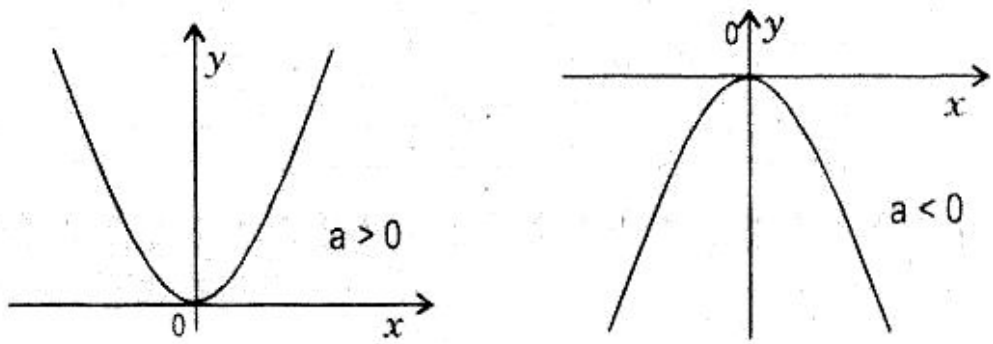
§12. HÀM SỐ BẬC HAI - ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng công thức $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

2. Hàm số $y = ax^2$ nếu $a > 0$ là nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$, đồng biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.

Nếu $a < 0$ hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$, nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.



H.8

3. Đồ thị của hàm số bậc hai

a) Đồ thị của hàm số $y = x^2$ là một đường cong gọi là parabol nằm phía trên trục hoành, có đỉnh là điểm gốc toạ độ O và trục đối xứng là trục tung.

b) Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ là một đường parabol có đỉnh là gốc toạ độ O, có trục đối xứng là Oy:

- nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$;
- nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$ (hình 8).

* *Lưu ý*: Ta còn nói hàm số $y = ax^2$ có cực tiểu khi $a > 0$, cực đại khi $a < 0$, có bề lõm quay về phía chiều dương của trục Oy nếu $a > 0$ và về phía chiều âm của trục Oy nếu $a < 0$.

Toạ độ đỉnh là tọa độ điểm gốc O ($x = 0$, $y = 0$).

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = -0,5x^2$.

a) Tính f(-2), f(-1), f(0), f(2)

b) Tính x biết f(x) = -6, -18, - 72

c) Chứng minh rằng f(x) đồng biến trên $\mathbf{R}_-$, nghịch biến trên $\mathbf{R}_+$.

Bài 2. Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ đồ thị các hàm số sau:

$y_1 = -2x^2$; $y_2 = -2x^2 + 2$; $y_3 = -2x^2 - 2$.

a) Có nhận xét gì về đồ thị của chúng?

b) Tìm toạ độ giao điểm của mỗi đồ thị trên với đường thẳng $y = -4$.

Bài 3. a) Tìm toạ độ giao điểm các đường thẳng $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ và $x = m$ (m là hằng số) với parabol $y = 1,5x^2$.

b) Parabol $y = ax^2$ đi qua điểm M (- 2, 8), xác định hệ số a. Parabol này có đi qua điểm N (- 3; 9) không?

Bài 4. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -0,25x^2$.

b) Tìm m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt parabol tại 1 điểm, tại 2 điểm.

Bài 5. Cho parabol (P) $y = ax^2$ và đường thẳng (d) $y = mx + p$.

a) Tìm phương trình của đường thẳng (d) đi qua hai điểm P (1; 0) và Q (0; -1).

b) Tìm phương trình của parabol (P) biết rằng nó tiếp xúc với đường thẳng (d) tìm được ở câu a.

c) Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của (d) với trục hoành và trục tung. Tính đường cao của tam giác vuông MON.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Vẽ đồ thị của các hàm số trên cùng một hệ trục toạ độ: $y_1 = 0,5x^2$; $y_2 = -0,5x^2$; $y_3 = 1,5x^2$; $y_4 = -1,5x^2$?

a) Có nhận xét gì về đồ thị các hàm số đó?

b) Xác định m và p để các đường thẳng y = m và x = p cắt các đồ thị trên.

Bài 7. Cho parabol $y = kx^2$ và đường thẳng $y = (p-1)x - p + 1$.

a) Biết parabol qua điểm M $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng hãy tìm k và p và tọa độ tiếp điểm Q.

b) Viết phương trình của đường thẳng QS biết tọa độ của S là (2; 0). Tìm hoành độ các giao điểm của đường thẳng QS với parabol.

Bài 8. Vẽ đồ thị:

a) Hàm số $y = x|x|$

b) Hàm số $y = |-2x^2 + 3|$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) f(-2) = -2; f(-1) = -0,5; f(0) = 0; f(2) = -2.

b) Ta có $-6 = -0,5x^2$, từ đó $x^2 = 12$, $x = \pm 2\sqrt{3}$

$-18 = -0,5x^2$, từ đó $x^2 = 36$, $x = \pm 6$

$-72 = -0,5x^2$, từ đó $x^2 = 144$, $x = \pm 12$.

c) Cho x hai giá trị $x_1 < x_2$ hay $x_2 - x_1 > 0$

$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$.

Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $x_2 + x_1 < 0$. Mà $x_2 - x_1 > 0$, do đó $f(x_2) - f(x_1) = -0,5(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên **R** ..

Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì thì $x_2 + x_1 > 0$. Mà $x_2 - x_1 > 0$, do đó $f(x_2) - f(x_1) = -0,5(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < 0$ vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbf{R}_+$.

Bài 2. Ta lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y:

x	-2	-1	0	1	2
$y_1 = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8
$y_2 = -2x^2 + 2$	-6	0	2	0	-6
$y_3 = -2x^2 - 2$	-10	-4	-2	-4	-10

Đồ thị như ở hình 9.

a) Nhận xét:

- Ba parabol đều có trục đối xứng là trục tung;

- Cả ba đều quay bề lõm về phía chiều âm của trục tung;

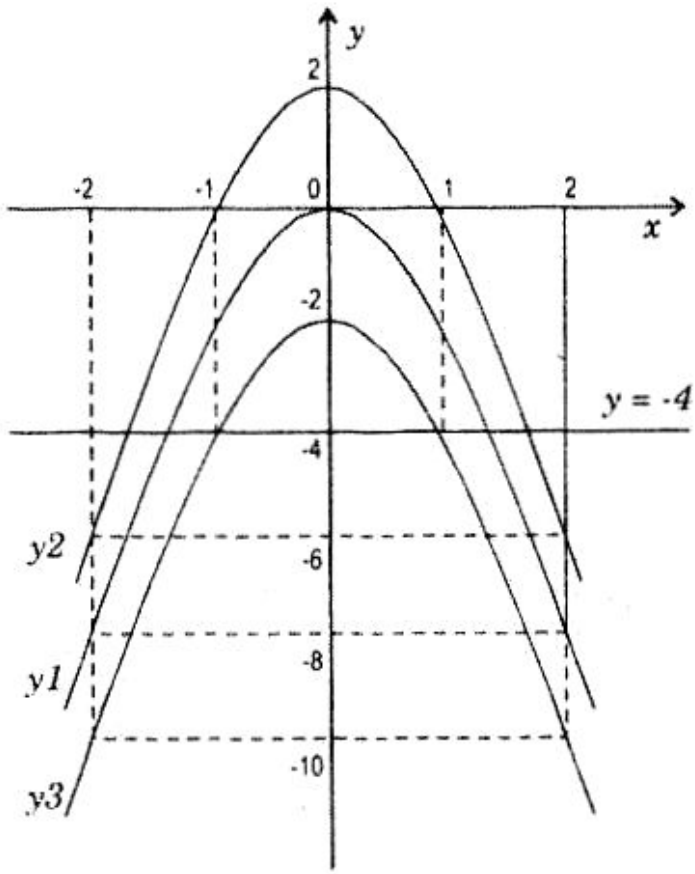
- Parabol y_1 có đỉnh là điểm gốc toạ độ O (0, 0), parabol y_2 có đỉnh là điểm (0, 2), parabol y_3 có đỉnh là điểm (0, -2).

b) Đường thẳng y = - 4 song song với trục hoành. Tại giao điểm của đường thẳng với:

- Parabol y_1 ta có $-2x^2 = -4$ hay $x^2 = 2$. $x = \pm\sqrt{2}$;

- Parabol y_2 ta có $-2x^2 + 2 = -4$ hay $x^2 = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$;

- Parabol y_3 ta có $-2x^2 - 2 = -4$ hay $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.



H.9

Vậy toạ độ các giao điểm của đường thẳng với parabol y_1 là: $(\sqrt{2};-4)$, $(-\sqrt{2};-4)$, của đường thẳng với parabol y_2 là $(\sqrt{3};-4)$, $(-\sqrt{3};-4)$ và của đường thẳng với parabol y_3 là (1; - 4), (-1; -4).

Bài 3. a) Các đường thẳng x = -2, x = 2 và x = m đều song song với trục tung, riêng đường thẳng x = 0 trùng với trục tung. Toạ độ giao điểm của parabol $y = 1,5x^2$ với:

- đường thẳng x = -2 là (x = -2, y = 1,5.4 = 6)
- đường thẳng x = 0 là (x = 0, y = 0)
- đường thẳng x = 2 là (x = 2, y = 6)
- đường thẳng x = m là (x = m, $y = 1,5m^2$)

b) Thay toạ độ của M vào $y = ax^2$ ta có $8 = a.(-2)^2$, suy ra a = 2. Parabol có dạng $y = 2x^2$.

Parabol này không đi qua điểm N, vì với x = -3 thì y = 18.

Bài 4. a) Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{x^2}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	-1

Đồ thị như ở hình 10.

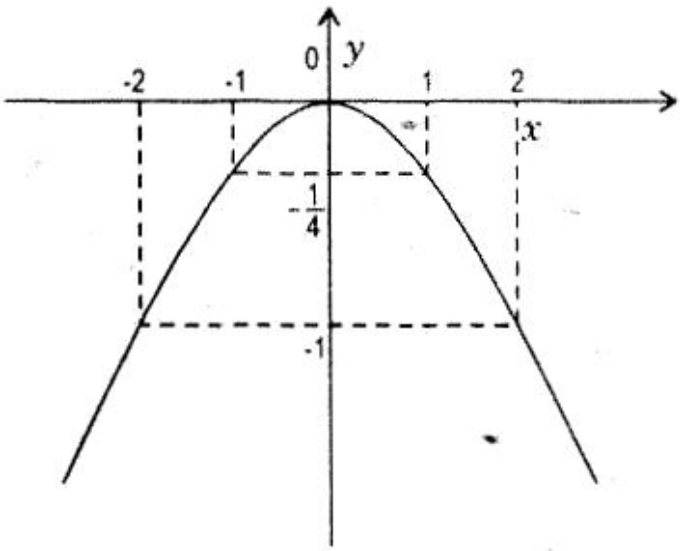
b) Khi đường thẳng y = 2x + m cắt parabol $y = -\frac{x^2}{4}$ thì tại giao điểm ta có:

$$-\frac{x^2}{4} = 2x + m, \text{ hay}$$

$$x^2 + 8x + 4m = 0$$

$$\Delta' = 16 - 4m.$$

Nếu $\Delta' > 0$ tức là $16 - 4m > 0$ thì đường thẳng cắt parabol tại hai điểm.



H.10

Nếu $\Delta' = 0$, tức là $16 - 4m = 0$, $m = 4$ thì đường thẳng cắt parabol tại một điểm (đường thẳng tiếp xúc với parabol).

Bài 5. a) Thay tọa độ của P và của Q vào $y = mx + p$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0 = m + p \\ -1 = -m + p. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $m = \frac{1}{2}$; $p = -\frac{1}{2}$. Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

b) Tại giao điểm của đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ với parabol $y = ax^2$ ta có: $ax^2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ hay $2ax^2 - x + 1 = 0$(*)

Nếu parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng (d) thì phương trình (*) phải có nghiệm kép tức là $\Delta = 0$.

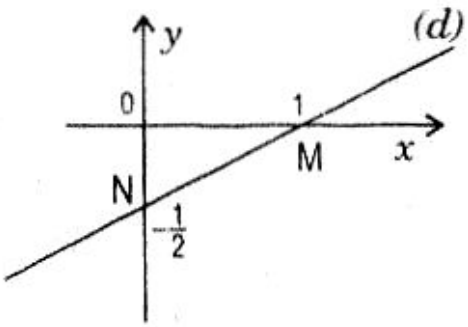
Ta có $\Delta = 1 - 8a = 0$ khi $a = \frac{1}{8}$. Vậy phương trình của (P) là $y = \frac{1}{8}x^2$.

c) Ta có:

x	0	1
y	$-\frac{1}{2}$	0

Do đó toạ độ của M là (1; 0), của N là $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Cạnh huyền MN của tam giác vuông MON là $MN = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (hình 11).



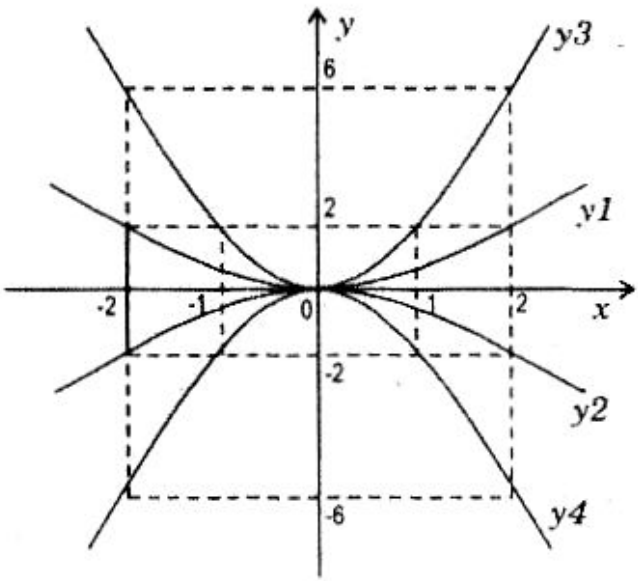
H.11

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông bc = ah, ta có đường cao của tam giác MON là:

$$h = \frac{OM.ON}{MN} = \left(1.\frac{1}{2}\right) : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Bài 6. Lập bảng một số giá trị tương ứng giữa x và y:

x	-2	-1	0	1	2
y_1	2	0,5	0	0,5	2
y_2	-2	-0,5	0	-0,5	-2
y_3	6	1,5	0	1,5	6
y_4	-6	-1,5	0	-1,5	-6



H.12

Đồ thị như ở hình 12.

a) Xét hai hàm số $y_1 = 0,5x^2$ và $y_2 = -0,5x^2$. Chúng có hệ số đối nhau nên cùng một giá trị của x thì hai hàm số nhận các giá trị đối nhau. Do đó hai parabol y_1 và y_2 đối xứng nhau qua trục hoành.

Tương tự hai parabol y_3 và y_4 cũng đối xứng nhau qua trục hoành.

b) Đường thẳng y = m với m > 0 cắt hai parabol y_1 và y_3. Nếu m < 0 thì đường thẳng cắt hai parabol y_2 và y_4.

Đường thẳng x = p cắt cả bốn parabol về bên trái trục tung nếu p < 0 và về bên phải nếu p > 0.

Bài 7. a) Thay toạ độ của M vào $y = kx^2$ ta có $\frac{1}{4} = k.\frac{1}{4}$, suy ra k = 1, vậy parabol có dạng $y = x^2$.

Với p - 1 ≠ 0 hay p ≠ 1 khi đường thẳng cắt parabol thì tại giao điểm ta có:

$x^2 = (p - 1)x - (p - 1)$, hay $x^2 - (p - 1)x + p - 1 = 0$(*)

Để parabol tiếp xúc với đường thẳng thì phương trình (*) phải có nghiệm kép tức là $\Delta = 0$.

Ta có $\Delta = (p - 1)^2 - 4(p - 1) = p^2 - 6p + 5 = 0$ khi $p_1 = 1$ (loại), $p_2 = 5$. Từ đó $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{p-1}{2} = 2$.

Vậy khi k = 1, p = 5 thì toạ độ tiếp điểm Q là (2, 4).

b) Đường thẳng QS có dạng y = ax + b. Thay toạ độ của Q và S vào y = ax + b được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 = 2a + b \\ 0 = -2a + b. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$. Do đó phương trình đường thẳng QS là $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Tại giao điểm của đường thẳng và parabol ta có:

$x^2 = \frac{1}{2}x + 3$ hay $2x^2 - x - 6 = 0$, mà nghiệm là $x_1 = 2$, $x_2 = -1,5$.

Vậy hoành độ hai giao điểm là $x_1 = 2$, $x_2 = -1,5$.

Bài 8. a) Ta có

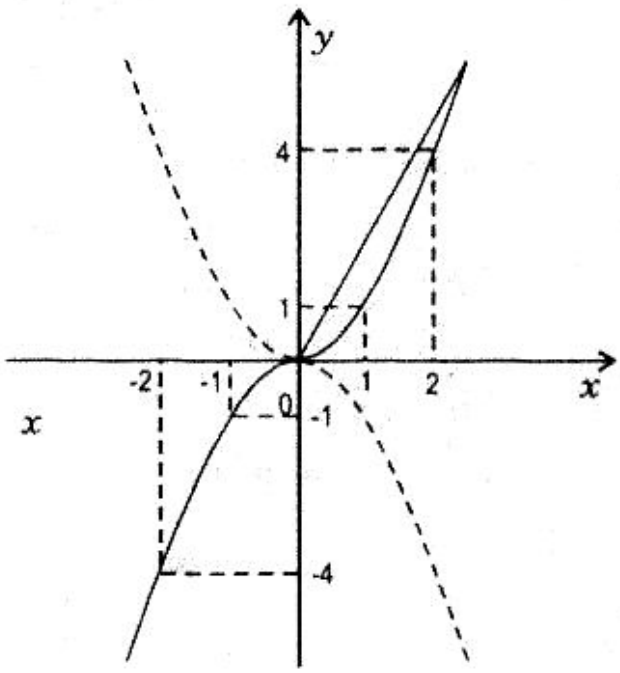
$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

Lập hai bảng giá trị của y ứng với $x \geq 0$ và $x < 0$.

x	0	1	2
$y = x^2$	0	1	4

x	-2	-1
$y = -x^2$	-4	-2

Đồ thị như ở hình 13.



H.13

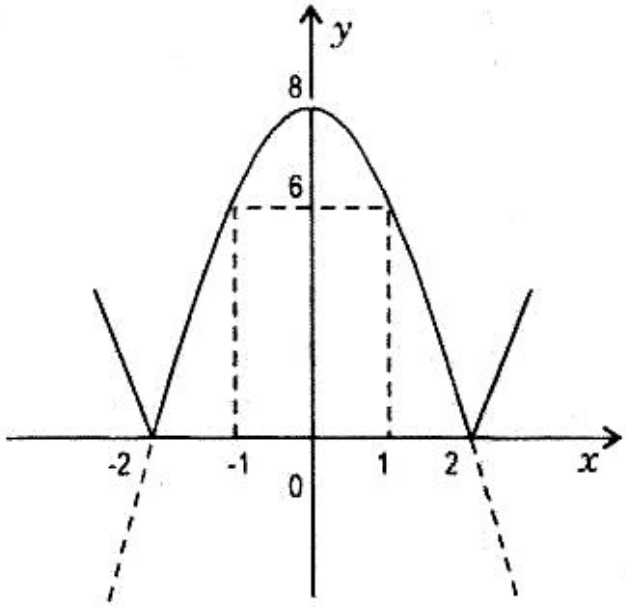
b) Ta thấy rằng $y \geq 0$.

Trước hết vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 8$, dựa vào bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	6	8	6	0

Sau đó giữ lại phần đồ thị phía trên trục hoành rồi lấy đối xứng của phần đồ thị phía dưới qua trục hoành.

Ta được đồ thị như ở hình 14.



H.14

§13. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - ĐỊNH LÍ VIÉT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn, a, b, c là các hệ số với $a \neq 0$.

2. Phương trình bậc hai khuyết có các dạng sau:

$ax^2 = 0$ ($a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$) mà nghiệm là $x = 0$

$ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$, $c = 0$) mà nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$, $b = 0$) mà nghiệm là $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$ nếu a và c khác dấu, vô nghiệm nếu a và c cùng dấu.

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$)

Lập $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta < 0$: vô nghiệm $\Delta = 0$: 1 nghiệm kép $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ $\Delta > 0$: 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	Lập $\Delta' = b'^2 - ac$ (nếu hệ số b chẵn $b := 2b'$) $\Delta' < 0$: vô nghiệm $\Delta' = 0$: 1 nghiệm kép $x_{1,2} = -\frac{b'}{a}$ $\Delta' > 0$: 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

3. Định lí Viét: - Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì tổng và tích hai nghiệm đó là:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$$

Áp dụng: * Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

a) Có 1 nghiệm $x_1 = 1$ thì $a + b + c = 0$ và ngược lại nếu $a + b + c = 0$ thì $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$

b) Có 1 nghiệm $x_1 = -1$ thì $a - b + c = 0$ và ngược lại nếu $a - b + c = 0$ thì $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Ví dụ: Các phương trình $2x^2 - 7x + 5 = 0$ $(a + b + c = 0)$ và $4x^2 - 3x + 7 = 0$ $(a - b + c = 0)$.

Định lí Viét đảo: Nếu u và v là hai số có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$ (với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$).

Ví dụ: Tìm hai số biết tổng của chúng là $\frac{\sqrt{3}}{3}$ và tích của chúng là $-\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$.

Hai số phải tìm là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$X^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}X - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \text{ hay } 3X^2 - \sqrt{3}X - \left(3+\sqrt{3}\right) = 0.$$

Giải nhẩm ta được ngay hai số phải tìm là -1 và $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Giải các phương trình bậc hai:

a) $(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 = (4x + 9)(4x - 9) + 2(64 - 29x)$;

b) $\frac{3y^2 - 4}{12} - \frac{32}{9} = \frac{20 - 3y^2}{18}$;

c) $\frac{(z+4)^2}{2} - \frac{(z-6)^2}{3} = z - 7 + \frac{(z+2)(z+6)}{4}$;

d) $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 4{,}5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 5 = 0$;

e) $(2v^2 + 3v - 1)^2 - 5(2v^2 + 3v + 3) + 24 = 0$.

Bài 2. a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $7 - \sqrt{7}$ và $\sqrt{7} + 7$;

b) Lập phương trình bậc hai có hệ số nguyên mà một nghiệm là $\sqrt{5} - 4$.

Bài 3. Cho phương trình $x^2 + 7x - 5 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính:

a) Tổng và tích hai nghiệm;

b) Tổng các nghịch đảo của hai nghiệm;

c) Tổng các bình phương của hai nghiệm;

d) Bình phương của hiệu hai nghiệm;

e) Tổng các lập phương của hai nghiệm.

Bài 4. 1. Cho phương trình $2x^2 + (2p - 1)x + p - 1 = 0$:

a) Tìm p để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho:

$3x_1 - x_2 = \frac{5}{2}$;

b) Tìm p để cả hai nghiệm đều dương;

c) Tìm một hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào p.

2. Cho phương trình bậc hai $y^2 - |y| + k = 0$. Giải phương trình khi k = 0.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 - 2(a + 1)x + a - 4 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi a;

b) Chứng minh biểu thức $x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào a;

c) Tính hiệu các lập phương của hai nghiệm khi a = 0.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Không giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$, hãy tính:

a) Tổng $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;

b) Giá trị biểu thức $M = \frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}$.

Bài 7. 1. Giải và biện luận:

a) $2x^2 - (2 - k)x = k(k - 2)$;

b) $(2k - 1)^2y^2 - 4ky + 1 = 0$.

2. Chứng minh rằng phương trình:

$n^2x^2 + (n^2 + p^2 - m^2)x + p^2 = 0$ vô nghiệm nếu m, n, p là số đo ba cạnh của một tam giác.

Bài 8. 1. Cho phương trình $x^2 - px + p - 1 = 0$:

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi p;

b) Tính theo p giá trị biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

2. Chứng minh rằng hai phương trình $mx^2 + px + q = 0$ (1) và $qx^2 + px + m = 0$ (2) hoặc cùng vô nghiệm hoặc cùng có nghiệm. Trong trường hợp chúng có nghiệm thì tích hai nghiệm của (1) cộng với tích hai nghiệm của (2) luôn lớn hơn 2 nếu p và q đều dương.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1.a) Thực hiện phép tính được:

$(4x^2 - 28x + 49) + (9x^2 - 30x + 25) = (16x^2 - 81) + 128 - 58x$, hay sau khi rút gọn được phương trình khuyết bậc hai $3x^2 - 27 = 0$. Giải ra tìm được $x = \pm 3$.

b) MC: 36. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$9y^2 - 12 - 128 = 40 - 6y^2$ hay $15y^2 = 180$, $y^2 = 12$.

Giải ra tìm được $y = \pm 2\sqrt{3}$.

c) MC: 12. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu

$6(z+4)^2 - 4(z-6)^2 = 12z - 84 + 3(z+2)(z+6)$, hay

$6z^2 + 48z + 96 - 4z^2 + 48z - 144 = 12z - 84 + 3z^2 + 24z + 36$.

Sau khi rút gọn được phương trình bậc hai khuyết:

$z^2 - 60z = 0$.

Giải ra tìm được $z_1 = 0$, $z_2 = 60$.

d) Đặt $t + \frac{1}{t} = X$, phương trình đã cho có dạng:

$X^2 - 4{,}5X + 5 = 0$ mà nghiệm là $X_1 = \frac{5}{2}$, $X_2 = 2$.

Với $X_1 = \frac{5}{2} = t + \frac{1}{t}$ ta có $2t^2 - 5t + 2 = 0$ mà nghiệm là 2 và $\frac{1}{2}$.

Với $X_2 = 2 = t + \frac{1}{t}$ ta có $t^2 - 2t + 1 = 0$ mà nghiệm kép là 1 (do $a + b + c = 0$).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = 1$.

e) Đặt $2v^2 + 3v - 1 = Y$, phương trình đã cho có dạng $Y^2 - 5Y + 4 = 0$.

Giải ra được $Y_1 = 1$ (do $a + b + c = 0$) và $Y_2 = 4$. Từ đó ta giải tiếp:

* $2v^2 + 3v - 1 = 1$ hay $2v^2 + 3v - 2 = 0$ mà nghiệm là -2 và $\frac{1}{2}$

* $2v^2 + 3v - 1 = 4$ hay $2v^2 + 3v - 5 = 0$ mà nghiệm là 1 (vì $a + b + c = 0$) và -2,5.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $v_1 = -2$, $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = 1$, $v_4 = -2,5$.

Bài 2. a) Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm $7 - \sqrt{7}$ và $\sqrt{7} + 7$ thì tổng hai nghiệm là S = 14, tích hai nghiệm là 42. Từ đó ta lập được phương trình bậc hai dạng $X^2 - SX + P = 0$ hay $X^2 - 14X + 42 = 0$.

b) Phương trình bậc hai cần lập có dạng $x^2 + mx + p = 0$ với m, p nguyên.

Vì $\sqrt{5} - 4$ là một nghiệm nên ta có phương trình:

$\left(\sqrt{5} - 4\right)^2 + m\left(\sqrt{5} - 4\right) + p = 0$ hay $21 - 4m + p = (8 - m)\sqrt{5}$.

* Nếu $8 - m \neq 0$ thì $\sqrt{5} = \frac{21 - 4m + p}{8 - m}$ là số vô tỉ, vô lí!

* Nếu $8 - m = 0$ hay $m = 8$ thì $p = 11$. Do đó phương trình có hệ số nguyên phải tìm là $x^2 + 8x + 11 = 0$.

Bài 3. Trước hết ta nhận thấy rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm vì các hệ số a và c khác dấu. Ta có:

a) Tổng hai nghiệm là S = -7 và tích hai nghiệm là P = -5

b) Tổng $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{7}{5}$

c) Tổng $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = 49 + 10 = 59$

d) Bình phương $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 59 + 10 = 69$

e) Tổng $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$

$= (-7)^3 + 3.5(-7) = -343 - 105 = -448.$

Bài 4.1. a) Muốn phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hay $\Delta = (2p - 1)^2 - 8(p - 1) = (2p - 3)^2 > 0$ khi $p \neq 1,5$.

Theo bài ra ta phải giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2p-1}{2} = \dfrac{1-2p}{2} & (1) \\ x_1x_2 = \dfrac{p-1}{2} & (2) \\ 3x_1 - x_2 = \dfrac{5}{2} & (3) \end{cases}$$

Cộng từng vế (1) và (3) được:

$4x_1 = \dfrac{6-2p}{2} = 3 - p$, suy ra $x_1 = \dfrac{3-p}{4}$

Thay vào (1) ta có $x_2 = \dfrac{1-2p}{2} - \dfrac{3-p}{4} = -\dfrac{3p+1}{4}$.

Vậy phương trình (3) có thể viết:

$\dfrac{3-p}{4}.\left(-\dfrac{3p+1}{4}\right) = \dfrac{p-1}{2}$ hay $6p^2 - 32p + 10 = 0$.

Do đó phải giải phương trình $3p^2 - 16p + 5 = 0$ mà nghiệm là $p_1 = \dfrac{10}{3}$ và $p_2 = 2$.

Vậy có hai giá trị của p là $\dfrac{10}{3}$ và 2 để hai nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn hệ thức $3x_1 - x_2 = \dfrac{5}{2}$.

b) Muốn cả hai nghiệm đều dương ta phải giải hệ:

$$\begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \dfrac{1-2p}{2} > 0 \\ \dfrac{p-1}{2} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Với $\frac{1-2p}{2} > 0$ ta có $p < \frac{1}{2}$, với $\frac{p-1}{2} > 0$ thì $p > 1$.

Kết hợp lại ta thấy rằng hệ (*) vô nghiệm, tức là không có giá trị nào của p để cả hai nghiệm đều dương.

c) Do $S = \frac{1-2p}{2}$ và $P = \frac{p-1}{2}$ nên ta có:

$$S + 2P = \frac{1-2p}{2} + \frac{2p-2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào p là:

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -\frac{1}{2}.$$

2. Khi k = 0 thì phương trình có dạng $y^2 - |y| = 0$. Phương trình có thể viết $|y|.(|y| - 1) = 0$. Giải ra được 3 nghiệm là $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$.

Bài 5. a) Ta có:

$\Delta' = (a + 1)^2 - 4(a - 4) = a^2 + 2a + 1 - 4a + 16$

$= a^2 - 2a + 1 + 16 = (a - 1)^2 + 16$ luôn dương với mọi a.

Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

b) Biểu thức đã cho có thể viết:

$$x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_1x_2 = x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = S - 2P$$

mà $S = 2a + 2$, $P = a - 4$ nên $S - 2P = -6$ không phụ thuộc vào a.

c) Ta có :

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right] (*)$$

Khi a = 0 thì phương trình có dạng $x^2 - 2x - 4 = 0$, trong đó $S = 2$, $P = -4$.

Trước hết ta tìm hiệu $x_1 - x_2$ như sau:

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P = 4 + 16 = 20$, suy ra $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$.

Thay vào (*) được:

$$x_1^3 - x_2^3 = 2\sqrt{5}(2^2 + 4) = 16\sqrt{5}.$$

Bài 6. Phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$ luôn có hai nghiệm dương phân biệt vì $a + b + c = 0$. Tổng $x_1 + x_2 = 5$, tích $x_1.x_2 = 4$.

a) Ta có $\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 5 + 2\sqrt{4} = 9$.

Vậy $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$.

b) $M = \dfrac{3\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 5x_1x_2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)}$. Trước hết tính $x_1^2 + x_2^2$, ta có:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 - 8 = 17$.

Giá trị của M là:

$M = \dfrac{3.17 + 5.4}{4.4.5} = \dfrac{71}{80}$.

Bài 7. 1.a) Phương trình đã cho có thể viết:

$2x^2 - (2 - k)x - k(k + 2) = 0$. Ta có:

$\Delta = (2 - k)^2 + 8k(k + 2) = 4 - 4k + k^2 + 8k^2 + 16k$

$= 9k^2 + 12k + 4 = (3k + 2)^2 \geq 0$ với mọi k.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi k.

b) * Nếu $2k - 1 = 0$ tức là $k = \dfrac{1}{2}$ thì $-4ky + 1 = -2y + 1 = 0$, ta có nghiệm $y = \dfrac{1}{2}$.

* Nếu $2k - 1 \neq 0$ tức là $k \neq \dfrac{1}{2}$, thì ta tìm

$\Delta' = (-2k)^2 - (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k^2 + 4k - 1 = 4k - 1 \geq 0$, tức là $k \geq \dfrac{1}{4}$, phương trình sẽ có nghiệm.

Vậy với $k > \dfrac{1}{4}$ và $k \neq \dfrac{1}{2}$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt là: $y_{1,2} = \dfrac{2k \pm \sqrt{4k - 1}}{(2k - 1)^2}$,

Với $k = \frac{1}{4}$ phương trình có một nghiệm kép $y_1 = y_2 = -\frac{b'}{a}$

hay $y = \frac{-2k}{(2k-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = -2.$

Với $k < \frac{1}{4}$ thì phương trình vô nghiệm.

2) Ta có $\Delta = (n^2 + p^2 - m^2) - 4n^2p^2$

$= (n^2 + p^2 - m^2 + 2np)(n^2 + p^2 - m^2 - 2mp)$

$= (n + p + m)(n + p - m)(n + m - p)(n - p - m).$

Vì m, n, p là số đo ba cạnh của một tam giác nên là các số dương và trong tam giác tổng hai cạnh luôn lớn hơn cạnh thứ ba nên ba thừa số đầu là dương còn thừa số thứ tư âm. Như vậy $\Delta < 0$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 8. 1. a) Ta có $\Delta = p^2 - 4p + 4 = (p - 2)^2 \geq 0$ chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi p.

b) $M = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$

Thay $x_1 + x_2 = p$; $x_1x_2 = p - 1$ ta được:

$M = p^2 - 8(p - 1) = p^2 - 8p + 8 = (p - 4)^2 - 8$

c) $M = (p - 4)^2 - 8 \geq -8$, vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8 khi $p = 4$.

2. Hai phương trình bậc hai đã cho đều có $\Delta = p^2 - 4mq$ nên chúng đều cùng vô nghiệm hoặc cùng có nghiệm.

Giả sử nghiệm của phương trình thứ nhất là x_1, x_2 thì tích $x_1x_2 = \frac{q}{m}$ và nghiệm của phương trình thứ hai là x_3, x_4 thì tích $x_3x_4 = \frac{m}{q}$.

Như vậy tổng $\frac{q}{m} + \frac{m}{q} > 2$ (do m, q dương).

§14. CÁC LOẠI PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Phương trình tích

Ví dụ: Giải phương trình $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4,5x + 3,5) = 0$.

Ta có hoặc $(2x^2 - 3x + 1) = 0$ mà nghiệm $x_1 = 1$.

(vì $a + b + c = 0$) và $x_2 = \frac{1}{2}$, hoặc $x^2 + 4,5x + 3,5 = 0$ mà nghiệm $x_3 = -1$ (vì $a - b + c = 0$) và $x_4 = -3,5$.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{1}{y+2} + \frac{4y}{y+2} = 1 + \frac{2}{y-2}$.

Điều kiện $y \neq \pm 2$ để mẫu khác 0.

Lấy MC: $y^2 - 4$. Sau khi quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$y - 2 + 4y = y^2 - 4 + 2(y + 2)$ hay $y^2 - 3y + 2 = 0$ mà nghiệm là $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Nhưng giá trị $y = 2$ không thỏa mãn điều kiện (tức là $2 \notin$ TXĐ)

Vậy phương trình có một nghiệm là $y = 1$.

3. Phương trình vô tỉ

Ví dụ: Giải phương trình $z + \sqrt{z-1} = 13$

Ta để riêng căn thức ở vế trái: $\sqrt{z-1} = 13 - z$. Phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} z - 1 = (13 - z)^2 & (1) \\ 13 - z \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) $z - 1 = 169 - 26z + z^2$ hay $z^2 - 27z + 170 = 0$ mà nghiệm là $z_1 = 10$, $z_2 = 17$ (loại vì không phù hợp với (2)).

Vậy phương trình có một nghiệm là $z = 10$.

4. Phương trình trùng phương

Đó là phương trình có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ mà cách giải là đặt $x^2 = t > 0$ để đưa về dạng bậc hai quen thuộc $at^2 + bt + c = 0$ (*).

Tuỳ theo phương trình $at^2 + bt + c = 0$ có nghiệm hay không mà ta có:

- Nếu phương trình (*) có 2 nghiệm dương thì phương trình trùng phương (PTTP) có 4 nghiệm.
- Nếu (*) có 1 nghiệm dương thì PTTP có 2 nghiệm.
- Nếu (*) có 2 nghiệm âm thì PTTP vô nghiệm
- Nếu (*) vô nghiệm thì PTTP vô nghiệm.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Giải phương trình đưa về dạng phương trình tích:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$

b) $y^4 + 6y^3 + 7y^2 - 6y + 1 = 0$

c) $(z - 1)(z - 2) = (p - 1)(p - 2)$.

Bài 2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

a) $\dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{x^2 + 10x}{x^4 - 1} - \dfrac{4x^2 + 21}{x^3 + x^2 + x + 1}$

b) $\dfrac{y-4}{y^2 + 2y} = \dfrac{1}{y^2 - 2y} - \dfrac{2}{y^2 - 4} = 0$.

Bài 3. Giải phương trình vô tỉ:

a) $\sqrt{25 - x^2} = x - 7$

b) $\sqrt{y - 14} - \sqrt{12 - y} = 0$

c) $\sqrt{z - 1} + \sqrt{z + 3} + 2\sqrt{(z - 1)(z + 3)} = 4 - 2z$.

Bài 4. Giải phương trình:

a) $3x^4 - 18x^2 - 21 = 0$ $\qquad$ $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$

b) $(y - 4)(y - 5)(y - 6)(y - 7) = 1680$

c) $\left(\frac{z-1}{z}\right)^2 = 4 + 3\left(\frac{z-1}{z}\right)$.

Bài 5. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = 2(m + p) + mp - m^2 - p^2.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{(m+1)^2 - m}{(m+1)^2}.$$

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. 1. Tìm cặp số (m, n) thỏa mãn phương trình:

$$\left(72\sqrt{m} - 8\right)^2 + \left(\frac{n}{3} - \sqrt{m}\right)^2 = 0.$$

2. Giải phương trình:

$$\left(\frac{p-2}{p+1}\right)^2 + 4\left(\frac{p+2}{p-1}\right)^2 = 4\left(\frac{p^2-4}{p^2-1}\right).$$

3. Tìm giá trị của t thỏa mãn phương trình:

$t^6 - 7t^3 - 8 = 0$.

Bài 7. 1. Chứng tỏ rằng phương trình

$\frac{1}{1+p} + \frac{2}{1+\sqrt{p}} - \frac{2+\sqrt{p}}{2} = 0$ chỉ có một nghiệm là 1.

2. Giải phương trình:

$$\frac{y^2+y-5}{y} = \frac{9y}{y^2+y-5} + 8.$$

3. Chứng minh rằng nếu phương trình bậc hai:

$z^2 + az + b = 0$ có các hệ số a, b nguyên mà có các nghiệm hữu tỉ thì các nghiệm đó phải nguyên.

Bài 8. 1. Tìm cặp giá trị (p, q) nguyên thỏa mãn phương trình: $p^4 + p^2 + q^2 + p^2q^2 - 4p^2q = 0$.

2. Với giá trị nào của m thì ta có:

$$2\left(m^4+\frac{16}{m^4}\right)-9\left(m^3+\frac{8}{m^3}\right)+20\left(m^2+\frac{4}{m^2}\right)-33\left(m+\frac{2}{m}\right)+46=0.$$

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) Phương trình có thể viết dưới dạng tích như sau:

$x^2(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 5) = 0.$

Giải ra được ba nghiệm là $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{5}$, $x_3 = -\sqrt{5}$.

b) Vế trái có thể phân tích như sau:

$y^4 + 6y^3 + 7y^2 - 6y + 1$

$= y^2(y^2 + 3y - 1) + 3y(y^2 + 3y - 1) - (y^2 + 3y - 1)$

$= (y^2 + 3y - 1)(y^2 + 3y - 1) = (y^2 + 3y - 1)^2$

Phương trình đã cho trở thành $(y^2 + 3y - 1)^2 = 0$.

Giải ra tìm được hai nghiệm kép là $y_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

c) Thực hiện phép nhân ta có:

$z^2 - 3z + 2 = p^2 - 3p + 2$, hay $(z^2 - p^2) - 3(z - p) = 0$

Từ đó ta được phương trình tích:

$(z - p)(z + p - 3) = 0$

Giải ra tìm được $z_1 = p$, $z_2 = 3 - p$.

Bài 2. a) Trước hết phân tích các mẫu:

$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$

$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1).$

MC: $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ với điều kiện $x \neq \pm 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$x + 1 - 4(x - 1)(x^2 + 1) = x^2 + 10x - (4x^2 + 21)(x - 1)$, hay

$x + 1 - 4x^3 - 4x + 4x^2 + 4 = x^2 + 10x - 4x^3 + 4x^2 - 21x + 21.$

Sau khi rút gọn được phương trình bậc hai:

$x^2 - 8x + 16 = 0$

Giải ra tìm được nghiệm kép là $x_1 = x_2 = 4$, thỏa mãn điều kiện.

b) Điều kiện: $y \neq 0$; $y \neq \pm 2$

MC: $y(y + 2)(y - 2)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu và thực hiện phép tính được:

$2y - (y + 2) + (y - 2)(y - 4) = 0$ hay $y^2 - 5y + 6 = 0$.

Giải ra được $y_1 = 2$ (loại) và $y_3 = 3$.

Bài 3. a) Điều kiện: $25 - x^2 \geq 0$ và $x \geq 7$

Bình phương hai vế được:

$25 - x^2 = x^2 - 14x + 49$ hay $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Cả hai giá trị này đều bị loại vì không thỏa mãn điều kiện $x \geq 7$.

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$\sqrt{y-14} = \sqrt{12-y}$.

Điều kiện $y - 14 \geq 0$ và $12 - y \geq 0$. Điều kiện thứ nhất cho $y \geq 14$, điều kiện thứ hai cho $y \leq 12$. Như vậy không có giá trị nào của y thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Điều kiện $z \geq 1$. Phương trình có thể giải nhanh như sau:

Ta nhận thấy rằng $\sqrt{z+3} \geq \sqrt{1+3} = 2$, vế trái ≥ 2;

$4 - 2z \leq 4 - 2.1 = 2$, vế phải ≤ 2.

Suy ra vế trái = vế phải = 2, hay $4 - 2z = 2$, $z = 1$.

Vậy phương trình có một nghiệm là $z = 1$.

Bài 4. a) * Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta có phương trình bậc hai:

$$3t^2 - 18t - 21 = 0.$$

Giải ra tìm được $t_1 = -1$ (vì $a - b + c = 0$) (loại) và $t_2 = 7$.

Vậy phương trình trùng phương đã cho có hai nghiệm là $y_{1,2} = \pm\sqrt{7}$.

* Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta có phương trình bậc hai:

$$2t^2 + 9t + 4 = 0.$$

Giải ra tìm được $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = -4$. Loại cả hai nghiệm âm này. Ta thấy rằng phương trình trùng phương đã cho vô nghiệm.

b) Ta viết phương trình đã cho như sau:

$(y - 4)(y - 7)(y - 5)(y - 6) = 1680$, hay

$(y^2 - 11y + 28)(y^2 - 11y + 30) = 1680$.

Đặt $y^2 - 11y + 30 = t$ ta được phương trình: $(t - 2)t = 1680$.

Giải ra tìm được: $t_1 = 42$, $t_2 = -40$.

Với $t_1 = 42$ ta giải phương trình $y^2 - 11y - 12 = 0$ mà nghiệm là $y_1 = -1$, $y_2 = 12$.

Với $t_2 = -40$ ta giải phương trình $y^2 - 11y + 70 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $y_1 = -1$, $y_2 = 12$.

c) Đặt $\frac{z-1}{z} = t$ (*) ta được phương trình $t^2 - 3t - 4 = 0$, mà nghiệm là $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.

Thay các giá trị này lần lượt vào (*) ta có:

$\frac{z-1}{z} = -1$ mà nghiệm là $z_1 = \frac{1}{2}$ và $\frac{z-1}{z} = 4$ mà nghiệm là $z_2 = -\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1 = \frac{1}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{3}$.

Bài 5. a) Biểu thức đã cho có thể viết:

$2A = 8 - (m - p)^2 - (m - 2)^2 - (p - 2)^2 \le 8$.

Do đó $A \le 4$. Suy ra giá trị lớn nhất của A là 4, đạt được khi $m = p = 2$.

b) Biểu thức đã cho có thể viết:

$$B = 1 - \frac{m}{(m+1)^2} = 1 - \frac{(m+1)-1}{(m+1)^2} = 1 - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2}.$$

Thay $1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ ta có:

$B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{4}$ đạt được khi m = 1.

Bài 6. 1. Vế trái là tổng của hai biểu thức không âm, do đó mỗi biểu thức phải bằng 0, tức là phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 72\sqrt{m} - 8 = 0 \\ \frac{n}{3} - \sqrt{m} = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sqrt{m} = \frac{1}{9} \\ \sqrt{m} = \frac{n}{3} \end{cases}$$

Giải ra tìm được $m = \frac{1}{81}$, $n = \frac{1}{3}$.

2. Đặt $\frac{p-2}{p+1} = x$, $\frac{p+2}{p-1} = y$ với điều kiện $p \neq \pm 1$. Phương trình đã cho trở thành:

$x^2 + 4y^2 = 4xy$ hay $(x - 2y)^2 = 0$. Từ đó $x = 2y$.

Ta có phương trình:

$\frac{p-2}{p+1} = \frac{2p+4}{p-1}$ hay $(p - 2)(p - 1) = (p + 1)(2p + 4)$.

Thực hiện phép tính được phương trình $p^2 + 9p - 2 = 0$. Giải ra tìm được: $p_1 = \frac{-9+\sqrt{73}}{2}$, $p_2 = \frac{-9-\sqrt{73}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

3. Đặt $t^3 = x$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 7x + 8 = 0$ có nghiệm là $x_1 = -1$ (vì $a - b + c = 0$) và $x_2 = 8$.

Suy ra $t^3 = -1$ và $t^3 = 8$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $t_1 = -1$ và $t_2 = 2$.

Bài 7. 1. Đặt $\sqrt{p} = t > 0$ với $p > 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{1+t^2}+\frac{2}{1+t}-\frac{2+t}{2t^2}=0.$$

MC: $(1 + t^2)(1 + t)2t^2$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2t^2(1 + t) + 4t^2(1 + t^2) - (2 + t)(1 + t^2)(1 + t) = 0$$

hay $(t - 1)(3t^3 + 2t^2 + 5t + 2) = 0$.

Vì $t > 0$ nên thừa số thứ hai khác 0, do đó chỉ có $t - 1 = 0$ hay $t = 1$. Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm là $\sqrt{p} = 1$ hay $p = 1$.

2. Đặt $\frac{y^2+y-5}{y}=t$, với điều kiện $y \neq 0$ và $y^2 + y - 5 \neq 0$, phương trình đã cho trở thành:

$t=\frac{9}{t}+8=0$ hay $t^2 - 8t - 9 = 0$ có nghiệm là $t_1 = -1$ (vì $a - b + c = 0$) và $t_2 = 9$.

Với $t_1 = -1$ ta giải phương trình $y^2 + 2y - 5 = 0$ mà nghiệm là $y_1=-1+\sqrt{6}$; $y_2=-1-\sqrt{6}$.

Với $t_2 = 9$ ta giải phương trình $y^2 - 8y - 5 = 0$ mà nghiệm là $y_3=4+\sqrt{21}$; $y_4=4-\sqrt{21}$.

Cả bốn giá trị này của y đều thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $y_{1,2}=-1\pm\sqrt{6}$; $y_{3,4}=4\pm\sqrt{21}$.

3. Giải phương trình bậc hai $z^2 + az + b = 0$, ta được nghiệm là $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Muốn cho nghiệm này là số hữu tỉ thì biệt số $\Delta = a^2 - 4b = m^2$ (m nguyên). Ta thấy rằng nếu a lẻ thì m lẻ và nếu a chẵn thì m cũng chẵn.

Như vậy, tử của $z_{1,2}$ luôn là số chẵn nên hai nghiệm z_1 và z_2 phải là số nguyên.

Bài 8. 1. Phương trình đã cho có thể viết:

$p^4 + q^2 - 2p^2q + p^2q^2 + p^2 - 2p^2q = 0$, hay

$(p^4 - 2p^2q + q^2) + p^2(q^2 - 2q + 1) = 0$. Từ đó

$(p^2 - q)^2 + p^2(q - 1)^2 = 0$. Vậy ta phải giải hệ:

$$\begin{cases} p^2 - q = 0 \\ p^2(q-1)^2 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} p^2 = q \\ p = 0 \text{ hoặc } q = 1 \end{cases}$$

Vậy ta được các cặp giá trị nguyên sau đây:

(p; q) = (0; 0) hoặc (±1; 1).

2. Đặt $m + \frac{2}{m} = t$, ta sẽ tính được:

$$m^2 + \frac{4}{m^2} = t^2 - 4;\ m^3 + \frac{8}{m^3} = t^3 - 6t;\ m^4 + \frac{16}{m^4} = t^4 - 8t^2 + 8$$

Phương trình đã cho có thể biến đổi thành:

$2(t^4 - 8t^2 + 8) - 9(t^3 - 6t) + 20(t^2 - 4) - 33t + 46 = 0$

hay $2t^4 - 9t^3 + 4t^2 + 21t - 18 = 0$ mà hai nghiệm là $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Chia vế trái cho (t - 1)(t - 2) ta được phương trình bậc hai $2t^2 - 3t - 9 = 0$ mà nghiệm là $t_3 = 3$, $t_4 = -\frac{3}{2}$.

Như vậy ta phải giải tiếp bốn phương trình bậc hai khi lần lượt thay t bằng các giá trị 1; 2; 3; $-\frac{3}{2}$. Với các giá trị 1; 2 và $-\frac{3}{2}$ thì các phương trình bậc hai lập được $m^2 - m + 2 = 0$; $m^2 - 2m + 2 = 0$ và $2m^2 + 3m + 4 = 0$ đều vô nghiệm.

Chỉ có với giá trị t = 3 thì phương trình $m^2 - 3m + 2 = 0$ có nghiệm là 1 và 2.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

§15. TOÁN BẬC HAI (GIẢI BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI)

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Sau khi chọn ẩn và lập được phương trình bậc hai, vấn đề giải phương trình bậc hai tìm được là dựa vào việc lập biệt số Δ và áp dụng công thức nghiệm tổng quát (hoặc công thức nghiệm thu gọn nếu $b = 2b'$). Thông thường tìm được hai nghiệm trái dấu và phải loại nghiệm âm.

Khi giải loại toán bậc hai này cần phải thử lại nghiệm tìm được (thử vào bài ra, chứ không phải thử vào phương trình bậc hai).

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. a) Một cửa hàng trong ngày bán được một số xe đạp và xe máy. Biết rằng số xe đạp bán được nhiều hơn số xe máy là 5 chiếc và tổng bình phương của hai số này là 97. Hỏi cửa hàng bán được bao nhiêu xe mỗi loại?

b) Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp bằng 840. Tìm bốn số đó.

Bài 2. a) Hai vòi cùng chảy vào bể thì trong 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất chảy nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể?

b) Hai tổ công nhân A và B cùng làm chung trong 4 ngày thì làm được $\frac{2}{3}$ đoạn đường theo kế hoạch. Nếu làm

riêng thì tổ A sẽ xong trước tổ B là 5 ngày? Hỏi theo kế hoạch thì mỗi tổ làm riêng phải làm trong mấy ngày?

Bài 3. a) Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 7cm. Tính diện tích của tam giác biết cạnh huyền dài 17cm.

b) Đường cao của một tam giác vuông dài 9,6cm chia cạnh huyền thành hai đoạn hơn kém nhau 5,6cm. Tính cạnh huyền.

Bài 4. a) Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B trong một thời gian đã định. Khi còn cách B là 30 km nhận thấy nếu không tăng vận tốc thì sẽ đến B chậm mất nửa giờ, do đó người ấy đã tăng vận tốc thêm 5km/h thì tới B sớm hơn dự định nửa giờ. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.

b) Một canô chạy trên một khúc sông dài 90km rồi chạy ngược về 36km. Thời gian xuôi dòng nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc xuôi dòng lớn hơn vận tốc ngược dòng là 6km/h. Tính vận tốc của canô khi xuôi dòng.

Bài 5. a) Một xí nghiệp đánh cá theo kế hoạch phải đánh được 800 tấn cá. Nhờ tăng năng suất 20 tấn một tháng nên đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn 2 tháng. Tính năng suất mỗi tháng theo kế hoạch của xí nghiệp

b) Một đơn vị bộ đội gồm 360 người xếp hàng dọc thì số người ở mỗi hàng bằng nhau. Nếu thêm 40 người nữa thì phải xếp lại thêm một hàng dọc và mỗi hàng dọc phải thêm một người thì số người ở mỗi hàng dọc mới bằng nhau. Hỏi lúc đầu đơn vị đã xếp mấy hàng dọc và mỗi hàng dọc có mấy người?

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. a) Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi toán của một quận. số học sinh đạt giải của hai trường A và B không bằng nhau. Nếu trường A có thêm 1 giải và trường B bớt đi một

giải thì số học sinh đạt giải của hai trường sẽ bằng nhau. Tìm số học sinh đạt giải của mỗi trường, biết rằng tích hai số bằng 120.

b) Một phòng họp chứa được 300 chỗ. Nếu thêm 2 chỗ vào mỗi dãy ghế và bớt đi 3 dãy ghế thì sẽ bớt đi 11 chỗ ngồi. Hỏi phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

Bài 7. a) Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 18m và diện tích $20m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

b) Dân số hiện nay của một phường là 41 618 người. Cách đây hai năm dân số của phường là 40 000 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số tăng bao nhiêu phần trăm?

Bài 8. a) Khi được hỏi về tuổi của ông bạn Nguyên thì bạn đã trả lời "Tuổi ông tớ là một số có hai chữ số và gấp 8 lần tổng hai chữ số đó, nhưng nếu thêm 13 vào tích hai chữ số thì sẽ được một số mới viết theo thứ tự ngược lại". Hỏi ông của bạn Nguyên bao nhiêu tuổi?

b) Khi trộn 8g chất lỏng M với 6g chất lỏng N có khối lượng riêng nhỏ hơn $200kg/m^3$ thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng $700kg/m^3$. Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) Gọi số xe đạp bán được là x (x nguyên dương), số xe máy bán được sẽ là x - 5.

Theo bài ra ta có phương trình:

$x^2 + (x - 5)^2 = 97$ hay $x^2 - 5x - 36 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 9$ thỏa mãn điều kiện, $x_2 = -4$ (loại)

Vậy số xe đạp bán được là 9, số xe máy bán được là 4.

b) Gọi bốn số liên tiếp là x, x + 1, x + 2, x+ 3 (x nguyên dương)

Theo bài ra ta có phương trình:

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 840$ hay $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 840$

Đặt $x^2 + 3x = t > 0$, phương trình trở thành $t(t + 2) = 840$ hay $t^2 + 2t - 840 = 0$.

Giải ra tìm được $t_1 = 28$, $t_2 = -30$ (loại).

Từ đó $x^2 + 3x = 28$ hay $x^2 + 3x - 28 = 0$. Vậy $x_1 = 4$; $x_2 = -7$ (loại).

Bốn số phải tìm là 4; 5; 6; 7.

Bài 2. a) Gọi thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là x giờ ($x > 2$), vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể sẽ là $(x - 2)$ giờ.

Đổi 2h55ph = $\frac{35}{12}$h. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{12}{35}.$$

Quy đồng mẫu, khử mẫu và làm phép tính được phương trình bậc hai $6x^2 - 47x + 35 = 0$ mà nghiệm là $x_1 = 7$, $x_2 = \frac{5}{6}$ (loại).

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể trong 5 giờ, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể trong 7 giờ.

b) Gọi thời gian tổ A làm riêng xong kế hoạch là x ngày ($x > 0$), thời gian tổ B làm riêng là $x + 5$. Trong 4 ngày cả hai tổ làm chung được $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right)$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right) = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 10$; $x_2 = -3$ (loại).

Vậy tổ A làm riêng thì phải 10 ngày mới xong, tổ B phải 15 ngày.

Bài 3. a) Gọi hai cạnh góc vuông là x cm và $(x + 7)$cm ($x > 0$). Theo bài ra ta có phương trình:

$x^2 + (x + 7)^2 = 17^2$ (áp dụng định lí Pitago)

Giải ra tìm được nghiệm $x = 8$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy hai cạnh góc vuông dài 8 cm và 15 cm, diện tích tam giác vuông là $\frac{1}{2}.8.15 = 60(cm^2)$.

b) Gọi hai đoạn mà đường cao chia cạnh huyền là x và x + 5,6(cm) với x > 0.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông: $h^2 = b'c'$, theo bài ra ta có phương trình:

$9,6x^2 = x(x + 5,6)$ hay $x^2 + 5,6x - 92,16 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 7,2$, $x_2 = -12,8$ (loại)

Vậy cạnh huyền dài 7,2 + 12,8 = 20(cm).

Bài 4. a) Gọi vận tốc lúc đầu của người đi xe đạp là x km/h (x > 0). Thời gian dự định đi đoạn 30km lúc đầu là $\left(\frac{30}{x} - \frac{1}{2}\right)$ giờ, thời gian sau khi tăng vận tốc đi đoạn này là $\left(\frac{30}{x+5} + \frac{1}{2}\right)$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{1}{2} = \frac{30}{x+5} + \frac{1}{2}.$$

Thực hiện phép tính được phương trình bậc hai:

$x^2 + 5x - 150 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 10$, $x_2 = -15$ (loại)

Vậy vận tốc xe đạp ban đầu là 10km/h.

b) Gọi vận tốc canô khi xuôi dòng là xkm/h (x > 0), vận tốc khi ngược dòng sẽ là (x - 6)km/h.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{90}{x} - \frac{36}{x-6} = 2.$$

Thực hiện phép tính được phương trình bậc hai:

$x^2 - 33x + 270 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 15$; $x_2 = 18$ cả hai đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy vận tốc canô khi xuôi dòng là 15km/h hoặc 18km/h.

Bài 5. a) Gọi năng suất mỗi tháng theo kế hoạch là x tấn cá ($x > 0$)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{800}{x} - \frac{800}{x+20} = 2.$$

Thực hiện phép tính được phương trình bậc hai:

$x^2 + 20x - 8000 = 2.$

Giải ra tìm được $x_1 = 80$, $x_2 = -100$ (loại)

Vậy theo kế hoạch năng suất mỗi tháng là 80 tấn cá.

b) Gọi số hàng dọc mà đơn vị xếp được lúc đầu là x ($x \in N^*$), số người ở mỗi hàng sẽ là $\frac{360}{x}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{400}{x+1} - \frac{360}{x} = 1 \text{ hay } x^2 - 39x + 360 = 0.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 24$, $x_2 = 15$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy số hàng dọc lúc đầu là 24 hàng, mỗi hàng có 15 người hoặc lúc đầu là 15 hàng, mỗi hàng có 24 người.

Bài 6. a) Gọi số học sinh đạt giải của trường A là x ($x \in N^*$)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$x + 1 = \frac{120}{x} - 1 \text{ hay } x^2 + 2x - 120 = 0.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 10$, $x_2 = -11$(loại)

Vậy số học sinh đạt giải của trường A là 10 người, của trường B là 12 người.

b) Gọi số dãy ghế của phòng họp là x ($x \in N^*$). Số ghế mỗi dãy lúc đầu là $\frac{300}{x}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{300}{x} + 2 = \frac{300-11}{x-3}.$$

Thực hiện phép tính được phương trình bậc hai:

$2x^2 + 5x - 900 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 20$; $x_2 = -\frac{90}{4}$ (loại).

Vậy phòng họp có 20 dãy ghế.

Bài 7. a) Gọi x và y theo thứ tự là chiều dài và chiều rộng đo bằng m của mảnh đất ($x > y > 0$)

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20. \end{cases}$

Theo định lí đảo Viét x và y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$ hay $X^2 - 9X + 20 = 0$.

Giải ra tìm được $X_1 = 5$, $X_2 = 4$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy mảnh đất có chiều dài 5m, chiều rộng 4m.

b) Gọi số phần trăm tăng dân số mỗi năm là x% ($x > 0$).

Dân số cách đây hai năm là 40 000 người thì dân số cách đây một năm là $40\,000 + \frac{x}{100}.40\,000 = 40\,000 + 400x$.

Hiện nay là năm thứ hai nên dân số tăng thêm x% tức là dân số hiện nay là $40\,000 + 400x + \frac{x}{100}(40\,000 + 400x)$ hay $4x^2 + 800x + 40\,000$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$4x^2 + 800x + 40000 = 41\,618$ hay $x^2 + 200x - 404 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 2$; $x_2 = -202$ (loại)

Vậy dân số hàng năm tăng 2%.

Bài 8. a) Gọi chữ số hàng chục và hàng đơn vị của tuổi ông của bạn Nguyên theo thứ tự là x và y ($0 < x \le 9$; $0 \le y \le 9$) x, y nguyên dương, $x \ne y$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 10x + y = 8(x + y) & (1) \\ 10y + x = xy + 13 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta rút $x = \frac{7y}{2}$ rồi thay vào (2) sẽ được phương trình bậc hai: $7y^2 - 27y + 26 = 0$.

Giải ra tìm được $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{13}{7}$ (loại). Từ đó $x = 7$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy ông của bạn Nguyên 72 tuổi.

b) Gọi khối lượng riêng của chất lỏng M là x kg/m^3 ($x > 200$), khối lượng riêng của chất lỏng N sẽ là $(x - 200)kg/m^3$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 200} = \frac{14}{700}.$$

Thực hiện phép tính được phương trình bậc hai:

$x^2 - 900x + 80\,000 = 0$.

Giải ra được $x_1 = 800$; $x_2 = 100$ (loại)

Vậy khối lượng riêng của M là $800kg/m^3$ và của N là $600kg/m^3$.

§1. CÁC LOẠI TỨ GIÁC VÀ CÁCH NHẬN BIẾT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Tứ giác

- Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

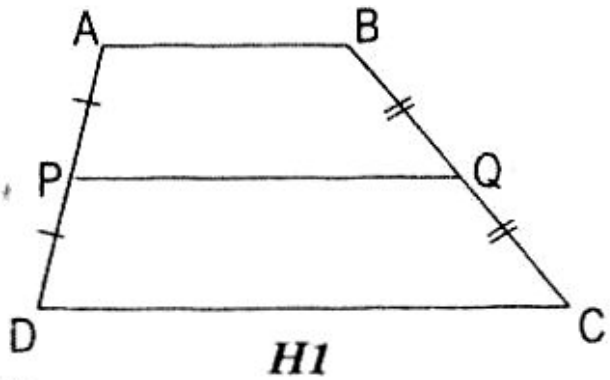
- Tổng số đo bốn góc trong của tứ giác ABCD bằng 360°:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.

2. Hình thang

1) Hình thang là tứ giác có hai cạnh song song.

2) Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa tổng hai đáy (hình 1).



H1

$$\begin{cases} PA = PD \\ QB = QC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PQ \,//\, AB \\ PQ = \dfrac{AB + DC}{2}. \end{cases}$$

3) Hình thang cân là hình thang có hai góc ở đáy bằng nhau.

Tính chất: Hình thang cân có hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.

3. Hình bình hành

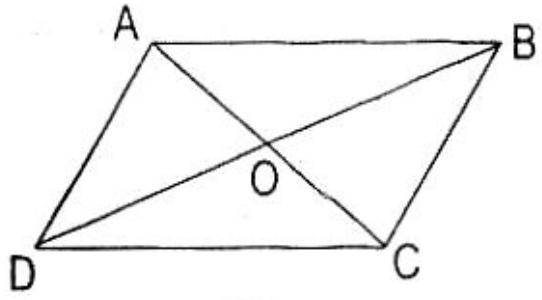
1) Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh song song

2) Tính chất (hình 2)

$$\text{ABCD là hình bình hành} \Rightarrow \begin{cases} \text{a) } AB = DC;\ AD = BC \\ \text{b) } \hat{A} = \hat{C};\ \hat{B} = \hat{D} \\ \text{c) } OA = OC;\ OB = OD. \end{cases}$$

3. Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu có một trong các điều kiện sau:



H.2

a) có hai cặp cạnh đối song song;

b) có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau;

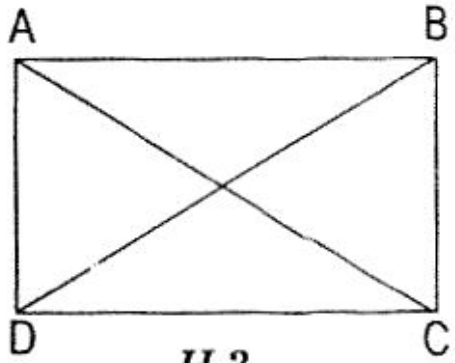
c) có hai cặp cạnh đối bằng nhau;

d) có hai đường chéo cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường;

e) có hai cặp góc đối bằng nhau.

4. Hình chữ nhật

1) Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông.



H.3

2) *Tính chất*: Trong hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau (hình 3) AC = BD.

3) Dấu hiệu nhận biết

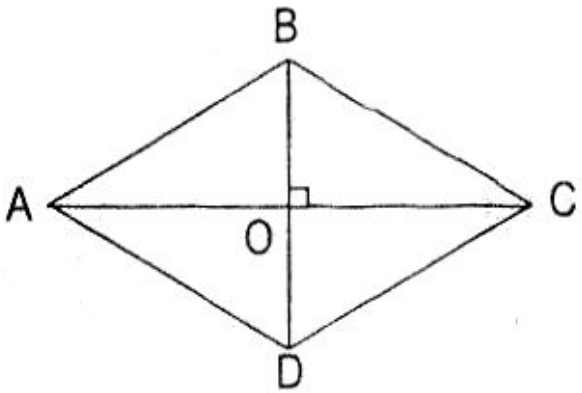
Tứ giác ABCD là hình chữ nhật nếu có một trong các điều kiện sau:

a) có ba góc vuông;

b) là hình thang cân có một góc vuông;

c) là hình bình hành có một góc vuông;

d) là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.



H.4

5. Hình thoi

1) Hình thoi là hình bình

hành có hai cạnh kề bằng nhau.

2) Tính chất (hình 4).

$$\text{ABCD là hình thoi} \Rightarrow \begin{cases} \text{a) } AC \perp BD \\ \text{b) } \hat{A}_1 = \hat{A}_2;\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2. \end{cases}$$

3) Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác ABCD là hình thoi nếu có một trong các điều kiện sau:

a) có bốn cạnh bằng nhau;

b) là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau;

c) là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau;

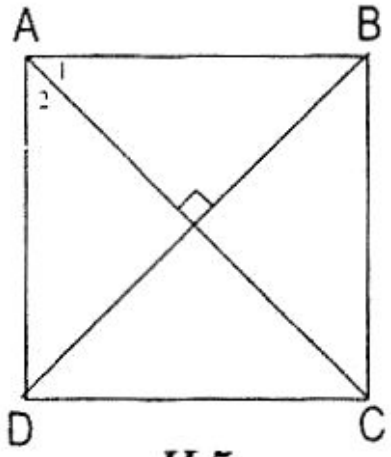
d) là hình bình hành có một đường chéo là phân giác.

6. Hình vuông

1) Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.

Hình vuông là hình thoi có một góc vuông.

2) Tính chất (hình 5): Trong hình vuông hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.



H.5

$$\text{ABCD là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} \text{a) } AC = BD \\ \text{b) } AC \perp BD. \end{cases}$$

3) Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác ABCD là hình vuông nếu có một trong các điều kiện sau:

a) là hình chữ nhật có hoặc AB = BC, hoặc AC ⊥ BD, hoặc $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$;

b) là hình thoi có $\widehat{A} = 90^\circ$, hoặc có AC = BD.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại P và tạo với hai cạnh BC, AD hai cặp góc bằng nhau là CBD, CAD và BCA, BDA.

a) Từ P dựng PH vuông góc với BC, kéo dài HP cắt AD tại E, so sánh EA và ED.

b) Nối trung điểm F của BC với P, kéo dài FP cắt AD tại K, chứng minh PK ⊥ AD.

c) Dựng Ex, Fy lần lượt vuông góc với AD, BC. Gọi giao điểm của Ex, Fy là N. Chứng minh FNEP là hình bình hành.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 60^\circ$. Dựng phân giác BE. Gọi Q, I, K lần lượt là trung điểm của BE, BC, EC.

a) Tứ giác AQIK là hình gì? Tại sao?

b) Tính các góc của tứ giác AQIK.

Bài 3. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và hai đường cao AA', BB' cắt nhau tại H. Qua B, C dựng Bx, Cy lần lượt vuông góc với AB, AC; Bx và Cy cắt nhau tại K.

a) Tứ giác BHCK là hình gì? Chứng minh.

b) Từ trung điểm I của BC dựng Iz vuông góc với BC, cắt AK tại F, chứng minh AH = 2IF.

c) Khi tam giác ABC có: AB = AC; $\widehat{A}$ = 1v thì BHCK là hình gì? Tại sao?

Bài 4. Từ đỉnh A của tam giác ABC hạ các đường vuông góc AM, AN với phân giác ngoài và trong của góc B; hạ các đường vuông góc AP, AQ với phân giác ngoai và trong của góc C.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) So sánh độ dài đoạn MP với chu vi tam giác ABC.

Bài 5. Hai đường chéo của hình bình hành ABCD cắt nhau tại O. Gọi E, F, I, K lần lượt là giao điểm các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, OCD, CDA.

a) Chứng minh tứ giác EFIK là hình thoi.

b) Muốn cho EFIK là hình vuông thì hình bình hành ABCD phải có thêm điều kiện gì?

c) Khi ABCD đã cho là một hình vuông thì EFIK là hình gì? Tại sao?

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Cho hình thang cân ABCD có đáy AB < CD. Gọi E, H, I, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, DC, BD.

a) Chứng minh EI là tia phân giác của $\widehat{KEH}$.

b) Tính số đo các góc của EHIK khi biết hình thang cân ABCD có $\widehat{C} = 50^\circ$.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD có AB > AD và $\widehat{A} > \widehat{B}$. Phân giác góc A cắt phân giác các góc B và góc D tại M, N.

a) Chứng minh BM// DN, AM ⊥ BN, AN ⊥ DN.

b) Phân giác góc C cắt DN, BM tại E, F. Tứ giác MNEF là hình gì? Tại sao?

c) Chứng minh NF//AB, ME//AD.

Bài 8. Cho hình vuông ABCD có AB = a. Trên BC lấy điểm E, qua A dựng Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F.

a) Chứng minh $\widehat{AFE} = 45^\circ$.

b) Trung tuyến AM của tam giác AFE cắt CD tại K. Qua E dựng Ey song song với CD, Ey cắt AM tại G. Tứ giác GFKE là hình gì? Tại sao?

c) Chứng minh rằng chu vi tam giác KEC có độ dài không đổi khi E chạy trên BC.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

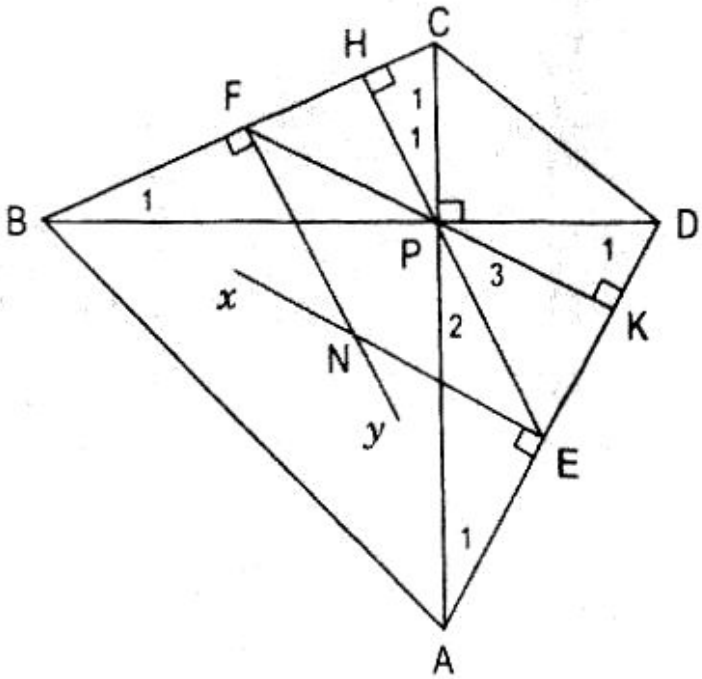
Bài 1. a) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{P_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), mà $\widehat{B_1} = \widehat{A_3}$ (gt) và $\widehat{P_2} = \widehat{P_1}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{P_2} = \widehat{A_1}$ (hình

6) do đó ΔEPA cân tại E suy ra EP = EA (1).

Trong tam giác vuông APD ta có $\widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 1v$ và $\widehat{P_2} + \widehat{P_3} = 1v$, nhưng $\widehat{P_2} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{P_3} = \widehat{D_1}$, do đó ΔEPD cân tại E, suy ra EP = ED (2).

Từ (1) và (2) suy ra EA = ED.

b) Vì F là trung điểm của BC nên PF là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC trong tam giác vuông PBC, do đó có PF = FB hay ΔPFB cân suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{BPF}$, $\widehat{BPF} = \widehat{KPD}$ (đối đỉnh), vậy $\widehat{B_1} = \widehat{KPD}$ (3).



H.6

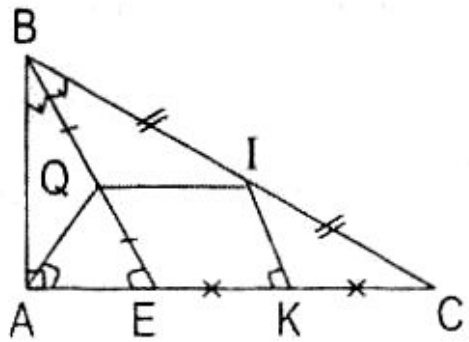
Biết $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 1v$ và $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (gt) nên $\widehat{B_1} = \widehat{D_1} = 1v$ (4)

Thay (3) vào (4) có $\widehat{KPD} + \widehat{D_1} = 1v$, suy ra trong ΔPKD có $\widehat{PKD} = 1v$ hay PK ⊥ AD.

c) Ta có Ex ⊥ AD (gt) và FK ⊥ AD (chứng minh trên) suy ra NE//FP. Tương tự có Fy ⊥ BC (gt) và EH ⊥ BC (gt) suy ra FN//PE.

Tứ giác FNEP có NE//FP và FN//PE nên là hình bình hành (theo định nghĩa).

Bài 2. a) Do Q và I là trung điểm của BE và BC (hình 7) nên QI là đường trung bình của ΔBEC, suy ra QI//EC hay QI//AK, Vậy AQIK là hình thang.



H.7

Trong ΔBAE vuông tại A ta có AQ là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên QA = QE hay ΔQAE cân suy ra $\widehat{QAK} = \widehat{QEA}$ (1)

Vì I và K là trung điểm của BC và EC nên IK là đường trung bình của ΔCBE, suy ra IK//BE, do đó $\widehat{IKA} = \widehat{QEA}$ (góc đồng vị) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QAK} = \widehat{IKA}$.

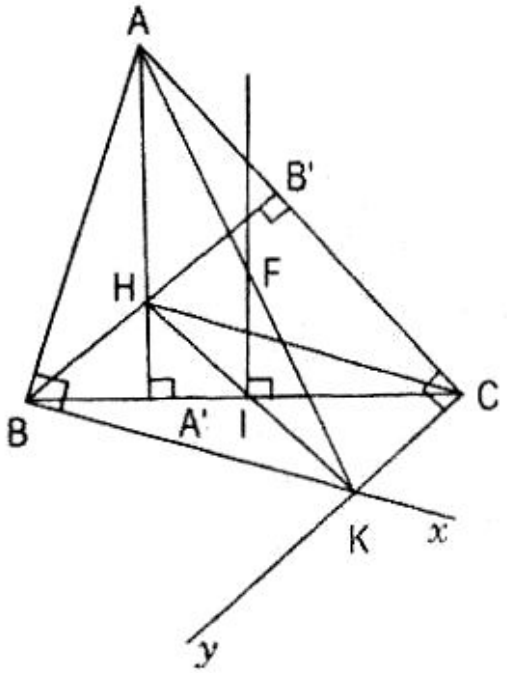
Hình thang AQIK có $\widehat{QAK} = \widehat{IKA}$ nên là hình thang cân.

b) Theo giả thiết $\widehat{ABC} = 60^o$ và BE là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABE} = 30^o$. Trong tam giác vuông ABE có $\widehat{ABE} = 30^o$, suy ra $\widehat{QEA} = 60^o$ (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{QAK} = \widehat{IKA} = 60^o$.

Do AQIK là hình thang nên $\widehat{QAK} + \widehat{AQI} = 180^o$ (hai góc kề cạnh bên bù nhau), do đó $\widehat{QIK} = \widehat{AQI} =$
$= 180^o - \widehat{QAK} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Bài 3. a) Vì hai đường cao AA' và BB' cắt nhau tại H (hình 8) nên CH phải là đường cao thứ ba của ΔABC, tức là $CH \perp AB$, $Bx \perp AB$ (gt) suy ra CH//KB (1); $BB' \perp AC$ (gt), $KC \perp AC$ (gt) suy ra BH//KC (2).

Từ các hệ thức (1) và (2) suy ra BHCK là hình bình hành (theo định nghĩa).



H.8

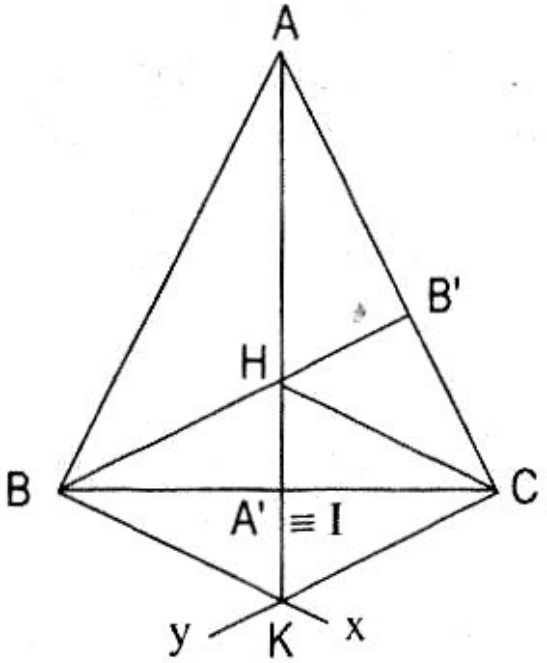
b) Do BHCK là hình bình hành có I là trung điểm của đường chéo BC thì đường chéo thứ hai KH phải đi qua I (vì trong hình bình hành hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Ta có $AA' \perp BC$, $FI \perp BC$ (theo gt) suy ra AH//FI. Trong ΔAHK ta có IH = IK (vì BHCK là hình bình hành) và IF//AH nên IF là đường trung bình, suy ra $IF = \frac{AH}{2}$ hay

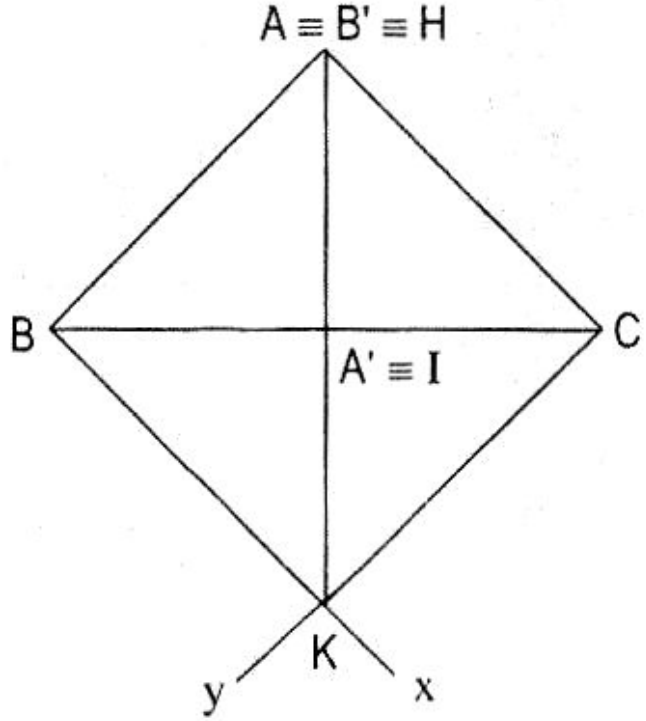
AH = 2IF.

c) Trước hết hãy vẽ hình.

Ta thấy ở hình 9 khi Δ ABC có AB = AC, vẫn theo chứng minh trên thì BHCK vẫn là hình bình hành. Nhưng đường cao AA' sẽ là phân giác nên dễ dàng chứng minh



H.9

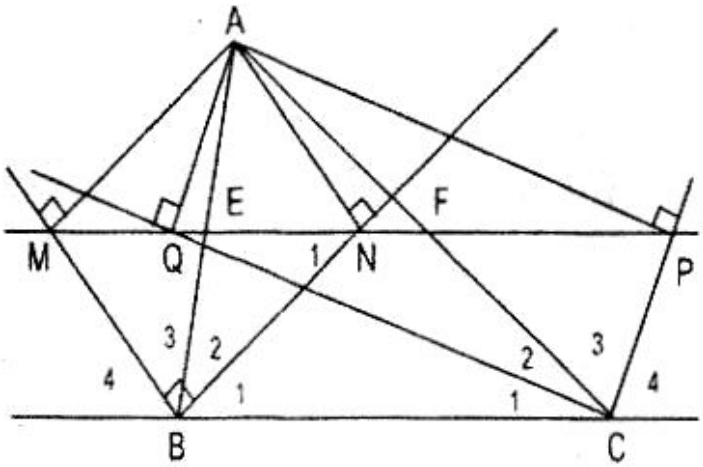


H.10

được HB = HC (vì ΔABH = ΔACH), do đó BHCK sẽ trở thành hình thoi.

Còn trên hình 10 khi ΔABC có $\widehat{A}$ = 1v và AB = AC thì BHCK có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Hình chữ nhật này có AB = AC nên là hình vuông.

Bài 4. a) Biết rằng hai phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau (hình 11), do đó theo đề bài ta có MB ⊥ BN hay



H.11

$\widehat{MBN}$ = 1v, AM ⊥ BM, AN ⊥ BN (theo gt) suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ = 1v. Như vậy tứ giác AMBN có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự ta có APCQ là hình chữ nhật.

Biết rằng, trong một hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, từ đó suy ra đường chéo MN phải đi qua trung điểm E của AB; mặt khác do EB = EN nên ΔEBN cân, suy ra $\widehat{B}_2 = \widehat{N}_1$, mà $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1$ (theo gt) do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{N}_1$ tức là MN//BC (theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song). Như vậy MN vừa đi qua trung điểm E của AB lại vừa song song với BC nên M, N phải nằm trên đường trung bình EF của ΔABC.

Lập luận tương tự ta sẽ có P, Q cũng nằm trên đường trung bình EF của ΔABC. Như vậy là bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên đường trung bình EF của ΔABC nên chúng thẳng hàng.

b) Theo tính chất về đường chéo của hình chữ nhật thì trong hình chữ nhật ABMN ta có $ME = EA = \frac{AB}{2}$ (1); trong hình chữ nhật APCQ ta có $FP = FA = \frac{AC}{2}$ (2). Mặt khác, theo định lí đường trung bình trong tam giác ta có: $EF = \frac{BC}{2}$ (3).

Cộng (1), (2) với (3) vế với vế ta được:

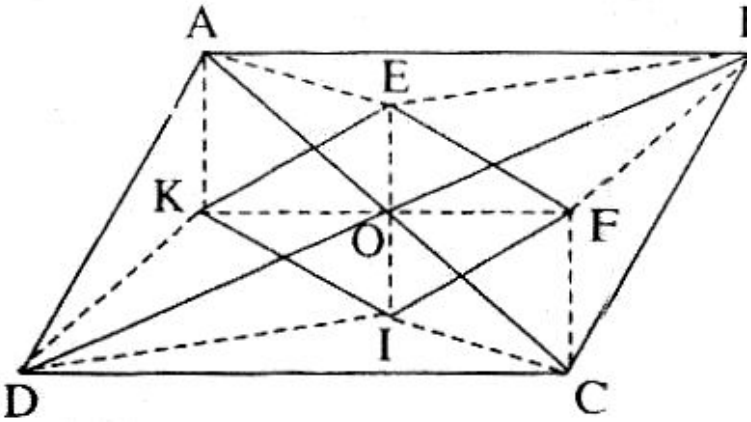
$$ME + EF + FP = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} \text{ hay}$$

$$MP = \frac{1}{2}(AB + BC + AC).$$

Vậy độ dài đoạn thẳng MP bằng nửa chu vi ΔABC đã cho.

Bài 5. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O (hình 12) tạo ra hai cặp góc đối đỉnh. Ta có OE là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ và OI là tia phân giác của $\widehat{DOC}$, biết $\widehat{AOB}$, $\widehat{DOC}$ là

góc đối đỉnh nên E, O, I thẳng hàng. Tương tự có K, O, F thẳng hàng.



H.12

Vì AB//DC nên $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (góc so le trong) và vì AE, CI là các tia phân giác của $\widehat{BAC}, \widehat{DCA}$, suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{DCI}$. Tương tự có $\widehat{ABE} = \widehat{CDI}$. Xét hai tam giác AEB và CID ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{DCI}$, AB = CD (cạnh đối hình bình hành), $\widehat{ABE} = \widehat{CDI}$. Vậy ΔAEB = ΔCDI (g.c.g) suy ra AE = CI.

Xét hai tam giác OEA và OIC ta có OA = OC (theo tính chất hình bình hành), $\widehat{EAO} = \widehat{ICO}$ (cùng bằng nửa hai góc bằng nhau), AE = CI. Vậy ΔOEA = ΔOIC (c.g.c) suy ra OE = OI. Chứng minh tương tự có OK = OF.

Tứ giác EFIK có OE = OI, OK = OF nên là hình bình hành.

Ta có $\widehat{DOC}$ và $\widehat{COB}$ là hai góc kề bù nhau, trong đó có IO là tia phân giác của $\widehat{DOC}$, OF là tia phân giác của $\widehat{COB}$, do đó IO ⊥ FO hay EI ⊥ KF.

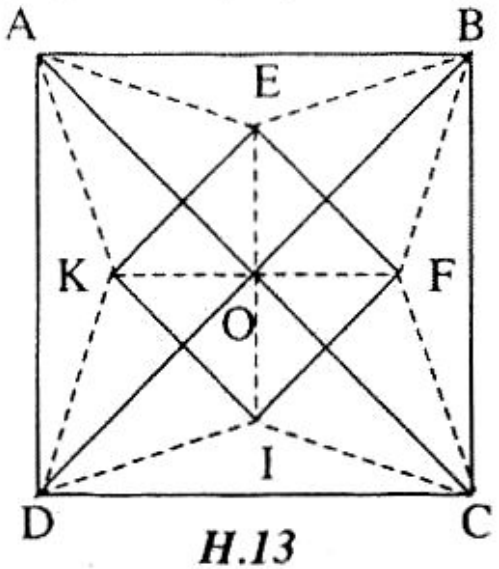
Hình bình hành EFIK có hai đường chéo EI ⊥ KF là hình thoi.

b) Theo cách nhận biết: để hình thoi EFIK trở thành hình vuông thì phải có EI = KF suy ra OK = OI.

Xét hai tam giác OKD và OID ta có OK = OI, KD = ID, OD cạnh chung. Vậy ΔOKD = ΔOID (c.c.c), suy ra $\widehat{KDO} = \widehat{IDO}$, mà $\widehat{KDO} = \dfrac{\widehat{ADO}}{2}$ và $\widehat{IDO} = \dfrac{\widehat{CDO}}{2}$ nên $\widehat{ADO} = \widehat{IDO}$ tức là BD là tia phân giác của ADC.

Vậy hình bình hành ABCD phải có một đường chéo là phân giác của góc ở đỉnh (tức ABCD là một hình thoi) thì hình thoi EFKI sẽ là hình vuông.

c) Khi ABCD là hình vuông ta có hình 13. Cũng lập luận như trong cách giải trên để có E, O, I và K, O, F thẳng hàng. Ta có $\Delta AFO = \Delta CIO$ (vì $\widehat{EAO} = \widehat{ICO} = \frac{45^\circ}{2}$, OA = OC, $\widehat{EOA} = \widehat{IOC} = 45^\circ$). Chứng minh tương tự có OK = OF. Tứ giác EFIK có OE = OI, OK = OF nên là hình bình hành.

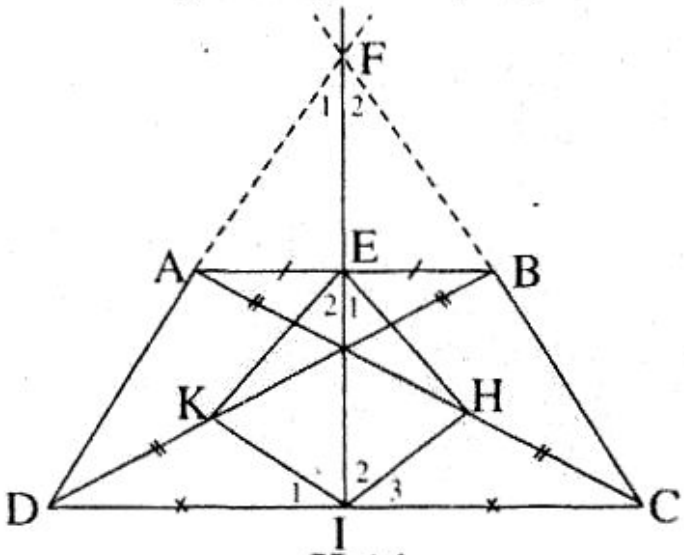


H.13

Ta thấy CI, OF là hai tia phân giác của hai góc kề bù DOC và COB nên OI ⊥OF hay EI ⊥ KF. Hình bình hành EFIK có EI ⊥ KF nên là hình thoi.

Ta có $\Delta AEO = \Delta AKC$ (vì $\widehat{EAC} = \widehat{KAO} = \frac{45^\circ}{2}$, AC chung, $\widehat{EOA} = \widehat{KOA} = 45^\circ$), suy ra OE = OK hay EI = KF. Hình thoi EFIK có EI = KF nên là hình vuông.

Bài 6. a) Trong tam giác ABC (hình 14) ta có E, H là trung điểm của AB, AC nên EH là đường trung bình, suy ra $EH = \frac{BC}{2}$.



H.14

Chứng ninh tương tự, trong ΔABD có $EK = \frac{AD}{2}$, trong ΔBDC có $KI = \frac{BC}{2}$ và trong ΔACD có $HI = \frac{AD}{2}$. Nhưng AD = BC (theo tính chất của hình thang cân) nên EH = HI = KI = KE, do đó EHIK là hình thoi. Biết rằng trong một hình thoi đường chéo là phân giác của góc ở đỉnh, vậy

EI là tia phân giác của $\widehat{KEH}$.

b) Do KI là đường trung bình của ΔBDC nên KI//BC, suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{C} = 50^o$ cũng vậy do HI là đường trung bình của ΔACD nên HI//AD, suy ra $\widehat{I_3} = \widehat{D} = 50^o$.

Ta có $\widehat{I_1} + \widehat{I_2} + \widehat{I_3} = 180^o$ suy ra $\widehat{I_2} = 180^o - (50^o + 50^o) = 80^o$.

Trong một hình thoi thì:

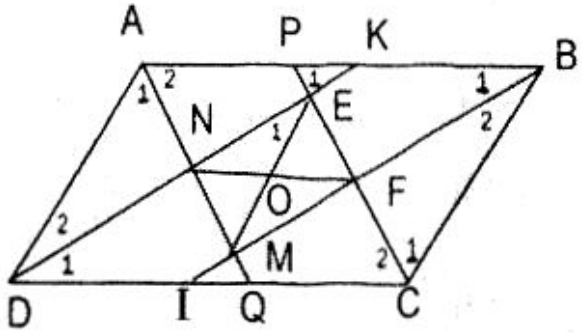
- Các góc đối bằng nhau, do đó $\widehat{E} = \widehat{I_2} = 80^o$;
- Các góc kề với mỗi cạnh bù nhau, do đó $\widehat{I_2} + \widehat{H} = 180^o$, suy ra $\widehat{H} = 180^o - \widehat{I_2} = 180^o - 80^o = 100^o$.

Góc K là góc đối của góc H nên $\widehat{K} = \widehat{H} = 100^o$.

Bài 7. a) Kéo dài BM cắt CD tại I, kéo dài DN cắt AB tại K (hình 15). Ta có $\widehat{D} = \widehat{B}$ (tính chất hình bình hành) mà $\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \frac{\widehat{D}}{2}$ và $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{\widehat{B}}{2}$ (theo gt) nên $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$. Nhưng $\widehat{D_1} = \widehat{K_1}$ (góc so le trong) do đó $\widehat{B_1} = \widehat{K_1}$. Hai góc B_1, K_1 bằng nhau, ở vị trí đồng vị nên BI//DK hay BM//DN. Ta có $\widehat{A_2} = \frac{\widehat{A}}{2}$ và $\widehat{B_1} = \frac{\widehat{B}}{2}$ mà $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$ (tính chất của hình bình hành) nên $\widehat{A_2} + \widehat{B_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^o$.

Biết rằng tổng các góc trong một tam giác bằng 180° nên trong ΔAMB ta có: AMB $= 180^o - (\widehat{A_2} = \widehat{B_1}) = 180^o - 90^o = 90^o$, suy ra AM ⊥ BM.

Chứng minh tương tự trong Δ ADN có: $\widehat{AND} = 180^o - (\widehat{A_1} + \widehat{D_2}) = 180^o - 90^o = 90^o$, suy ra AN ⊥ DN.



H.15

b) Chứng minh tương tự như trên đối với ΔDEC ta sẽ có $\widehat{DEF} = 90^o$. Ta có $\widehat{ENM} = \widehat{AND} = 90^o$. Như vậy tứ giác MNEF có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

c) Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{K_1}$ (góc so le trong), nhưng $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (gt), nên $\widehat{D_2} = \widehat{K_1}$ hay Δ ADK cân tại A. Trong tam giác cân ADK có AN $\perp$ DK thì AN cũng là trung tuyến, suy ra ND = NK (1). Chứng m inh tương tự đối với ΔCBI ta cũng có FB = FI (2). Tứ giác DKBI có BI//DK và KB//DI nên là hình bình hành, suy ra BI =DK. (3). Từ (1), (2) và (3) suy ra NK//BF và NK = BF nên NKBF là hình bình hành, suy ra NF//KB hay NF//AB.

Gọi O = ME $\cap$ NF, theo tính chất của hình chữ nhật ta có OE = ON hay ΔONE cân, suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{N_1}$. Biết NF//AB nên NF//CD (vì AB//CD theo gt) suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{D_1}$ (góc đồng vị), nhưng $\widehat{N_1} = \widehat{E_1}$ và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ do đó $\widehat{D_2} = \widehat{E_1}$. Hai góc D_2, E_1 bằng nhau, ở vị trí so le trong nên ME//AD.

Bài 8. a) Xét hai tam giác vuông ABE và ADF (hình 19) ta có AB = AD (cạnh hình vuông); $\widehat{BAE} = \widehat{DAF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), vậy ΔABE = ΔADF (g.c.g), suy ra AE = AF.

Δ AFE có $\widehat{EAF} = 90^o$ và AE = AF nên là tam giác vuông cân, suy ra $\widehat{AFE} = 45^o$.

b) Trung tuyến AM của tam giác vuông cân AFE cũng là đường cao nên GK $\perp$ FE.

Xét hai tam giác MGE và MKF ta có $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ (góc so le trong), ME = MF (vì AM là trung tuyến) $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (góc đối đỉnh), vậy ΔMGE = ΔMKF (g.c.g), suy ra GE = FK.

Tứ giác GFKE có GE//FK (vì Ey //CD) và GE = FK nên là hình bình hành. Hình bình hành GFKE có GK $\perp$ FE nên là hình thoi.

c) Vì $\Delta ABE = \Delta ADF$ nên BE = FD.

Ta có chu vi C của tam giác KEC là:

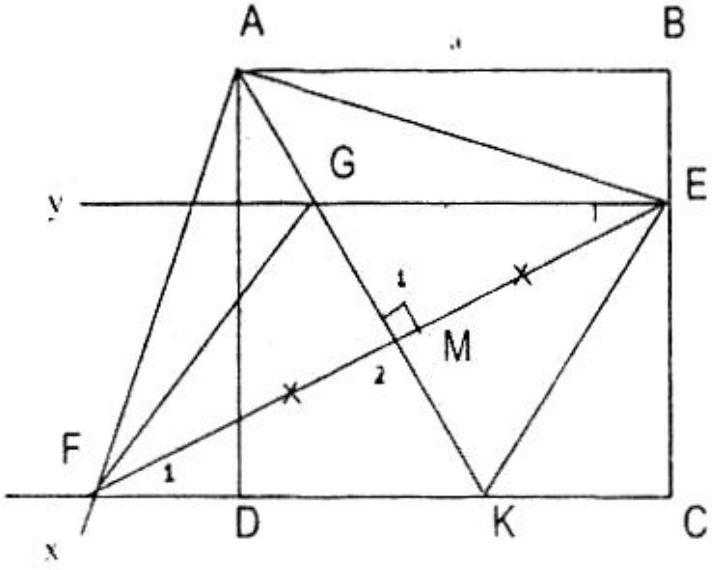
C = KE + EC + CK

Biết KE = KF (vì GFKE là hình thoi), mà KF = FD + DK và FD = BE nên KE = KF = BE + DK, do đó:

C = BE + DK + EC + CK

= (BE + EC) + (DK + KC)

= BC + DC = a + a = 2a.



H.16

Vậy khi E chuyển động trên BC thì chu vi C của ΔKEC có độ dài bằng 2a tức là C có độ dài không đổi (vì a là độ dài đã cho).

§2. ĐỊNH LÍ TALÉT TRONG TAM GIÁC - TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

* Định lí Talet trong tam giác

1. Đoạn thẳng tỉ lệ

1) Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào đơn vị đo.

2) Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

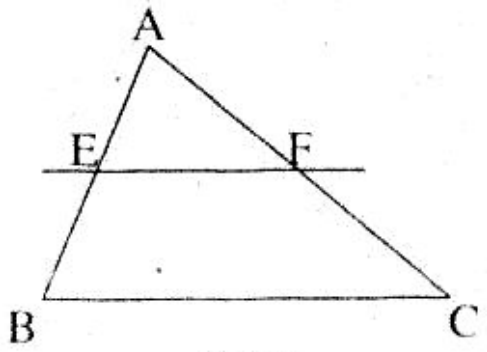
3) Tính chất của hai đoạn thẳng tỉ lệ:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ AB.C'D' = CD.A'B' \\ \bullet\ \frac{AB \pm CD}{CD} = \frac{A'B' \pm C'D'}{C'D'} \\ \bullet\ \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB \pm A'B'}{CD \pm C'D'} \end{cases}$$

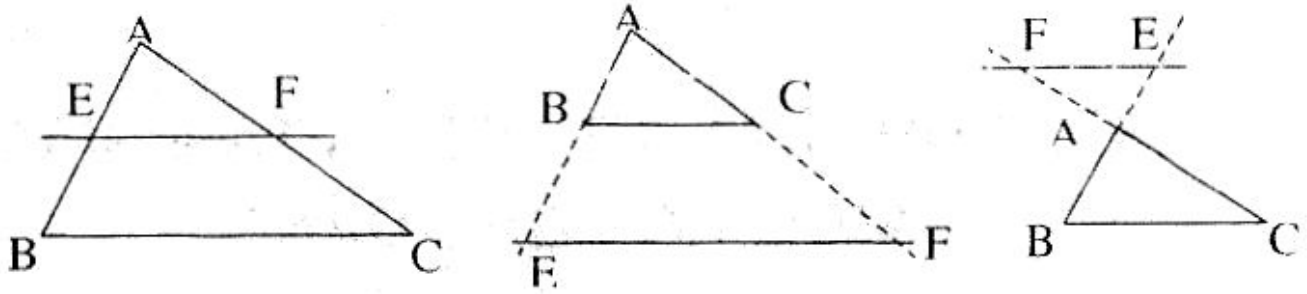
2. Định lí Talet trong tam giác

1) Định lí thuận và đảo

$$EF // BC \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\ \bullet\ \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \\ \bullet\ \frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} \end{cases}$$



H.17



H.18

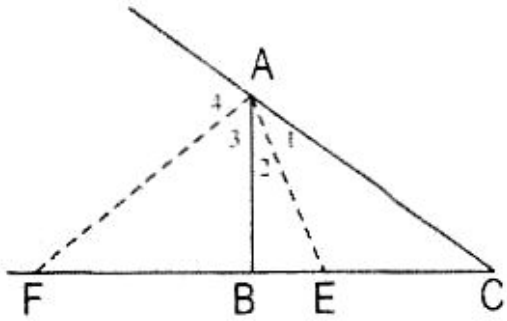
2. Hệ quả của định lí Talet

ΔABC có $EF // BC \Rightarrow \left\{ \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AC} \right.$.

- Tính chất đường phân giác của một tam giác (hình 19).

ΔABC có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ và $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{FB}{FC}$



H.19

*** KHÁI NIỆM TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC**

1. Định nghĩa hai tam giác đồng dạng

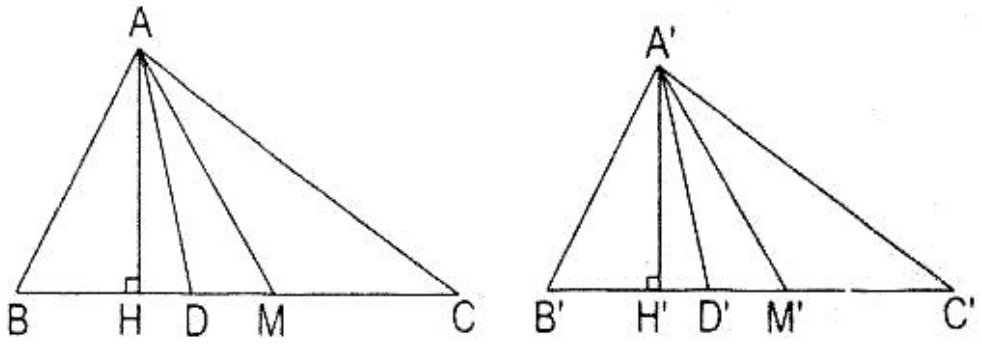
$\Delta ABC \quad \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}. \end{cases}$

2. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \\ \text{b) } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}. \text{ và } \widehat{A} = \widehat{A'} \quad \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \\ \text{c) } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}. \end{array} \right.$$

3. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ (hay } \widehat{C} = \widehat{C'}\text{)}, \\ \text{b) } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}, \\ \text{c) } \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$



H.20

4. Tính chất của hai tam giác đồng dạng

$$* \begin{cases} \Delta ABC \quad \Delta A'B'C' \\ AH \perp BC,\ A'H' \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{a) } \dfrac{AH}{A'H'} = \dfrac{AB}{A'B'} \ (= k) \\ \text{b) } \dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2. \end{cases}$$

$$* \begin{cases} \Delta ABC \quad \Delta A'B'C' \\ AH \perp BC,\ A'H' \perp B'C' \\ \widehat{BAD} = \widehat{DAC},\ \widehat{B'A'D'} = \widehat{D'A'C'} \\ MB = MC,\ M'B' = M'C' \end{cases} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} (= k)$$

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Cho hình thang ABCD (AB//CD), AB > CD. Đường thẳng song song với BC kẻ qua D cắt đường chéo AC tại M và đường thẳng song song với AD kẻ qua C cắt cạnh AB tại F. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC cắt cạnh

BC ở P.

a) Chứng minh MP//AB.

b) Chứng minh ba đường thẳng MP, CP và DB đồng quy.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Từ đỉnh A kẻ một cát tuyến bất kì cắt đường chéo BD tại E, cắt cạnh BC tại F và cắt tia DC tại G. Chứng minh:

a) Các tam giác DAE và BFE đồng dạng

b) Các tam giác DGE và BAE đồng dạng

c) Hệ thức $AE^2 = EF.EG$;

d) Tích BF.DG không đổi khi cát tuyến qua A thay đổi.

Bài 3. Cho hai tam giác đều ABC và DEF mà A nằm trên cạnh DF, E nằm trên cạnh BC. Gọi I là giao điểm của AC và EF, K là giao điểm của AB và DE. Chứng minh:

a) $\Delta IFC \backsim \Delta IAE$ và $\Delta KDB \backsim \Delta KAE$

b) BD//CF.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt cạnh AB tại P, cắt cạnh AC tại Q. Chứng minh:

a) $\Delta AHP \backsim \Delta CMH$ và $\Delta QHA \backsim \Delta HMB$

b) HP = HQ.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD. Từ C kẻ CM vuông góc với AB, kẻ CN vuông góc với AD. Giả sử AC > BD. Chứng minh rằng $AB.AM + AD.AN = AC^2$.

II. Các bài tập kiểm tra

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy P trên cạnh AB và Q trên cạnh AC sao cho $\widehat{PMQ} = 60^o$.

a) Chứng minh $\Delta MBP \backsim \Delta QCM$.

Từ đó suy ra tích PB.CQ có giá trị không đổi.

b) Kẻ MH ⊥ PQ, chứng minh $\Delta MBP \backsim \Delta QMP$; $\Delta QCM \backsim \Delta QMP$.

c) Chứng minh độ dài MH không đổi khi P, Q chạy trên AB, AC nhưng vẫn đảm bảo $\widehat{PMQ} = 60^\circ$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, H là trực tâm của tam giác. Trên các đoạn thẳng HB, HC lấy các điểm B' và C' sao cho $\widehat{AB'C} = \widehat{AC'B} = 90^\circ$. Chứng minh AB' = AC'.

Bài 8. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c (b > c) và các phân giác BD, CE.

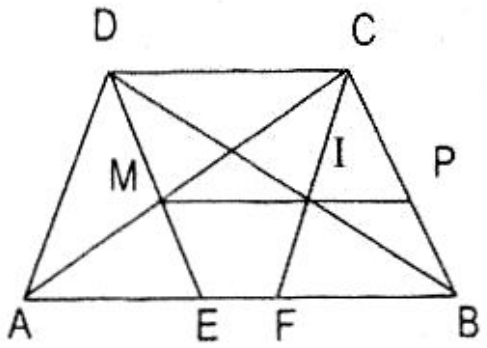
a) Tính độ dài CD, BE rồi suy ra CD > BE.

b) Vẽ hình bình hành BEKD, chứng minh CE > EK.

c) Chứng minh CE > BD.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) Trong ΔMAE có AE//DC, theo định lí Talet thì $\frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AE}$ (1) (hình 21). Tương tự do FP//AC có $\frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB}$ (2).



H.21

Vì ADCF là hình bình hành nên AF = DC (3); DCBE cũng là hình bình hành nên EB = DC, mà AF = AE + EF và EB = EF + FB, từ đó suy ra $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM}$.

Theo định lí đảo Talet áp dụng vào ΔACB ta có MP // AB.

b) Gọi I là giao điểm của DB và CF.

Trong ΔDIC thì DC//FB cho ta $\frac{IC}{IF} = \frac{DC}{FB}$, nhưng

AF = DC và theo (2) ta có: $\frac{IC}{IF} = \frac{AF}{FB} = \frac{CP}{PB}$.

Theo định lí đảo Talet áp dụng vào ΔCFB ta có IP//AB.

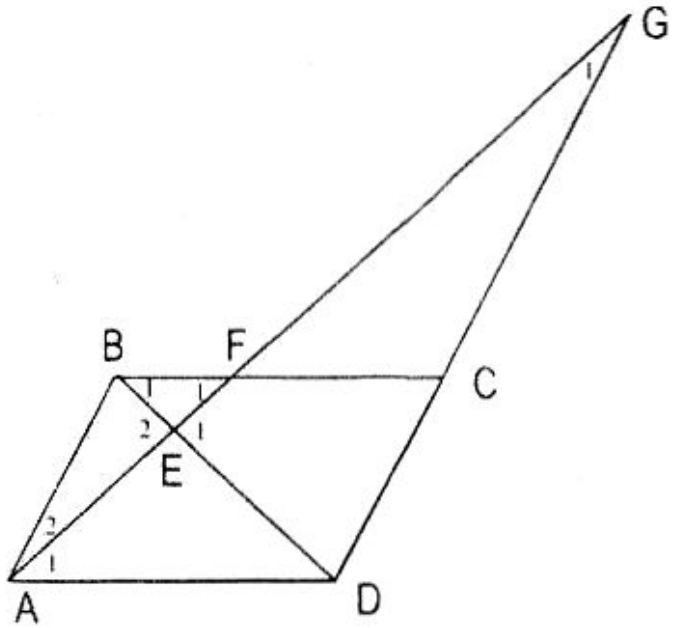
Chứng minh tương tự ta có IM//AB.

Ta nhận thấy: từ điểm I ở ngoài đường thẳng AB, chỉ dựng được một và một đường thẳng song song với AB mà thôi (tiên đề Ơclit), do đó IP, IM phải trùng nhau hay I nằm trên đường thẳng MP, suy ra ba đường thẳng DB, CF và MP đồng quy tại I.

Bài 2. a) Do ABCD là hình bình hành (hình 22) nên BC//AD, suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{F}_1$, $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ (góc so le trong), do đó ΔDAE ∽ ΔBFE.

b) Ta có $\widehat{G}_1 = \widehat{A}_2$ (góc so le trong), $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (góc đối đỉnh), do đó ΔDGE ∽ ΔBAE.

c) Vì ΔDAE ∽ΔBFE nên $\frac{AE}{FE} = \frac{ED}{EB}$ (1) và ΔDGE ∽ ΔBAE nên $\frac{GE}{AE} = \frac{ED}{EB}$ (2)



H.22

Từ (1) và (2) suy ra $AE^2 = EF.EG$.

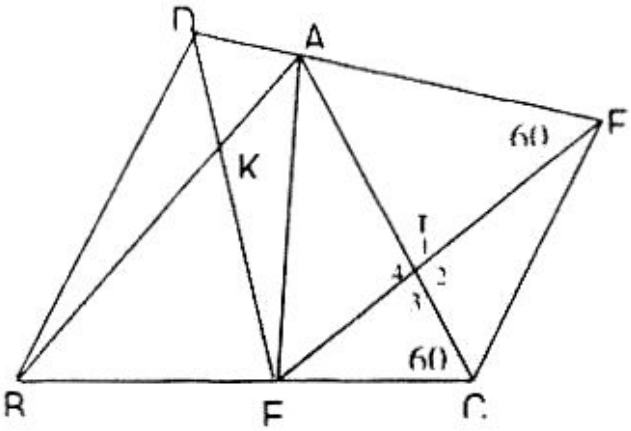
d) Cũng từ sự đồng dạng của các cặp tam giác trên, ta suy ra:

$$\frac{AD}{FB} = \frac{ED}{EB} \text{ và } \frac{DG}{BA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{FB} = \frac{DG}{BA} \Rightarrow BF.DG = AD.AB.$$

Vì hình bình hành ABCD đã cho nên các cạnh AB, AD có độ dài không đổi, do đó tích AD.AB cũng không đổi, vậy tích BF. DG không đổi khi cát tuyến qua A thay đổi.

Bài 3. a) Hai tam giác IFA và ICE có: $\widehat{F} = \widehat{C}$ (= 60°) và $\widehat{I_1} = \widehat{I_3}$ (góc đối đỉnh) nên $\Delta IFA \backsim \Delta ICE$ (hình 23).



H23

$\Delta IFA \backsim \Delta ICE$ nên $\frac{IF}{IC} = \frac{IA}{IE}$ hay $\frac{IF}{IA} = \frac{IC}{IE}$ (1)

Hai tam giác IFC và IAE có: $\widehat{I_2} = \widehat{I_4}$ (góc đối đỉnh) và $\frac{IF}{IA} = \frac{IC}{IE}$ (theo 1) nên $\Delta IFC \backsim \Delta IAE$.

Làm tương tự như trên sẽ được $\Delta KDB \backsim \Delta KAE$.

b) Từ các cặp tam giác đồng dạng trong chứng minh trên, suy ra:

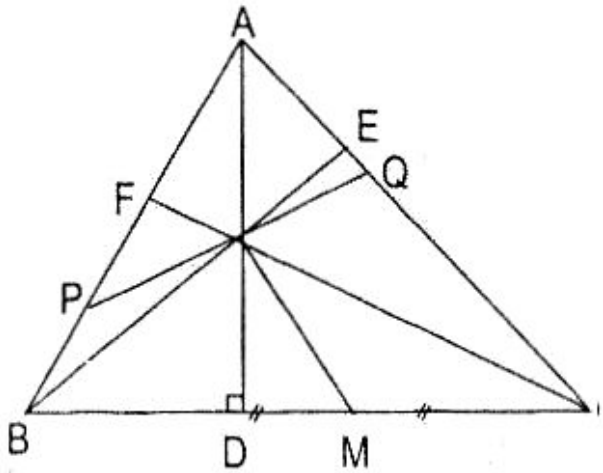
$\widehat{BDE} + \widehat{EFC} = \widehat{BAE} + \widehat{EAC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$

Do đó $\widehat{BDF} + \widehat{DFC} = \underbrace{\widehat{BDE} + \widehat{EFC}} + \widehat{EDF} + \widehat{DFE}$

$= 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

Biết $\widehat{BDF}$ và $\widehat{DFC}$ là hai góc trong cùng phía lại bù nhau nên BD//CF.

Bài 4. a) Ta có (theo hình vẽ 24) $\widehat{APH} = \widehat{CHM}$ (1) (góc có cạnh tương ứng vuông góc), PH ⊥ MH, AP ⊥ HC).



H.24

Chứng minh tương tự có $\widehat{PAH} = \widehat{HCM}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AHP \backsim \Delta CMH$ (3).

Chứng minh tương tự được

$\Delta QHA \backsim \Delta HMB$ (4).

b) Từ (3) ta có:

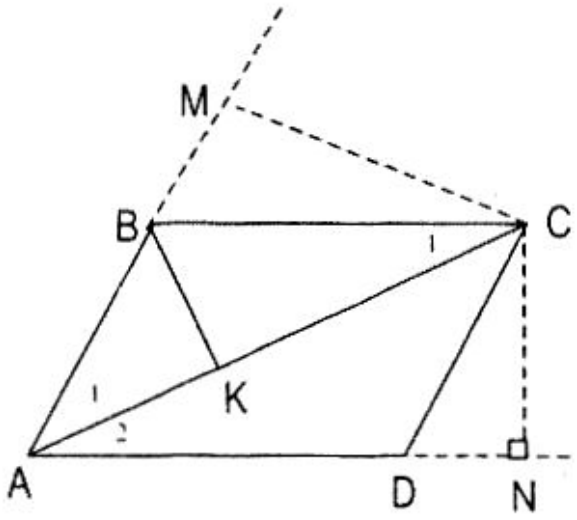
$$\frac{HP}{MH} = \frac{AH}{CM} \quad \text{hay} \quad \frac{HP}{AH} = \frac{MH}{CM} \ (5).$$

Từ (4) ta có: $\frac{QH}{HM} = \frac{HA}{MB}$ hay $\frac{QH}{HA} = \frac{MH}{MB}$ (6).

Nhưng CM = MB (gt) (7), nên từ (5), (6) và (7) suy ra $\frac{HP}{HA} = \frac{HQ}{HA}$, do đó có HP = HQ.

Bài 5. Hạ $BK \perp AC$ (hình 25). Hai tam giác vuông ABK và ACM có $\widehat{A_1}$ chung nên chúng đồng dạng, do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AM} \Rightarrow AB.AM = AC.AK$ (1).

Tương tự, hai tam giác vuông BKC và CAN cũng đồng dạng vì có $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ nên $\frac{BC}{AC} = \frac{CK}{AN} \Rightarrow BC.AN = AC.CK$ (2).



H.25

Nhưng BC = AD nên (2) viết thành AD.AN = AC.CK (3).

Cộng từng vế (1) và (2) được:

$AB.AM + AD.AN = AC(AK + KC) = AC^2$.

Vậy $AB.AM + AD.AN = AC^2$.

Bài 6. a) Trên hình 26 ta có:

$\widehat{BMP} + 60^\circ + \widehat{CMQ} = 180^\circ$ suy ra:

$\widehat{CMQ} = 120^\circ - \widehat{BMP}$ (1).

Trong ΔBPM có $\widehat{B} = 60^\circ$ (gt) nên $\widehat{BPM} = 120^\circ - \widehat{BMP}$ (2).

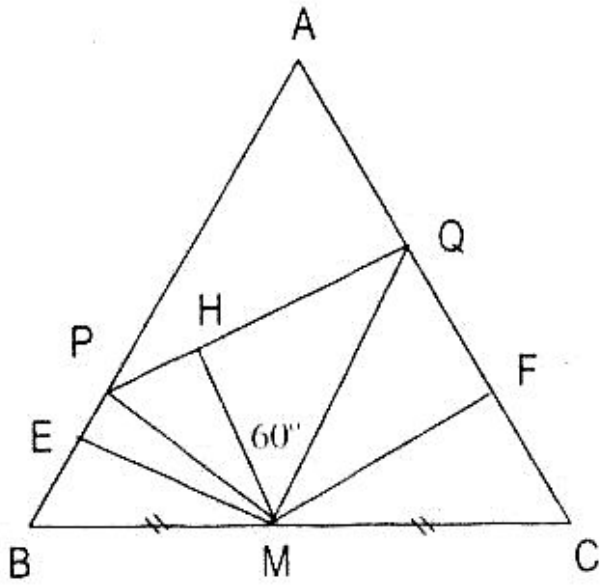
Từ (1) và (2) suy ra:

$\widehat{BPM} = \widehat{CMQ}$.

Hai tam giác BPM và CMQ có $\widehat{B} = \widehat{C}$ và $\widehat{BPM} = \widehat{CMQ}$ nên $\Delta MBP \backsim \Delta QCM$ (3), suy ra

$$\frac{MB}{CQ} = \frac{BP}{CM} \Rightarrow BP.\ CQ = BM.CM = \frac{BC^2}{4},$$

(vì $MB = MC = \frac{BC}{2}$ (gt)).



H.26

Vì ΔABC đều đã cho nên BC có độ dài không đổi, vậy tích BM.CM có giá trị không đổi.

b) Do $\Delta MBP \backsim \Delta QCM \Rightarrow \frac{BP}{CM} = \frac{MP}{QM}$ và vì CM = BM nên $\frac{BP}{BM} = \frac{MP}{MQ} \Rightarrow \frac{BP}{MP} = \frac{MB}{MQ}$ (4)

Hai tam giác MBP và QMP có $\widehat{PBM} = \widehat{PMQ} = 60^\circ$ và $\frac{BP}{MP} = \frac{MB}{MQ}$ nên $\Delta MBP \backsim \Delta QMP$ (4).

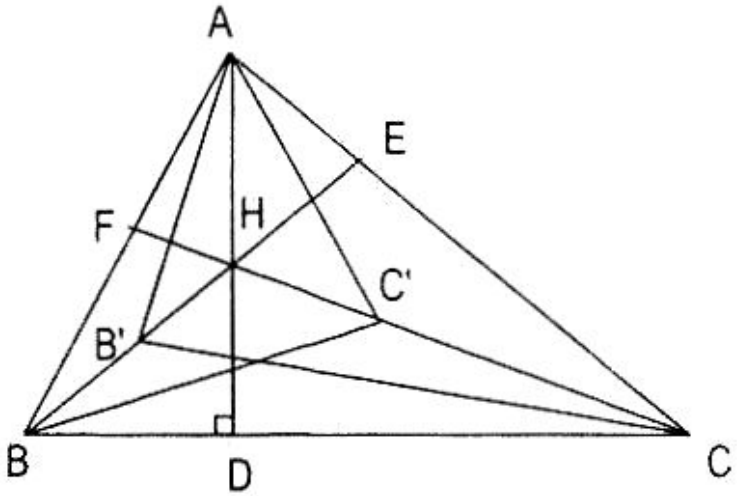
Ta có: $\Delta MBP \backsim \Delta QCM$ (3) và $\Delta MBP \backsim \Delta QMP$ (4) nên $\Delta QCM \backsim \Delta QMP$ (5).

c) Từ kết quả (4) và (5) ta rút ra được $\widehat{BPM} = \widehat{QPM}$ hay PM là phân giác của $\widehat{BPQ}$ nên MH = ME (ME là đường cao của ΔBPM).

ME có độ dài không đổi nên MH cũng có độ dài không

đổi.

Bài 7. Hai tam giác vuông AB'C và AEB' (hình 27) có chung góc nhọn B'AC nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AB'}{AE} = \frac{AC}{AB'}$ hay $AB'^2 = AE.AC$ (1).



H.27

Chứng minh tương tự được:

$\Delta ABE \backsim \Delta ACF$, suy ra:

$\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB}$ hay

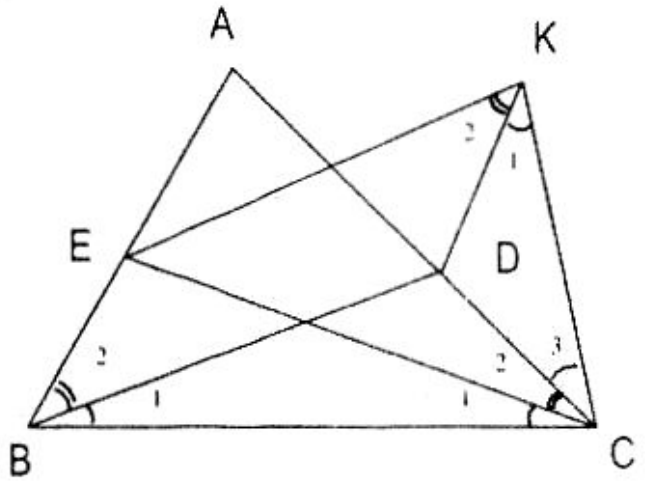
$AF.AB = AE.AC$ (2).

$\Delta AC'B \backsim \Delta AFC'$,

suy ra $\frac{AC'}{AB} = \frac{AF}{AC'}$, hay

$AC'^2 = AF.AB$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $AB'^2 = AC'^2$, do đó có $AB' = AC'$.



H.28

Bài 8. a) Vì BD là phân giác của góc B (hình 28), nên theo tính chất của đường phân giác trong tam giác có:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{a}{c} \quad \text{hay} \quad \frac{CD}{CD + DA} = \frac{a}{a+c}; \frac{CD}{b} = \frac{a}{a+c} \Rightarrow CD = \frac{ab}{a+c}.$$

Tương tự, khi CE là phân giác của góc C, có:

$\frac{BE}{EA} = \frac{a}{b}$ hay $\frac{BE}{BE + EA} = \frac{a}{a+b}$ hay $\frac{BE}{c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow BE = \frac{ac}{a+b}$.

Biết b > c nên $\frac{ab}{a+c} > \frac{ac}{a+c} > \frac{ac}{a+b}$ tức là CD > BE.

b) Ta có CD > BE mà BE = DK $\Rightarrow$ CD > DK $\Rightarrow \widehat{K}_1 > \widehat{C}_1$ (1).

Ta lại có b > c $\Rightarrow \widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$ mà $\widehat{B}_2 = \widehat{K}_2$ nên $\widehat{K}_2 > \widehat{C}_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 > \widehat{C}_2 + \widehat{C}_3$ hay

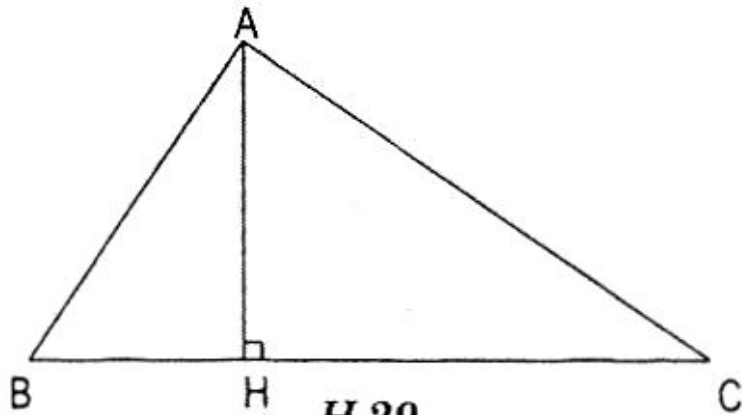
$\widehat{EKC} > \widehat{ECK} \Rightarrow$ CE > EK.

c) Từ CE > EK mà EK = BD nên CE > BD.

§3. ĐỊNH LÍ PITAGO - HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. $\begin{cases} \Delta ABC \text{ có } \hat{A} = 90^\circ \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ AB^2 = BC.BH \\ \quad AC^2 = BC.HC \\ 2)\ \text{(Định lí Pitago)}\ \ BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ 3)\ AB.AC = BC.AH \\ 4)\ AH^2 = HB.HC \\ 5)\ \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}. \end{cases}$



H.29

2. ΔABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông (tại A) (định lí đảo của định lí Pitago).

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua I dựng đường thẳng

xy bất kì. Gọi H, K, F, E lần lượt là hình chiếu của các đỉnh A, B, C, D trên xy. Hãy tính tổng $AH^2 + BK^2 + CF^2 + DE^2$ theo a.

Bài 2. Cho tam giác ABC có AB > AC, kẻ trung tuyến AM và đường cao AH. Chứng minh hệ thức:

a) $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$;

b) $AB^2 - AC^2 = 2BC.MH$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có AB = 3cm, CD = 14cm, AC = 15cm, BD = 8cm.

a) Chứng minh rằng AC vuông góc với BD.

b) Tính diện tích hình thang.

Bài 4. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có BD = 6cm, AC = 10cm và đoạn thẳng EF nối trung điểm hai đoạn AB, CD bằng 4cm. Hãy tính diện tích hình thang.

Bài 5. Từ điểm O trong tam giác ABC ta kẻ các đoạn thẳng OD, OE và OF theo thứ tự vuông góc với các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh:

$BD^2 + CF^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân ở A, trung tuyến BD. Gọi I là hình chiếu của C trên BD, H là hình chiếu của I trên AC. Chứng minh rằng AH = 3.HI.

Bài 7. Cho hình thang ABCD (AB//CD), chân các đường vuông góc kẻ từ A, B xuống DC nằm trên cạnh DC. Chứng minh rằng: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.DC$.

Bài 8. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh bằng a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở E và cắt đường thẳng DC ở F. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2}$.

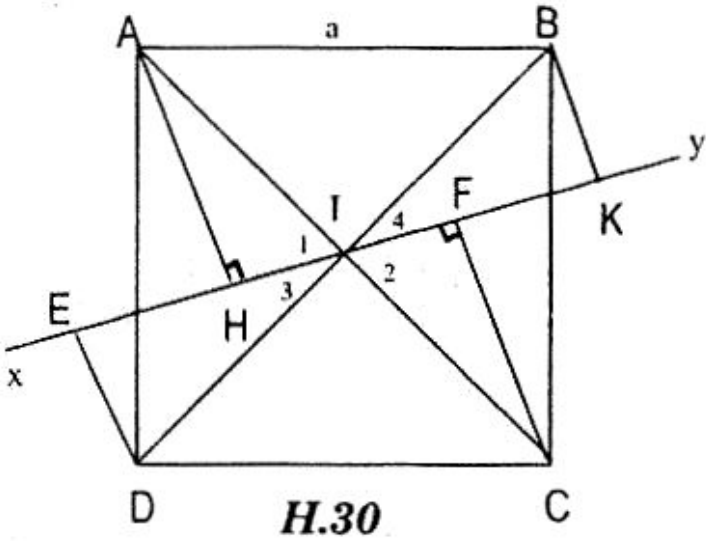
C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. Xét hai tam giác vuông AHI và CFI (hình 30) ta có IA = IC (tính chất hình vuông), $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ (góc đối đỉnh), vậy hai tam giác này bằng nhau, suy ra AH = CF.

Chứng minh tương tự được hai tam giác vuông bằng nhau DEI và BKI suy ra DE = BK.

Do đó $AH^2 + BK^2 + CF^2 + DE^2 = 2(AH^2 + BK^2)$.

Xét hai tam giác vuông AHI và IKB ta có AI = IB và $\widehat{AIH} = \widehat{IBK}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), vậy hai tam giác này bằng nhau, suy ra HI = KB. Do đó:



H.30

$AH^2 + BK^2 + CF^2 + DE^2 = 2(AH^2 + HI^2) = 2AI^2$ (1)

Tam giác AIB vuông tại I, theo định lí Pitago ta có:

$IA^2 + IB^2 = AB^2 = a^2$ (2)

Mặt khác, do IA = IB nên $2AI^2 = IA^2 + IB^2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$AH^2 + BK^2 + CF^2 + DE^2 = a^2$.

Bài 2. a) Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông AHB (hình 31) ta có:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$.

Nhưng $AH^2 + MH^2 = AM^2$

hay $AH^2 = AM^2 - MH^2$ và HB = MB + MH nên:

$AB^2 = AM^2 - MH^2 + (MB + MH)^2$

$= AM^2 - MH^2 + MB^2 + MH^2 + 2MB.MH$

$= AM^2 + MB^2 + 2MB.MH$ (1)

Làm tương tự như trên đối với tam giác vuông AHC và lưu ý rằng HC = MC - MH = MB - MH, ta có:

$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC.MH$ (2)

Lấy (1) cộng với (2) vế với vế được:

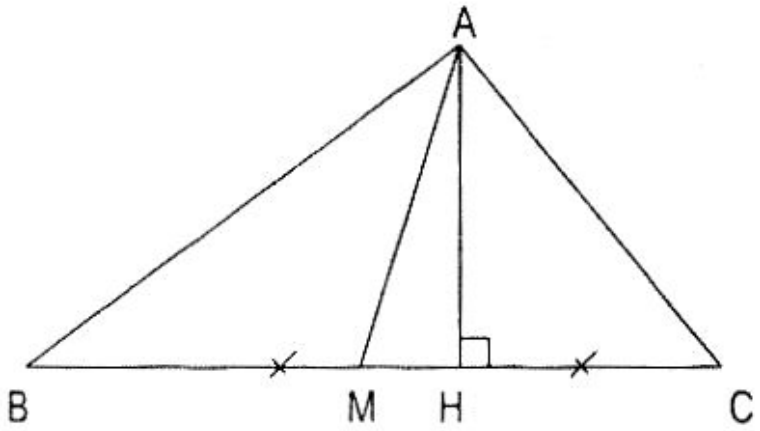
$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + MB^2 + MC^2$

$= 2AM^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

b) Lấy (1) trừ đi (2) vế với vế được:

$AB^2 - AC^2 = 4MB.MH$

$= 2.2MB.MH = 2BC.MH.$

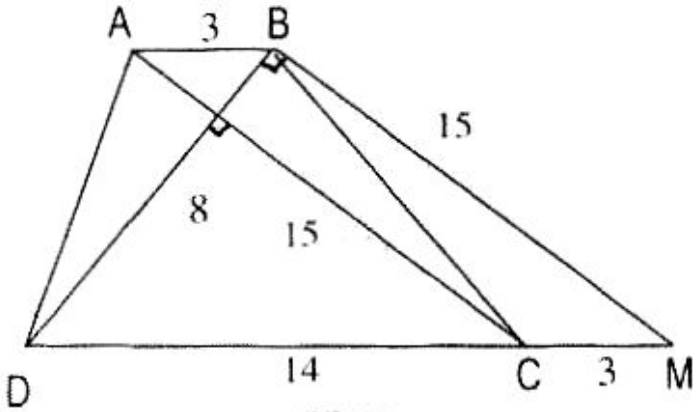


H.31

Bài 3. a) Kẻ BM//AC (hình 32) ta có ABMC là hình bình hành, suy ra CM = AB = 3cm và BM = AC = 15cm.

Xét ΔDBM ta thấy:

$BD^2 + BM^2 = 8^2 + 15^2 = 289$ và $DM^2 = (DC + CM)^2 = (14 + 3)^2 = 17^2 = 289$ (theo định lí đảo của định lí Pitago) hay BM ⊥BD, suy ra AC ⊥ BD.



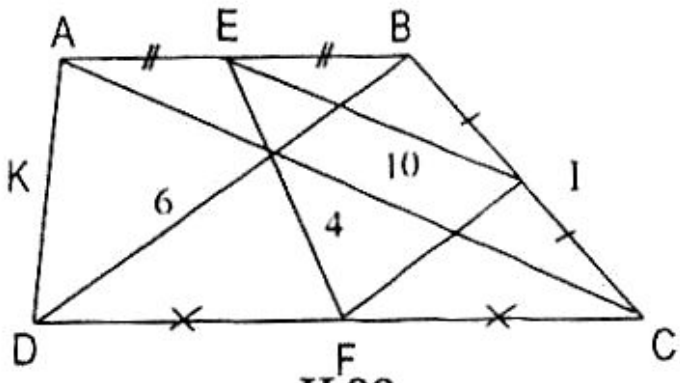
H.32

b) Ta thấy ΔABD và ΔBCM có đáy AB = CM = 3cm và cùng đường cao là khoảng cách giữa AB và DC nên chúng có diện tích bằng nhau, do đó diện tích hình thang ABCD bằng diện tích tam giác vuông DBM.

Vậy $S_{ABCD} = S_{DBM} = \frac{1}{2}8.15 = 60(cm^2)$.

Bài 4. Gọi I là trung điểm của cạnh BC (hình 33). Ta có EI là đường trung bình của ΔABC, nên $EI = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (cm).

FI cũng là đường trung bình của ΔBCD nên $FI = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3$(cm).



H.33

Xét ΔEFI ta thấy $EF^2 + FI^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = 25 = EI^2$, suy ra $\widehat{EFI} = 1v$ (theo định lí đảo Pitago).

Gọi K là trung điểm của AD thì KEIF sẽ là hình bình hành và $S_{KEIF} = 2S_{EFI} = 2 \cdot \frac{1}{2} EF.FI = 4.3 = 12(cm^2)$.

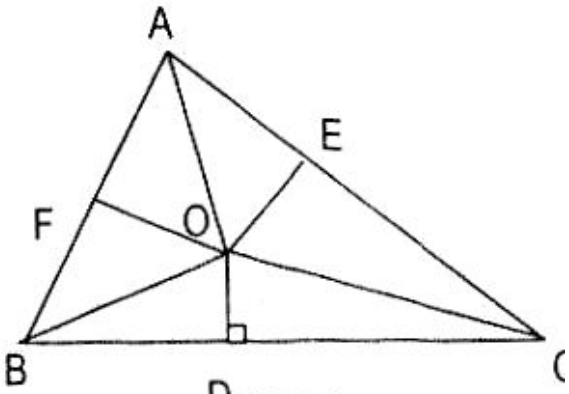
Nhận thấy $S_{ABCD} = 2S_{KEIF}$, do đó $S_{ABCD} = 24cm^2$.

Bài 5. Lần lượt xét ba tam giác vuông ODB, OEC và OFA (hình 34), theo định lí Pitago, ta có:

$BD^2 = OB^2 - OD^2$

$CE^2 = OC^2 - OE^2$

$AF^2 = OA^2 - OF^2$.



H.34

Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta được:

$BD^2 + CE^2 + AF^2 = (OC^2 - OD^2) + (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2)$ (1)

Lại lần lượt xét ba tam giác vuông ODC, OEA và OFB, cũng theo định lí Pitago, ta có:

$DC^2 = OC^2 - OD^2$

$EA^2 = OA^2 - OE^2$

$FB^2 = OB^2 - OF^2$.

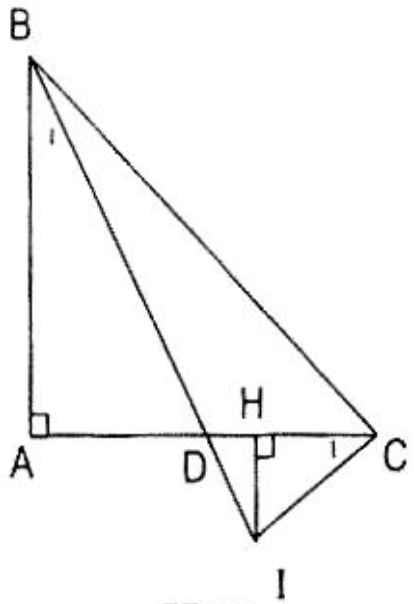
Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta được:

$DC^2 + EA^2 + FB^2 = (OC^2 - OD^2) + (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2$.

Bài 6. Hai góc B_1 và C_1 bằng nhau (hình 35) (góc có cạnh tương ứng vuông góc: BI ⊥ IC; BA ⊥ (A), nên hai tam giác vuông HIC và ADB đồng dạng với nhau; biết AB = 2AD nên HC = 2HI.



H.35

Đặt HI = m thì HC = 2m

Trong tam giác vuông DIC với đường cao IH ta có:

$IH^2 = HD.HC$ hay $m^2 = HD.2m \Rightarrow HD = 0,5m$, do đó DC = 2,5m; AH = 3m. Vậy AH = 3HI.

Bài 7. Trong tam giác AEC vuông tại E (hình 36), ta có:

$AC^2 = AE^2 + EC^2$ (1)

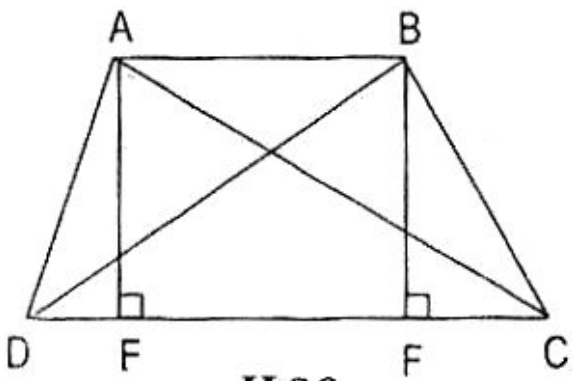
Trong tam giác AED vuông tại E, ta có:

$AE^2 = AD^2 - DE^2$ (2)

Từ (1), (2) được:

$AC^2 = AD^2 - DE^2 + EC^2$ (3)

Tương tự như trên, áp dụng định lí Pitago vào các tam giác vuông BDF và BCF ta được:



H.36

$BD^2 = BC^2 - CF^2 + DF^2$ (4)

Cộng từng vế của (3) và (4) được:

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + (EC^2 - DE^2) + (DF^2 - CF^2)$

$= AD^2 + BC^2 + (EC + DE)(EC - DE) + (DF + CF)(DF - CF)$

$= AD^2 + BC^2 + DC(EC - DE) + DC(DF - CF)$

$= AD^2 + BC^2 + DC[(EC - CF) + (DF - DE)]$

$= AD^2 + BC^2 + 2DC.EF.$

Nhưng EF = AB (theo tính chất đoạn chắn), do đó:

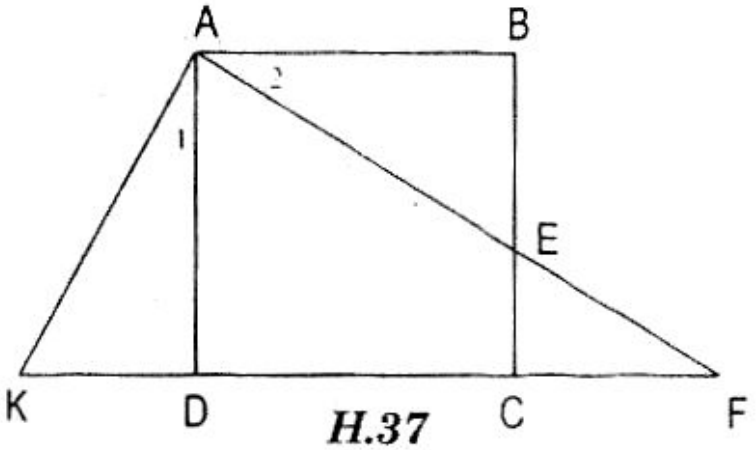
$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.DC$

Bài 8. Qua A dựng đường thẳng vuông góc với AE cắt CD tại K (hình 37).

Trong tam giác vuông KAF có AD là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AF^2}$$

Ta thấy $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc: $KA \perp AF$, $AD \perp AB$).



H.37

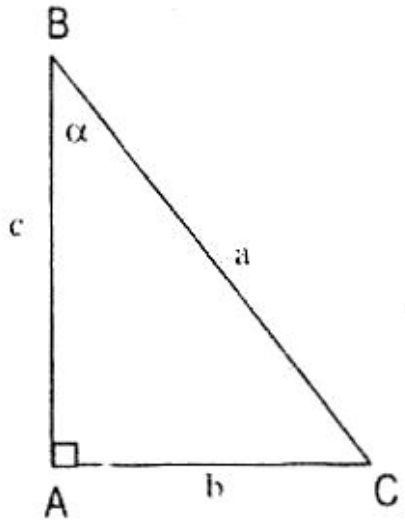
Xét hai tam giác vuông ADK và ABE ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, AD = AB, vậy hai tam giác này bằng nhau, suy ra AK = AE.

Vậy $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ hay $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2}$.

§4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

$$\Delta ABC \text{ có } \begin{cases} \widehat{A} = 1v \\ \widehat{B} = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{a} \\ tg\alpha = \dfrac{b}{c} \\ cotg\alpha = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$



H.38

Chú ý: a) Trong ΔABC vuông tại A, do hai góc B và C phụ nhau nên:

- $\sin B = \cos C \left(= \dfrac{b}{a}\right)$
- $tg B = cotg C \left(= \dfrac{b}{c}\right)$
- $\cos B = \sin C \left(= \dfrac{c}{a}\right)$
- $cotg B = tg C \left(= \dfrac{c}{b}\right)$.

Do đó, có:

$b = a\sin B = a\cos C = c\,tg B = c\,cotg C$

$c = a\cos B = a\sin C = b\,cotg B = b\,tg C$.

b) Với góc nhọn α, ta có các hệ thức cơ bản sau:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $cotg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. a) Cho tam giác ABC vuông tại C trong đó a = 1,2m, b = 0,9m và c = 1,5m. Tính các tỉ số lượng giác của góc B.

b) Chứng minh các hệ thức sau:

1) $tg\,\alpha + cotg\alpha = 1$;

2) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $1 + cotg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Bài 2. Rút gọn (đơn giản) các biểu thức sau:

a) $A = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha cotg^2\alpha$; b) $B = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha.tg^2\alpha$;

c) $C = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; d) $D = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + tg\alpha$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} - \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \dfrac{4\cot gx}{\sin x}$;

b) $1 - \dfrac{\sin^2 x}{1+\cot gx} - \dfrac{\cos^2 x}{1+tgx} = \sin x\cos x$.

Bài 4. Cho tam giác cân ABC có đáy BC = a, $\widehat{BAC} = 2\alpha$ trong đó $\alpha < 45^\circ$. Kẻ các đường cao AE, BF.

a) Tính các cạnh của ΔBFC theo a và theo các tỉ số lượng giác của góc α.

b) Tính theo a, theo các tỉ số lượng giác của góc 2α và góc α, các cạnh của tam giác ABF, BFC.

c) Từ các kết quả trên, chứng minh các đẳng thức sau:

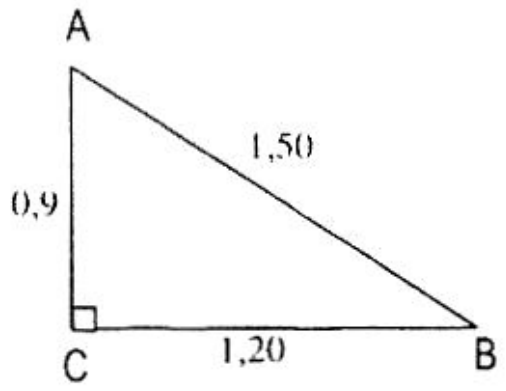
1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

3) $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$.

Bài 5. a) Tính diện tích hình bình hành ABCD biết AD = 12cm; DC = 15cm và $\widehat{ADC} = 70^o$.

b) Tính diện tích hình thang cân ABCD (AB//CD), biết AB = 12cm; CD = 18cm và $\widehat{D} = 75^o$.



H.39

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{1 + 2\sin x\cos x}{\sin x + \cos}$;

b) $B = \cot gx + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và phân giác AD. Cho AB = c, CA = b. Chứng minh rằng $AD = \dfrac{bc}{(b + c)\sin 45^o}$.

Bài 8. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC biết AB = 12cm; AC = 15cm và BC = 18cm.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. a) Theo hình vẽ 39, ta có:

$\cos B = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1,2}{1,5} = 0,8$

$\sin B = \dfrac{b}{c} = \dfrac{0,9}{1,5} = 0,6$

$tgB = \dfrac{b}{a} = \dfrac{0,9}{1,2} = 0,75$

$\cot gB = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1,2}{0,9} \approx 1,33.$

Lưu ý: sin và cosin của một góc nhọn luôn nhỏ hơn 1.

b) 1. Biết $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ và $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ nên

$tg\alpha.cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1.$

Lưu ý: Ta cũng có: $cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$.

2) Ta có: $1 + tg^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

3) Ta có $1 + cotg^2\alpha = 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Bài 2. a) $A = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha.cotg^2\alpha = \cos^2\alpha(1 + cotg^2\alpha)$

$$= \cos^2\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = cotg^2\alpha.$$

b) $B = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha.tg^2\alpha = \sin^2\alpha(1 + tg^2\alpha)$

$$= \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha.$$

c) $C = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

$D = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + tg\alpha = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Bài 3.a) Biến đổi vế trái. Sau khi quy đồng mẫu ta có:

$$\frac{(1+\cos x)^2-(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+2\cos x+\cos^2 x-(1-2\cos x+\cos^2 x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{4\cos x}{\sin^2 x}=4.\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\sin x}=\frac{4\cot gx}{\sin x}.$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Ta có: $\frac{\sin^2 x}{1+\cot gx}+\frac{\cos^2 x}{1+tgx}=\frac{\sin^2 x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$=\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\quad (*)$$

Áp dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ vào biểu thức (*) ta có:

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}$$

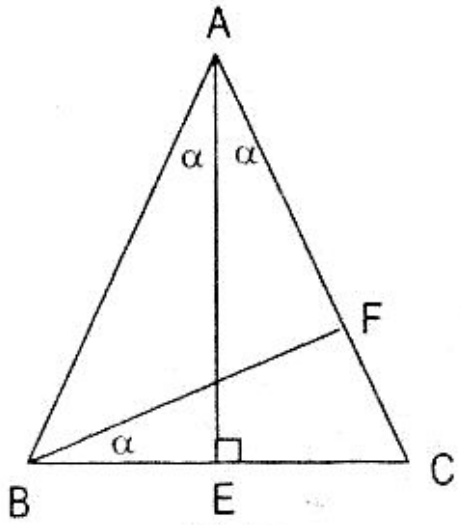
$= 1 - \sin x\cos x.$

Từ đó, vế trái của đẳng thức sẽ là:

$1 - (1 - \sin x\cos x) = \sin x\cos x.$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

Bài 4. Ta có hình vẽ 40. Vì AE là đường cao nên $\widehat{BAE} = \widehat{EAC} = \alpha$; $BE = EC = \frac{a}{2}$ Ta có $\widehat{FBC} = \widehat{EAC} = \alpha$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).



H.40

a) Các cạnh của tam giác vuông BFC là: $BF = a.\cos\alpha$ (1),

$FC = a.\sin\alpha$ (2), $BC = a$

b) Trong tam giác vuông ABH thì $AB = \frac{a}{2\sin\alpha} = AC$

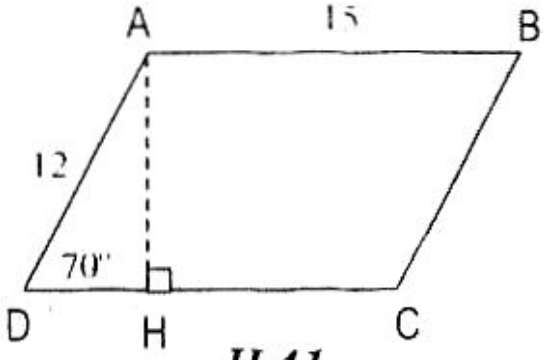
Trong tam giác vuông ABF thì:

$BF = AB.\sin 2\alpha = \dfrac{a.\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ (3)

$AF = AB.\cos 2\alpha = \dfrac{a.\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$.

Trong tam giác vuông BFC thì:

$FC = AC - AF = \dfrac{a}{2\sin\alpha} - \dfrac{a.\cos 2\alpha}{2\sin\alpha} = \dfrac{a - a.\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$ (4)



H.41

c) Từ (1) và (3) ta có:

$a\cos\alpha = \dfrac{a.\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (5)

Từ (2) và (4) ta có

$a\sin\alpha = \dfrac{a - a.\cos 2\alpha}{2\sin\alpha} \Rightarrow 2a\sin^2\alpha = a - a\cos 2\alpha$ (6)

Biến đổi (6) ta có:

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha$

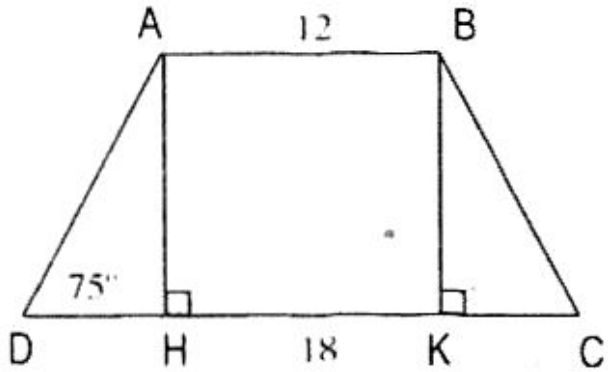
hay $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (7)

Từ (5) và (7) ta có:

$tg2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

Với $\cos\alpha \neq 0$, ta có:

$tg2\alpha = \dfrac{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$.



H.42

Bài 5. a) Trên hình 41 dựng AH⊥DC, ta có AH = 12.sin70°

Vậy $S_{ABCD} = 15.12.\sin 70°$

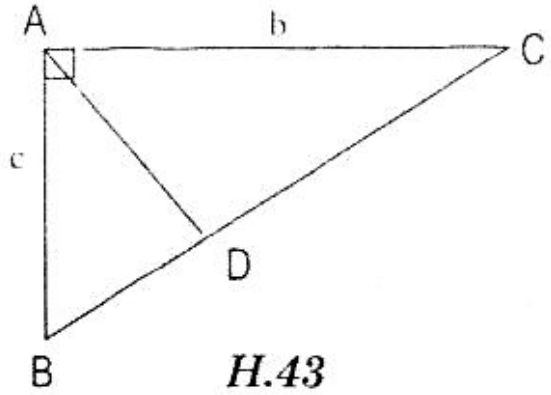
$\approx 15.12.0,9397 \approx 169$ (cm²)

b) Theo hình vẽ 42 ta có:

$AH = DH.tg75^\circ$

Theo tính đối xứng, ta có $DH = KC = 3cm$, nên $AH \approx 3.3,732 \approx 11,2$ (cm).

Vậy $S_{ABCD} = \frac{12+18}{2}.11,2 \approx 168\,(cm^2)$.



H.43

Bài 6. a) $A = \frac{1 + 2\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x.$$

b) $B = \cot gx + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

$$= \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

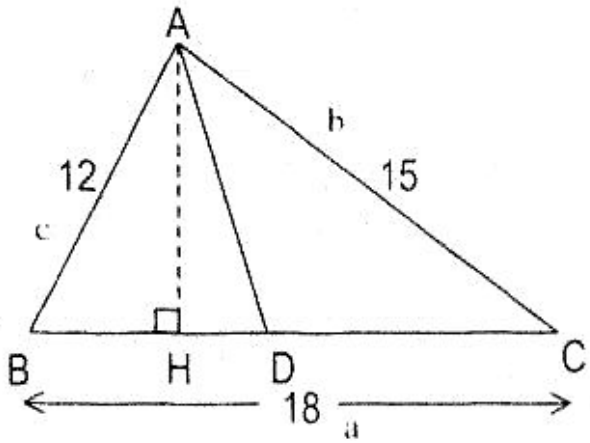
Bài 7. Theo hình vẽ 43, ta có

$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc$. (1)

Nhưng $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

$= \frac{1}{2}c.AD\sin 45^\circ + \frac{1}{2}b.AD\sin 45^\circ$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(b + c)\sin 45^\circ.AD$ (2)



H.44

Từ (1) và (2) có:

$\frac{1}{2}(b + c)\sin 45^\circ.AD = \frac{1}{2}bc$, suy ra: $AD = \frac{bc}{(b + c)\sin 45^\circ}$.

Bài 8. Theo tính chất của đường phân giác trong tam giác ta có:

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ (hình 44)

hay $\frac{DB}{BC} = \frac{4}{9} \Rightarrow DB = \frac{18.4}{9} = 8(cm)$.

Đặt BH = x, ta có:

$AB^2 - x^2 = AC^2 - (BC - x)^2$ (= AH^2) hay

$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$

$c^2 - x^2 = b^2 - (a^2 - 2ax + x^2)$

$2ax = a^2 + c^2 - b^2$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{18^2 + 12^2 - 15^2}{2.18} = 6,75(cm).$$

HD = BD - BH = 8 - 6,75 = 1,25 (cm)

Trong tam giác vuông ADH theo định lí Pitago có:

$AD^2 = AH^2 + HD^2 = AH^2 + (1,25)^2$ (1)

Trong tam giác vuông AHB có:

$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = 12^2 - (6,75)^2$ (2)

Từ (1) và (2) có:

$AD^2 = 12^2 - (6,75)^2 + (1,25)^2 \approx 116$.

Vậy AD ≈ 10,5cm.

§5. ĐƯỜNG TRÒN - TÍNH ĐỐI XỨNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Sự xác định đường tròn

1. Quỹ tích các điểm cách điểm O cho trước một khoảng cách không đổi r > 0 được gọi là đường tròn tâm O bán kính r.

Ký hiệu (O, r).

2. Quỹ tích các điểm M sao cho $\widehat{AMB}$ = 1v, trong đó AB là một đoạn thẳng cho trước, là đường tròn (I; $\frac{AB}{2}$) với I là trung điểm của AB.

3. Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

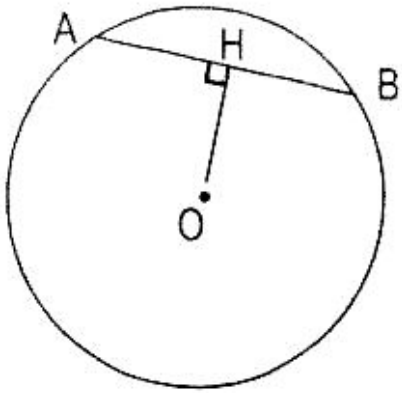
4. Qua ba điểm không thẳng hàng bao giờ cũng dựng được một đường tròn và chỉ một mà thôi.

Tính đối xứng

1- Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

- Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

2- Đường kính vuông góc với một dây cung thì chia dây cung ấy ra hai phần bằng nhau (hình 45)



H.45

Đảo lại, đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm thì vuông góc với dây cung ấy.

3- Trong một đường tròn hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

Trong hai dây cung không bằng nhau của một đường tròn dây cung lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I.Các bài toán điển hình

Bài 1. a) Chỉ dùng thước và compa hãy tìm tâm của các đĩa hình tròn.

b) Trong tất cả đường tròn đi qua hai điểm M và N cho trước, đường tròn nào có đường kính nhỏ nhất?

Bài 2. Dựng một đường tròn (I) qua hai điểm A và B cho trước và có tâm:

a) Ở trên đường thẳng m cho trước;

b) Ở trên đường tròn (K) cho trước.

Bài 3. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn đường kính AD. Từ điểm M bất kì trên cung nhỏ AC kẻ tia BM trên lấy điểm E sao cho ME = MC (E ở ngoài đoạn BM).

a) Chứng minh MD//EC;

b) AM kéo dài cắt CE tại P, chứng minh P là trung điểm của CE;

c) Chứng minh rằng đường tròn (A; AE) đi qua B và C)

d) Chứng minh MB + MC < AB + AC.

Bài 4. Cho đường tròn (I) và một điểm M trong đường tròn:

a) Dựng dây cung PQ đi qua M sao cho MP = MQ;

b) Dựng đường tròn (M) sao cho đường tròn (I) chia nó thành hai nửa đường tròn.

Bài 5. a) Cho ΔABC có hai đường cao là BB' và CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B, C', B', C cùng nằm trên một đường tròn. Có phải điểm A bao giờ cũng nằm ngoài đường tròn đó không?

b) Cho đường thẳng d và hai điểm M, N nằm về hai phía của d sao cho $MN \perp d$. Trên d lấy điểm P bất kì, vẽ đường tròn (I) qua ba điểm M; N, P có đường kính PQ. Khi P chạy trên d hãy tìm quỹ tích các điểm I và Q.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. Cho đường tròn (O, m) và cát tuyến MPQ trong đó M là điểm ngoài (O) và P, Q là giao điểm của cát tuyến với (O).

a) Tìm quỹ tích trung điểm N của PQ khi cát tuyến quay xung quanh điểm M.

b) Đường tròn đường kính MO cắt (O) tại E và F. Chứng minh tứ giác MEOF là hình vuông nếu $MO = m\sqrt{2}$.

c) Tìm vị trí của cát tuyến MPQ để tổng MP + MQ là lớn nhất.

Bài 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính MN. Vẽ dây PQ và gọi M' và N' là hình chiếu của M và N trên đường thẳng PQ với $MM' \leq NN'$. Gọi S là trung điểm của PQ và T là giao điểm của NN' với (O). Chứng minh rằng:

a) $OS \perp MT$;

b) MN.SS' = MT.SO trong đó S' là hình chiếu của S trên MN;

c) Tứ giác MM'N'N có diện tích bằng tích MN.SS'.

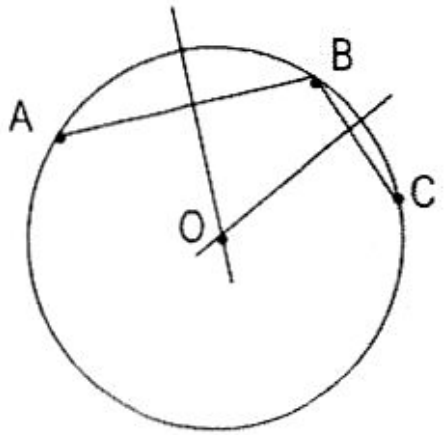
Bài 8. Cho ΔABC có ba góc nhọn và nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại M, cắt AC tại N. Chứng minh:

a) BN, CM và đường cao AP của ΔABC cắt nhau tại điểm H;

b) Bốn điểm A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn;

c) HB.HN = HC.HM = HA.HP.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

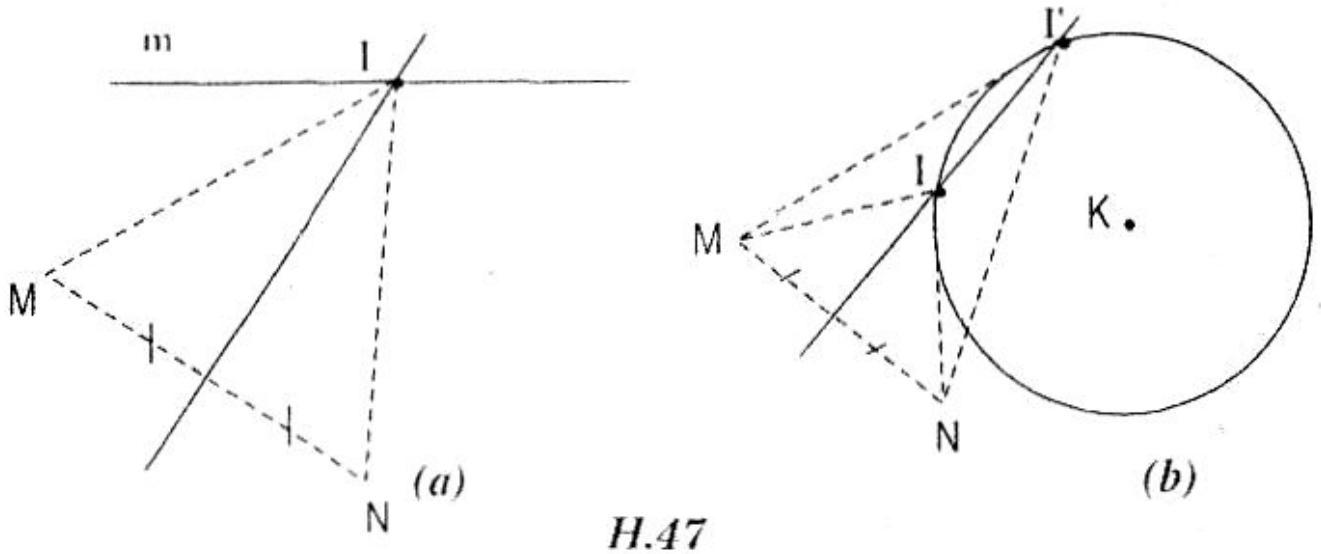


H.46

Bài 1. a) Chỉ cần lấy 3 điểm bất kì A, B, C trên vành đĩa (hình 46) rồi dựng hai đường trung trực của AB và BC. Giao điểm hai trung trực này chính là tâm O của đĩa hình tròn.

b) Tất cả đường tròn đi qua hai điểm M và N đều nhận MN là một dây cung. Do đó đường tròn nhận MN là đường kính là đường tròn có đường kính nhỏ nhất vì tất cả đường tròn khác có MN chỉ là một dây cung nên nhỏ hơn các đường kính của chúng.

Bài 2. Gọi I là tâm đường tròn phải dựng. I phải là giao điểm của đoạn thẳng AB:



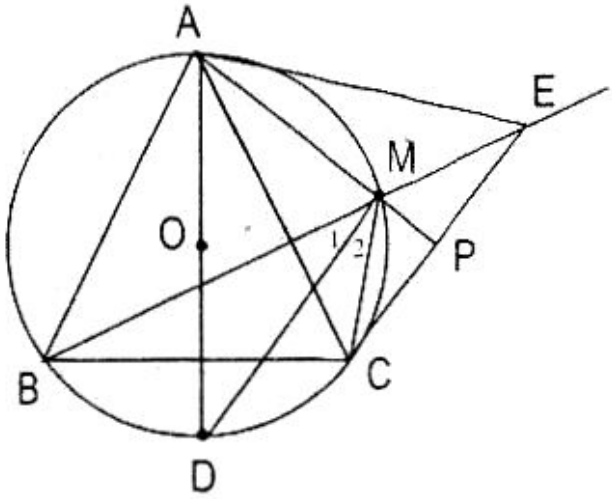
H.47

a) với đường thẳng m

b) với đường tròn (K).

Bài toán chỉ có nghiệm hình khi trung trực nói trên và đường thẳng m có điểm chung hoặc khi trung trực nói trên và đường tròn (K) có điểm chung (hình 47a và b).

Bài 3. a) Do ΔABC cân nên đường kính $AD \perp BC$ (hình 48) và đi qua điểm D trung điểm của cung nhỏ BC. Do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. Mặt khác ΔMCE cân (vì MC = ME theo giả thiết) nên hai góc ở đáy MCE = MEC.



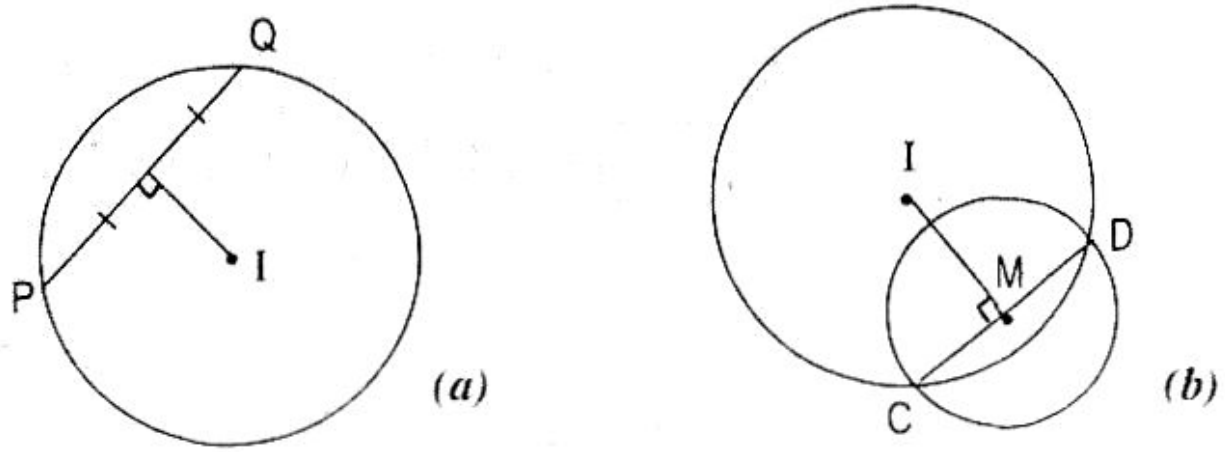
H.48

Ta có $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{MCE} + \widehat{MEC}$ (vì góc BMC là góc ngoài tại M của ΔMCE)

Suy ra $2\widehat{M_2} = 2\widehat{MCE}$ hay $\widehat{M_2} = 2\widehat{MEC}$ ở vị trí so le trong, do đó MD//EC.

b) Tam giác AMD vuông tại M vì trung tuyến $MO = \frac{1}{2}AD$. Do đó $AM \perp MD$, suy ra $AM \perp CE$. Như vậy MP là đường cao cũng là trung trực của ΔMCE cân. Suy ra P là trung điểm của CE.

c) Do AP là trung trực của CE nên AC = AE và AB = AC (gt), suy ra AB = AC = AE tức là đường tròn (A; AE) đi qua B và C.



H.49

d) Xét ΔABE ta có:

$BE < AB + AE$ mà $BE = MB + ME = MB + MC$ và

$AB + AE = AB + AC$.

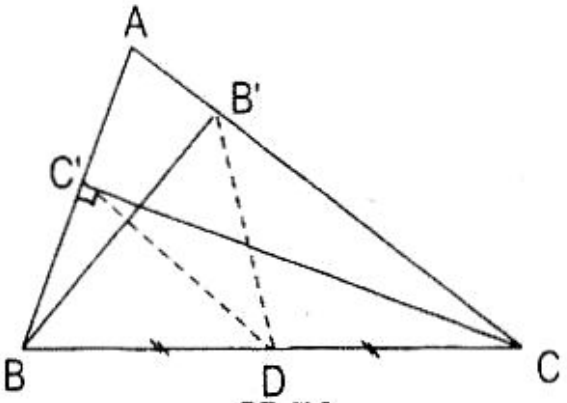
Vậy $MB + MC < AB + AC$.

Bài 4. a) Nối IM (vì MP = MQ theo gt) ta có $IM \perp PQ$. Suy ra cách dựng: Nối IM và qua M dựng dây $PQ \perp IM$ (hình 49a).

b) Giả sử đường tròn (I) chia đường tròn (M) thành hai nửa đường tròn theo đường kính CD ta có $IM \perp CD$. Suy ra cách dựng sau: Nối IM và qua M dựng dây $CD \perp IM$. Đường tròn (M) là đường tròn có đường kính là CD (hình 49b).

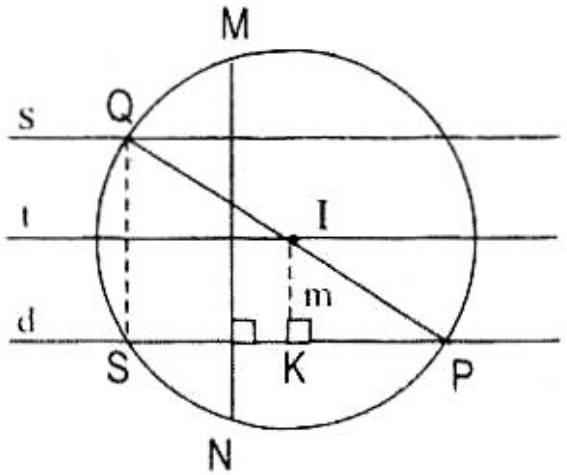
Bài 5. a) Gọi D là trung điểm của BC. Xét $\Delta BC'C$ vuông tại C' ta có trung tuyến C'D bằng nửa cạnh huyền BC tức là C'D = DB = DC (hình 50). Tương tự trong $\Delta BB'C$ vuông tại B' ta có: B'D = DB = DC.

Suy ra DB = DC' = DB' = DC. Vậy bốn điểm B, C', B', C cùng nằm trên một đường tròn tâm D.



H.50

Điểm A có thể nằm ngoài (như ở hình vẽ) tức là khi đó góc A nhọn và $AD > \frac{1}{2}BC$, điểm A còn có thể nằm trong đường tròn (D) khi góc A tù và $AD < \frac{1}{2}BC$, điểm A cũng có thể nằm trên đường tròn (D) khi góc A vuông và $AD = \frac{1}{2}BC$.



H.51

b) Khi P chạy trên d thì quỹ tích của điểm I là trung trực t của MN. Trung trực này song song với d (hình 51).

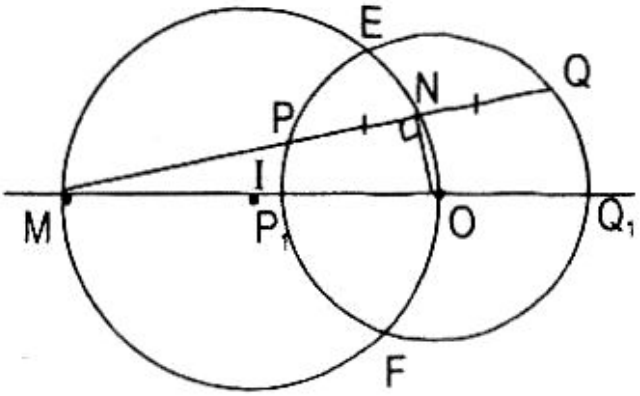
Khoảng cách từ I đến d là IK = m không đổi, mà IK là đường trung bình trong ΔQSP nên QS = 2m. Do đó quỹ tích

của Q là đường thẳng s song song với d và cách d một khoảng bằng 2m nằm cùng phía với t đối với d.

Lưu ý nếu d là trung trực của MN thì đường thẳng s sẽ trùng với đường thẳng d.

Bài 6. a) Nối O với trung điểm N của PQ ta có ON ⊥ PQ (hình 52). Đoạn thẳng MO cố định, $\widehat{MNO}$ = 1v. Vậy quỹ tích của N là đường tròn đường kính MO.

Do N nằm trong đường tròn (O) nên quỹ tích của N chỉ là cung nhỏ EF nằm trong (O).



H.52

b) Tam giác MEO vuông vì trung tuyến EI bằng $\frac{1}{2}$ MO.

Theo định lí Pitago ta có:

$MO^2 = ME^2 + EO^2$ hay $2m^2 = ME^2 + m^2$

Suy ra ME = m.

Tương tự ta tính được MF = m. Vậy tứ giác MEOF có bốn cạnh bằng nhau và $\widehat{MEO}$ = 1v là một hình vuông.

c) Gọi MP_1Q_1 là vị trí của cát tuyến khi đi qua tâm O. Ta hãy chứng minh rằng đó là vị trí để tổng MP + MQ là lớn nhất. Muốn vậy ta chứng minh rằng $MP_1 + MQ_1$ luôn lớn hơn MP + MQ.

Thật thế ta có:

$MP + MQ = MP + MP + PQ = 2(MP + PN) = 2MN$

và $MP_1 + MQ_1 = MP_1 + MP_1 + P_1Q_1 = 2(MP_1 + P_1O) = 2MO$

Nhưng MO > MN nên $MP_1 + MQ_1 > MP + MQ$.

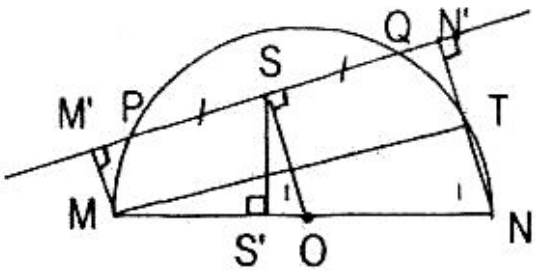
Bài 7. a) Tam giác MTN vuông tại T vì OT = $\frac{1}{2}$MN. Suy ra MT//M'N' (hình 53). Do S là trung điểm của PQ nên OS ⊥ PQ, hay OS ⊥ M'N'. Nhưng MT//M'N', do đó OS ⊥ MT.

b) Ta có OS//NN' nên $\widehat{O}_1 = \widehat{N}_1$ (đồng vị). Do đó hai tam giác vuông MTN và SS'O đồng dạng. Từ đó:

$\frac{MN}{SO} = \frac{MT}{SS'} \Rightarrow MN.SS' = MT.SO.$

c) Trong hình thang vuông MM'N'N ta có OS là đường trung bình. Vậy diện tích hình thang là:

$\frac{MM'+NN'}{2}.MT = SO.MT =$ MN.SS' (theo câu b).



H53

Bài 8. a) Tam giác BMC có trung tuyến $MO = \frac{1}{2}BC$ là tam giác vuông tại M tức là CM ⊥AB (hình 54).

Tương tự ΔBNC vuông tại N ta có BN ⊥AC.

Vậy trong ΔABC ba đường cao AP, BN và CM cắt nhau (đồng quy) tại H.

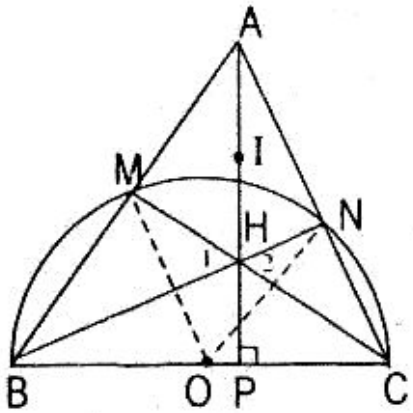
b) Gọi I là trung điểm của AH. Hai tam giác vuông AMH và ANH có chung cạnh huyền AH và có trung tuyến MI và NI nên:

IM = IN = IA = IH.

Điều này chứng tỏ I là tâm của một đường tròn đi qua bốn điểm A, M, H, N.

c) Xét hai tam giác vuông đồng dạng HMB và HNC (vì có góc nhọn $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$) ta có:

$\frac{HB}{HC} = \frac{HM}{HN}$, suy ra HB.HN = HC.HM (1)



H54

Tương tự hai tam giác vuông HMA và HPC cũng đồng dạng (góc nhọn đối đỉnh tại H bằng nhau) ta có:

$\frac{HM}{HP} = \frac{HA}{HC}$, suy ra HC.HM = HA.HP (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ thức phải chứng minh:

HB.HN = HC.HM = HA.HP

§6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN, CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN - TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Vị trí tương đối

1. Cho đường thẳng a và đường tròn (O, R), gọi d là khoảng cách từ O đến a ta có ba vị trí tương đối sau đây của đường thẳng và đường tròn:

a) Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

$d > R$ (0 có điểm chung)

b) Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn

$d = R$ (1 điểm chung)

c) Đường thẳng cắt đường tròn $d < R$ (2 điểm chung)

2. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) với $R \geq r$ và d là khoảng cách giữa hai tâm ($d = OO'$), ta có các vị trí tương đối sau đây của hai đường tròn:

a) Hai đường tròn cắt nhau

$R - r < d < R + r$ (2 điểm chung)

b) Hai đường tròn tiếp xúc nhau

- tiếp xúc ngoài $d = R + r$
- tiếp xúc trong $d = R - r$ (1 điểm chung)

c) Hai đường tròn không giao nhau

- ở ngoài nhau $d > R + r$
- đường tròn lớn đựng đường tròn nhỏ

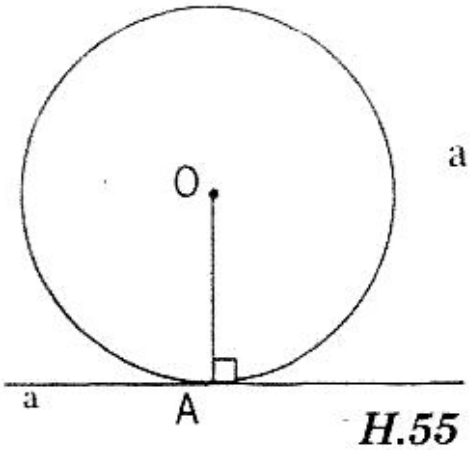
$d < R - r$ (0 có điểm chung)

Tiếp tuyến

1. Một đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của một đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

Có hai tính chất quan trọng sau đây của tiếp tuyến:

1) Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

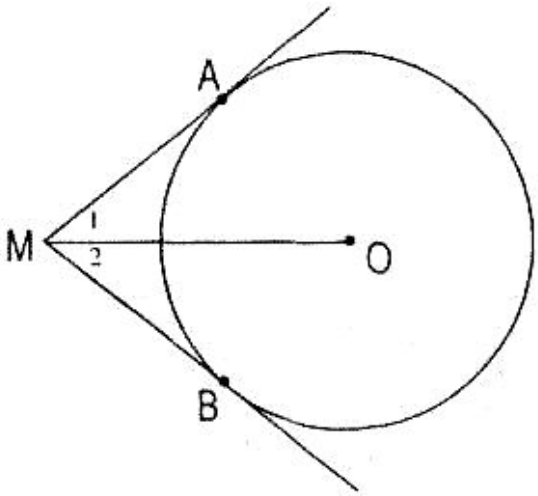


a là tiếp tuyến tại A $\Leftrightarrow$ $a \perp OA$

H.55

Đảo lại, nếu một đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

2) Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì giao điểm này cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến (hình 56).



MA, MB là tiếp tuyến tại A, B

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} MA = MB \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \end{cases}$$

H.56

2. Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với cả ba cạnh của tam giác. Tam giác đó gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.

Đường tròn bàng tiếp của tam giác là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia.

Mọi tam giác có 1 đường tròn nội tiếp và 3 đường tròn bàng tiếp.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. a) Từ một điểm A ngoài đường tròn (O) kẻ hai

tiếp tuyến AM và AN với đường tròn. Từ O kẻ OP ⊥ OM, P là giao điểm của đường vuông góc này với AN. Từ A kẻ AQ ⊥ AM, Q là giao điểm của đường vuông góc này với ON.

Chứng minh rằng PA = PO và QA = QO.

b) Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN. Từ điểm O trên nửa đường tròn ta hạ PP' ⊥ MN và trên OP lấy đoạn OQ = PP'. Tìm quỹ tích điểm Q khi P chạy trên nửa đường tròn.

Bài 2. 1. Cho đường tròn tâm I nội tiếp trong tam giác ABC vuông cân tại A và K là một điểm chạy trên BC. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của K trên AB, AC và P là trung điểm của BC.

Chứng minh 5 điểm A, M, K, N, P cùng nằm trên một đường tròn tâm O và tìm quỹ tích của điểm O này.

2) Cho đường tròn (O) và một cát tuyến d không qua O. Từ một điểm M trên d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Đường vuông góc với đường kính BC tại O cắt CA kéo dài ở D.

a) Chứng minh AC//MO và tứ giác CDMO là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của M trên d để tam giác MAB là đều.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A. Đường tròn tâm O qua A tiếp xúc với BC tại B và đường tròn tâm I qua A tiếp xúc với BC tại C.

a) Chứng minh hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A.

b) Từ O kẻ đường vuông góc với AB và từ I kẻ đường vuông góc với AC. Chứng minh chúng cắt nhau tại trung điểm M của BC.

c) Chứng minh MO⊥ MI.

d) Kéo dài BA cắt đường tròn (I) ở P, chứng minh ba điểm C, I, P thẳng hàng.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và

B sao cho $\widehat{OAO'} = 90^\circ$. Qua A kẻ cát tuyến MAM' vuông góc với AP (P là trung điểm của OO'. M và M' theo thứ tự là giao điểm của cát tuyến với các đường tròn tâm O và O').
Chứng minh:

a) AM = AM';

b) Tam giác ABM cân;

c) BM ⊥ BM'.

d) Với vị trí nào của cát tuyến thì MAM' có độ dài lớn nhất?

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc ngoài tại M và tiếp tuyến chung trong Mt. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài với (O) tại P và với (I) tại Q, cắt Mt ở N. Kẻ các đường kính POP' và QIQ'.

a) Chứng minh rằng N là trung điểm của PQ và tam giác ONI vuông.

b) Chứng minh ba điểm P, M, Q' thẳng hàng và ba điểm Q, M, P' cũng thẳng hàng.

c) Gọi S là trung điểm của P'Q', chứng minh rằng đường thẳng PQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OSI.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. 1) Qua điểm M trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R vẽ tiếp tuyến với (O). Gọi A' và B' là chân các đường vuông góc hạ từ A và B xuống tiếp tuyến. Đoạn AA' cắt (O) tại C.

a) Chứng minh tổng các khoảng cách AA' + BB' có giá trị không đổi.

b) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn để tứ giác AA'B'C có diện tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Từ điểm P trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến tại P cắt hai tiếp tuyến Ax và By với (O) ở C và D.

a) Chứng minh tích các khoảng cách từ C và D đến AB

có giá trị không đổi.

b) Xác định vị trí của P để tứ giác ACDB có diện tích nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 7. 1) Cho nửa đường tròn đường kính AB và tia tiếp tuyến At cùng phía với nửa đường tròn. Từ điểm P trên At kẻ tiếp tuyến thứ hai PM rồi hạ MN vuông góc với AB. Chứng minh BP đi qua trung điểm của MN.

2) Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng d ngoài (O). Từ điểm M trên d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB. Gọi I là hình chiếu của O trên d. Nối AB cắt MO tại H và OI tại K.

Chứng minh $OH.OM = OK.OI = R^2$ và đoạn AB luôn đi qua một điểm cố định khi M chạy trên d.

Bài 8. 1) Cho hai đường tròn (O), và (O') có bán kính R và r (R > r) tiếp xúc ngoài tại P. Gọi PM và PN là hai đường kính của (O) và (O'). Dây QS của (O) vuông góc với MN tại trung điểm H của MN, QP kéo dài cắt (O') tại K.

a) Tứ giác MQNS là hình gì?

b) Chứng minh ba điểm S, K, N thẳng hàng.

c) QN cắt (O') tại I, chứng minh QK, SI và MN đồng quy.

d) Chứng minh HKlà tiếp tuyến của đường tròn (O')

2) Cho đường tròn lớn (I) tiếp xúc trong với đường tròn nhỏ (K) tại A. Kẻ các đường kính AC và AB của (K) và (I). Gọi D là trung điểm của đoạn CB.

Qua D kẻ dây cung EF của (I) vuông góc với AB. Nối AE cắt (K) tại G.

a) Tứ giác CEBF là hình gì?

b) Chứng minh ba điểm F, C, G thẳng hàng.

c) Chứng minh DG là tiếp tuyến của đường tròn (K).

d) Chứng minh hệ thức $DG^2 = DA.DC$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

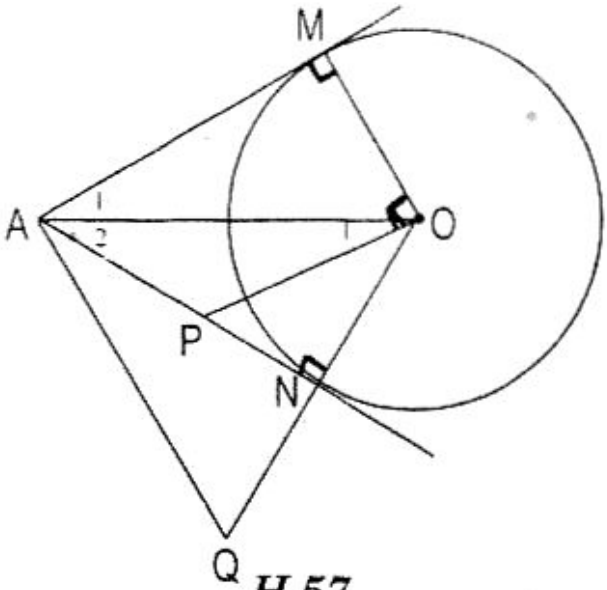
Bài 1. 1) Do AM và AN là hai tiếp tuyến kẻ từ A với đường tròn (O) nên tia AO là phân giác của góc MAN, tức

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (hình 57).

Ta lại có OP//AM (vì cùng vuông góc với OM). Suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong)

Mà góc $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{O_1}$, do đó tam giác APO cân, vậy PA = PO.

- Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{OAQ}$ (so le trong) và $\widehat{AOM} = \widehat{AON}$ (đối xứng qua OA). Suy ra $\widehat{AOQ} = \widehat{AON}$, do đó tam giác AQO cân, vậy QA = QO.



H.57

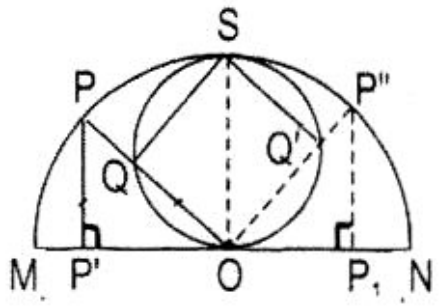
2) *Phần thuận:* Từ O kẻ OS vuông góc MN (hình 58), ta có OS cố định. Xét ΔPP'O = ΔOQS (c.g.c). Do PP' = OQ (gt), $\widehat{P'PO} = \widehat{POS}$ (so le trong) và OP = OS (bán kính). Suy ra $\widehat{SQO}$ = 1v.

Đoạn OS cố định, góc SQO vuông nên Q chạy trên đường tròn đường kính SO.

Phần đảo: Cho Q' là điểm bất kì trên đường tròn đường kính SO. Nối OQ' cắt (O) tại P". Kẻ $P''P_1 \perp MN$ ta phải chứng minh $P''P_1 = OQ'$.

Thật vậy, xét hai tam giác vuông bằng nhau OQ'S và OP_1P'' (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau), ta có $P''P_1 = OQ'$.

Kết luận: Quỹ tích điểm Q là đường tròn đường kính OS.



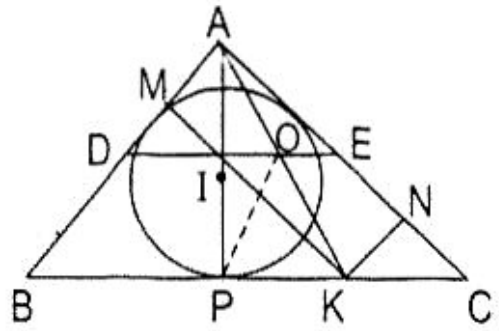
H.58

Bài 2. 1) Tứ giác AMKN có ba góc vuông là hình chữ nhật, suy ra giao điểm O giữa các đường chéo của nó cách đều 4 đỉnh A, M, K, N (hình 59).

Trong tam giác vuông APK, trung tuyến OP bằng nửa cạnh huyền AK. Từ đó: OA = OM = OK = ON = OP. Vậy 5

điểm A,M,K,N,P cùng nằm trên một đường tròn tâm O giao điểm của AK và MN.

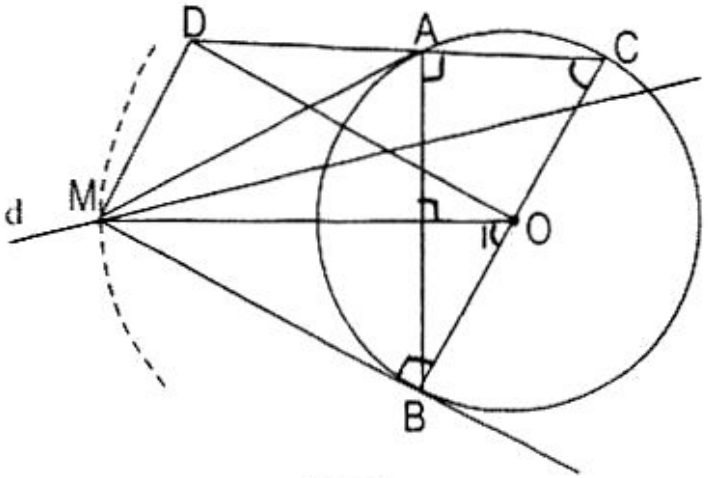
* Qua trung điểm O của AK dựng đường DE//BC ta có DE là đường trung bình của ΔABC. Do đó khi K chạy trên BC thì O chạy trên DE. (Bạn đọc tự chứng minh phần đảo).



H.59

Vậy quỹ tích của tâm O là đường trung bình DE của ΔABC.

2) a. Tam giác ABC vuông ở A vì có trung tuyến AO bằng nửa cạnh BC. Lại có MO⊥AB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Vậy AC//MO vì cùng vuông góc với AB (hình 60).



H.60

b. AC//MO nên $\widehat{C} = \widehat{O}_1$ (đồng vị). Xét hai tam giác vuông bằng nhau BMO và ODC (cạnh góc vuông và góc nhọn), ta có DC = MO. Suy ra tứ giác CDMO có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

c. *Nhận xét*: Khi ΔMAB đều thì $\widehat{BMO} = 30^\circ$. Tam giác vuông BMO có cạnh OB đối diện góc 30° nên $OB = \frac{1}{2}MO$. Suy ra MO bằng đường kính đường tròn (O). Do đó nếu vẽ đường tròn tâm O bán kính bằng đường kính của (O) thì giao điểm của đường tròn này với cát tuyến d chính là vị trí cần xác định.

Vì khoảng cách từ O đến d luôn nhỏ hơn đường kính của (O) nên bài toán có 2 nghiệm hình tức là có hai điểm M

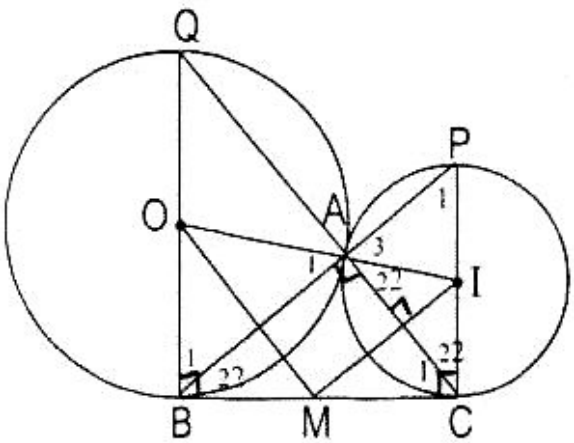
và M`.

Bài 3. a.ΔOAB cân tại O (vì OA = OB = bán kính) nên $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ (hình 61).

Nhưng $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (1).

Tương tự ΔIAC cân tại I nên $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 90^o$ và $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{BAC} = 180^o$. Vậy ba điểm O, A, I thẳng hàng. Mà OA, IA là bán kính của các đường tròn này tiếp xúc nhau tại A.



H.61

b.Đường vuông góc với AB kẻ từ O cũng là trung trực của AB cắt BC tại M_1 chẳng hạn nên $M_1B = M_1A$ và $M_1A \perp OA$. Tương tự trung trực của AC cắt BC tại M_2 nên $M_2A = M_2C$ và $M_2A \perp IA$. Suy ra M_1A và M_2A phải là tiếp tuyến chung của (O) và (I) tại A, tức là $M_1A \equiv M_2A$. Vậy M_1 trùng với M_2.

Theo các chứng minh trên ta có MB = MA = MC, tức là M là trung điểm của BC.

c. Ta có $\widehat{OMI} = \widehat{BAC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), mà $\widehat{BAC} = 90^o$ nên $\widehat{OMI} = 90^o$. Vậy $MO \perp MI$.

d. Ta có $\widehat{PIA} = 180^o - 2\widehat{A}_3$ (vì ΔIAP cân) và $\widehat{AIC} = 180^o - 2\widehat{A}_2$ (vì ΔIAC cân). Suy ra $\widehat{PIA} + \widehat{AIC} = 360^o - 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3)$. Mà $\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 90^o$ nên $\widehat{PIA} + \widehat{AIC} + 180^o$.

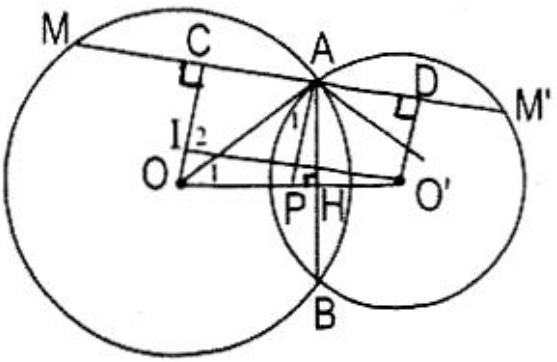
Vậy ba điểm P, I, C thẳng hàng.

Lưu ý: -Sau này khi học về góc nội tiếp sẽ có cách chứng minh nhanh hơn.

Bài 4. a. Kẻ OC và O'D vuông góc với cát tuyến MM' ta

có C và D là trung điểm của MA và M'A (hình 62).

Do P là trung điểm của OO' và OC//AP//O'D (vì cùng vuông góc với MM') nên A là trung điểm của CD tức là AC = AD. Suy ra AM = AM'.



H.62

b. Trong tam giác vuông AOO', điểm P là trung điểm của cạnh huyền OO' nên OP = AP, do đó $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_1$. Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_2$ (so le trong), suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Xét hai tam giác vuông OCA và OHA bằng nhau (cạnh huyền và góc nhọn), ta có AC = AH hay AM = AB. Vậy ΔAMB cân tại A.

c. Chứng minh tương tự ta có AB = AM'. Như vậy ΔMBM' có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng là tam giác vuông đỉnh B. Vậy BM ⊥ BM'.

d. Từ O' kẻ O'I ⊥ OC, ta có O'I = CD (vì tứ giác OCDO' là hình chữ nhật). Trong ΔOO'I vuông tại I cạnh huyền OO'luôn lớn hơn cạnh góc vuông O'I, do đó 2O'I = 2CD = MM'. Độ dài MM' sẽ có giá trị lớn nhất khi bằng 2 OO'. Khi đó cát tuyến MAM' sẽ song song với OO'.

Bài 5. a. Ta có NP và NM là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên NP = NM. Tương tự NM và NQ là hai tiếp tuyến của (I) nên NM = MQ (hình 63). Suy ra NP = NQ, tức là N là trung điểm của PQ.

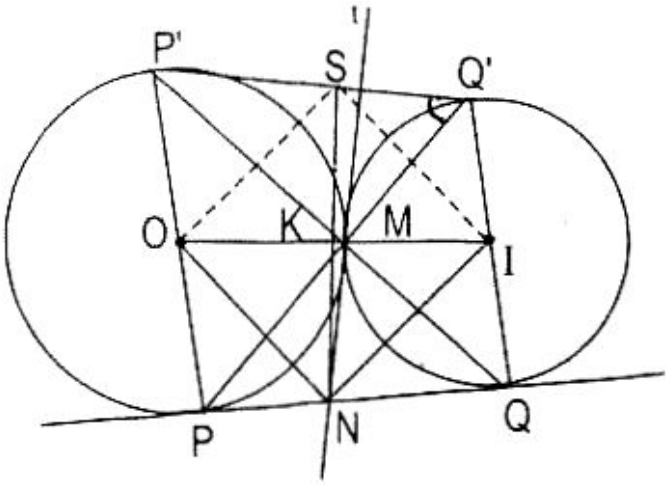
Theo tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ N nên ta có NO và NI là phân giác của các góc PNM và MNQ. Mà hai góc này kề bù do đó $\widehat{ONI} = 90^\circ$, vậy tam giác ONI vuông tại N.

b. Các tam giác PMQ và QMQ' có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng nên là những tam giác vuông tại M. Do đó

ba điểm P, M, Q' thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có ba điểm Q, M, P' thẳng hàng.

c. Trước hết ta chứng minh tứ giác OSIN là hình chữ nhật. Thật vậy ta có OS//PQ', ON//P'Q (tính chất đường trung bình của tam giác).



H.63

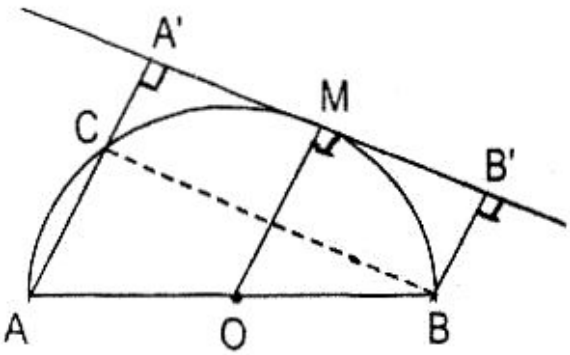
Mà PQ' ⊥P'Q (theo chứng minh trên) nên OS ⊥ ON hay $\widehat{SON} = 90°$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ONI} = \widehat{SIN} = 90°$, do đó OSIN là hình chữ nhật. Suy ra đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật này cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔOSI.

Xét hình thang PP'Q'Q (PP'//QQ' vì cùng vuông góc với PQ). Ta có SN là đường trung bình nên SN ⊥ PQ. Do đó đường tròn đường kính SN tiếp xúc với đường thẳng PQ.

Vậy PQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔOSI.

Bài 6. 1) a. Ta có AA'//BB'//OM vì cùng vuông góc với tiếp tuyến tại M (hình 64).



H.64

Tứ giác AA'B'B là hình thang vuông có OM là đường trung bình nên

$$OM = \frac{AA' + BB'}{2}.$$

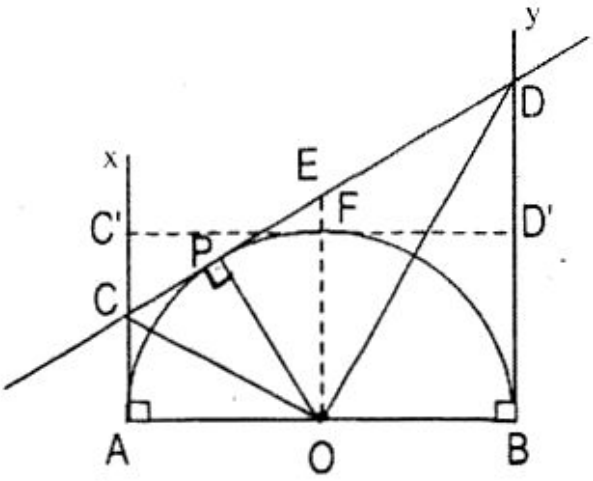
Suy ra AA' + BB' = 2.OM = 2R không đổi.

b. Diện tích hình thang vuông AA'B'B bằng

$\frac{AA'+BB'}{2} \cdot A'B'$.

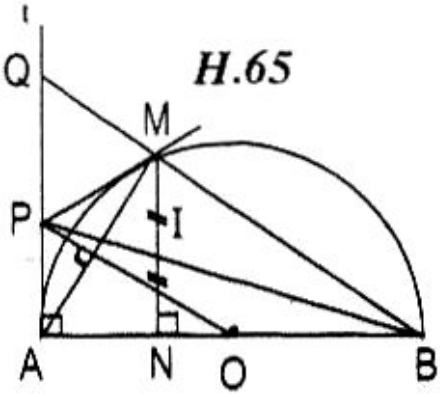
Do tổng AA' + BB' không đổi bằng 2R nên diện tích này lớn nhất khi A'B' lớn nhất.

Trong tam giác vuông ACB tại C (vì trung tuyến OC = $\frac{1}{2}$AB) ta có AB>BC mà BC = A'B' (tính chất đoạn chắn) nên AB > A'B'.Do đó A'B' lớn nhất khi bằng AB tức là A'B'= 2R. Khi đó M sẽ ở chính giữa nửa đường tròn (O) và tiếp tuyến tại M sẽ song song với AB.



H.65

Giá trị lớn nhất của diện tích bằng $\frac{2R}{2}.2R = 2R^2$.



H.66

2) a.Theo tính chất hai tiếp tuyến cùng phát xuất từ một điểm ta có CA = CP, DB = DP và OC,OD theo thứ tự là phân giác của hai góc ACP và BDP (hình 65).

Suy ra $\widehat{COD} = 90^o$. Trong tam giác vuông COD ta có OP là đường cao nên OP^2 =PC.PD (theo hệ thức $h^2 = b'c'$) hay tích PC.PD = AC.BD = R^2 không đổi.

b. Hình thang vuông ACDB có OE là đường trung bình (E là trung điểm của CD). Diện tích của nó bằng $\frac{AC+BD}{2}.AB$ = AB.OE = 2R.OE và có giá trị nhỏ nhất khi OE = R = OF. Khi đó tiếp tuyến CD sẽ song song với AB và hình thang vuông ACDB sẽ trở thành hình chữ nhật AC'D'B.

Giá trị nhỏ nhất của diện tích bằng $2R.R = 2R^2$.

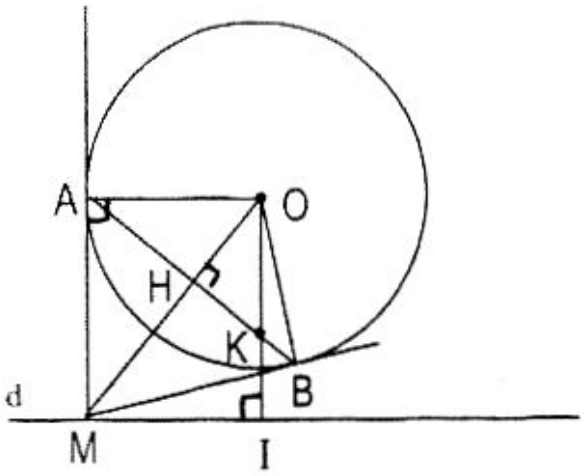
Bài 7. 1) Kéo dài BM cắt At ở Q (hình.66). Ta có

OP//BQ vì cùng vuông góc với AM. Do đó P là trung điểm của AQ. Lại có MN//AQ (cùng vuông góc với AB). Theo định lí Talet ta có:

$$\frac{NI}{AP} = \frac{BI}{BP} \text{ và } \frac{IM}{PQ} = \frac{BI}{BP}.$$

Suy ra $\frac{NI}{AP} = \frac{IM}{PQ}$.

Vì AP = PQ nên NI = IM, tức là BP đi qua trung điểm I cố định của MN.



H.67

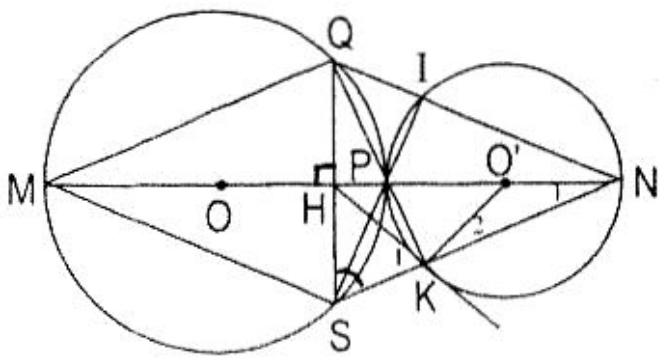
2) Xét hai tam giác vuông OHK và OIM đồng dạng vì có góc O chung (Do OI ⊥ d, OM ⊥ AB) (hình 67).

Suy ra: $\frac{OH}{OI} = \frac{OK}{OM}$ hay OH.OM = OK.OI.

Trong tam giác vuông AOM, AH là đường cao nên ta có: OA^2 = OH.OM. Vậy OH.OM = OK.OI = R^2.

Từ hệ thức này ta có: OK = $\frac{R^2}{OI}$ trong đó OI có độ dài không đổi vì O và d cố định, Suy ra OK không đổi và K cố định. Vậy khi M chạy trên d thì AB luôn đi qua điểm K cố định trên OI.

Bài 8. 1) a. Tứ giác MQNS là hình bình hành vì hai đường chéo MN và QS cắt nhau tại trung điểm H của mỗi đường (hình 68). Hình bình hành này có hai đường chéo vuông góc tại H là hình thoi.



H.68

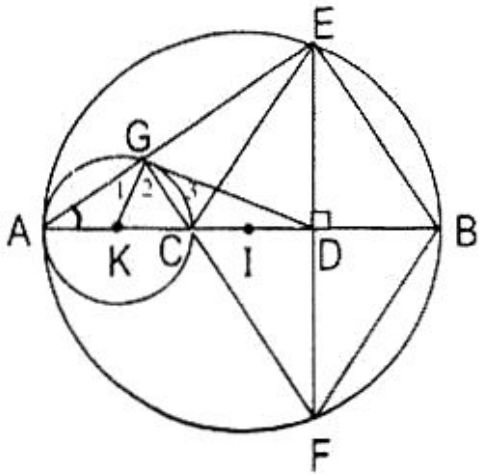
b. Ta có NS//MQ (theo trên). Nối NK có $\widehat{MQK} = \widehat{NKP} = 90^o$ (vì các tam giác MQP và NKP vuông do có trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng). Suy ra NK//MQ.

Vậy NS//MQ và NK//MQ mà qua N theo tiên đề Ơclit chỉ có một đường thẳng duy nhất song song với MQ. Do đó ba điểm S,K,N phải thẳng hàng.

c. Ta có PI ⊥ QN và SP ⊥ QN. Nhưng qua P chỉ có một đường vuông góc duy nhất với QN. Do đó ba điểm S,P,I phải thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng QK, SI và MN phải đồng quy tại P và P chính là trực tâm của ΔQSN.

d. Xét tam giác vuông QKS có KM là trung tuyến nên ΔKHS là cân, suy ra $\widehat{QSN} = \widehat{K_1}$. Lại có $\widehat{N_1} = \widehat{K_2}$, mà $\widehat{S} + \widehat{N_1} = 90^o$ nên $\widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 90^o$. Suy ra $\widehat{HKO'} = 90^o$. Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

2) a. Do EF ⊥ IB nên DE = DF, mặt khác DC = DB (gt). Do đó CEBF là hình bình hành. Hình bình hành này có hai đường chéo EF ⊥ CB là hình thoi (hình 69).



H.69

b. Các tam giác AGC và AEB vuông tại G và E (trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng) nên CG ⊥ AE (theo câu a), mà qua C chỉ có một đường thẳng duy nhất song song với BE (theo tiên đề Ơclit). Vậy ba điểm F,C,G phải thẳng hàng.

c. Để chứng minh DG là tiếp tuyến của (K), hãy xem câu d của bài 8 (1) ở trên.

d.Xét hai tam giác đồng dạng DGC và DAG có D chung, $\widehat{A} = \widehat{G_3}$ (vì $\widehat{A} = \widehat{G_1}$ mà $\widehat{G_1} + \widehat{G_2} = 90^o = \widehat{G_2} + \widehat{G_3}$), ta có:

$$\frac{DG}{DA} = \frac{DC}{DG} \text{ hay } DG^2 = DA.DC.$$

§7. GÓC NỘI TIẾP - CUNG CHỨA GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Liên hệ giữa cung và dây

1. Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm đường tròn.

2. Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:

a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau;

b) Đảo lại, hai dây bằng nhau trương hai cung bằng nhau.

3. Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn.:

a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn;

b) Dây lớn hơn trương cung lớn hơn.

4. Hai cung chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau (hình 70).

Góc nội tiếp

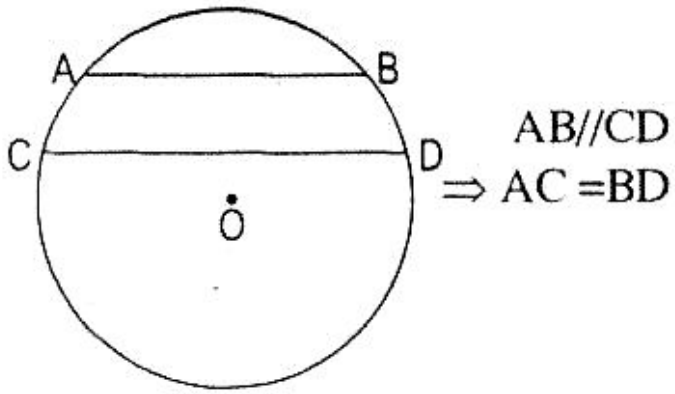
1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh trên đường tròn và hai cạnh của nó cắt đường tròn đó.

2. Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Suy ra:

a) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau của một đường tròn thì bằng nhau.

b) Trong một đường tròn mọi góc nội tiếp ($\leq 90^o$) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

c) Mọi góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



H.70

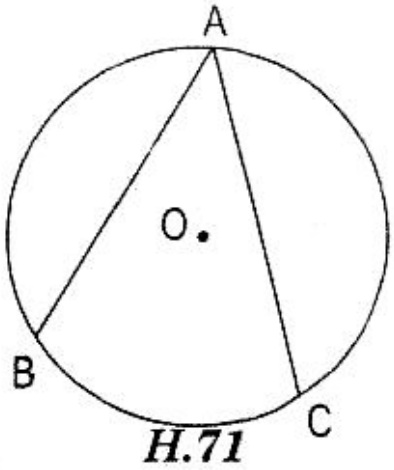
3. Góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cung đi qua tiếp điểm có số đo bằng nửa số đo của cung bị chắn (hình 72).

4. Góc có đỉnh:

a) Ở bên trong đường tròn có số đo bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn (hình 73a);

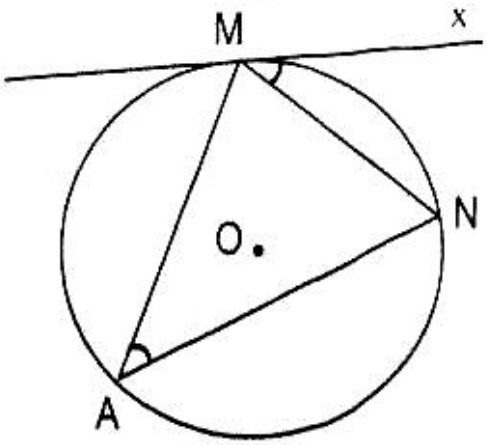
b) Ở bên ngoài đường tròn có số đo bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn (hình 73b).

5. Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc AMB có số đo không đổi bằng α ($0^o < \alpha < 180^o$) là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.



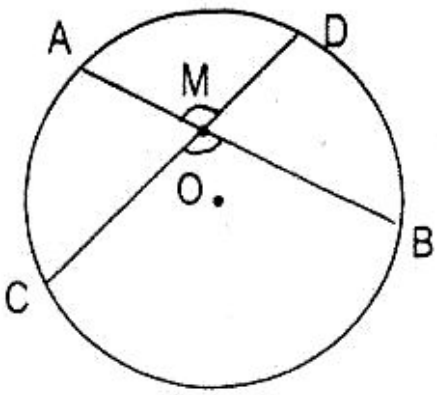
H.71

$sđ\widehat{A} = \frac{1}{2} sđ\ \overset{\frown}{BC}$



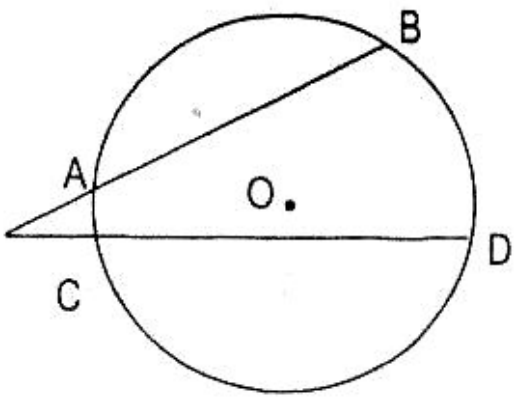
H.72

Mx là tiếp tuyến $\widehat{xMN} = \widehat{A}$
(cùng chắn cung MN)



$sđ\widehat{M} = \frac{1}{2} sđ(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB})$

(a)



$sđ\widehat{M} = \frac{1}{2} sđ(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$

(b)

H.73

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. 1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Hai điểm P và Q chia nửa đường tròn thành ba cung bằng nhau.

a) Tứ giác PQBO là hình gì? Tính góc PQB.

b) Tứ giác OBPM là hình gì khi M ở chính giữa cung AP?

c) Kéo dài OM và BP cắt tiếp tuyến tại A theo thứ tự ở N và ở S, chứng minh ON = AS.

2. Cho nửa đường tròn tâm I đường kính EG. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ hai dây $MN = NP = \frac{1}{2}EG$.

a) Chứng minh IM//NP.

b) Gọi Q là giao điểm của MP và IN, và gọi M',N', P',Q' là các hình chiếu của N,M,P,Q trên đường kính EG. Chứng minh 4 điểm M,M',I,Q nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh Q' là trung điểm của IN' và của M'P'.

Bài 2. 1. Cho hai đường tròn (O,R) và (O',r) với R > r cắt nhau tại A,B. Tiếp tuyến tại B với (O) cắt (O') ở C và tiếp tuyến tại B với (O') cắt (O) tại D.

a) Chứng minh hai tam giác ABC và ADB đồng dạng và BA là phân giác góc CAD.

b) Chứng minh hệ thức $\frac{BC^2}{BD^2} = \frac{AC}{AD}$.

2. Từ điểm M ngoài đường tròn (I) kẻ hai tiếp tuyến ME,MF rồi từ E kẻ đường song song với MF cắt (I)tại G. Gọi H là giao điểm của MG với (I) và K là giao điểm của EH với MF.

a) Chứng minh hệ thức $KF^2 = KE.KH$.

b) Chứng minh $\widehat{HMK} = \widehat{MEH}$ và K là trung điểm của MF.

c) Chứng minh rằng nếu góc EMF bằng 60° và MG là tia phân giác của góc đó thì $FH \perp ME$.

Bài 3. 1. Cho đường tròn tâm O và dây AD. Hai điểm B,C chia cung nhỏ AD thành ba phần bằng nhau. Gọi M là giao điểm của AB với DC và N là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và D. Chứng minh:

a) $\widehat{BMC} = \widehat{BND}$.

b) BC là tia phân giác của $\widehat{NBD}$. Tứ giác ABCD là hình gì?

2. Cho đường tròn tâm I và dây CD. Trên CD lấy hai điểm E, F và nối trung điểm M của cung CD với E và F. Gọi N và P theo thứ tự là giao điểm của hai đường thẳng ME và MF với đường tròn (I). Chứng minh:

a) $\widehat{MND} = \widehat{MPC}$ và hai góc NEF, NPF bù nhau;

b) Tia phân giác của góc CMD đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) với AB >AC. Đường cao AM cắt (O) tại P. Gọi N là điểm đối tâm của A và K là trực tâm của tam giác. Kẻ OD $\perp$ BC và kéo dài OD cắt (O) tại E. Chứng minh:

a) Tứ giác BNPC là hình thang cân;

b) NP = 2DM;

c) AE là tia phân giác góc NAP;

d) Hai điểm K và P đối xứng nhau qua BC;

e) Ba điểm N,D,K thẳng hàng;

f) $OD = \frac{1}{2} AK$.

Bài 5. Cho đường tròn (O,R) và dây BC cố định. Gọi A là trung điểm của cung nhỏ BC và M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC. Kẻ tia Bx vuông góc với MA tại I cắt CM ở D.

a) Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác góc BMD.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vị trí điểm M.

c) Tia DA cắt tia BC tại E và cắt (O) tại F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

d) Chứng minh tích AE.AF không đổi khi M di động. Tính giá trị tích này theo R và góc ABC bằng α.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6. 1. Cho đường tròn tâm O và hai đường kính vuông góc AB,CD. Qua trung điểm E của bán kính OA kẻ dây FG ⊥ OA. Gọi H là giao điểm của (O) và đường vuông góc với FG tại F.

a) Chứng minh: $\widehat{BOP} = \widehat{PQB} = 120^\circ$;

b) Chứng minh tứ giác OBPM là hình thang;

c) Chứng minh ON = AS.

2. Cho đường tròn (O) đường kính EF và điểm G nằm trên (O) sao cho EG > GF. Trên tia GF lấy điểm H sao cho GH = GE. Vẽ hình vuông EGHI có đường chéo GI cắt (O) tại K.

a. Chứng minh ΔKFH cân.

b. Tiếp tuyến tại E với (O) cắt FK ở M. Chứng minh ba điểm M, I, H thẳng hàng.

Bài 7. 1. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai cát tuyến MAB và MCD. Gọi N là giao điểm của AC và BD. Cho biết $\widehat{AMC} = \widehat{DNC}$ và N ở ngoài (O). Chứng minh:

a) BC là đường kính của đường tròn (O);

b) BC ⊥ MN.

2. Cho điểm M ở trên nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H và I theo thứ tự là trung điểm của hai cung MA và MB. Nối HI cắt MA ở K và cắt MB ở S. Hình chiếu của I trên MA là P. Chứng minh:

a. Góc HKM có giá trị không đổi và tam giác MKS cân;

b. Hệ thức $PI^2 = PM.PA$.

Bài 8. Cho tam giác DEF có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với DE < DF và DH là đường cao. Kẻ phân giác góc D cắt (O) tại P. Qua F kẻ tiếp tuyến với (O) cắt EP kéo dài ở K.

a. Chứng minh DP là phân giác của góc ODH.

b. PO cắt EF tại M và cắt (O) tại Q. Kẻ OG ⊥ QF, chứng minh EP = 2OG.

c. Chứng minh bốn điểm O, M, F, G nằm trên một đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại F.

d. Kẻ đường song song OP tại E cắt FP kéo dài ở N,

chứng minh tam giác PEN cân.

e. Cho EF cố định và góc D không đổi, hỏi tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác DEF chạy trên đường nào khi D chạy trên đường tròn (O)?

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1.1. a) Do ba cung AP, PQ và QB bằng nhau nên $\widehat{APQ} = 60^\circ$, do đó số đo $\widehat{ABQ} = \frac{1}{2}$ số đo $\widehat{APQ} = 60^\circ$. Hai góc AOP và ABQ bằng nhau (đồng vị). Suy ra CP // BQ (hình 74).

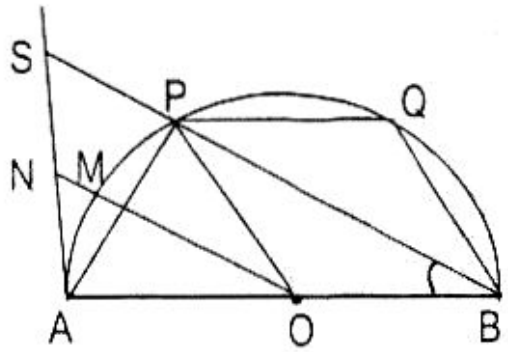
Tương tự $\widehat{BOQ} = 60^\circ$ mà OB = OQ nên ΔBOQ cân, lại có góc ở đỉnh bằng 60° vậy ΔBOQ đều, suy ra OB = BQ.

Tứ giác OBQP là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau nên là hình thoi.

Ta có $\widehat{BOP} = \widehat{PQB} = 120^\circ$.

b. Khi M ở chính giữa cung AP thì $\widehat{AOM} = \widehat{MOP} = 30^\circ$ nên $\widehat{ABP} = 30^\circ$. Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{ABP} = 30^\circ$ (đồng vị) nên OM//BP.

Suy ra tứ giác OBPM là hình thang.

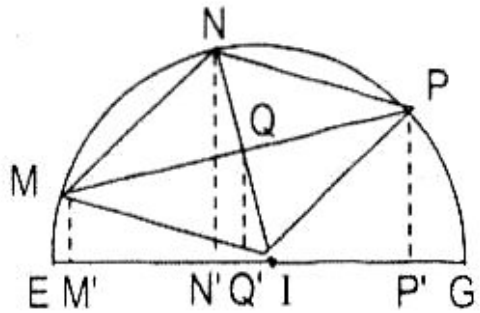


H.74

c. Do OM // BP (theo câu b) mà O là trung điểm của AB nên N là trung điểm của AS. Vậy ON là đường trung bình của tam giác ABS, nên

$ON = \frac{1}{2}$ BS.

Tam giác SAB vuông có góc $\widehat{B} = 30^\circ$ là nửa tam giác đều nên cạnh $AS = \frac{1}{2}BS$. Suy ra ON = AS.



H.75

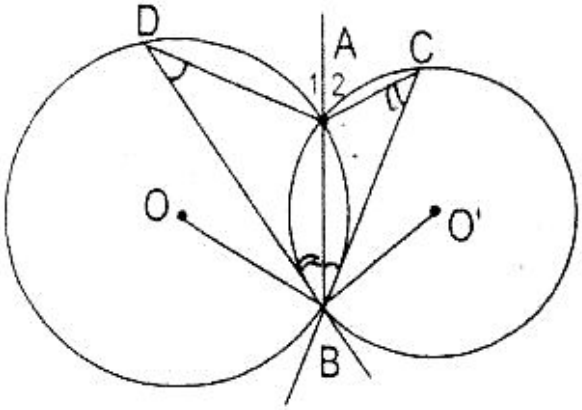
2.a) Tứ giác MNPI là hình thoi vì có các cạnh bằng nhau (cùng bằng bán kính). Do đó IM //

NP (hình 75).

b) Do MNPI là hình thoi nên MP ⊥ NI. Các góc MM'I và MQI là những góc vuông nên bốn điểm M, M', I, Q cùng nằm trên một đường tròn đường kính MI.

c) Tam giác vuông NN'I có Q là trung điểm của NI nên Q' cũng là trung điểm của IN'.

Lại có QQ' // MM' // PP' (cùng vuông góc với EG) mà Q là trung điểm của MP nên Q' cũng là trung điểm của M'P'.

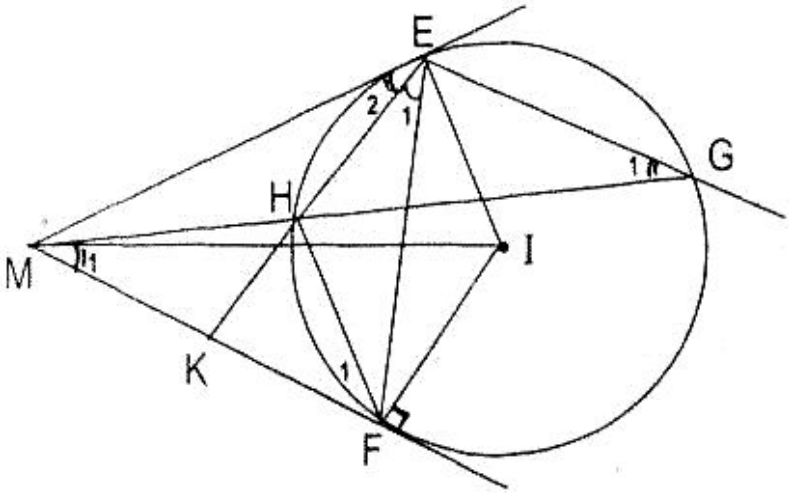


H.76

Bài 2. 1. a) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$ vì là góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cung đi qua tiếp điểm cùng chắn cung AB của đường tròn (O) (hình 76).

Tương tự ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$ trong đường tròn (O'). Vậy hai tam giác ABC và ADB đồng dạng với nhau (g.c.g).

• Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BAC}$. Nhưng $\widehat{A_1} + \widehat{DAB} = 180^\circ$ và $\widehat{A_2} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, vậy BA là phân giác góc CAD.



H.77

b) Từ hai tam giác đồng dạng ABC và ADB (theo câu a) ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DB}$,

suy ra hai đẳng thức:

AC.DB = AB.BC (1) và BC.AD = AB.DB (2)

Chia từng vế (1) cho (2) được:

$$\frac{AC}{AD} \cdot \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{DB} \text{ hay } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DB} : \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{DB} \cdot \frac{BC}{DB}.$$

Vậy ta có hệ thức $\frac{BC^2}{DB^2} = \frac{AC}{AD}$.

2. a) Xét hai tam giác KEF và KFH có $\widehat{K}$ chung, $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung HF) nên chúng đồng dạng (hình 77).

Suy ra $\frac{KF}{KE} = \frac{KH}{KF}$. Từ đó $KF^2 = KE.\ KH$ (1).

b) Ta có $\widehat{G_1} = \widehat{E_2}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung EH), $\widehat{G_1} = \widehat{M_1}$ (so le trong do EG//MF). Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{E_2}$, tức là $\widehat{HMK} = \widehat{MEH}$.

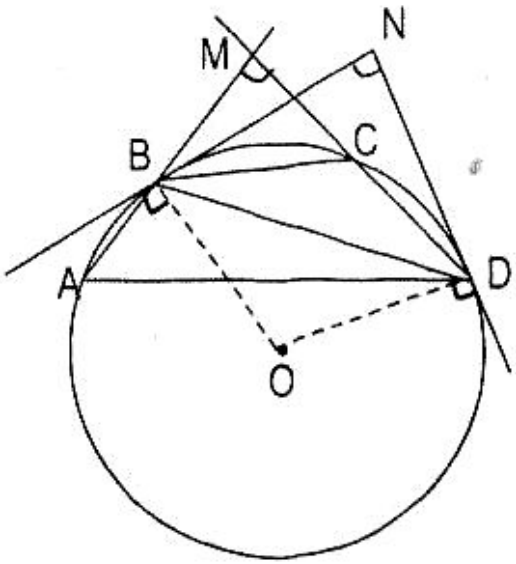
Xét hai tam giác đồng dạng MEK và HMK (vì $\widehat{K}$ chung và $\widehat{M_1} = \widehat{E_2}$) ta có:

$\frac{MK}{HK} = \frac{EK}{MK}$, từ đó $MK^2 = KE.KH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MK = KF, tức là K là trung điểm của MF.

c) Nếu $\widehat{EMF} = 60^\circ$ và MG là phân giác góc EMF thì tam giác MEF đều và tứ giác MEGF là hình thoi.

Ta có $\widehat{E_2} = \widehat{G_1} = 30^\circ$ và $\widehat{EMG} = 30^\circ$. Suy ra $\widehat{E_2} = \widehat{EMG}$, tức là tam giác MHE cân tại H. Do đó tia đối của tia HF là phân giác của góc MHE. Suy ra $FH \perp ME$.



H.78

Bài 3. 1. a) Hai điểm M và N nằm ngoài đường tròn (O) (hình 78) nên:

sđ $\widehat{M} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC})$;

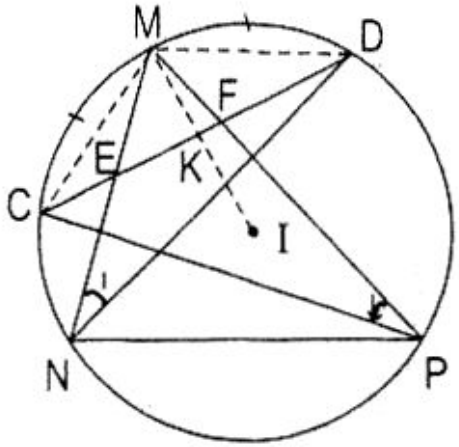
sđ $\widehat{N} = \frac{1}{2}$sđ$(\overset{\frown}{BD}\text{lớn} - \overset{\frown}{BD}\text{nhỏ}) = \frac{1}{2}$sđ $[(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}) - (\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD})]$

$= \frac{1}{2}$sđ$(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{CD})$

Vì $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC}$ nên sđ $\widehat{N} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC})$.

Suy ra $\widehat{M} = \widehat{N}$, tức là $\widehat{BMC} = \widehat{BND}$.

b. Góc NBC là góc giữa tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm B nên sđ$\widehat{NBC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$. Góc CBD là góc nội tiếp chắn cung CD nên sđ$\widehat{CBD} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CD}$ (vì hai cung CD và BC bằng nhau). Suy ra $\widehat{NBC} = \widehat{CBD}$ nên BC là tia phân giác của góc NBD. Lại có BC//AD vì AB = CD nên ABCD là hình thang cân.



H.79

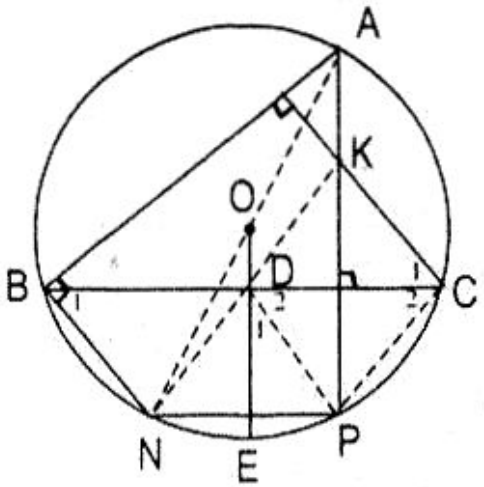
2. a) Ta có $\widehat{N}_1 = \widehat{P}_1$ vì là góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau MC = MD (theo giả thiết) (hình 79), tức là $\widehat{MND} = \widehat{MPC}$.

Ta có góc MPN chắn cung NCM và góc MED chắn cung MD và CN. Mà cung NCM bằng tổng hai cung MD và CN. Suy ra $\widehat{MPN} = \widehat{MED}$.

Mà $\widehat{MED} + \widehat{DEN} = 180^\circ$, do đó hai góc MPN và DEN bù nhau, tức là hai góc NEF và NPF bù nhau.

b) Do hai cung MC và MD bằng nhau (giả thiết) nên MC = MD, tức là tam giác MCD cân.

Ta có MK vừa là phân giác, đường cao, trung tuyến và trung trực. Như thế MK nằm trên bán kính IM, tức là tia phân giác của góc CMD đi qua tâm I cố định.



H.80

Bài 4. a. Ta có $\widehat{APN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mà $AM \perp BC$ (giả thiết) nên BC//NP (hình 80). Suy ra $\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{PC}$, do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_2$.

Vậy tứ giác BNPC là hình thang cân.

b. Tứ giác DMPF là hình chữ nhật (có ba góc vuông). Lại có BC//NP (câu a) mà $OE \perp BC$ nên $OE \perp NP$ tại F, do đó FN = FP = DM. Vậy PN = 2 DM.

c. Ta có E là trung điểm của cung NP nên AE là tia phân giác của góc NAP.

d. Góc $\widehat{ABN} = 90^\circ$ vì nội tiếp trong nửa đường tròn, do đó NB//CK (vì cùng vuông góc với AB). Suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (so le trong).

Nhưng $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_2$ (theo câu a) nên $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$. Do đó tam giác CKP cân tại C vì có phân giác CM vừa là đường cao. Vậy M là trung điểm của KP, suy ra K và P đối xứng nhau qua BC.

Lưu ý: Có thể nêu thêm nhận xét sau: Điểm đối xứng P của trực tâm K qua cạnh BC trong tam giác ABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tương tự các điểm đối xứng của trực tâm K qua các cạnh AB và AC cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

e. Do F là trung điểm của NP và $DF \perp NP$ nên $\widehat{NPE} = \widehat{D}_1$. Lại có M là trung điểm của PK và $DM \perp PK$ nên $\widehat{KDM} = \widehat{D}_2$.

Do $\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 90^\circ$ nên $2\left(\widehat{D}_1 + \widehat{D}_2\right) = 180^\circ = \widehat{NDK}$. Vậy ba điểm N, D, K thẳng hàng.

f. Trong tam giác ANK ta có OD//AK (cùng vuông góc với BC) mà O là trung điểm của AN nên D là trung điểm của NK.

Vậy OD là đường trung bình của tam giác ANK nên $OD = \frac{1}{2}AK$.

Lưu ý: Có thể nêu thêm nhận xét sau: Trong tam giác ABC, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác đến cạnh BC bằng nửa khoảng cách từ đỉnh A đối diện

đến trực tâm K.

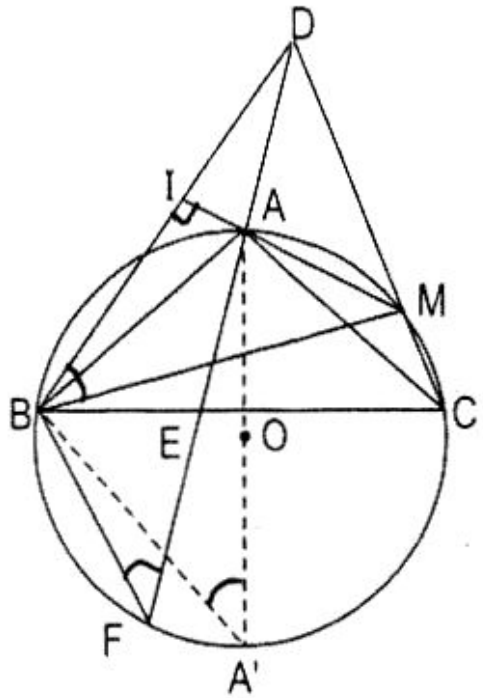
Tương tự các khoảng cách từ O đến các cạnh AB và AC cũng bằng nửa khoảng cách BK và CK.

Bài 5. a. Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau AB và AC) (hình 81).

Lại có $\widehat{ABC} + \widehat{AMC} = 180^o$ (góc nội tiếp chắn cung nhỏ AC và cung lớn ABC), suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{AMB}$ vì cùng bù với AMC.

Vậy $\widehat{AMD} = \widehat{AMB}$, tức là MA là tia phân giác của góc BMD.

b. Xét tam giác BMD cân tại M vì có MI vừa là phân giác và đường cao, ta có AD = AB. Mà AB = AC nên suy ra AB = AC = AD. Vậy A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC cố định. Do đó góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vị trí điểm M.



H.81

c. Ta có sđ $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$, sđ $\widehat{BFA} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$. Mà $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{BFA}$.

Suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

d. Xét hai tam giác đồng dạng ABE và AFB ($\widehat{A}$ chung, $\widehat{ABE} = \widehat{BFA}$) ta có:

$\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$ hay $AB^2 = AE.AF$ = không đổi.

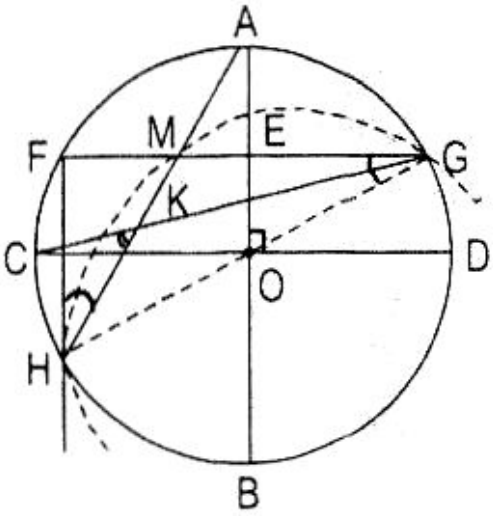
• Vẽ đường kính AA' ta có $\widehat{BA'A} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BA). Nhưng $\widehat{BFA} = \widehat{ABC} = \alpha$ (theo câu c) nên $\widehat{BA'A} = \alpha$.

Trong tam giác vuông ABA' ta có: AB = AA' sinα, suy ra

$AB^2 = (2R)^2 . \sin^2\alpha$.

Vậy giá trị của tích $AE.AF = 4R^2\sin^2\alpha$.

Bài 6. 1. a) Ta có $AE \perp FG$ và $HF \perp FG$ nên $OE // HF$. Lại có $\widehat{EFH} = 90^o$, vậy tứ giác HFEO là hình thang vuông (hình 82).



H.82

Góc HFG nội tiếp chắn cung HBG là góc vuông (giả thiết) nên cung HBG là nửa đường tròn. Do đó HG là đường kính, vậy ba điểm H, O, G thẳng hàng.

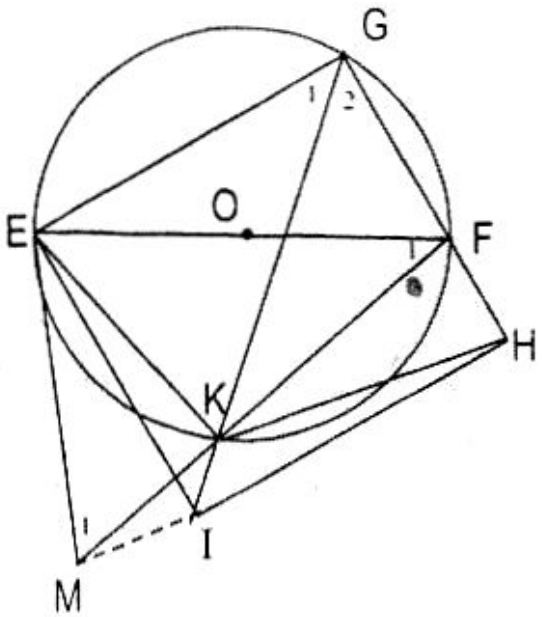
b) Do FG//CD (giả thiết) nên $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{GD}$. Mặt khác $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$. Suy ra $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{AG}$.

Ta có:

$$\text{sđ } \widehat{CKH} = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{AG} + \overset{\frown}{CH}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\left(\overset{\frown}{AG} + \overset{\frown}{GD}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} = 45^o.$$

Vậy $\widehat{CKH} = 45^o$.

b) Từ $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{AG}$ và $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{FH}$ suy ra $FH = AF$. Do đó hai góc nội tiếp $\widehat{FGH} = \widehat{FHA}$. Hai góc này cùng chắn cung HM của đường tròn ngoại tiếp tam giác HMG. Suy ra FH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác này.



H.83

2. a) Ta có $\widehat{G_1} = \widehat{G_2} = 45^o$ vì GI là đường chéo hình vuông EGHI (hình 83). Mà $\widehat{G_1} = \widehat{F_1}$ (cùng chắn cung EK), $\widehat{G_2} = \widehat{E_1}$ (cùng chắn cung FK) nên $\widehat{F_1} = \widehat{E_1} = 45^o$. Vậy tam giác KEF vuông cân tại K. Do đó KE = KF (1).

Xét hai tam giác KGH và KGE có $\widehat{G_1} = \widehat{G_2}$, GK chung và

GE = GH (giả thiết). Vậy $\Delta KGH = \Delta KGE$ (c.g.c).

Suy ra KE = KH (2). Từ (1) và (2) ta có KF = KH. Vậy tam giác KFH cân tại K.

b) Trong tam giác EMF vuông cân tại E (vì $\widehat{M}_1 = \widehat{F}_1 = 45^\circ$) ta có $EK \perp MF$ nên KM = KF. Vẽ đường tròn tâm K đường kính MF thì đường tròn (K) này đi qua H (vì KF = KH theo câu a).

Do đó góc FHI nội tiếp (K) bằng 90° nên phải chắn đường kính MF đi qua F. Vậy ba điểm M, I, H thẳng hàng.

Bài 7. 1. a) Sđ $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$ và

sđ $\widehat{DNC} = \frac{1}{2}$ sđ $(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$ (hình 84).

Vì $\widehat{AMC} = \widehat{DNC}$ (giả thiết) nên:

sđ $(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$ = sđ $(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$ suy ra

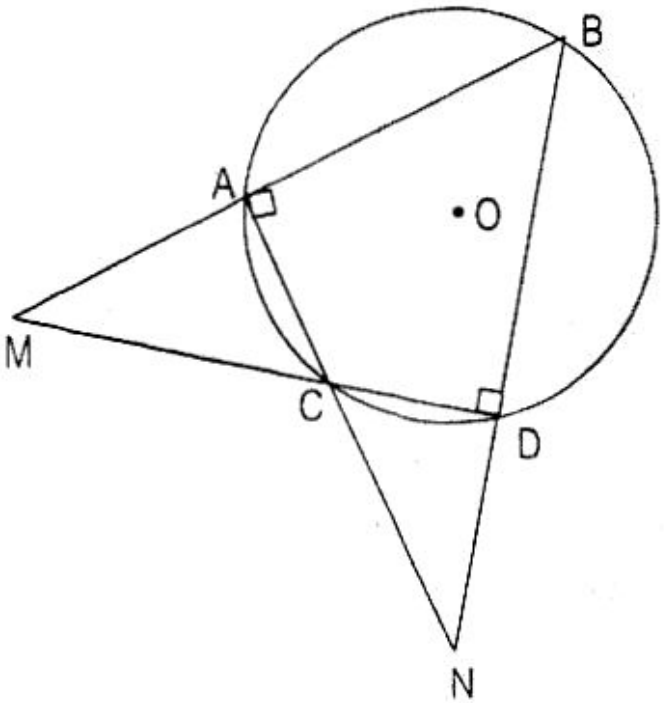
sđ $(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD})$ = sđ $(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC})$ hay

sđ $\overset{\frown}{BDC}$ = sđ $\overset{\frown}{BAC} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên BC là đường kính của đường tròn (O).

b) Ta có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, do đó tam giác BMN có MD và NA là hai đường cao nên C là trực tâm.

Vậy BC phải là đường cao thứ ba, tức là $BC \perp MN$.



H.84

2. a) Theo giả thiết ta có $\overset{\frown}{HA} = \overset{\frown}{HM}$, $\overset{\frown}{IM} = \overset{\frown}{IB}$ (hình 85). Góc AKH có đỉnh ở trong đường tròn (O) nên:

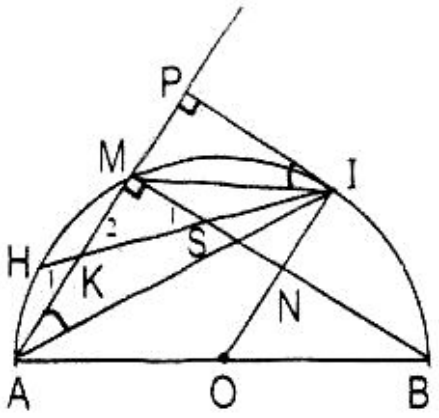
sđ $\widehat{AKH} = \frac{1}{2}$sđ $(\overset{\frown}{AH} + \overset{\frown}{MI}) = \frac{1}{4}$sđ $(\overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{MB}) = \frac{1}{4}.\ 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{AKH} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{HKM} = 135^\circ$ có giá trị không đổi.

Do $\widehat{K_1} = \widehat{K_2}$ (đối đỉnh) và $\widehat{S_1} = \widehat{K_1} = 45^\circ$ nên $\widehat{M_2} = \widehat{S_1}$. Vậy tam giác MKS cân tại M.

b) Tứ giác MPIN có ba góc vuông là hình chữ nhật. Suy ra góc PIN vuông. Do đó PI là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại I.

Xét hai tam giác PIA và PMI có P chung và $\widehat{PAI} = \widehat{PIM}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung MI). Vậy chúng đồng dạng với nhau.



H.85

Suy ra $\frac{PI}{PM} = \frac{PA}{PI}$ hay $PI^2 = PM.PA$.

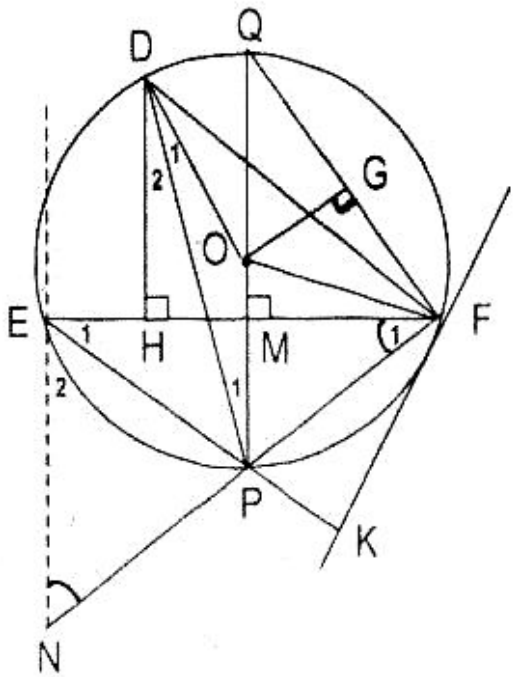
Bài 8. a. Tam giác ODP cân vì OD = OP = bán kính của (O) suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{P_1}$. Mặt khác DH//OP (cùng vuông góc với EF) nên $\widehat{D_2} = \widehat{P_1}$ (hình 86).

Vậy $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (= P_1). do đó DP là phân giác của góc ODH.

b. Vì OG ⊥ QF nên G là trung điểm của QF. Xét tam giác QFP có O và G là trung điểm của QP và QF nên OG//PF và OG = $\frac{1}{2}$ PF.

Nhưng EP = PF (vì P là trung điểm của cung EF), vậy EP = 2 OG.

c. Các góc tại G và M đều vuông nên 4 điểm O, G, F, M cùng nằm trên đường tròn đường kính OF. Đường tròn này và đường tròn



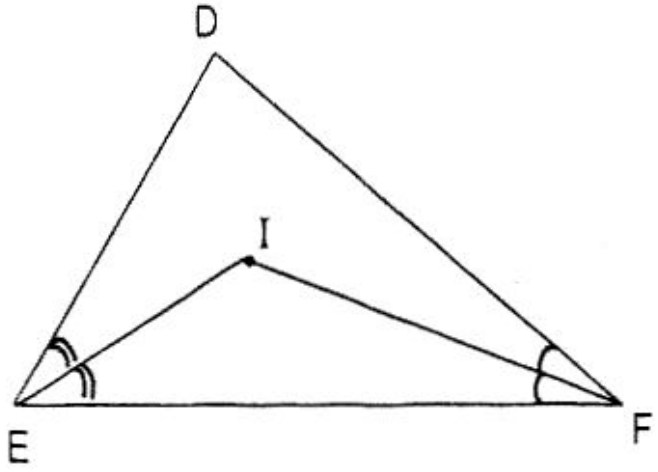
H.86

(O) có điểm F chung nên chúng tiếp xúc trong với nhau tại F.

d. Xét tam giác NEF vuông tại E ta có $\widehat{N} + \widehat{F_1} = 90^\circ$. Lại có $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 90^\circ$ và $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$.

Suy ra $\widehat{N} = \widehat{E_2}$. Vậy tam giác PEN cân tại P.

e. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF tức là I là giao điểm ba phân giác (hình 87).



H.87

Xét tam giác IEF ta có:

$\widehat{EIF} = 180^\circ - \left(\dfrac{\widehat{E} + \widehat{F}}{2}\right)$, mà

$\widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ - \widehat{D}$ nên

$\widehat{EIF} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{D}}{2}$ = không đổi.

Đoạn EF cố định, góc EIF không đổi, vậy khi D chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên hai cung chứa góc $90^\circ + \dfrac{\widehat{D}}{2}$ dựng trên đoạn EF, đối xứng nhau qua EF.

§8. TỨ GIÁC NỘI TIẾP MỘT ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp) và đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng hai góc vuông.

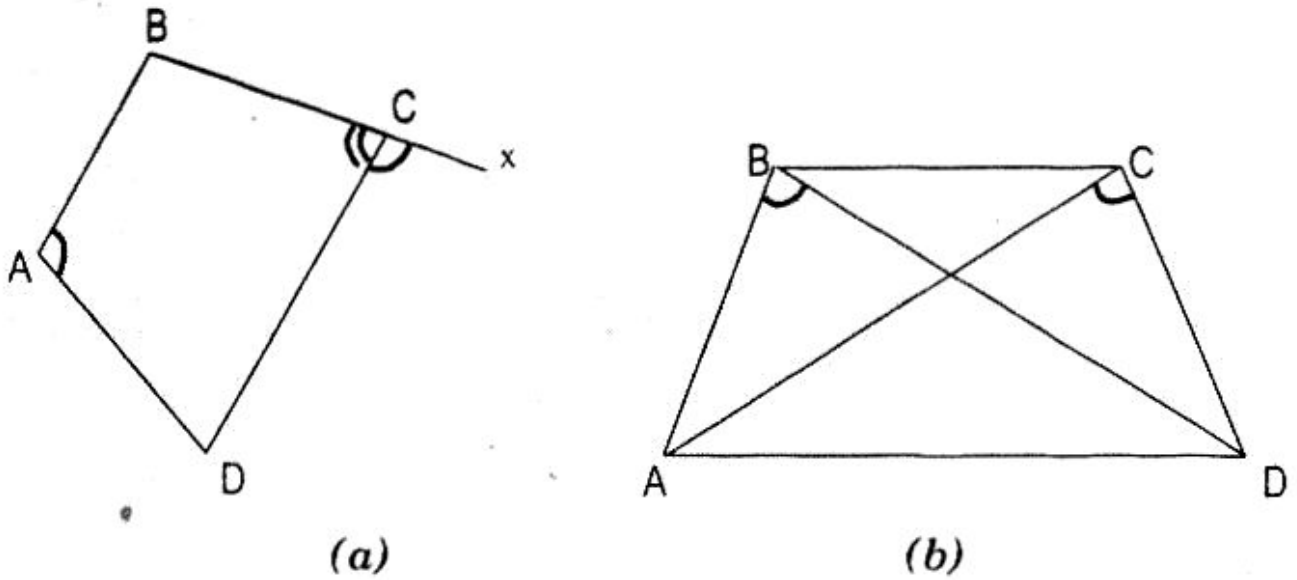
Đảo lại, nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng hai góc vuông thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

3. Muốn chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn ta có thể chứng minh một trong ba trường hợp sau:

a) Hai góc đối của tứ giác ABCD bù nhau (hoặc một góc của tứ giác bằng góc ngoài của đỉnh đối diện).

$\widehat{A} + \widehat{C} = 2v$

hoặc $\widehat{A} = \widehat{xCD}$ (hình 88a)



H.88

b) Hai đỉnh kề nhau của tứ giác ABCD nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau $\widehat{B} = \widehat{C}$ (hình 88b).

c) Tồn tại một điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

OA = OB = OC = OD.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN.

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. 1. Cho tam giác ABC có đường cao AM nội tiếp trong đường tròn đường kính AA'.

a) Hai đường cao BN, CP cắt nhau tại H và PN cắt AA' tại S. Chứng minh hai tứ giác BPNC và A'SNC nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh PN vuông góc với AA'.

2. Cho tam giác ABC ba góc nhọn và H là trực tâm. Dựng hình bình hành BHCD có I là giao điểm hai đường chéo.

a) Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp được.

b) So sánh các góc BAH và OAC trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Gọi G là giao điểm của AI và OH, chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

d) Tìm điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C để OH//BC.

Bài 2. 1. Cho nửa đường tròn đường kính AB, trên đó có điểm M. Trên đường kính AB lấy điểm C sao cho AC < CB. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By tại A và B với (O). Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax ở P, đường thẳng qua C vuông góc với CP cắt By tại Q. Gọi D là giao điểm của CP và AM, E là giao điểm của CQ và BM. Chứng minh:

a) Các tứ giác ACMP và CDME nội tiếp được;

b) AB // DE;

c) Ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

2. Cho đường tròn (I, r) và đường thẳng a cắt (I) tại hai

điểm M, N. Trên a lấy điểm A và từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (I).

a) Chứng minh hai góc CAI và CBI bằng nhau.

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm cố định khi A chạy trên a.

c) Tìm vị trí của A để tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 3.1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN = 2a và A là điểm bất kì trên nửa đường tròn đó. Kẻ các tiếp tuyến Mx, Ny và At với nửa đường tròn. At cắt Mx ở B, Ny ở C. Đường thẳng MA cắt Ny ở D và đường thẳng NA cắt Mx ở E.

Chứng minh:

a) Tứ giác OMBA nội tiếp được và BC = MB + NC;

b) Hai điểm B và C theo thứ tự là trung điểm của ME và ND;

c) Xác định vị trí của A để tứ giác MNDE có diện tích nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của góc A cắt BC ở D và cắt (O) ở E.

a) Chứng minh OE vuông góc BC.

b) Tia At phân giác ngoài của góc A cắt (O) tại F, chứng minh ba điểm E, O, F thẳng hàng.

c) Gọi G là giao điểm của OE và BC, H là giao điểm của At kéo dài và BC, chứng minh tứ giác EHAG nội tiếp và hai góc AGO và EHA bằng nhau.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cố định cạnh a và E là điểm chạy trên đoạn CD. Đường thẳng AE cắt BC tại F, đường vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a. Chứng minh tam giác ABF bằng tam giác ADK, suy ra tam giác AFK vuông cân.

b. Gọi I là trung điểm của FK, chứng minh I là tâm đường tròn qua bốn điểm A, C, F, K và I chạy trên một đường cố định khi E chạy trên CD.

c. Tính số đo góc AIF, suy ra tứ giác ABFI nội tiếp.

d. Đặt DE = x ($0 < x \leq a$) tính độ dài các cạnh của tam giác AEK theo a và x.

e. Xác định vị trí của E sao cho độ dài EK ngắn nhất.

Bài 5. 1. Cho đường tròn (O, r) đường kính AB và dây CD vuông góc với AB (AC < CB). Hai tia BC và DA cắt nhau tại E. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ E tới đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác AHEC nội tiếp trong một đường tròn, tìm tâm I và bán kính của đường tròn đó.

b) Gọi F là giao điểm của hai tia EH và CA, chứng minh HC = HF.

c) Chứng minh HC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Chứng minh BC.BE = BA.BH. Tính tích BC.BE theo r biết góc ABC bằng 30°.

2. Cho đường tròn (O, r) và dây cung AB (AB < 2r). Trên tia AB lấy điểm C sao cho AC > AB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại P, K. Gọi I là trung điểm AB.

a) Chứng minh tứ giác CPIK nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh hai tam giác ACP và PCB đồng dạng. Từ đó suy ra $CP^2 = CB.CA$.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác CPK, tính PH theo r.

d) Giả sử PA // CK, chứng minh tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP.

II. Các bài toán kiểm tra

Bài 6.1. Cho tam giác ABC (cân tại A), một cung tròn BC phía trong tam giác tiếp xúc với AB và AC tại B và C. Từ điểm D trên cung BC kẻ các đường vuông góc DE với BC, DF với AC và DG với AB. Gọi M là giao điểm của BD và GE, N là giao điểm của EF và DC. Chứng minh:

a) Các tứ giác BEDG và CEDF nội tiếp được;

b) $DE^2 = DF.DG$;

c) Tứ giác EMDN nội tiếp được, suy ra MN vuông góc

với DE;

d) Nếu GB = GE thì EF = EC.

2. Từ điểm M trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta kẻ các đường vuông góc xuống ba cạnh tam giác MH ⊥ AB, MI ⊥ BC, MK ⊥ AC. Chứng minh:

a) Ba tứ giác AHMK, HBIM, ICKM nội tiếp được;

b) Ba điểm H, I, K nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng Simsơn).

Bài 7. 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại M và AC tại N.

a) Gọi là H là giao điểm của BN và CM, chứng minh rằng AH vuông góc với BC.

b) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp được.

c) Gọi P là giao điểm của AH và BC, đường thẳng MP cắt (O) tại S. Chứng minh rằng C là điểm chính giữa cung NS và NS // AP.

2. Cho nửa đường tròn đường kính MN = 2R và P là điểm chính giữa của cung MN. Trên cung MP lấy điểm S bất kì và trên dây SN lấy điểm Q sao cho QN = SM.

a) Chứng minh tam giác PSQ vuông cân tại P.

b) Gọi T là giao điểm của đường thẳng MP với tiếp tuyến tại N, chứng minh tứ giác NQPT nội tiếp được.

c) Tìm quỹ tích của điểm Q khi S chuyển động trên cung MP.

Bài 8. 1. Cho tam giác ABC vuông tại C (BC < CA). Qua điểm P cố định trên AB (PB < PA) kẻ đường thẳng d vuông góc với AB, d cắt AC tại M và cắt BC kéo dài tại N. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua P.

a) Chứng minh 2 tam giác PB'N và PMA đồng dạng và PM.PN = PA.PB.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN cắt AN tại Q, chứng minh ba điểm Q, M, B thẳng hàng.

c) Cho AB cố định, điểm C thay đổi sao cho $\widehat{BCA}$ vẫn bằng 90°. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN

luôn đi qua hai điểm cố định và tâm đường tròn đó nằm trên một đường thẳng cố định.

2. Cho hình thang cân ABCD (BC // AD), hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E tạo thành góc BEC bằng 60°. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng EA, EB, AB, CD. Chứng minh:

a) Các tứ giác DMNC và MPNQ nội tiếp;

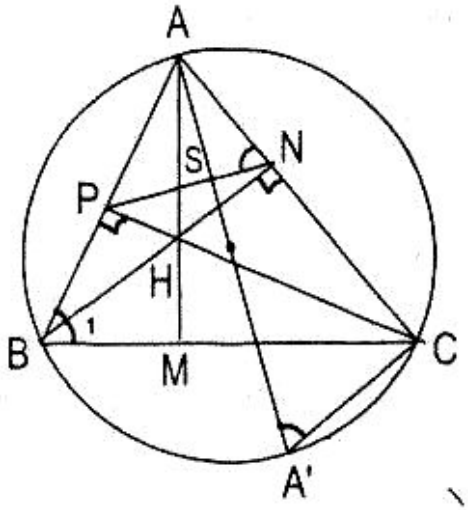
b) Ba góc $\widehat{NMC} = \widehat{MQP} = \widehat{QND}$.

C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. 1. a) Tứ giác BPNC có các góc BPC và BNC vuông nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính BC (hình 89).

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{ANP}$ (vì cùng bù với PNC. Mặt khác $\widehat{B_1} = \widehat{A'}$ (cùng chắn cung AC) nên $\widehat{A'} = \widehat{ANP}$.

Suy ra $\widehat{A'} + \widehat{SNC} = 180°$, vậy tứ giác A'SNC nội tiếp được.



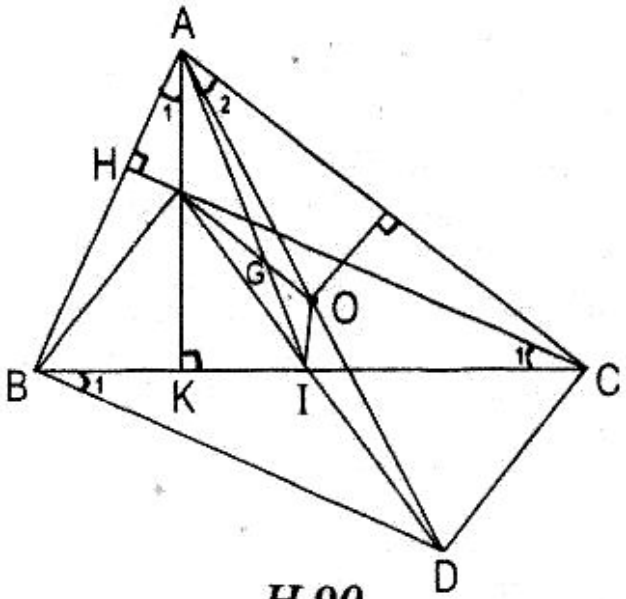
H.89

b) Do A'SNC nội tiếp nên $\widehat{NSA'} + \widehat{NCA'} = 180°$, mà $\widehat{NCA'} = 90°$ suy ra $\widehat{NSA'} = 90°$. Vậy PN vuông góc với AA'.

2. a) Ta có $\widehat{A} + \widehat{BHC} = 180°$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{BHC} = \widehat{D}$ (góc đối của hình bình hành) nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$ (hình 90)

Vậy tứ giác ABCD nội tiếp.

b) $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (so le trong), $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cạnh tương ứng vuông



H.90

góc) $\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DC). Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Ngoài ra do $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ và $\widehat{A_1} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ nên $\widehat{ABD} = 90^\circ$ và AD là đường kính của đường tròn qua bốn điểm A, B, C, D và O là trung điểm của AD.

c) Nối C với I, ta có OI vuông góc BC và OI song song và bằng $\frac{1}{2}$ AH, do đó $\frac{GI}{GA} = \frac{OI}{AH} = \frac{1}{2}$.

Vậy G là trọng tâm của tam giác ABC.

d) Nếu OH//BC hay KH = $\frac{1}{3}$ AK (*), K là chân đường cao kẻ từ A thì xét hai tam giác vuông đồng dạng ABK và CHK (vì $\widehat{BAK} = \widehat{HCK}$ là góc có cạnh tương ứng vuông góc) ta có:

$$\frac{KB}{KH} = \frac{KA}{KC} \text{ hay } KB.KC = KH.KA.$$

Do đó (*) trở thành:

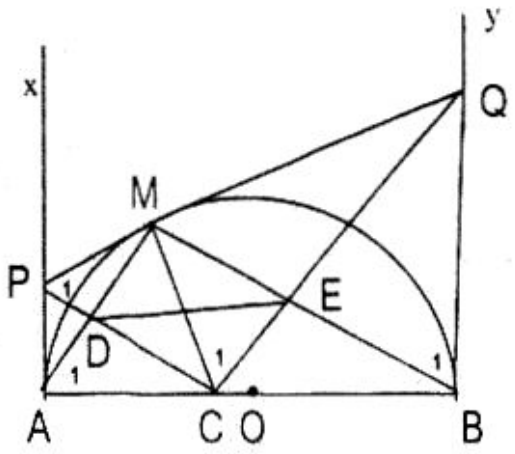
$$KB.KC = \frac{1}{3}AK.AK \text{ hay } \frac{AK}{KB}.\frac{AK}{KC} = 3, \text{ tức là } tgB.tgC = 3.$$

Đó là điều kiện ràng buộc giữa các góc B và C.

Bài 2. 1. a) Tứ giác ACMP có tổng hai góc đối $\widehat{A} + \widehat{M} = 180^\circ$ nên nội tiếp được (hình 91).

Tương tự tứ giác CDME có $\widehat{M} + \widehat{C} = 180^\circ$ (do C vuông theo giả thiết và $\widehat{AMB} = 90^\circ$ vì nội tiếp trong nửa đường tròn) nên nội tiếp được.

b) $\widehat{P_1} = \widehat{C_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), mà $\widehat{C_1} = \widehat{MDE}$ (do CDME nội tiếp) và $\widehat{P_1} = \widehat{A_1}$ (do ACMP nội tiếp).



H.91

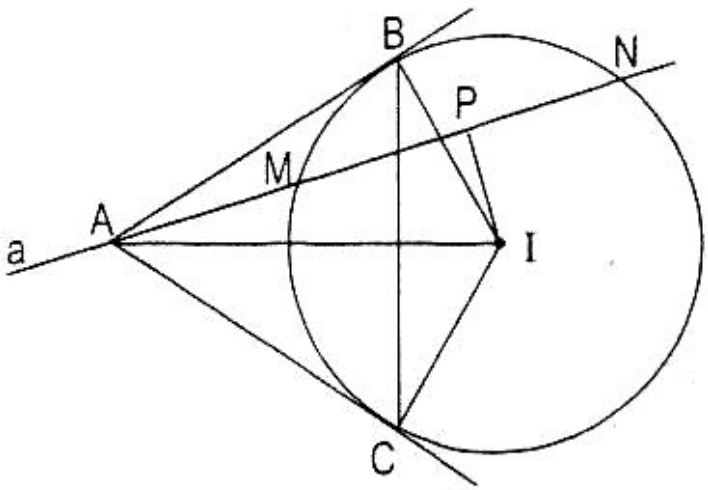
Vậy $\widehat{A_1} = \widehat{MDE}$ suy ra DE//AB.

c) $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) và $\widehat{A_1} = \widehat{MDE} = \widehat{C_1}$ (chứng minh trên), suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$. Tứ giác CBQM nội tiếp được, tức là $\widehat{CMQ} = 90^o$. Do đó ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

2. a) Tứ giác ABIC nội tiếp được vì các góc tại B và C đều vuông (do AB, AC là tiếp tuyến) (hình 92).

Suy ra $\widehat{CAI}$ và $\widehat{CBI}$ bằng nhau vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI.

b) Hạ IP vuông góc với MN ta có PM = PN. Do M, N cố định nên P cố định.



H.92

Ba điểm B, P, C cùng nhìn IA dưới một góc vuông nên năm điểm A, B, P, I, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính AI. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua hai điểm cố định là I và P khi A chạy trên a.

c) Nếu tam giác ABC đều thì $\widehat{BAC} = 60^o$, do đó $\widehat{BAI} = 30^o$. Tam giác vuông ABI có cạnh IB đối diện với góc 30° bằng nửa cạnh huyền AI, do đó AI = 2 IB = 2r.

Để xác định vị trí điểm A trên a ta dựng đường tròn tâm I bán kính 2r cắt đường thẳng d tại hai điểm A và A' phải tìm.

Bài 3. 1. a) Ta có các góc tại M và N đều vuông vì Mx, At là tiếp tuyến của (O). Do đó $\widehat{BMO} + \widehat{OAB} = 180^o$, vậy tứ giác OMBA nội tiếp được trong đường tròn đường kính OB

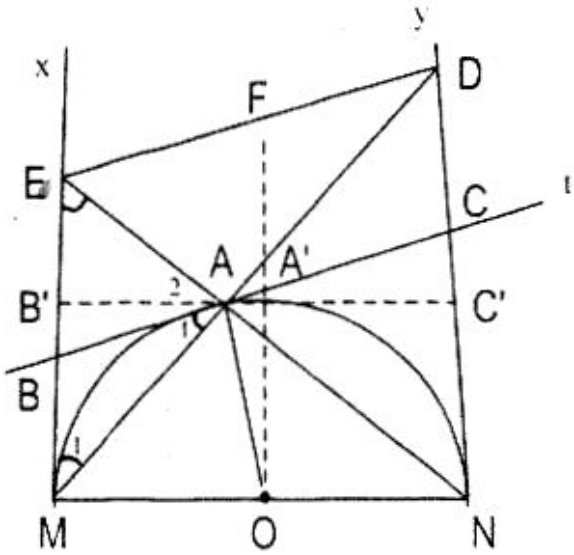
(hình 93).

Lại có MB = BA. NC = CA (tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn) nên BC = BA + AC = MB + NC.

b) Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^o$, $\widehat{E} + \widehat{M_1} = 90^o$, mà $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ suy ra $\widehat{E} = \widehat{A_2}$. Do đó tam giác ABE cân nên AB = BE, mà AB = BM. Vậy BE = BM, tức là B là trung điểm của EM.

Chứng minh tương tự ta được C là trung điểm của DN.

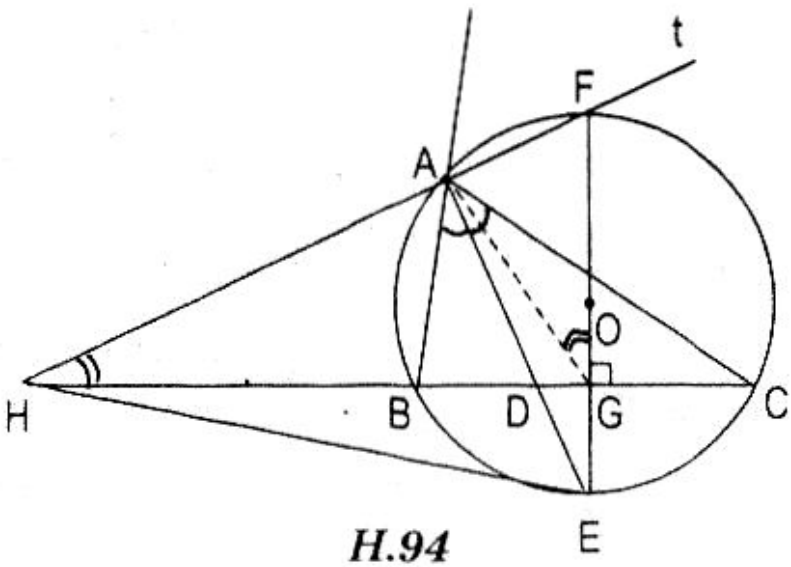
c) MNDE là hình thang vuông có diện tích bằng $\frac{ME + ND}{2}$. MN = OF. MN (F là giao điểm của ED và đường vuông góc với MN tại O). Muốn hình thang có diện tích nhỏ nhất thì OF phải có độ dài nhỏ nhất.



H.93

Qua trung điểm A' của đường tròn tâm O, kẻ tiếp tuyến B'C' ta được hình chữ nhật MB'C'N. Độ dài nhỏ nhất của OF là OA'. Khi đó hình thang vuông sẽ có diện tích nhỏ nhất là bằng diện tích hình chữ nhật tức là bằng MN.OA' (vì với mọi A ≠ A' thì F luôn ở ngoài nửa đường tròn (O) tức là OA' = a < OF nên diện tích MNC'B' < diện tích MNDE).

2. a) Do AE là phân giác trong của góc A nên E là trung điểm của cung nhỏ



H.94

CB (hình 94).

Theo tính chất đối xứng của đường tròn ta có OE vuông góc với BC.

b) Góc FAE tạo bởi hai phân giác trong và ngoài của góc A là một góc vuông. Mà góc này là góc nội tiếp của đường tròn (O) nên FE phải là đường kính, vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.

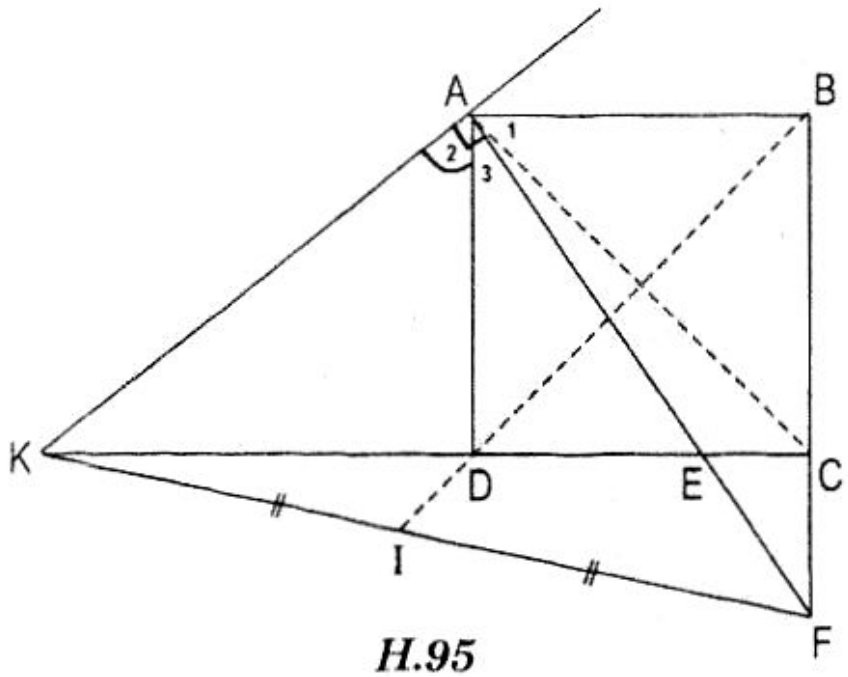
c) Ta có $\widehat{HAE} = 90^\circ$ (vì góc FAE vuông) và $\widehat{HGE} = 90^\circ$ (theo câu a). Như vậy các điểm A và G cùng nhìn HE dưới một góc vuông nên chúng phải nằm trên đường tròn đường kính HE. Suy ra tứ giác EHAG nội tiếp được đường tròn.

Vậy $\widehat{EHA} = \widehat{AGO}$ vì cùng bù với góc AGE.

Bài 4. a. Δ ABF = Δ ADK vì đều là tam giác vuông có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{A_3}$). Suy ra AF = AK. Vậy tam giác AFK vuông cân (hình 95).

b. Các góc KAF và KCF đều là góc vuông nên bốn điểm A, C, F, K cùng nằm trên đường tròn đường kính KF có tâm là I.

IC và IA là trung tuyến của hai tam giác vuông KCF và KAF nên IC = IA = $\frac{1}{2}$KF. Như thế I cách đều hai điểm A và C cố định nên I nằm trên trung trực của đoạn AC. Mà AC vuông góc với BD nên I nằm trên đường thẳng BD cố định khi E chạy trên CD.



H.95

c. Tam giác AFK vuông cân có trung tuyến AI vừa là đường cao nên ($\widehat{AIF} = 90^\circ$). Do đó tứ giác ABFI có tổng hai

góc đối tại B và I bằng 180^0 nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính AF.

d. Xét tam giác vuông AEK có AD là đường cao ta có: $AD^2 = DE.DF$, từ đó $DK = \frac{AD^2}{DE} = \frac{a^2}{x}$. Lại có:

$$EK = DE + DK = x + \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 + a^2}{x}.$$

Từ đó $AE^2 = AD^2 + DE^2 = x^2 + a^2$, suy ra $AE = \sqrt{x^2 + a^2}$.

$$AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2} = \frac{a^2(x^2 + a^2)}{x^2},$$

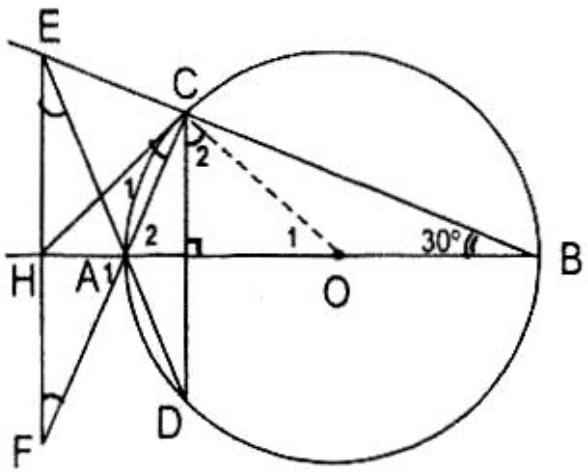
suy ra $AK = \frac{a\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$.

e. Ta biết rằng $EK = \frac{x^2 + a^2}{x}$ với $0 < x \le a$. Gọi $a = x + m$ $(m \ge 0)$ ta có thể viết:

$$EK = \frac{x^2 + (x+m)^2}{x} = \frac{2x^2 + 2mx + m^2}{x} = \frac{2x(x+m)}{x} + \frac{m^2}{x} \text{ hay}$$

$EK = a + \frac{m^2}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{m^2}{x} = 0$ tức là khi $m = 0$, khi đó $x = a$ hay $ED = CD$. Suy ra hai điểm E và C phải trùng nhau.

Bài 5. 1. a) Góc ACB bằng 90° vì nội tiếp trong nửa đường tròn (O). Góc H vuông (giả thiết) (hình 96). Vậy tứ giác AHEC nội tiếp được trong đường tròn đường kính EA. Tâm I của đường tròn này là trung điểm của EA và bán kính bằng $\frac{1}{2}EA$.



H.96

b) Do EF//CD nên $\widehat{E} = \widehat{D}$ và $\widehat{ACD} = \widehat{F}$ (so le trong) suy ra

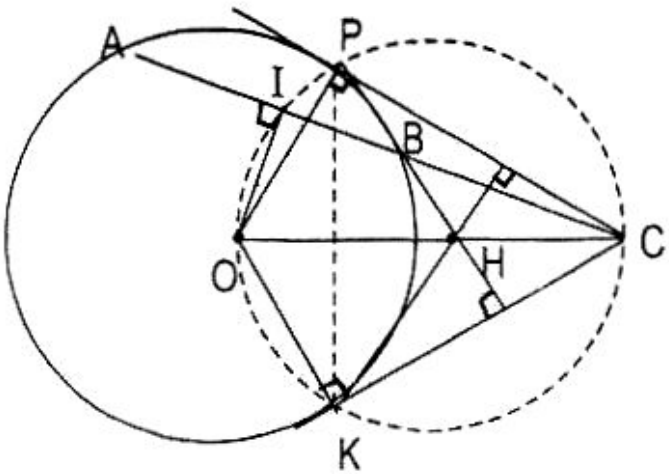
$\widehat{E} = \widehat{F}$. Mà $\widehat{E} = \widehat{C_1}$ (theo câu a) nên $\widehat{C_1} = \widehat{F}$. Vậy tam giác HFC cân tại H nên HC = HF.

c) Ta có $\widehat{F} + \widehat{A_1} = 90^\circ$, mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{C_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$. Do $\widehat{C_2} = \widehat{A_2}$ (tam giác OCA cân) nên $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ$ hay $\widehat{HCO} = 90^\circ$. Vậy HC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Xét hai tam giác vuông đồng dạng BCA và BHE vì có góc B chung ta có:

$$\frac{BC}{BH} = \frac{BA}{BE} \text{ hay } BC.BE = BA.\ BH.$$

Ta có $\widehat{CHA} = 30^\circ$ (vì $\widehat{O_1} = 60^\circ$ và $\widehat{HCA} = 90^\circ$), $\widehat{C_1} = 30^\circ$. Do đó tam giác AHC cân nên AH = AC = r. Suy ra HB = 3r, BE = $2r\sqrt{3}$. Lại có BC = $r\sqrt{3}$, vậy tích BC.BE = $r\sqrt{3}.2r\sqrt{3} = 6r^2$.



H.97

2. a) Do I là trung điểm của AB (giả thiết) nên OI vuông góc với AB. Vì CP và CK là hai tiếp tuyến (giả thiết) nên góc OPC và góc OKC đều là góc vuông (hình 97).

Từ các điểm I, P, K ta nhìn OC dưới một góc vuông, vậy tứ giác CPIK nội tiếp được trong đường tròn đường kính OC.

b) Tam giác ACP và tam giác PCB có góc C chung, $\widehat{PAB} = \widehat{BPC}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung PB). Vậy hai tam giác này đồng dạng. Suy ra:

$$\frac{CP}{CB} = \frac{AC}{PC} \text{ hay } CP^2 = CB.CA.$$

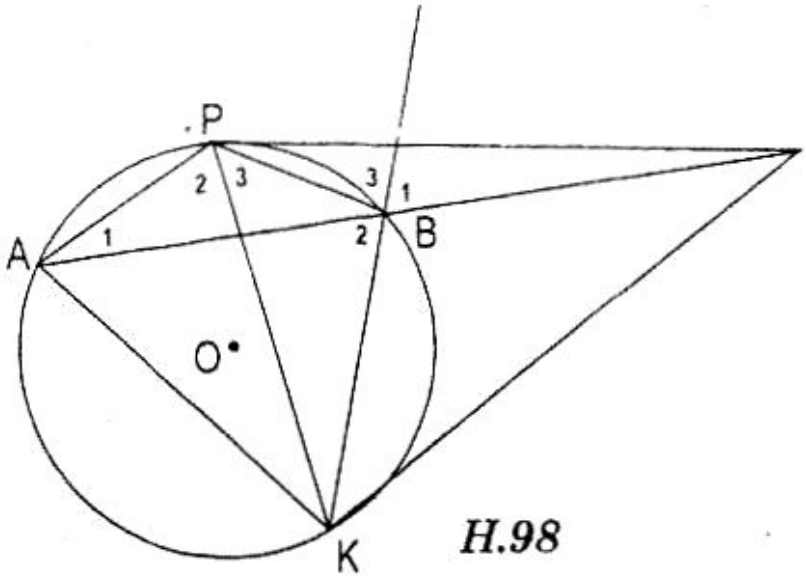
c) Xét đường tròn đường kính OC đi qua P, K và I.

Từ P kẻ đường vuông góc với KC, từ K kẻ đường vuông

góc với PC chúng cắt nhau tại H trên OC.

Ta có KH vuông góc với PC, OP vuông góc với PC suy ra OP//KH.

Tương tự PH vuông góc với KC, OK vuông góc với KC suy ra OK//PH.



H.98

Do đó tứ giác OPHK là hình bình hành, lại có hai đường chéo vuông góc nên nó là hình thoi.

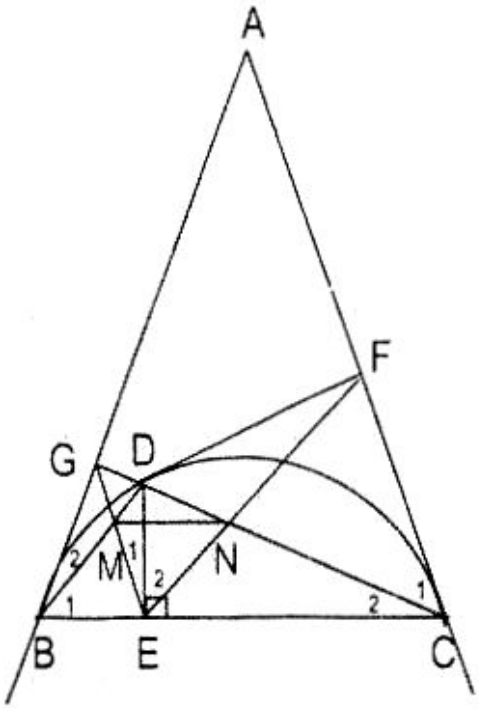
Vậy OP = OK = KH = PH = r.

d) Theo giả thiết AP//CK, suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (hình 98).

Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (góc đối đỉnh) và $\widehat{B_2} = \widehat{P_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

Mà $\widehat{P_2} + \widehat{P_3} = \widehat{APC} + \widehat{PBC}$ (do câu b) $= \widehat{B_1} + \widehat{B_3}$. Suy ra $\widehat{P_2} = \widehat{B_3}$.

Ta chỉ còn phải chứng minh $\widehat{P_2} = \widehat{P_3}$. Thật vậy do AP//CK nên $\widehat{P_2} = \widehat{K_2}$ (góc so le trong), mà $\widehat{K_2} = \widehat{P_3}$ (tam giác CPK cân). Vậy $\widehat{P_2} = \widehat{P_3}$, tức là tia đối của tia BK là phân giác của góc CBP.



H.99

Bài 6. 1. a) Do các góc E, F, G đều vuông (giả thiết) nên các tứ giác BEDG và CEDF có tổng hai góc đối bằng 180°. Vậy chúng nội tiếp được trong các đường tròn đường kính BD và DC (hình 99).

b) Xét hai tam giác vuông đồng dạng DEB và DFC vì có

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến và một dây cùng chắn cung DC) ta có:

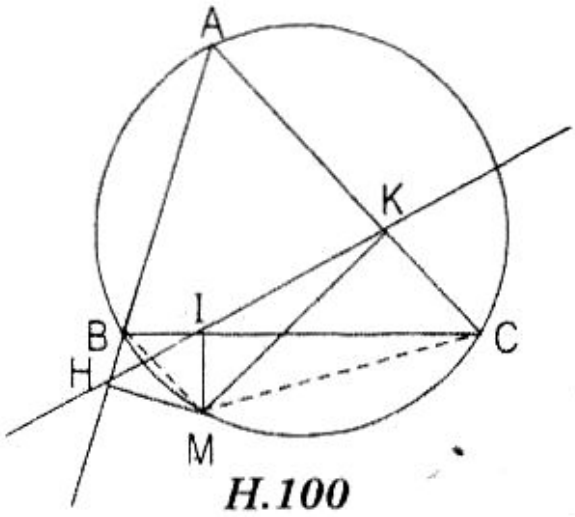
$$\frac{DE}{DF} = \frac{DB}{DC} \qquad (1)$$

Tương tự xét hai tam giác vuông đồng dạng DGB và DEC ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DG}{DE} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{DE}{DF} = \frac{DG}{DE}$ hay $DE^2 = DF.DG$

c) Ta có $\widehat{MEN} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{B_2} + \widehat{C_1} = \widehat{B_1} + \widehat{C_2}$ (vì $\widehat{B} = \widehat{C}$ do ΔABC cân theo gt). Suy ra $\widehat{MEN} + \widehat{BDC} = 180^\circ$ vì $\widehat{BDC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_2} = 180^\circ$. Vậy tứ giác EMDN nội tiếp được.



H.100

Lại có $\widehat{MND} = \widehat{E_1}$ (do EMDN nội tiếp) và $\widehat{C_2} = \widehat{B_2}$ (cùng chắn cung BD) mà $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (do BEDG nội tiếp). Suy ra $\widehat{MND} = \widehat{C_2}$. Hai góc này chiếm vị trí góc đồng vị nên MN//BC.

Vậy $MN \perp DE$ vì $DE \perp BC$.

d) Nếu GB = GE thì $\widehat{GBE} = \widehat{GEB} = \widehat{NME} = \widehat{EDN} = \widehat{EFC}$. Do đó $\widehat{EFC} = \widehat{GBE} = \widehat{EPC}$ và tam giác EFC cân tại E. Vậy EF = EC.

2. a) Tứ giác AHMK có $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ (giả thiết) nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính AM (hình 100).

Tương tự tứ giác ICKM có $\widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$ (gt) nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính MC. Tứ giác HBIM có tổng hai góc đối $\widehat{I} + \widehat{H} = 180^\circ$ nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính BM.

b) Tứ giác ABMC nội tiếp nên $\widehat{A} + \widehat{BMC} = 180^\circ$. Tứ giác AHMK nội tiếp nên $\widehat{A} + \widehat{HMK} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{HMK}$

(1)

Trong tứ giác nội tiếp HBIM có $\widehat{HIB} = \widehat{HMB}$ (cùng chắn cung BH) (2).

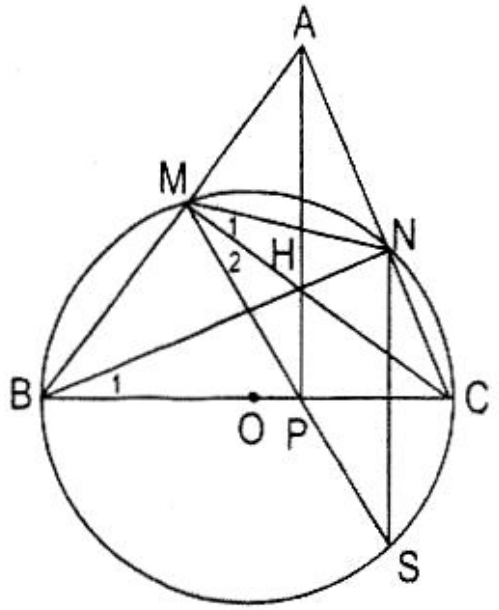
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CMK} = \widehat{HIB}$. Mà $\widehat{CMK} = \widehat{CIK}$ vì cùng chắn cung CK trong tứ giác nội tiếp ICKM. Do đó: $\widehat{HIB} = \widehat{CIK}$ ở vị trí đối đỉnh mà B, I, C thẳng hàng nên H, I, K phải thẳng hàng.

• Xét các tứ giác nội tiếp ABIC, A'B'IB và A'C'BI nội tiếp ta có $\widehat{IAB} = \widehat{BCI}$, $\widehat{BCI} = \widehat{IA'B}$, $\widehat{IA'B} = \widehat{IC'B}$. Do đó $\widehat{IAB'} = \widehat{IC'B'}$.

Vậy tứ giác AC'B'I nội tiếp được.

b) Ta có thể rút ra nhận xét sau đây:

"Ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AB'C', BC'A', CA'B' cắt nhau tại một điểm I trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC".



H.101

Bài 7. 1.a) Ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90°$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (hình 101). Do đó BN và CM là hai đường cao của tam giác ABC và H là trực tâm. Vậy đường cao thứ ba kẻ từ A phải qua H, tức là AH vuông góc với BC.

b) Tứ giác AMHN có tổng hai góc đối $\widehat{M} + \widehat{N} = 180°$ nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính AH.

c) Xét tứ giác nội tiếp BMHP (tổng hai góc đối M và P bằng 180°) ta có $\widehat{M}_2 = \widehat{B}_1$ (cùng chắn cung HP) và $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$ (cùng chắn cung NC) mà $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, tức là MC là tia

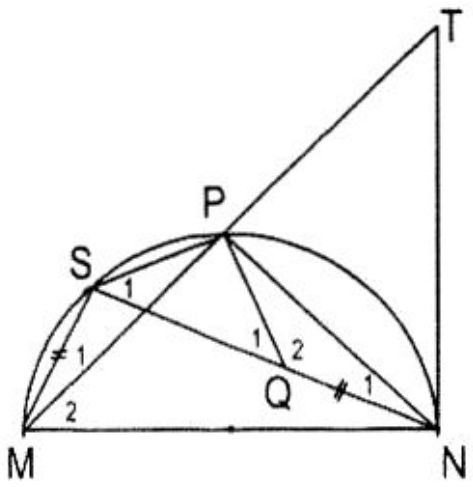
phân giác của góc NMS.

Trong đường tròn (O) M_1 là góc nội tiếp chắn cung NC, M_2 là góc nội tiếp chắn cung CS, mà $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ suy ra sđ $\overset{\frown}{CN}$ = sđ $\overset{\frown}{CS}$. Vậy C là điểm chính giữa cung NS.

Đường kính BC đi qua điểm chính giữa cung NS nên BC vuông góc với NS. Do đó NS và AP cùng vuông góc với BC vậy NS//AP.

2. a) Xét hai tam giác MSP và NQP có MP = PN, $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$ (cùng chắn cung SP) và MS = QN (hình 102) nên chúng bằng nhau (c.g.c). Suy ra PQ = PS nên tam giác PSQ cân tại P.

Lại có $\widehat{S}_1 = \widehat{Q}_1 = 45^\circ$ (vì góc S_1 chắn cung PN bằng 90°) nên $\widehat{SPQ} = 90^\circ$. Vậy tam giác PSQ vuông cân tại P.



H.102

b) Góc MNT vuông vì NT là tiếp tuyến mà $\widehat{M}_2 = 45^\circ$ nên $\widehat{T} = 45^\circ$. Góc $\widehat{Q}_2 = 180^\circ - \widehat{Q}_1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Vậy tứ giác NQPT có tổng hai góc đối $\widehat{Q}_2 + \widehat{T} = 180^\circ$ nên nội tiếp được.

c) Khi S chuyển động trên cung MP thì Q luôn chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác TPN có đường kính là TN.

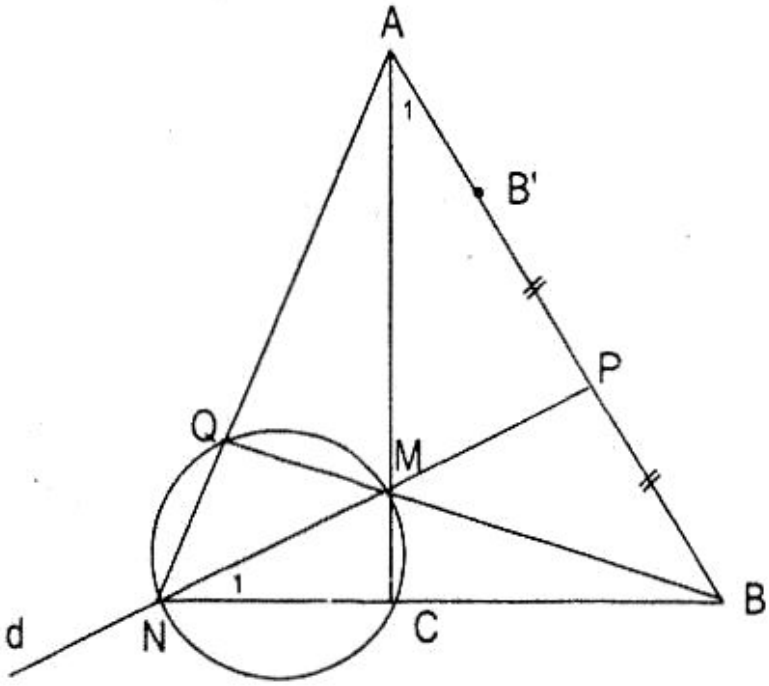
Khi S trùng với M thì Q trùng với N và khi S trùng với P thì Q cũng trùng với P. Do đó Q chỉ chạy trên cung nhỏ PN của đường tròn đường kính TN = MN = 2R. (Bạn đọc tự chứng minh phần đảo).

Vậy quỹ tích của Q là cung nhỏ PN của đường tròn

ngoại tiếp tam giác TPN có bán kính bằng R.

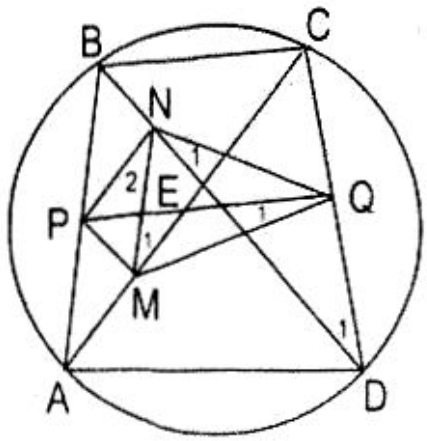
Bài 8. 1. a) Do B và B' đối xứng nhau qua P nên P là trung điểm của BB', suy ra NP là trung trực của BB' (hình 103). Do đó hai tam giác PNB'và PNB bằng nhau. Xét hai tam giác vuông đồng dạng PNB và PAM (vì $\widehat{N_1} = \widehat{A_1}$ có cạnh tương ứng vuông góc) ta có: $\frac{PB}{PN} = \frac{PM}{PA}$ hay PM.PN = PA.PB.

b) M là trực tâm của tam giác ANB (do MN vuông góc với AB, AM vuông góc với BC) nên BM vuông góc với AN (1). Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN ta có $\widehat{MCN} = 90^o$, suy ra $\widehat{NQM} = 90^o$, tức là MQ ⊥ AN (2). Từ (1) và (2) suy ra ba điểm Q, M, B thẳng hàng.



H.103

c) Do $\widehat{CMP} + \widehat{B} = 180^o$ mà $\widehat{CMP} = \widehat{NMA}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{NMA} + \widehat{B} = 180^o$. Lại có $\widehat{AB'N} + \widehat{NB'B} = 180^o$ hay $\widehat{AB'N} + \widehat{B} = 180^o$ (vì $\widehat{NB'B} = \widehat{B}$ do hai tam giác vuông bằng nhau PNB' và PNB). Suy ra $\widehat{NMA} = \widehat{NB'A}$, vậy tứ giác AB'MN nội tiếp được. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi



H.104

qua hai điểm cố định là A và B'. Tâm đường tròn này nằm trên trung trực của AB' là một đường thẳng cố định.

2. a) Tứ giác ABCD là hình thang cân, lại có $\widehat{BEC} = 60^\circ$ nên các tam giác BEC và EAD là tam giác đều (hình 104). Các trung tuyến CN, DM trở thành đường cao nên $\widehat{DMC} = \widehat{CND} = 90^\circ$. Vậy tứ giác DMNC nội tiếp được trong đường tròn đường kính CD. Tam giác QMN có

$QM = QN = \frac{1}{2}CD$, tam giác AEB có $MN = \frac{1}{2}AB$ (đường trung bình). Do AB = CD vì hình thang ABCD cân nên QM = QN = MN. Vậy tam giác MNQ là đều có $\widehat{NQM} = 60^\circ$. Lại có $\widehat{M}_1 = \widehat{D}_1$ (cùng chắn cung NC), $\widehat{N}_1 = \widehat{D}_1$ (tam giác QND cân). Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$. Tứ giác MPNE là hình bình hành (vì MP//BE, NP//AE) nên $\widehat{NEM} = \widehat{MPN} = 120^\circ$ (bù với $\widehat{BEC} = 60^\circ$). Vậy tứ giác MPNQ có tổng hai góc đối $\widehat{MPN} + \widehat{NQM} = 180^\circ$ nên nội tiếp được.

b) Ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_2$ (so le trong do PN//ME), $\widehat{Q}_1 = \widehat{N}_1$ (cùng chắn cung PM). Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = \widehat{Q}_1$ tức là $\widehat{NMC} = \widehat{MQP} = \widehat{QND}$.

§9. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN VÀ DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

A.KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc cũng bằng nhau.

a. Bất kì đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp. Tâm chung của các đường tròn nội ngoại tiếp gọi là tâm của đa giác đều đó.

b. Với mọi đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.

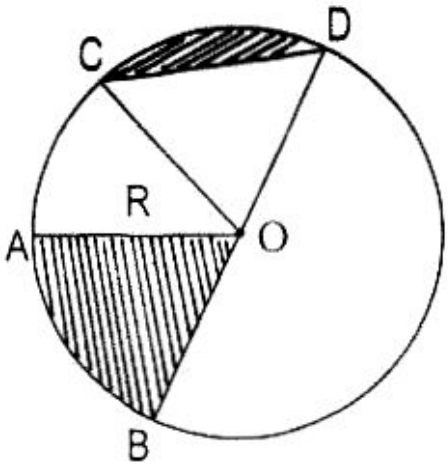
2. Gọi a_3, a_4, a_6 là cạnh của tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Ta có:

$a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_6 = R$.

3. Tỉ số giữa độ dài đường tròn C và đường kính 2R của nó là một số không đổi, nghĩa là như nhau cho mọi đường tròn. Số không đổi đó được kí hiệu bằng chữ π (đọc là pi), π là một số vô tỉ. Độ dài C của một đường tròn (chu vi đường tròn) bán kính R là:

$C = 2\pi R = \pi d$ (d là đường kính).

Độ dài l của một cung tròn n^o là:



H.105

$\ell = \frac{\pi Rn}{180}$.

4. Diện tích hình tròn bán kính R là:

$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

5. Hình quạt tròn là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và hai bán kính qua hai mút của cung đó. Ví dụ hình quạt OAB (gạch sọc) (hình 105). Diện tích hình quạt tròn ứng với cung n^o là:

$S_{(quạt)} = \frac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S_{(quạt)} = \frac{\ell.R}{2}$ trong đó ℓ là độ dài cung tròn.

Hình viên phân là phần hình tròn bao gồm giữa một cung và dây trương cung đó. Ví dụ hình viên phân CD (gạch sọc). Diện tích hình viên phân CD bằng diện tích hình quạt OCD trừ đi diện tích ΔOCD.

B. BÀI TOÁN ÔN LUYỆN

I. Các bài toán điển hình

Bài 1. 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa cung AB. Vẽ các đường tròn đường kính OM và đường kính OB. Chúng cắt nhau tại điểm thứ hai E, còn OE kéo dài cắt (O) tại F. Chứng minh:

a) Hai cung MFB và BEO dài bằng nhau, hai cung BE và BF cũng dài bằng nhau.

b) Chu vi đường tròn (O) bằng tổng chu vi hai đường tròn nhỏ.

2. Cho tam giác ABC đều có cạnh a. Vẽ hai cung tròn tâm A và B bán kính a cắt nhau ở C. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc hai cung AC,BC và cạnh AB.

a) Tính chu vi giới hạn bởi AB và hai cung AC,BC.

b) Tính độ dài đường tròn (O).

Bài 2. Cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong nửa

đường tròn (O,r). Hai tiếp tuyến tại B và D cắt nhau ở M.

a. Chứng minh OM // AB và ba điểm O,C,M thẳng hàng.

b. Tính chu vi và diện tích tam giác MBD.

c. Tính diện tích giới hạn bởi hai cạnh MB,MD và cung BCD.

Bài 3. Cho đường tròn (O,r) và điểm M với $OM = r\sqrt{2}$, một đường thẳng (m) quay xung quanh M cắt (O) tại P và Q. Gọi N là trung điểm của PQ.

a. Chứng tỏ rằng ON vuông góc với PQ, suy ra N chạy trên một cung tròn cố định với hai điểm giới hạn S,T thuộc (O).

b. Tính theo r độ dài MS, MT. Suy ra M,O,S,T là đỉnh của một hình vuông.

c. Tính theo r diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi MS,MT và cung nhỏ ST của đường tròn (O).

Bài 4. Cho tam giác DEF vuông tại D với DE < DF. Kẻ đường trung trực của EF tại H cắt DF tại P. Vẽ đường tròn đường kính PF. Kéo dài EF cắt đường tròn tại M và kéo dài DM cắt đường tròn tại N. Chứng minh:

a. Tam giác EDF bằng tam giác FMP;

b. Tứ giác EDMF là hình thang cân nội tiếp;

c. FD là phân giác góc NFE.

d. Trong tam giác DEF cho $\widehat{F} = 30^\circ$, cạnh huyền EF = 2r, tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ HF và dây HF.

Bài 5. Cho đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (I,R) đường kính MN tại N. Trên (d) lấy đoạn NP = R. Từ P vẽ tiếp tuyến PQ với (I).

a. Tứ giác MIPQ là hình gì? Tính chu vi của nó.

b. PI cắt (I) ở E và F, tính NE,NF.

c. Tính diện tích của hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ NE và dây cung NE.

II. Các bài toán kiểm tra.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB,CD vuông góc. Gọi S là một cung nhỏ chạy trên cung nhỏ BC.

a. Chứng minh phân giác của góc ASB đi qua một điểm cố định.

b. Trên cạnh SA lấy đoạn SM = SB, chứng minh M chạy trên một cung tròn cố định.

c. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ASC, chứng minh K chạy trên một cung tròn cố định.

d. Tính diện tích của hình vành trăng khuyết giới hạn bởi nửa đường tròn (I) và cung AMB.

Bài 7. Cho đường tròn (O,R) đường kính AB, một dây CD cắt đường kính tại E. Tiếp tuyến d của (O) tại B cắt các tia AC, AD theo thứ tự tại M,N.

a. Chứng minh hai tam giác ACB và ABM đồng dạng.

b. Chứng minh AC.AM = AD.AN.

c. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt d tại I. Chứng minh I là trung điểm của MB.

d. Xác định vị trí của dây CD để tam giác AMN đều.

e. Tính diện tích của tam giác cong giới hạn bởi hai cạnh IC, IB và cung nhỏ CB biết góc COB bằng 120°.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn (I,r). Gọi P là trung điểm của AC và AH là đường cao của tam giác ABC.

a. Chứng minh tứ giác APIH nội tiếp được trong một đường tròn (K). Xác định tâm K của đường tròn này.

b. Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc nhau.

c. Đường tròn (K) cắt AB tại N. Chứng minh ba điểm N,K,P thẳng hàng.

d. Giả sử AB = r, hãy tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi cung nhỏ AC của đường tròn (I), cung API của đường tròn (K) và đoạn IC.

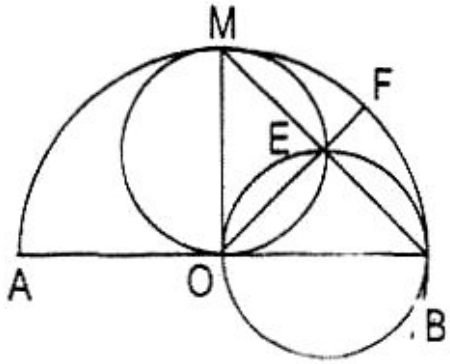
C. SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. 1.a) Theo công thức độ dài cung tròn n° là $\frac{\pi Rn}{180}$ ta có:

Trong đường tròn (O) độ dài cung MFB là $\frac{\pi.OB.90}{180} = \frac{\pi OB}{2}$ (hình 106).

Trong đường tròn đường kính OB độ dài cung OEB là:

$\frac{\pi.\frac{OB}{2}.180}{180} = \frac{\pi.OB}{2}$. Vậy hai cung MFB và OEB dài bằng nhau.



H.106

Trong (O) độ dài cung BF là $\frac{\pi.OB.45}{180} = \frac{\pi.OB}{4}$ (vì góc BOF bằng 45°).

Trong đường tròn đường kính OB độ dài cung BE là:

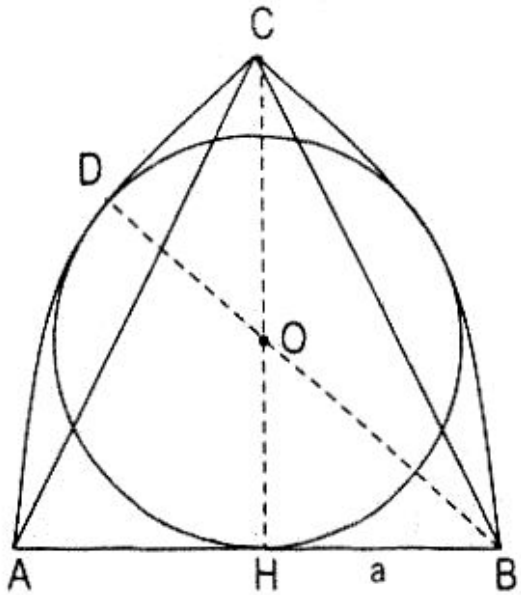
$\frac{\pi.\frac{OB}{2}.90}{180} = \frac{\pi.OB}{4}$.

Vậy hai cung BE và BF dài bằng nhau.

b) Ta có $OM = OB = \frac{AB}{2}$. Do đó hai đường tròn đường kính OM và OB bằng nhau và có tổng chu vi là:

$2.2\pi.\frac{OB}{2} = 2\pi.OB$.

Chu vi đường tròn (O) bằng $2\pi.\frac{AB}{2} = 2\pi.OB$.



H.107

Vậy chu vi đường tròn (O) bằng tổng chu vi hai đường

tròn nhỏ.

2. a) Ta có AC = BC. Độ dài cung BC là: $\frac{\pi.a.60}{180} = \frac{\pi a}{3}$ (hình 107).

Chu vi hình cần tìm bằng: độ dài AC + độ dài BC + độ dài AB = $\frac{2\pi a}{3} + a = \frac{a}{3}(2\pi + 3)$.

b) Theo tính chất của hai đường tròn tiếp xúc nhau thì ba điểm B,O,D thẳng hàng. Ta lại có C,O,H thẳng hàng vì (O) tiếp xúc với AB. Gọi R là bán kính của (O), xét tam giác vuông HOB ta có:

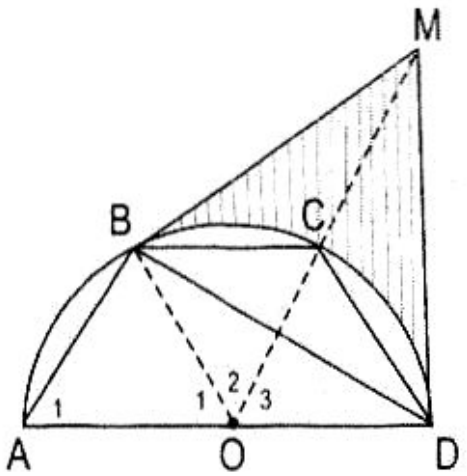
$OB^2 = OH^2 + HB^2$. Do OB = BD - OD = a - R nên:

$(a - R)^2 = R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ hay $a^2 - 2aR + R^2 = R^2 + \frac{a^2}{4}$.

Từ đó $a^2 - \frac{a^2}{4} = 2aR$. Suy ra $R = \frac{3a}{8}$.

Vậy độ dài đường tròn (O) là: $2\pi.\frac{3a}{8} = \frac{3}{4}\pi.a$ (đơn vị dài).

Bài 2. a. ABCD là nửa lục giác đều nên các góc O_1, O_2, O_3 đều bằng 60° (hình 108). Do MB, MD là tiếp tuyến nên MO là tia phân giác góc BOD. Mà OC cũng là tia phân giác góc BOD. Suy ra ba điểm O,C,M thẳng hàng. Tam giác OAB đều nên góc $A_1 = 60^\circ$, góc $O_2 = 60^\circ$. Vậy $\hat{A}_1 = \hat{O}_2$ ở vị trí so le trong, suy ra OM//AB.



H.108

b) Góc MBD (giữa tiếp tuyến và một dây) bằng góc A_1 (cùng chắn cung BD). Mà MB = MD do tính chất hai tiếp tuyến cùng phát xuất từ M nên ΔMBD đều.

Trong ΔABD vuông tại B ta có $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$,

từ đó $BD = R\sqrt{3}$.

Vậy chu vi tam giác MBD bằng $3R\sqrt{3}$.

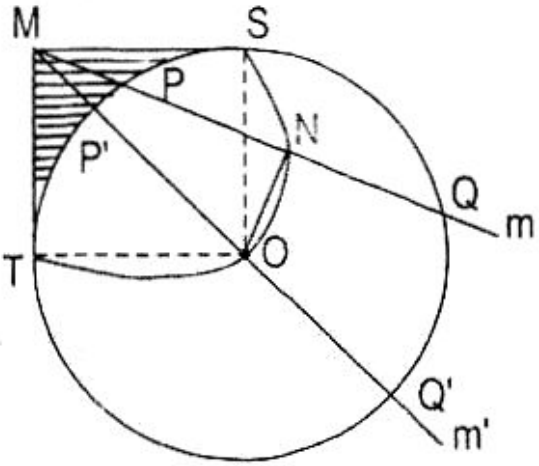
Đường cao tam giác này bằng $R\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$. Vậy diện tích của ΔMBD là: $\frac{1}{2}.R\sqrt{3}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

c. Diện tích phần gạch sọc là:

$$S = 2(S_{\Delta MDO} - S_{quạt\ DOC}) = 2\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6}\right) = R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$ (đơn vị diện tích).

Bài 3. a. Do N là trung điểm của PQ nên $ON \perp PQ$. Suy ra $\widehat{MNO} = 90^\circ$. (hình 109). N nhìn MO cố định dưới một góc vuông nên N chạy trên đường tròn đường kính MO.

Nhưng N nằm trong (O) nên N chỉ chạy trên cung tròn SOT giới hạn bởi hai điểm S và T thuộc (O).



H.109

b. Do S nằm trên đường tròn đường kính MO nên $\widehat{MSO} = 90^\circ$, tức là tam giác MSO vuông tại S.

Ta có $\sin\widehat{SMO} = \frac{OS}{OM} = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\widehat{SMO} = 45^\circ$.

Do đó ΔMSO vuông cân nên $MS = r$. Tương tự $MT = r$.

Vậy tứ giác MSOT có bốn cạnh bằng nhau và góc MSO vuông là hình vuông.

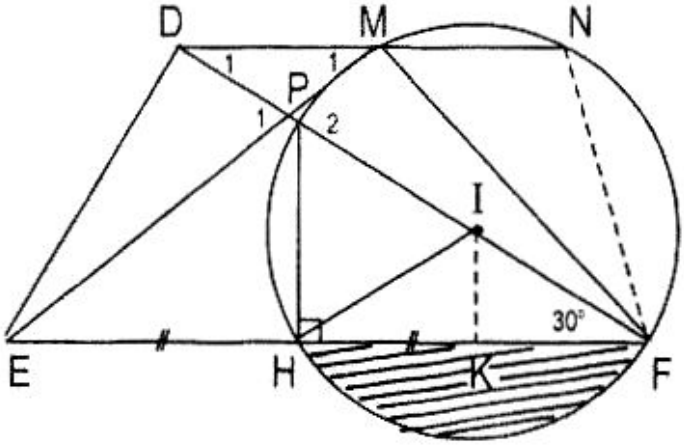
c. Diện tích phần gạch sọc bằng diện tích hình vuông MSOT trừ đi diện tích hình quạt TOS, tức là:

$$S = R^2 - \frac{\pi R^2.90}{360} = R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{R^2}{4}(4 - \pi)$$ (đơn vị diện tích).

Bài 4. a. Các tam giác EDF và FMP là những tam giác vuông tại D và M (góc PMF vuông vì nội tiếp trong nửa đường tròn) có $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$ (đối đỉnh) và PE = PF (gt) (hình 110).

Vậy ΔEDF = ΔFMP.

b. Do các góc tại D và M đều vuông nên tứ giác EDMF nội tiếp được trong đường tròn đường kính EF.



H.110

Ta có PD = PM (hai tam giác bằng nhau ở câu a) nên $\widehat{D_1} = \widehat{M_1}$. Mà $\widehat{M_1} = \widehat{DFE}$ (cùng chắn cung ED). Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{DFE}$ ở vị trí so le trong, do đó DM//EF.

Mặt khác $\widehat{EDM} = \widehat{DMF}$ (vì cùng bằng $90^\circ + \widehat{D_1}$ và $90^\circ + \widehat{M_1}$). Suy ra tứ giác EDMF là hình thang cân.

c. Tứ giác PMNF nội tiếp trong đường tròn đường kính PF nên: $\widehat{PMN} + \widehat{PFN} = 180^\circ$. Lại có $\widehat{PMN} + \widehat{M_1} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{PFN}$. Mà góc $\widehat{M_1} = \widehat{PFH}$. Vậy $\widehat{PFH} = \widehat{PFN}$, tức là FD là phân giác góc NFE.

d. Diện tích hình viên phân gạch sọc bằng diện tích hình quạt HIF trừ đi diện tích ΔHIF (I là tâm đường tròn đường kính PF).

Ta có ΔPHF là nửa tam giác đều nên đường cao HF = $\frac{PF.\sqrt{3}}{2} = r$. Suy ra PF = $\frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ và IF = $\frac{1}{2}PF = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích hình quạt HIF có góc HIF bằng 120° là:

$$\frac{\pi.IF^2.120}{360} = \pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 : 3 = \frac{\pi.3r^2}{9.3} = \frac{\pi r^2}{9}.$$

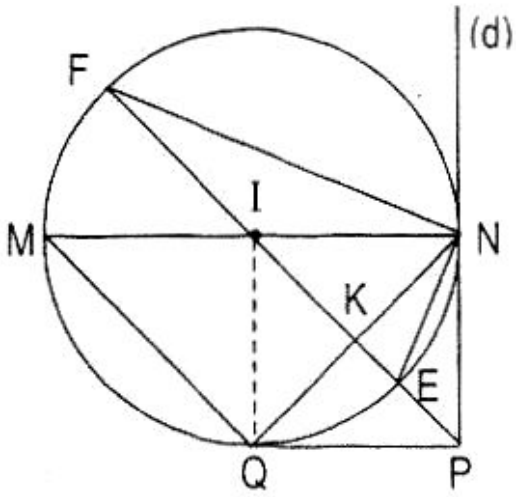
Diện tích ΔHIF là: $\frac{1}{2}HF.IK = \frac{1}{2}.r.\frac{IF}{2} = \frac{r}{2}.\frac{r\sqrt{3}}{6} = \frac{r^2\sqrt{3}}{12}$.

Vậy diện tích viên phân phải tìm là:

$$\frac{\pi r^2}{9} - \frac{r^2\sqrt{3}}{12} = \frac{4\pi r^2 - 3r^2\sqrt{3}}{36} = \frac{r^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{36}$$ (đơn vị diện tích).

Bài 5. a. Tứ giác INPQ là hình vuông vì có bốn cạnh bằng R và góc INP vuông (hình 111). Suy ra QP//IN và QP = IN. Do đó tứ giác MIPQ có hai cạnh đối MI và QP song song và bằng nhau là một hình bình hành. Chu vi hình bình hành này là:

$2(MI + IP) = 2(R + R\sqrt{2}) = 2R(1 + \sqrt{2})$.



H.111

b. Xét tam giác NKE, K là giao điểm hai đường chéo của hình vuông INPQ, ta có:

$NE^2 = NK^2 + KE^2 = NK^2 + (IE - IK)^2$ hay

$$NE^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)^2$$

$$= \frac{R^2}{4}\left(2 + 4 + 2 - 4\sqrt{2}\right) = R^2\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Vậy $NE = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Lưu ý: NE chính là cạnh của bát giác đều nội tiếp trong đường tròn (I,R). Trong ΔFNE vuông tại N (vì góc N chắn nửa đường tròn) ta có:

$NF^2 = FE^2 - NE^2 = 4R^2 - R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$

$= 2R^2 + R^2\sqrt{2} = R^2(2 + \sqrt{2})$.

c. Diện tích hình viên phân gạch sọc bằng diện tích hình quạt INE trừ đi diện tích ΔINE tức là:

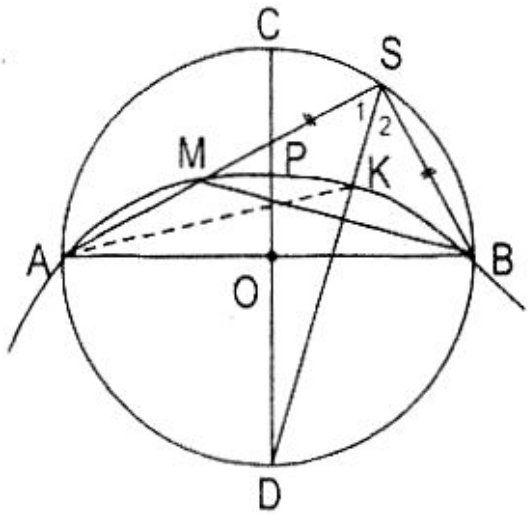
$$S = \frac{\pi R^2.45}{360} - \frac{1}{2}IE.NK = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{1}{2}.\frac{R\sqrt{2}}{2}.R = \frac{R^2}{8}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right)$$ (đơn vị diện tích).

Bài 6. a. Do AB vuông góc với CD nên D là trung điểm của cung AB. Suy ra $\widehat{S}_1$ và $\widehat{S}_2$ là hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau nên $\widehat{S}_1 = \widehat{S}_2$, tức là SD là phân giác của góc vuông ASB (hình 112).

Vậy khi S chạy trên cung nhỏ BC thì phân giác góc ASB luôn qua điểm cố định D.

b. $\widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{BMS} = 180^\circ - 45^\circ$ (vì ΔMSB vuông cân tại S), hay $\widehat{AMB} = 135^\circ$ không đổi.

Vậy M nhìn AB cố định dưới góc vuông không đổi nên M chạy trên cung chứa góc 135° dựng trên đường kính AB giới hạn tại hai điểm A và B. Tâm của cung chứa góc này chính là điểm D.



H.112

c. Xét tam giác KAB ta có:

$$\widehat{AKB} = 180^\circ - (\widehat{KAB} + \widehat{KBA}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{SAB} + \widehat{SBA}).$$

Trong ΔSAB vuông tại S ta cũng có:

$$\widehat{SAB} + \widehat{SBA} = 90^\circ. \text{ Do đó } \widehat{AKB} = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.$$

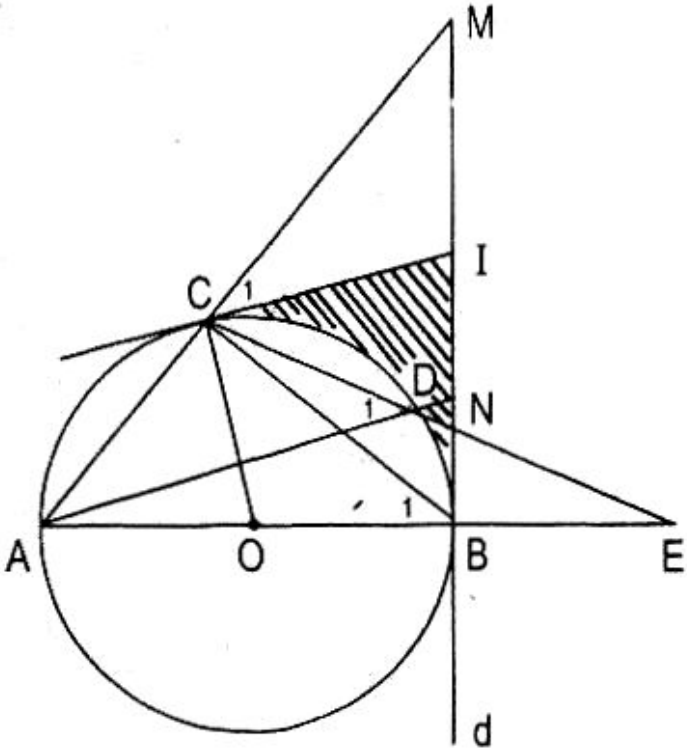
Vậy K nhìn AB dưới góc không đổi nên K chạy trên cung chứa góc 135° dựng trên AB (như điểm M) và giới hạn tại hai điểm B và P giao điểm của CD với cung nhỏ AB.

d) Diện tích hình vành trăng khuyết phải tìm bằng diện tích nửa hình tròn (O) trừ đi diện tích hình viên phân AMPB của đường tròn (D), tức là:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} - \left(S_{\text{quatADB}} - S_{\Delta ADB}\right) = \frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi\left(R\sqrt{2}\right)^2.90}{360} - \frac{1}{2}.2R.R\right)$$

hay $S = \frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{2} - R^2\right) = R^2$ (đơn vị diện tích).

Bài 7. a) Hai tam giác ACB và ABM là những tam giác vuông có $\widehat{B_1} = \widehat{M}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Vậy hai tam giác này đồng dạng (hình 113).



H.113

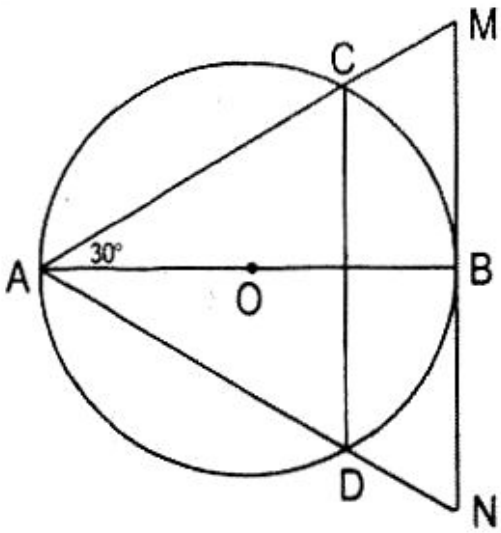
b) Xét hai tam giác đồng dạng ACD và ANM vì có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{D_1} = \widehat{M}$ (do $\widehat{M} = \widehat{B_1}$ theo câu a và $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ cùng chắn cung AC). Suy ra:

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AD}{AM} \text{ hay}$$

AC.AM = AD.AN.

c) Ta có IC = IB (tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ I), nên $\widehat{ICB} = \widehat{IBC}$ (1). Lại có $\widehat{C_1} + \widehat{ICB} = 90^\circ$, $\widehat{IBC} + \widehat{M} = 90^\circ$ nên kết hợp với (1) được $\widehat{C_1} = \widehat{M}$, do đó ΔICM cân nên IC = IM.

Vậy IM = IB (vì cùng bằng IC), tức là I là trung điểm của MB.



H.114

d) Nếu tam giác AMN đều (hình 114) thì điểm N phải nằm khác phía với M đối với AB. Ta có AB vuông góc với MN, do đó CD cũng vuông góc với AB.

Xét ΔACB vuông có góc CAB bằng 30°. Vì thế muốn tìm vị trí của C ta dựng góc CAB bằng 30° cắt đường tròn (O)' tại C. Từ C hạ đường vuông góc xuống AB cắt (O) tại D. Ta xác định được vị trí của dây CD.

e) Diện tích của tam giác cong gạch sọc bằng diện tích

tứ giác OCIB trừ đi diện tích hình quạt COB.

$S_{\text{tứ giác OCIB}} = 2.S_{\Delta OCI} = 2.\frac{1}{2}OC.CI = R.R\sqrt{3}$ (vì ΔOCI là nửa tam giác đều do $\widehat{COB} = 120^\circ$ theo gt) $= R^2\sqrt{3}$.

$$S_{\text{quạt}COB} = \frac{\pi R^2.120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$$

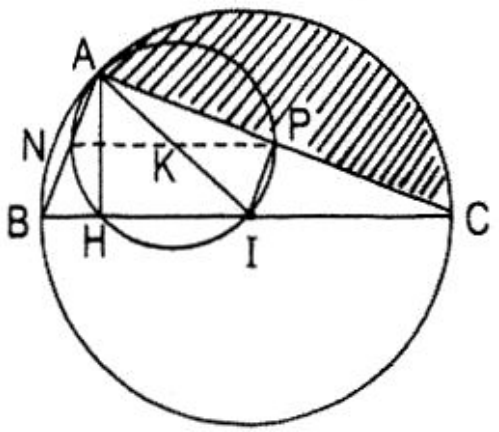
Vậy $S_{\text{tam giác cong}} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$ (đơn vị diện tích).

Bài 8. a) Bán kính kẻ từ I đến trung điểm P của AC nên $IP \perp AC$ (hình 115). Tứ giác APIH có tổng hai góc đối $\widehat{H} + \widehat{P} = 180^\circ$ nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính AI. Tâm K của đường tròn này là trung điểm của AI.

b) Hai đường tròn (I) và (K) có khoảng cách giữa hai tâm d = IA - KA nên tiếp xúc trong tại A.

c) Tứ giác ANIP có ba góc vuông là hình chữ nhật. Do đó ba điểm N,K,P thẳng hàng (vì NP là đường chéo).

d) Diện tích của phần gạch sọc bằng diện tích hình quạt AIC trừ đi diện tích nửa hình tròn tâm K.



H.115

Diện tích hình quạt AIC có góc AIC bằng 120° (vì ΔIAB đều) là: $\frac{\pi r^2.120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$. Diện tích nửa hình tròn (K) là:

$$\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 : 2 = \frac{\pi r^2}{8}.$$

Vậy diện tích phần gạch sọc là:

$$\frac{\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2}{8} = \frac{5\pi r^2}{24}.$$

GIỚI THIỆU ĐỀ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC CƠ SỞ CỦA MỘT SỐ TỈNH, THÀNH PHỐ

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Năm 1999

ĐỀ CỦA TỈNH CAO BẰNG

I. Lý thuyết: (2 điểm) Học sinh được chọn một trong hai đề.

Đề thứ nhất

a) Nêu các trường hợp về số nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (với $a \neq 0$). Viết công thức nghiệm (nếu có).

b) Giải phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Đề thứ hai:

Chứng minh định lý: "Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì giao điểm này cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo thành bởi hai tiếp tuyến".

II. Bài toán bắt buộc

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức:

$$S = \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) : \left(x - 1 - \frac{1}{x-1}\right).$$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tìm x để S = -1.

Bài 2. (2 điểm) Tổng số học sinh của hai lớp 9A và 9B của nhà trường là 90 học sinh. Tổng số học sinh đạt danh hiệu học sinh tiên tiến của cả hai lớp đạt tỉ lệ 30%. Số học sinh tiên tiến của lớp 9A nhiều hơn số học sinh tiên tiến của lớp 9B là 3 học sinh. Tìm số học sinh tiên tiến của mỗi lớp.

Bài 3. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân ($\widehat{A} = 90^o$, AB = AC). M là trung điểm của BC. Từ D trên MC ta kẻ Dx vuông góc với BC cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác ABDF và ADCE nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh BF vuông góc với CE.

c) Chứng minh AE = AF.

ĐỀ CỦA TỈNH HÀ TÂY

I. Lý thuyết (2 điểm). Học sinh được chọn một trong hai câu sau:

Câu 1:

a) Nêu quy tắc nhân các căn thức bậc hai. Cho một ví dụ.

b) Vẽ và tìm toạ độ giao điểm đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ: $y = 2x - 1$ và $y = 3 - 2x$.

Câu 2:

a) Nêu định lý góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

Vẽ hình, ghi giả thiết, kết luận:

b) Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Hãy chứng tỏ rằng: AB // (A'B'C'D') và AB // (CDD'C').

II. Bài toán bắt buộc

Bài 1. (2 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x - 2\sqrt{x}}{x-1} \text{ với } x > 0; x \neq 1; x \neq 4.$$

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm x để biểu thức A = 0,5.

Bài 2. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một đội xe cần chở 350 tấn hàng. Khi bắt đầu làm việc có hai xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 20 tấn nữa mới hết số lượng cần chở. Hỏi lúc đầu đội xe có bao nhiêu chiếc xe?

Bài 3 .(4 điểm) Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB lấy một điểm C khác A, B. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tia tiếp tuyến Ax. Tia BC cắt tia Ax tại D, tia phân giác của góc CAD cắt nửa đường tròn tại E và cắt tia BC tại F (E khác với A). Gọi I là giao điểm của các đoạn thẳng AC, BE.

a) Chứng minh EFCI là một tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là trung điểm đoạn thẳng FI. Chứng minh: KE = KC và OK $\perp$ EC.

c) Chứng minh $\widehat{AFI} = \widehat{FBI}$.

d) Cho BC = 4cm và CD = 2,25cm. Tính diện tích tam giác ACF.

ĐỀ CỦA THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

I. Lý thuyết (2 điểm): Học sinh chọn một trong hai câu.

Câu 1

a) Hãy viết định nghĩa hàm số bậc nhất. Nêu cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

b) Áp dụng: Vẽ đồ thị hàm số y = 2x – 3.

Câu 2

a) Hãy viết định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn.

b) Chứng minh: "Nếu một đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn".

II. Bài toán (8 điểm): Bắt buộc cho mọi học sinh.

Bài 1. (2 điểm)

a) Tính: $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$.

b) Cho: $M = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2} - 1}{x-2}$ với $x \neq 2$.

+ Rút gọn biểu thức M;

+ Tính giá trị của biểu thức M tại giá trị $x = 5\sqrt{2}$.

Bài 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$.

b) Chứng minh đường cong (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2(m + 1)x - 2m + 4$ (x là đối số, $m \in \mathbf{R}$) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

c) Chứng minh rằng biểu thức: $A = x_1\left(1 - \dfrac{x_2}{2}\right) + x_2\left(1 - \dfrac{x_1}{2}\right)$ không phụ thuộc vào m, trong đó x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của đường cong (P) có phương trình $y = x^2$ với đường thẳng (d) có phương trình $y = 2(m + 1)x - 2m + 4$.

Bài 3. (4 điểm)

Cho đường tròn tâm O và M là điểm bất kỳ trên đường tròn. Trên tiếp tuyến của đường tròn tại M lấy điểm T. Đường thẳng TO cắt đường tròn tại C và D (C nằm giữa T và O). Hạ CA vuông góc với TM tại A và DB vuông góc với TM tại B.

a) Chứng minh CA // OM và MA = MB.

b) Chứng minh $AC.BD = AM^2$.

c) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống TO. Xác định tâm đường tròn qua ba điểm A, B, H.

d) Biết MA = a. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đáy là hình tròn tâm là điểm M, bán kính đáy có độ dài là a và đường cao có độ dài là 2a.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA TỈNH HÀ NAM

Bài 1. (3,5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

2) Cho biểu thức: $B = \frac{|x|}{1+\sqrt{1-|x|}}$.

a) Tìm x để B có nghĩa;

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức B.

Bài 2. (2,5 điểm)

Cho phương trình: $x^2 + (2m - 5)x - n = 0$ (x là ẩn).

a) Giải phương trình khi m = 1 và n = 4;

b) Tìm m và n để phương trình có hai nghiệm là 2 và -3;

c) Cho m = 5. Tìm n nguyên nhỏ nhất để phương trình có nghiệm dương.

Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau ở H. Kéo dài AH cắt đường tròn tại K, kéo dài AO cắt đường tròn tại M. Chứng minh:

1) MK // BC;

2) DH = DK;

3) HM đi qua trung điểm I của BC;

4) $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$.

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

ĐỀ CỦA CAO BẰNG

Bài 1

a) $S = \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) : \left(x - 1 - \frac{1}{x-1}\right)$, điều kiện $x \neq 1$.

$$S = \frac{(x-3)(x-1)+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{(x-1)^2-1} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x}.$$

b) $S = \frac{x-2}{x} = -1$ hay $x - 2 = -x$, suy ra $2x = 2$. Vậy $x = 1$.

Nhưng theo a) thì $x \neq 1$, vậy không có giá trị nào của x để $S = -1$.

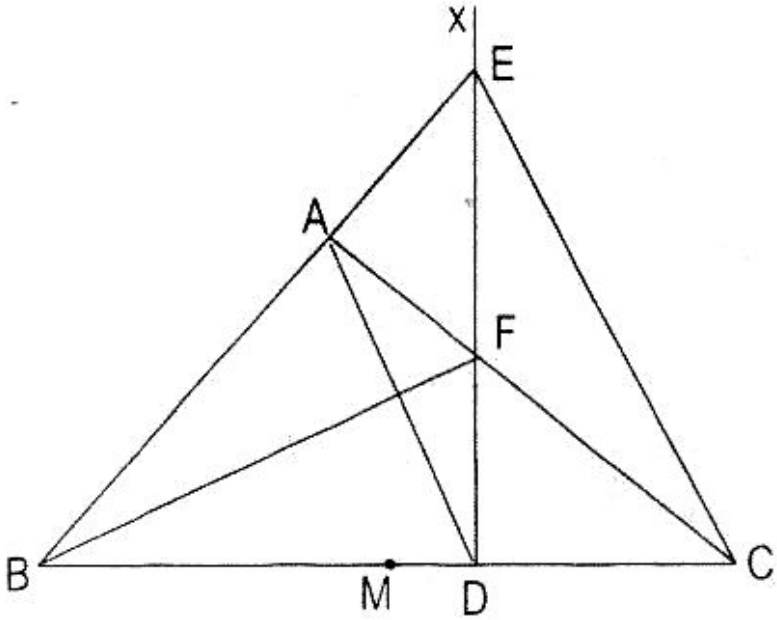
Bài 2. Tổng số học sinh tiên tiến là 90. 30% = 27 (học sinh). Gọi số học sinh tiên tiến của lớp 9A là x (x nguyên dương). Số học sinh tiên tiến của lớp 9B là (x-3).

Theo bài ra ta có phương trình:

$x + (x - 3) = 27$. Suy ra $x = 15$ thoả mãn điều kiện. Vậy số học sinh tiên tiến của lớp 9A là 15 và của lớp 9B là 12.

Bài 3

a) Tứ giác ABDF có $\widehat{A} = \widehat{D} = 1v$ nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính BF (hình



H.116

116).

Tứ giác ADCE có các đỉnh A và D nhìn CE dưới một góc vuông nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính CE.

b) Xét tam giác BEC có CA và DE là hai đường cao nên F là trực tâm của tam giác. Suy ra BF phải là đường cao thứ ba, vậy BF vuông góc với EC.

c) Tam giác ABC vuông cân tại A (gt) nên $\widehat{B} = 45^\circ$.

Xét tam giác vuông BDE đã có $\widehat{B} = 45^\circ$ nên $\widehat{E} = 45^\circ$.

Xét tam giác vuông AEF đã có $\widehat{E} = 45^\circ$ nên $\widehat{F} = 45^\circ$.

Vậy tam giác AEF vuông cân, suy ra AE = AF.

ĐỀ CỦA TỈNH HÀ TÂY

Bài 1

a) $A = \dfrac{x-1-4(\sqrt{x}-1)+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \dfrac{x-1}{x-2\sqrt{x}} = \dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{x-1} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$

$= \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{x}$

(Với điều kiện đã có trong đề bài)

b) Ta có $\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{2}$ hay $x = 2x - 4\sqrt{x}$. Từ đó $x - 4\sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right) = 0$. Giải ra được hai nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = 16$.

Bài 2. Gọi x là số chiếc xe lúc đầu (x nguyên dương).

Theo dự định mỗi xe phải chở $\dfrac{350}{x}$ tấn hàng. Khi bắt đầu làm việc mỗi xe phải chở $\dfrac{350}{x-2}$ tấn hàng.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{350}{x-2} = \frac{350}{x} + 20.$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$$350x = 350(x-2) + 20x(x-2)$$

hay $\quad 350x = 350x - 700 + 20x^2 - 40x;$

$$20x^2 - 40x - 700 = 0, \text{ hay } x^2 - 2x - 35 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 7$, $x_2 = -5$ (loại).

Vậy lúc đầu đội xe có 7 chiếc xe.

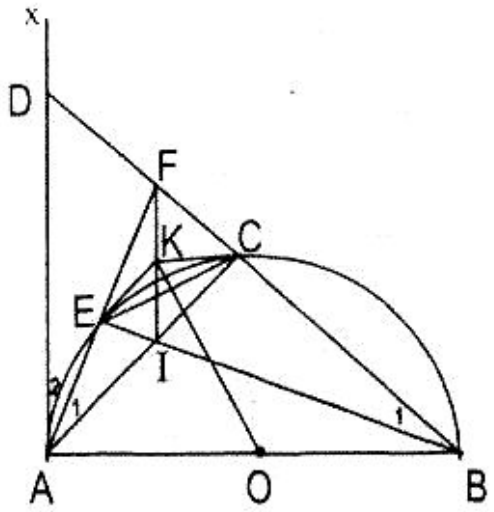
Bài 3. a) Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ACB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{FEI} = \widehat{FCI} = 1v$.

Tứ giác EFCI có $\widehat{FEI} + \widehat{FCI} = 2v$, nên nội tiếp được đường tròn (hình 117).

b) Do K là trung điểm của FI nên EK là trung tuyến của tam giác vuông EFI, do đó $EK = \frac{1}{2}FI$. Tương tự CK bằng nửa cạnh huyền FI.

Suy ra KE = KC.

Ta có điểm K cách đều hai đầu đoạn thẳng EC (vì KE = KC) và O cũng cách đều hai đầu của EC (vì OE = OC = bán kính). Vậy K và O nằm trên trung trực của EC, do đó OK ⊥ EC.



H.117

c) Do EFCI nội tiếp (câu a) nên F = C (góc nội tiếp cùng chắn cung EI), $\widehat{F} = \widehat{A_2}$ (so le trong do FI // AD vì cùng vuông góc với AB). Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt) nên $\widehat{F} = \widehat{A_1}$. Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (cùng chắn cung EC). Suy ra $\widehat{F} = \widehat{B_1}$ tức là $\widehat{AFI} = \widehat{FBI}$.

d) Xét tam giác vuông ADB ta có $AC^2 = CD.CB = 2,25.4 = 9$. Từ đó AC = 3cm.

Trong tam giác vuông ACD ta có

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 9 + (2,25)^2 = 14,0625.$$

Từ đó $\quad AD = 3,75cm.$

Do AF là phân giác $\widehat{CAD}$ nên $\dfrac{FC}{FD} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{3}{3,75} = \dfrac{1}{1,25}$

Suy ra $\quad \dfrac{FC}{FC + FD} = \dfrac{1}{1 + 1,25}$ hay $\dfrac{FC}{2,25} = \dfrac{1}{2,25}$.

Do đó $\quad FC = 1cm.$

Vậy diện tích tam giác ACF bằng:

$$\frac{1}{2}AC.FC = \frac{1}{2}.3.1 = 1,5(cm^2).$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA TỈNH HÀ NAM

Bài 1. 1) Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x - 1}}\right).\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad x > 0;\ x \neq 1$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 - (\sqrt{x} + 1)^2}{x - 1}.\frac{x - 1}{\sqrt{x}} = \frac{-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -4.$$

2) a) Biểu thức B có nghĩa khi:

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{1 - |x|} \neq 0 \\ 1 - |x| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

b) $B = \dfrac{|x|}{1 + \sqrt{1 - \sqrt{x}}} = \dfrac{|x|.(1 - \sqrt{1 - |x|})}{1 - (1 - |x|)} = 1 - \sqrt{1 - |x|}$

với $|x| \geq 0$.

Do $0 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -|x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq 1 - |x| \geq 0$

$\Rightarrow 1 \geq \sqrt{1-|x|} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-|x|} \leq 0 \quad \Rightarrow 0 \leq 1-\sqrt{1-|x|} \leq 1$

hay $0 \leq B \leq 1$.

Vậy min B = 0 khi $1 = \sqrt{1-|x|} \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

max B = 1 khi $1 - \sqrt{1-|x|} = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bài 2. 1) Khi m = 1 và n = 4, phương trình đã cho có dạng $x^2 - 3x - 4 = 0$. Vì a – b + c = 0 nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$.

2) Khi x = 2 phương trình đã cho có dạng 4m – 6 – n = 0

Khi x = - 3 phương trình đã cho có dạng

$$-6m + 24 - n = 0.$$

Từ đó, có hệ hai phương trình bậc nhất với ẩn là m, n sau: $\begin{cases} 4m - 6 - n = 0 \\ -6m + 24 - n = 0 \end{cases}$

Giải ra được m = 3, n = 6.

3) Cho m = 5 phương trình đã cho có dạng:

$$x^2 + 5x - n = 0 \ (*).$$

Nếu a và c khác dấu thì phương trình này luôn có hai nghiệm trái dấu. Do đó muốn phương trình (*) có nghiệm dương thì phải có $\frac{c}{a} < 0$, có nghĩa là $-n < 0$ hay $n > 0$.

Vậy với n = 1 là số nguyên nhỏ nhất thì phương trình (*) có nghiệm dương.

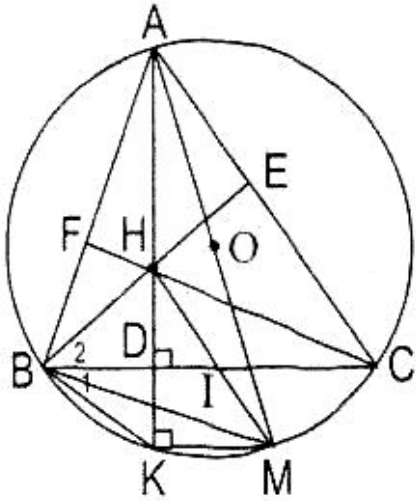
Bài 3. 1) Ta có $\widehat{AKM}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó MK ⊥ AK (hình 118), BC ⊥ AK (gt), nên MK // BC.

2) Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC), $\widehat{KAC} = \widehat{B_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ hay BD là phân giác của góc HBK.

ΔHBK có $BD \perp HK$, BD lại là phân giác nên Δ HBK cân, suy ra BD cũng là trung tuyến, vậy DH = DK.

3) Ta có $\widehat{ABM}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $MB \perp AB$, $CF \perp AB$ (gt), do đó MB//CH. Chứng minh tương tự có MC//BH.

Tứ giác BHCM có MB//CH và MC//BH nên là hình bình hành, suy ra HM phải đi qua trung điểm I của BC (theo tính chất của hình bình hành).



H.118

4) Ta có các nhận xét như sau:

a) $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = 1$.

Thật vậy:

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC} + \frac{\frac{1}{2}HE.AC}{\frac{1}{2}BE.AC} + \frac{\frac{1}{2}HF.AB}{\frac{1}{2}BE.AC}$$

$$= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

$$= \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

b) Nếu với x > 0, y > 0, z > 0 thì có:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Thật vậy

$$(x + y + z).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) =$$

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 3+2+2+2=9.$$

Từ đó, có:

$\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right).\left(\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\right)\geq 9$ với chú ý rằng

$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1$ và $\frac{1}{\frac{HD}{AD}}=\frac{AD}{HD}, \frac{1}{\frac{HE}{BE}}=\frac{BE}{HE}, \frac{1}{\frac{HF}{CF}}=\frac{CF}{HF}$.

Năm 2000

ĐỀ CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

A. Lý thuyết (2 điểm). Học sinh chọn một trong hai đề sau:

Đề 1. Phát biểu hai quy tắc đổi dấu của phân thức. Viết công thức minh hoạ cho từng quy tắc. Thực hiện các phép tính: $\frac{2a^2}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{b-a}$.

Đề 2. Phát biểu định lý về góc nội tiếp của một đường tròn. Chứng minh định lý trong trường hợp tâm O nằm trên một cạnh của góc.

B. Bài tập bắt buộc (8 điểm)

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{2}{x-1}\right)$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x để $P>0$.

c) Tìm các số m để có các giá trị của x thoả mãn: $P.\sqrt{x} = m - \sqrt{x}$.

Bài 2. (2 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Một xe tải và một xe con cùng khởi hành đi từ tỉnh A đến tỉnh B. Xe tải đi với vận tốc 40km/h, xe con đi với vận tốc 60km/h. Sau khi mỗi xe đi được một nửa quãng đường AB thì: xe con nghỉ 40 phút rồi chạy tiếp đến B, xe tải trên quãng đường còn lại đã tăng vận tốc thêm 10km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe con nửa giờ. Hãy tính quãng đường AB.

Bài 3. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và AM < AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

a) Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh góc AOC bằng góc BIC.

c) Chứng minh BI // MN.

d) Xác định vị trí của cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

ĐỀ CỦA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

I. Lý thuyết (2 điểm) Thí sinh chọn một trong hai câu sau đây:

1) Phát biểu và chứng minh định lý Viét (hệ thức Viét) phần thuận.

Áp dụng:

Cho phương trình: $x^2 - 2x + m + 1 = 0$

a) Định m để phương trình có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (nếu có) của phương trình.

Tính $A = (x_1 + x_2)^2 + 3x_1.x_2$ theo m.

2) Phát biểu tính chất thuận và đảo của tiếp tuyến tại một điểm thuộc đường tròn.

Áp dụng:

Cho đường tròn (O, R) có tâm là O. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) cách tâm O một khoảng bằng 2R, ta kẻ một tiếp tuyến với đường tròn (O), tiếp tuyến này tiếp xúc với (O) tại điểm M. Tính AM theo R.

II. Bài toán bắt buộc (8 điểm).

Bài 1. (1,5 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$.

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

Bài 2. (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) và đường thẳng (D): y = -x-1 trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm I của (P) và (D).

Bài 3. (1 điểm) Tính (rút gọn):

$$A = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} (a > 0, a \neq 1).$$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O, R). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp được.

b) Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần

lượt tại P và Q.

Chứng minh $\widehat{BPQ} = \widehat{BCQ}$, suy ra EF song song với PQ.

c) Chứng minh OA vuông góc với EF.

d) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF theo R.

ĐỀ CỦA THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

A. Lý thuyết (2 điểm). Học sinh chọn 1 trong 2 câu sau:

Câu 1. *a*) Hãy viết định nghĩa căn bậc hai số học của một số $a \geq 0$. Tính: $\sqrt{4}$, $-\sqrt{9}$, $\sqrt{(1-x)^2}$.

b) Hãy viết định nghĩa về đường thẳng song song với mặt phẳng.

Câu 2. a) Hãy viết dạng tổng quát của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Chứng minh: "Mọi góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đều là góc vuông".

B. Bài toán (8 điểm). Bắt buộc cho mọi học sinh.

Bài 1. (2 điểm)

a) Cho $M = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$, $N = \sqrt{8} + \sqrt{3}$. Tính M + N và M.N;

b) Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x}$.

c) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x - 3$. Hãy tìm toạ độ các giao điểm của đường thẳng (d) với các trục toạ độ.

Bài 2. (2 điểm)

Trong một phòng có 288 ghế được xếp thành các dãy, mỗi dãy đều có số ghế như nhau. Nếu ta bớt đi 2 dãy và mỗi dãy còn lại thêm 2 ghế thì vừa đủ cho 288 người họp

(mỗi người ngồi một ghế). Hỏi trong phòng có mấy dãy ghế và mỗi dãy có bao nhiêu ghế?

Bài 3. (4 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx với nửa đường tròn. C là điểm trên nửa đường tròn sao cho cung AC bằng cung CB. Trên cung CB lấy điểm D tuỳ ý (D khác C và B). Các tia AC, AD cắt Bx lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh ΔABE vuông cân;

b) Chứng minh $\Delta ABF \backsim \Delta BDF$;

c) Chứng minh tứ giác CEFD nội tiếp;

d) Cho điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A và B) và D di động trên cung CB (D khác C và B). Chứng minh AC.AE = AD.AF và có giá trị không đổi.

ĐỀ CỦA TỈNH THANH HOÁ

A. Lý thuyết (2 điểm)

Học sinh được chọn một trong hai câu sau:

Câu 1: Phát biểu quy tắc khai phương một thương, quy tắc chia hai căn thức bậc hai.

Áp dụng tính:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{81}}$; b) $\sqrt{\dfrac{0,25}{0,64}}$; c) $\dfrac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$; d) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$.

Câu 2: 1- Phát biểu định nghĩa đường thẳng song song với mặt phẳng.

2- Chứng minh rằng nếu một đường thẳng a không thuộc mặt phẳng (P) mà song song với một đường thẳng b nằm trên (P) thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

B- Bài toán bắt buộc:

Bài 1. (2 điểm)

Giải phương trình:

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$;

b) $\frac{8}{x-5} + 3 = \frac{20}{x-5}$.

Bài 2. (2,5 điểm)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 134m. Nếu giảm mỗi kích thước của vườn đi 1m thì diện tích của vườn bằng diện tích của một hình vuông có cạnh bằng 28m. Tính các kích thước của vườn hình chữ nhật đó.

Bài 3. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng BA lấy điểm I (điểm A nằm giữa I và B). Vẽ cát tuyến Ix cắt đường tròn tại các điểm C, F (C nằm giữa I và F). Đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BA cắt đường thẳng BC tại H. Đường thẳng HA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh các tứ giác HIEB và HIAC nội tiếp được.

b) Chứng minh EF vuông góc với AB.

c) Chứng minh các đường thẳng HI, CA, BE đồng quy.

ĐỀ CỦA TỈNH HÀ NAM

I. Lý thuyết (2 điểm). Học sinh chọn một trong hai đề sau để làm.

Đề 1: Phát biểu và viết công thức của hệ thức Viet.

Áp dụng: Tính nhẩm nghiệm của phương trình sau:

$$x^2 - 3x + 7 = 4x - 3.$$

Đề 2: Phát biểu và chứng minh định lý về mối liên hệ

giữa số đo của góc có đỉnh bên ngoài đường tròn với số đo các cung bị chắn giữa hai cạnh của góc đó.

II. Bài toán (8 điểm)

Bài 1. (2 điểm)

Cho $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a}{b-a}\right) : \left(\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{a}}{a+b+2\sqrt{ab}}\right)$

với điều kiện $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị của a và b trong trường hợp $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ và $A = 1$.

Bài 2. (2 điểm)

Cho phương trình bậc hai ẩn x:

$$x^2 - 2(2k+1)x + 2k - 4 = 0 \ (1)$$

a) Giải phương trình với $k = 1$

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1). Chứng minh biểu thức: $A = x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào giá trị của k.

Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại điểm thứ hai F, G.

a) Chứng minh rằng ADEC, AFBC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh AC song song với FG.

c) Chứng minh các đường thẳng AC, DE, BF đồng quy.

d) Từ A vẽ đoạn AP = a vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (PBC) biết AB = AC = b.

ĐỀ CỦA TỈNH LÂM ĐỒNG

I. Lý thuyết: (2 điểm) Thí sinh chọn một trong hai đề sau:

Đề 1:

1/ Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn và viết công thức nghiệm của phương trình bậc hai đó.

2/ Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Đề 2:

1/ Phát biểu định nghĩa về đường thẳng song song với mặt phẳng.

2/ Cho tứ diện SABC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB, SC. Chứng minh đường thẳng IK song song với mặt phẳng (ABC).

II. Bài toán: (8 điểm) Bắt buộc.

Bài 1. (1,5 điểm)

1/ Rút gọn $A = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$.

2/ Chứng minh: $x + \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} 2x - 1 \text{ với } x \geq 1 \\ 1 \text{ với } x < 1 \end{cases}$

3/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho hai hàm số $y = x^2$ (P) và $y = 3x - 2$ (d)

1/ Vẽ (P) và (d) trên cùng mặt phẳng toạ độ.

2/ Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

3/ Lập phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và (d') cắt (P) tại điểm M có hoành độ là -1.

Bài 3. (1,5 điểm)

Một nhóm học sinh được giao nhiệm vụ trồng 80 cây thông con. Nhưng khi thực hiện nhóm ấy được tăng cường

thêm 4 bạn, do đó mỗi bạn đã trồng ít hơn 1 cây so với dự định.

Hỏi lúc đầu nhóm có bao nhiêu học sinh? (Biết rằng số cây mỗi bạn trồng như nhau).

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn (AB < AC), vẽ đường cao AH, từ H kẻ HK, HM lần lượt vuông góc với AB, AC. Gọi J là giao điểm của AH và MK.

1/ Chứng minh tứ giác AMHK nội tiếp một đường tròn.

2/ Chứng minh hệ thức JA.JH =JK.JM

3/ Từ C kẻ tia Cx vuông góc với AC và Cx cắt AH kéo dài tại D. Vẽ HI, HN lần lượt vuông góc với BD, DC. Chứng minh $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$.

4/ Chứng minh bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

ĐỀ CỦA HÀ NỘI

Bài 1: a) Do $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

$x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$ nên ta có:

$$P = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{(\sqrt{x}-1)+2}{x-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$$

$= \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ (với điều kiện x>0, $x \neq 1$).

b) P > 0 tức là $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}} > 0$. Do $\sqrt{x}$ dương muốn P > 0 thì x-1 > 0 hay x > 1.

c) Do x phải thoả mãn P. $\sqrt{x}$ = m - $\sqrt{x}$ nên: $\frac{x-1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} = m - \sqrt{x}$, hay $x - 1 - m + \sqrt{x} = 0$.

Ta phải giải phương trình bậc hai $x + \sqrt{x} - 1 - m = 0$. Muốn phương trình có nghiệm dương thì a và c phải khác dấu (để có 2 nghiệm khác dấu) mà a = 1 nên c = - 1 - m < 0 hay m >-1. Ngoài ra m ≠ 1, vì nếu m = 1 thì phương trình $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ sẽ có nghiệm x = 1 trái với điều kiện x ≠ 1 ở câu a.

Bài 2

Gọi quãng đường AB là x km (x>0).

Thời gian xe tải đi quãng đường AB là: $\frac{x}{2.40} + \frac{x}{2.50}$(giờ)

Thời gian xe con đi quãng đường AB là: $\frac{x}{60} + \frac{2}{3}$(giờ)

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{80} + \frac{x}{100} - \frac{1}{2} = \frac{x}{60} + \frac{2}{3}.$$

MC: 1200. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$15x + 12x - 600 = 20x + 800$$

hay 7x = 1400 suy ra x = 200, thoả mãn điều kiện ở trên.

Vậy quãng đường AB dài 200km.

Bài 3

a) Nối OE ta có OE ⊥ MN (hình 119). Lại có OC ⊥ AC (gt). Suy ra tứ giác ACOE nội tiếp được.

b) ΔOAB = ΔOAC (c.c.c), suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$, do đó $\widehat{BOC} = 2\widehat{AOC}$ (1).

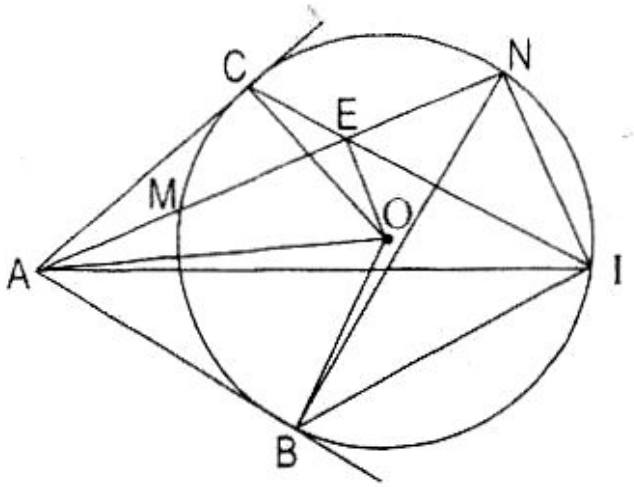
Lại có sđ $\widehat{BOC}$ = sđ $\overset{\frown}{BMC}$ (2) và sđ $\widehat{BIC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BMC}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$.

c) Do tứ giác ACOE nội tiếp (câu a) nên $\widehat{AEC} = \widehat{AOC}$

(cùng chắn cung AC).

Mà $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$ (câu b). Suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{BIC}$ chiếm vị trí góc đồng vị, do đó BI // MN.



H.119

d) Xét hai tam giác AIN và ABN có diện tích bằng nhau vì có đáy AM chung và đường cao bằng nhau (khoảng cách giữa hai đường thẳng BI và MN song song theo câu c). Suy ra S_{AIN} lớn nhất khi S_{ABN} lớn nhất.

S_{ABN} lớn nhất khi ba điểm B, O, N thẳng hàng. Do đó nối BO và kéo dài cắt (O) tại N'. Nối AN' cắt (O) tại M'. Vậy AM'N' là vị trí của cát tuyến AMN phải tìm.

ĐỀ CỦA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Bài 1. A) Đặt $x^2 = y > 0$, phương trình trùng phương đã cho trở thành $2y^2 + 5y - 7 = 0$

$\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2$. Từ đó $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{7}{2}$ (loại).

Ta có $x^2 = y = 1$, vậy $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y = -4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -5$

Thay $x = -5$ vào $3x + 2y = -2$ được:

$$2y = -2 - 3x = 13 \Rightarrow y = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

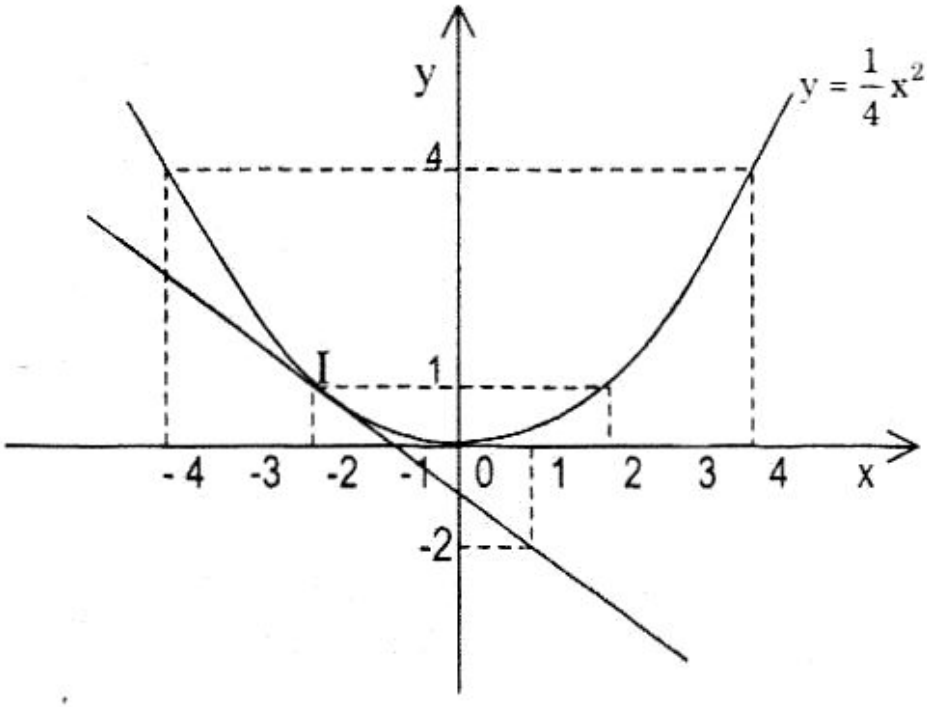
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x = -5,\ y = 6\frac{1}{2})$

Bài 2. A) Lập bảng một số giá trị của x và y:

x	0	-1
y	-1	0

x	...	-4	-2	0	2	4	...
y	...	4	1	0	1	4	...

Đồ thị (P) và đường thẳng (D) như ở hình 120.



H.120

b) Hoành độ giao điểm I là nghiệm của phương trình $\frac{1}{4}x^2 = -x - 1$ hay $x^2 = -4x - 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$, hay $(x + 2)^2 = 0$ mà nghiệm là $x_1 = x_2 = -2$. Từ đó $y = 1$.

Vậy I(-2; 1).

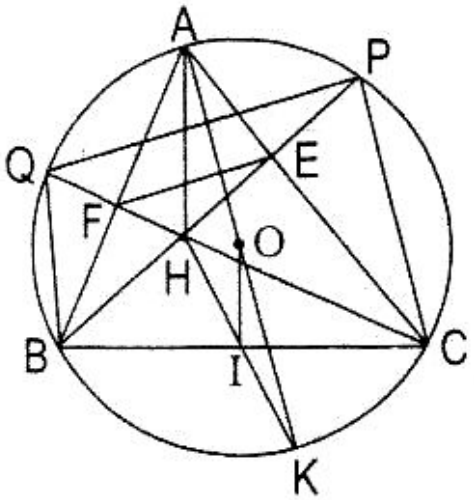
Bài 3. $A = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} (a > 0, a \neq 1)$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3 - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3 + 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1).(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}+1-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2$$

Bài 4. A) Ta có BE ⊥ AC và CF ⊥ AB (theo gt) nên $\widehat{BEC} = \widehat{CFB} = 1v$ (hình 121). Như vậy là F và E cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên F và E phải nằm trên đường tròn đường kính BC (theo quỹ tính cung chứa góc), vậy tứ giác BFEC nội tiếp được.



H.121

b) Ta có $\widehat{BPQ} = \widehat{BCQ}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BQ của đường tròn tâm O). Mặt khác ta có $\widehat{FEB} = \widehat{BCQ}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC), từ đó suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BPQ}$.

Hai góc FEB, BPQ bằng nhau, ở vị trí đồng vị nên EF//PQ.

c) Hai tam giác vuông BEA và CFA có góc nhọn A chung suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{FCA}$ do đó có $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AQ}$ hay A là điểm chính giữa của cung QP.

Đường kính OA đi qua điểm chính giữa của cung QP nên OA ⊥ QP.

QP // EF, OA ⊥ QB ⇒ OA ⊥ EF.

d) Vẽ đường kính AOK, dễ dàng chứng minh được BHCK là hình bình hành, do đó đường chéo HK đi qua trung điểm I của đường chéo BC.

Nối O với I ta có OI ⊥ BC, do $BC = R\sqrt{3}$ nên $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30^\circ$.

Suy ra $OI = \frac{R}{2}$.

Tứ giác AFHE có tổng hai góc đối bằng 2v nên nội tiếp đường tròn đường kính AH. Đường tròn này chính là đường tròn ngoại tiếp Δ AFE.

Lại có OI // AH vì cùng vuông góc với BC. Suy ra OI là đường trung bình trong Δ AHK nên $OI = \frac{AH}{2}$ hay $AH = 2.\frac{R}{2} = R$. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ AEF bằng $\frac{1}{2}AH = \frac{R}{2}$.

ĐỀ CỦA HẢI PHÒNG

Bài 1. a) Ta có $M + N = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$$M.N = (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 3 - 8 = -5.$$

b) TXĐ của hàm số y là: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

c) Giao điểm của (d) với trục hoành là A (1,5; 0).

Giao điểm của (d) với trục tung là B (0; -3).

Bài 2.

Gọi số dãy ghế trong phòng là x (x nguyên dương).

Mỗi dãy có $\frac{288}{x}$ ghế, sau khi bớt đi 2 dãy thì còn lại x – 2 dãy (x >2). Lúc đó mỗi dãy còn lại có $\frac{288}{x-2}$ ghế.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{288}{x-2} - \frac{288}{x} = 2.$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$288x - 288(x - 2) = 2x(x - 2)$$

Sau khi tính toán được phương trình bậc hai:

$$x^2 - 2x - 288 = 0.$$

Giải ra được: $x_1 = 18$, $x_2 = -16$ (loại).

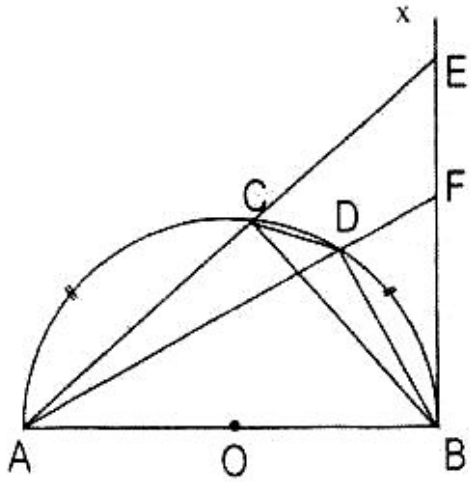
Vậy trong phòng có 18 dãy và mỗi dãy có 16 ghế.

Bài 3

a) Do Bx là tiếp tuyến nên góc ABE bằng 90° (hình 122). Góc EAB chắn $\frac{1}{4}$ đường tròn (do AC = CB) nên góc EAB bằng 45°.

Vậy Δ ABE vuông cân.

b) Góc ADB bằng 90° (chắn nửa đường tròn). Suy ra $\widehat{ABF} = \widehat{ADB} = 90^\circ$. Góc F chung. Vậy $\Delta ABF \backsim \Delta BDF$ (g.g).



H.122

c) Ta có $\widehat{AEB} = 45^\circ$ (vì Δ ABE vuông cân theo câu a), $\widehat{CDA} = 45^\circ$ (góc nội tiếp chắn $\frac{1}{4}$ đường tròn). Mà $\widehat{CDA} + \widehat{CDF} = 180^\circ$, nên $\widehat{AEB} + \widehat{CDF} = 180^\circ$.

Vậy tứ giác CEFD nội tiếp được.

d) Xét tam giác vuông ABE có BC là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$AC.AE = AB^2$.

Tương tự $AD.AF = AB^2$. Vậy $AC.AE = AD.AF$ và có giá trị không đổi là AB^2.

ĐỀ CỦA TỈNH THANH HOÁ

Bài 1. a) Giải phương trình $x^2 - 10x + 21 = 0$.

$\Delta' = 25 - 21 = 4$. Từ đó $x_1 = 5 + 2 = 7$, $x_2 = 5 - 2 = 3$.

b) Giải phương trình $\frac{8}{x-5} + 3 = \frac{20}{x-5}$.

Điều kiện $x \neq 5$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$8 + 3(x - 5) = 20$, hay $3x = 27$, suy ra $x = 9$; thoả mãn điều kiện.

Bài 2. Gọi chiều dài mảnh vườn là x mét ($x > 0$), chiều rộng sẽ là $67 - x$ (do nửa chu vi là $134 : 2 = 67$m).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$(x - 1)(66 - x) = 28^2$$

hay $66x - x^2 - 66 + x = 784$. Từ đó có phương trình bậc hai $x^2 - 67x + 850 = 0$.

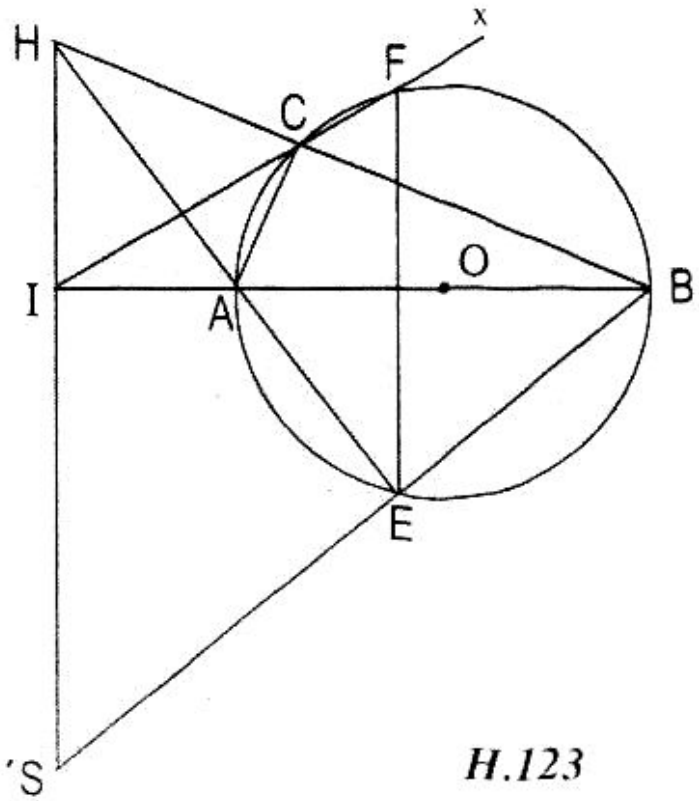
$\Delta = 67^2 - 4.850 = 4489 - 3400 = 1089 = 33^2$.

Từ đó $x_1 = \frac{67 + 33}{2} = 50$, $x_2 = \frac{67 - 33}{2} = 17$. Cả hai giá trị đều thoả mãn điều kiện.

Vậy mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 50m và chiều rộng 17m.

Bài 3. a) Tứ giác HIEB có $\widehat{HIA} = 1v$ (gt) và $\widehat{HEB} = 1v$ (chắn nửa đường tròn đường kính AB) nên nội tiếp được (hình 123).

Tương tự tứ giác HIAC có $\widehat{HIA} = 1v$ (gt) và $\widehat{ACB} = 1v$ (chắn nửa đường tròn) nên nội tiếp được.



H.123

b) Do tứ giác HIAC nội tiếp nên $\widehat{IHA} = \widehat{ICA}$ (cùng chắn cung IA). Lại có $\widehat{ICA} = \widehat{AEF}$ (cùng bù với góc ACF). Suy ra $\widehat{IHA} = \widehat{AEF}$ chiếm vị trí góc so le trong, do đó HI // EF.

Vì IH ⊥ AB (gt) nên EF ⊥ AB.

c) Giả sử HI và BE kéo dài cắt nhau tại S. Trong Δ SHB có hai đường cao BI và HE cắt nhau tại A nên SA phải là đường cao thứ ba tức là SA ⊥ HB. Mặt khác lại có AC ⊥ HB, mà từ điểm A ngoài HB dựng được một và chỉ một đường vuông góc với HB nên SA ≡ AC.

Vậy ba đường thẳng HI, CA, BE đồng quy.

ĐỀ CỦA TỈNH HÀ NAM

Bài 1. a) Với a > 0, b > 0, a ≠ b, biểu thức A rút gọn bằng:

$$A = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a(b-a)}.$$

Tính giá trị của A khi:

$$a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2,\ b = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2.$$

$$A = \frac{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)^2}{(3+2\sqrt{2}).(3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+1}{-2(3+2\sqrt{2})} = -\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

c) Từ $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ suy ra b = 4a.

Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a(b-a)} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{4a})^2}{a(4a-a)} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2\sqrt{a})^2}{a.3a}$$

$$= \frac{\sqrt{a}.9a}{3a^2} = \frac{3}{\sqrt{a}}\ (a > 0).$$

Do A = 1 nên có $\frac{3}{\sqrt{a}} = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 3$ hay $\Rightarrow a = 9$.

Do đó b = 4a = 4.9 = 36.

Vậy với $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ và A = 1 thì a = 9 và b = 36.

Bài 2. a) Với k = 1, có phương trình $x^2 - 6x - 2 = 0$

$\Delta' = 9 + 2 = 11 \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{11}$, $x_2 = 3 - \sqrt{11}$.

b) $A = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$

$= x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_1x_2 = x_1 + x_2 - 2x_1x_2$

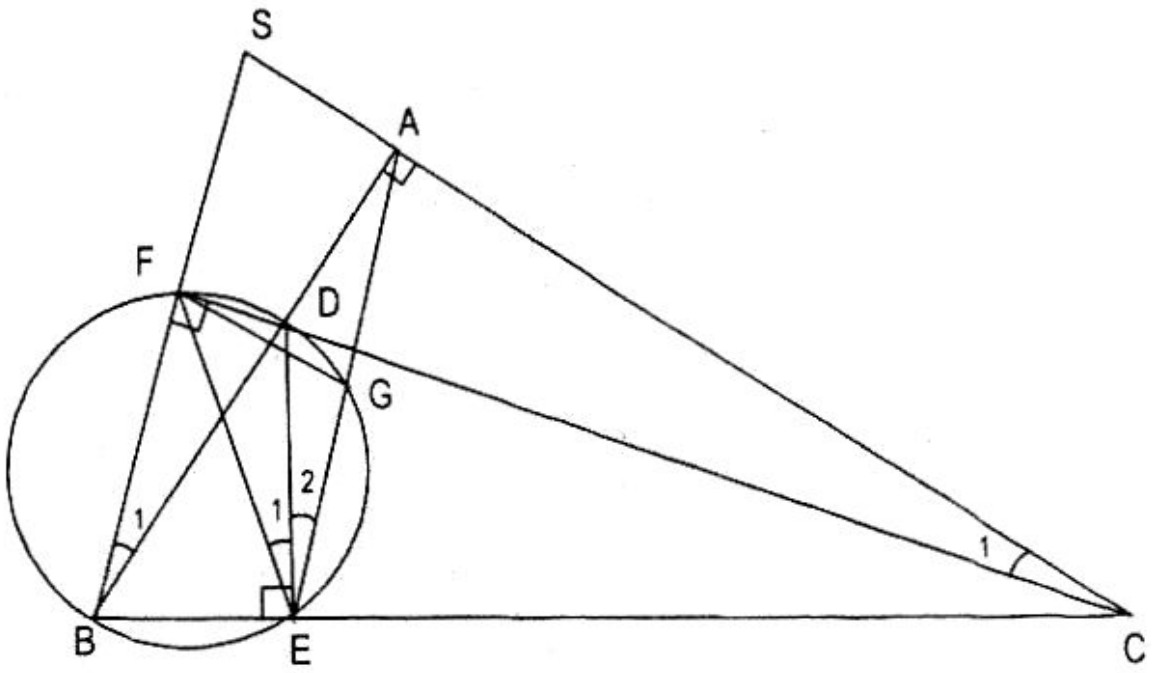
Theo hệ thức Viet có:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(2k+1), P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 2k - 4.$

Do đó $A = 2(2k + 1) - 2(2k - 4)$

$= 4k + 2 - 4k + 8 = 10.$

Vậy biểu thức A không phụ vào giá trị của k.



H.124

Bài 3. (hình 124) a) Ta có $\widehat{BED}$ = 1v (góc nội tiếp chắn

nửa đường tròn) do đó $\widehat{DEC}$ = 1v, $\widehat{DAC}$ = 1v (theo gt), vậy tứ giác ADEC nội tiếp đường tròn đường kính DC.

Ta có $\widehat{BFC}$ = 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BD).

Vì $\widehat{BFC} = \widehat{BAC}$ = 1v nên F và A cùng nhìn BC dưới một góc vuông nên F và A phải nằm trên đường tròn đường kính BC (theo quỹ tính cung chứa góc), vậy tứ giác AFBC nội tiếp được.

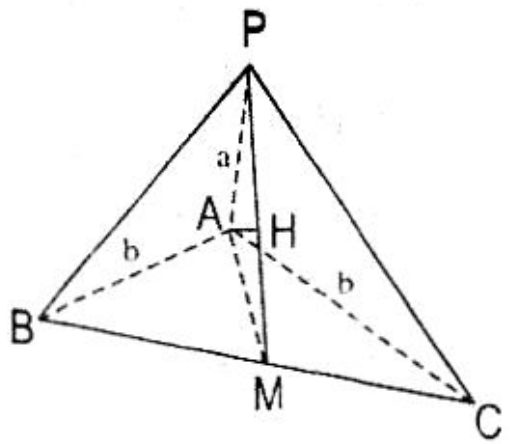
b) $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_2$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD của đường tròn đường kính DC), $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AF của đường tròn đường kính BC), $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FD của đường tròn đường kính BD). Từ đó suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ hay $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{DG}$ tức là D là điểm chính giữa của cung FG. Đường kính BD đi qua điểm chính giữa của cung FG nên BD ⊥ FG mà BD ⊥ AC (gt) từ đó có AC // FG.

c) Kéo dài BF và CA, chúng cắt nhau tại S. Trong tam giác SBC có hai đường cao BA và CF cắt nhau tại D nên DS phải là đường cao thứ ba tức là DS ⊥ BC. Mặt khác ta lại có DE ⊥ BC (vì $\widehat{DEC}$ = 1v). Biết rằng từ điểm D ngoài BC chỉ dựng được một và chỉ một đường vuông góc với BC nên DS ≡ DE hay ED đi qua S. Vậy AC, DE, BF đồng quy tại S.

d) Gọi M là trung điểm của BC thì AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC của tam giác vuông cân ABC, nên

$AM = \frac{BC}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ (hình 125).

Vì PA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên PA ⊥ AM. Trong tam giác vuông PAM hạ AH ⊥ PM thì AH chính là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (PBC).



H.125

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PAM, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{AM^2}; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{b^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = \frac{2a^2 + b^2}{a^2b^2}.$$

Từ đó suy ra: $AH = \frac{ab}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$.

ĐỀ CỦA TỈNH LÂM ĐỒNG

Bài 1

1) Rút gọn:

$$A = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$$

$$= 3\sqrt{4.5} - 2\sqrt{9.5} + 4\sqrt{5} = 3.2\sqrt{5} - 2.3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

2) Nếu $x \geq 1$ thì $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$.

Nếu $x < 1$ thì $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$, do đó:

$$x + \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} x + x - 1 = 2x - 1 \text{ với } x \geq 1 \\ x + 1 - x = 1 \quad \text{với } x < 1. \end{cases}$$

3) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$5x = 5 \Rightarrow x = 1.$

$2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x = 3 - 2.1 = 3 - 2 = 1.$

Nghiệm của hệ là $(x = 1; y = 1)$.

Bài 2. Lập bảng một số giá trị của x và y:

x	0	1
y	-2	1

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...

Ta có đồ thị của (P) và (d) như ở hình 126.

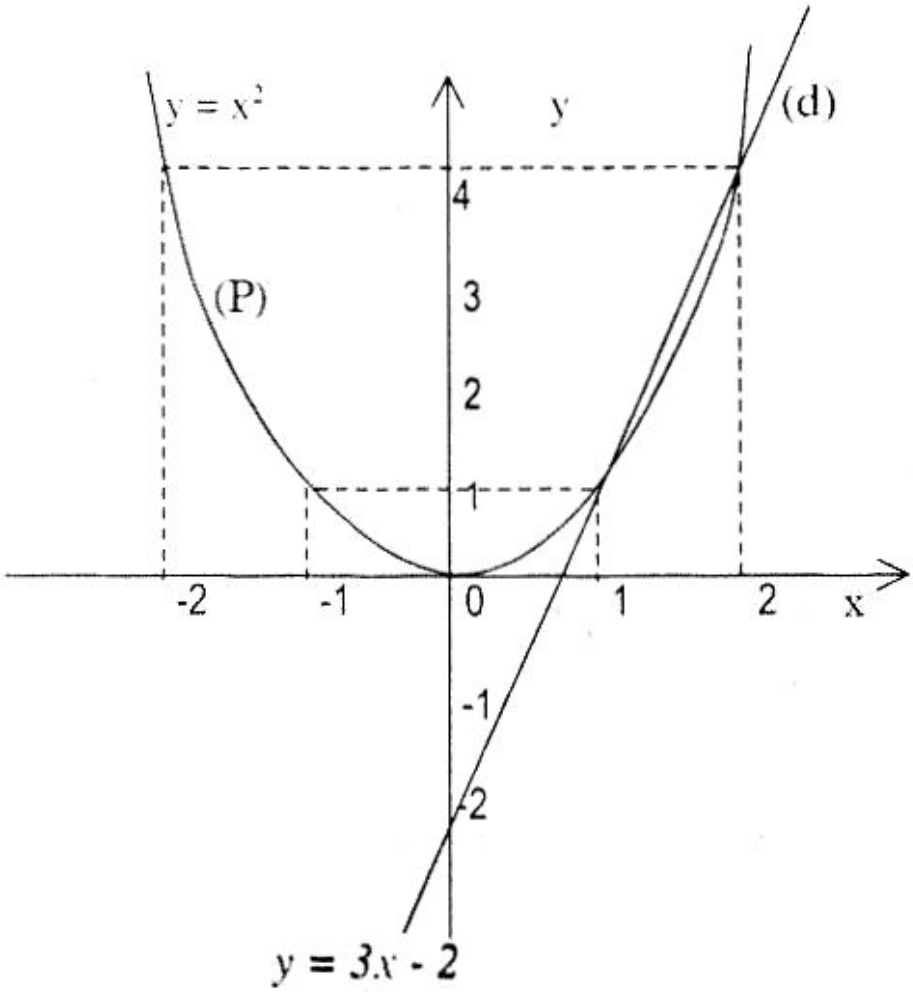
2) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $x^2 = 3x - 2$ hay $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2,$

$x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

Vậy toạ độ hai giao điểm là (2; 4) và (1; 1).



H.126

3) Vì hai đường thẳng song song có hệ góc a' = a và b' ≠ b nên phương trình đường thẳng (d') song song với (d) có dạng y = 3x.

Vì (d') cắt (P) nên có phương trình hoành độ là $x^2 = 3x + b$.

Hai đồ thị trên cắt nhau tại M có hoành độ là - 1 nên:

$(-1)^2 = 3(-1) + b' \Rightarrow b' = 4.$

Vậy phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và (d') cắt (P) tại M có hoành độ là -1 y = 3x + 4.

Bài 3. Gọi x là số học sinh có lúc đầu của nhóm (x

nguyên dương).

Lúc đầu mỗi bạn được giao trồng $\frac{80}{x}$ cây.

Nhưng khi thực hiện có thêm 4 bạn nữa nên số học sinh tham gia trồng cây là (x + 4) bạn, do đó mỗi bạn đã trồng được $\frac{80}{x+4}$ cây.

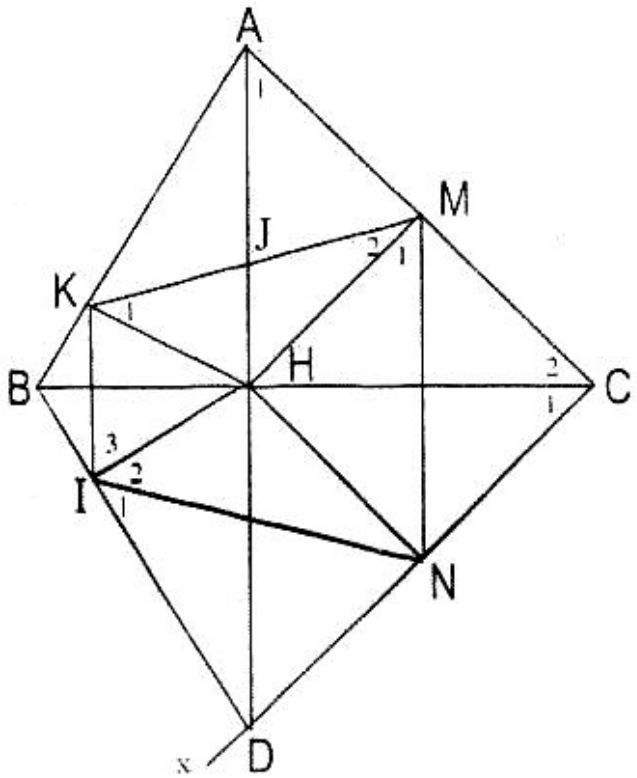
Theo đầu bài có phương trình:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+4} = 1 \text{ hay } x^2 + 4x - 320 = 0.$$

Giải ra được x = 16, thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy số học sinh tham gia trồng cây lúc đầu là 16 em.

Bài 4. 1) Theo giả thiết HK ⊥ AB, HM ⊥ AC nên $\widehat{AKH} = \widehat{AMH} = 1v$ (hình 127). Tứ giác AMHK có $\widehat{AKH} + \widehat{AMH} = 2v$ nên nội tiếp được đường tròn đường kính AH.



H.127

2) Ta có $\widehat{JAM} = \widehat{JKH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HM của đường tròn đường kính AH), $\widehat{AJM} = \widehat{KJM}$ (góc đối đỉnh), vậy Δ JAM ∽ Δ JKH (góc – góc) suy ra $\frac{JA}{JK} = \frac{JM}{JH}$ hay JA.JH = JK.JM.

3) Ta có Cx ⊥ AC (theo gt) nên $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 1v$, mặt khác trong tam giác vuông AHC ta có $\widehat{A_1} + \widehat{C_2} = 1v$, từ đó suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$. Nhưng $\widehat{A_1} = \widehat{K_1}$ (chứng minh trên), nên $\widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ hay $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$.

4) Tứ giác HMCN nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{C}_1 = \widehat{M}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HN), nhưng $\widehat{C}_1 = \widehat{H}_1$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó $\widehat{M}_1 = \widehat{H}_1$ (1).

Tứ giác HNDI cũng nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{I}_1 = \widehat{H}_1$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn cung DN). Từ (1) và (2) có $\widehat{M}_1 = \widehat{I}_1$.

Biết $\widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 1v$ (vì $HI \perp BD$) nên $\widehat{M}_1 + \widehat{I}_2 = 1v$ (3).

Chứng minh tương tự như trên ta có $\widehat{M}_2 + \widehat{I}_3 = 1v$ (4).

Từ (3) và (4) ta nhận thấy tứ giác IKMN có $\widehat{KIN} + \widehat{KMN}$ bằng 2v nên nó nội tiếp được, suy ra bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn.