

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CÁC BÀI TOÁN  
DÃY SỐ ÔN HỌC  
SINH GIỎI

SỬU TÂM

## CÁC BÀI TOÁN DÃY SỐ ÔN HỌC SINH GIỎI

### PHẦN 1.

**Bài 1.** Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ : 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

**Lời giải**

**Cách 1.** Từ hệ thức truy hồi ta có dãy các hệ thức sau:

$$u_n = 3u_{n-1} + 2; \quad 3u_{n-1} = 3^2 u_{n-2} + 2.3; \quad 3^2 u_{n-2} = 3^3 u_{n-3} + 2.3^2 \dots 3^{n-2} u_2 = 3^{n-1} u_1 + 2.3^{n-2}$$

$$\Rightarrow u_n = 3^{n-1} u_1 + 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-2}) = 3^{n-1} + 2 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 2.3^{n-1} - 1.$$

**Cách 2.** Đặt  $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$  sao cho  $v_{n+1} = 3v_n$

$$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = 3u_n + 2 + \alpha = 3v_n = 3(u_n + \alpha) \Rightarrow \alpha = 1.$$

Vậy  $(v_n)$  là một cấp số nhân có công bội  $q = 3$  và  $v_1 = u_1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow v_n = v_1 3^{n-1} = 2.3^{n-1} \Rightarrow u_n = v_n - 1 = 2.3^{n-1} - 1.$$

**Bài 2.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi công thức 
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 5u_{n-1} + 6, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số

**Lời giải**

$$\text{Ta xét } u_n + a = 5(u_{n-1} + a) \Leftrightarrow u_n = 5u_{n-1} + 4a.$$

$$\text{Kết hợp với đề bài } \Rightarrow 4a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } u_n = 5u_{n-1} + 6 \Leftrightarrow u_n + \frac{3}{2} = 5\left(u_{n-1} + \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + \frac{3}{2} \Rightarrow v_1 = u_1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \text{ và } v_n = 5v_{n-1}.$$

Suy ra dãy số  $(v_n)$  là cấp số nhân có  $v_1 = \frac{7}{2}$  và công bội  $q = 5$

$$\Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow v_n = \frac{7}{2} \cdot 5^{n-1} \Rightarrow u_n = v_n - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \cdot 5^{n-1} - \frac{3}{2}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{7}{2} \cdot 5^{n-1} - \frac{3}{2}.$

**Bài 3.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Lời giải**

Ta có  $u_1 > 0$ , quy nạp ta được  $u_n > 0$ .

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{3}{u_n}.$$

Đặt  $v_n = \frac{1}{u_n}$ , khi đó ta được  $v_{n+1} = 3v_n + 2$  với  $v_1 = 2$  (\*)

Đặt  $z_n = v_n + 1$ , (\*) trở thành  $z_{n+1} = 3z_n$  với  $z_1 = 3$ .

Như vậy  $(z_n)$  là một cấp số nhân có công bội bằng 3 và  $z_1 = 3$  nên  $z_n = z_1 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ .

Suy ra  $v_n = z_n - 1 = 3^{n-1}$ .

Vậy dãy số  $(u_n)$  có  $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài 4.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n^3 + 2, & n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 2 \end{cases}$ .

**Lời giải**

Theo đề bài ta có  $u_{n+1} = u_n + n^3 + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = n^3 + 2$ .

Thay  $n$  lần lượt bằng 1, 2, ...,  $n-1$  và cộng  $(n-1)$  đẳng thức ta được

$$u_n - u_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (i^3 + 2) = \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^2 + 2(n-1).$$

Vậy  $u_n = \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^2 + 2n$ .

**Bài 5.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + n^2 + 1, & n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 2 \end{cases}$ .

**Lời giải**

Đặt  $g(n) = an^2 + bn + c$  và  $v_n = u_n + g(n)$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) với  $v_{n+1} = 3v_n$ .

Khi đó  $v_{n+1} = 3v_n \Leftrightarrow u_{n+1} + g(n+1) = 3(u_n + g(n))$

$$\Leftrightarrow 3u_n + n^2 + 1 + g(n+1) = 3u_n + 3g(n)$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 1 + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 3an^2 + 3bn + 3c$$

$$\Leftrightarrow (a+1)n^2 + (2a+b)n + 1 + a + b + c = 3an^2 + 3bn + 3c.$$

Nên  $\begin{cases} a+1 = 3a \\ 2a+b = 3b \\ 1+a+b+c = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$ .

Do đó ta được  $g(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ .

Như vậy khi  $v_n = u_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \Leftrightarrow u_n = v_n - \left( \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \right)$  thì

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + n^2 + 1, & n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1} = 3v_n, & n \geq 1 \\ v_1 = u_1 + g(1) = 4 \end{cases}$$

Suy ra  $v_n = 3^{n-1} \cdot v_1 = 4 \cdot 3^{n-1}$ .

Vậy  $u_n = 4 \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1 = 4 \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ .

**Bài 6.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

a)  $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + 6n^2 - 2n, n \geq 2 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4n - 2, n \geq 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 9u_n + 8n^2 + 14n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

**Lời giải**

a) Theo đề bài suy ra

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = u_1 + 6.2^2 - 2.2$$

$$u_3 = u_2 + 6.3^2 - 2.3$$

$$u_4 = u_3 + 6.4^2 - 2.4$$

...

$$u_n = u_{n-1} + 6.n^2 - 2.n$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được

$$u_n = 3 + 6[2^2 + 3^2 + \dots + n^2] - 2[2 + 3 + \dots + n]$$

$$\Rightarrow u_n = 3 + 6[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] - 2[1 + 2 + 3 + \dots + n] - 4$$

$$\Rightarrow u_n = -1 + n(n+1)(2n+1) - n(n+1) = 2n^3 + 2n^2 - 1.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = 2n^3 + 2n^2 - 1$ .

b) Từ đề bài suy ra  $f(n) = 4n - 2$  là đa thức bậc nhất ẩn  $n$  nên ta xét đa thức  $g(n) = an + b$  sao cho  $u_{n+1} + g(n+1) = 3[u_n + g(n)]$

$$\Rightarrow u_{n+1} + a(n+1) + b = 3[u_n + an + b] \Rightarrow u_{n+1} = 3u_n + 2an + 2b - a.$$

$$\text{Mà } u_{n+1} = 3u_n + 4n - 2 \text{ nên ta phải có } 2an + 2b - a = 4n - 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 2b - a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } u_{n+1} + 2(n+1) = 3[u_n + 2n].$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + 2n \Rightarrow v_1 = u_1 + 2 = 3 \text{ và } v_{n+1} = 3v_n$$

Suy ra  $(v_n)$  là cấp số nhân có  $v_1 = 3$ , công bội  $q = 3$

$$\Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow v_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \text{ mà } v_n = u_n + 2n \Rightarrow u_n = 3^n - 2n.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = 3^n - 2n$ .

c) Từ đề bài suy ra  $f(n) = 8n^2 + 14n + 1$  là đa thức bậc hai ẩn  $n$  nên ta xét đa thức

$$g(n) = an^2 + bn + c \text{ sao cho } u_{n+1} + g(n+1) = 9[u_n + g(n)]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 9[u_n + an^2 + bn + c]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 9u_n + 8an^2 + (8b - 2a)n + 8c - b - a.$$

$$\text{Mà } u_{n+1} = 9u_n + 8n^2 + 14n + 1 \text{ nên ta phải có}$$

$$8an^2 + (8b - 2a)n + 8c - b - a = 8n^2 + 14n + 1 \Rightarrow \begin{cases} 8a = 8 \\ 8b - 2a = 14 \\ 8c - b - a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 2, c = \frac{1}{2} \text{ suy ra } g(n) = n^2 + 2n + \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow u_{n+1} + (n+1)^2 + 2(n+1) + \frac{1}{2} = 9 \left[ u_n + n^2 + 2n + \frac{1}{2} \right].$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + n^2 + 2n + \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = u_1 + \frac{7}{2} = \frac{17}{2} \text{ và } v_{n+1} = 9v_n.$$

Suy ra  $(v_n)$  là cấp số nhân có  $v_1 = \frac{17}{2}$ , công bội  $q = 9$

$$\Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow v_n = \frac{17}{2} \cdot 9^{n-1} = \frac{17}{2} \cdot 3^{2n-2} \text{ mà } v_n = u_n + n^2 + 2n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n - \left( n^2 + 2n + \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{2} \cdot 3^{2n-2} - n^2 - 2n - \frac{1}{2}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{17}{2} \cdot 3^{2n-2} - n^2 - 2n - \frac{1}{2}$ .

**Bài 7.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^2 - n, n \geq 1 \end{cases}$$

#### Lời giải

Theo đề bài  $\Rightarrow q = \beta = 1$ , bậc  $f(n)$  bằng 2  $\Rightarrow$  bậc  $g(n)$  bằng 3.

Xét  $g(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$  sao cho  $u_{n+1} + g(n+1) = u_n + g(n)$

$$\Rightarrow u_{n+1} + a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d = u_n + an^3 + bn^2 + cn + d$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n - 3an^2 - (3a + 2b)n - (a + b + c)$$

Mà  $u_{n+1} = u_n + 2n^2 - n$  nên ta phải có

$$-3an^2 - (3a + 2b)n - (a + b + c) = 2n^2 - n \Rightarrow \begin{cases} -3a = 2 \\ 3a + 2b = 1 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}, b = \frac{3}{2}, c = -\frac{5}{6} \Rightarrow g(n) = -\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n.$$

Do đó  $u_{n+1} + g(n+1) = u_n + g(n)$ .

$$\text{Đặt } v_n = u_n + g(n) \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = 1 \text{ và } v_{n+1} = v_n.$$

Suy ra  $(v_n)$  là cấp số nhân có  $v_1 = 1$ , công bội  $q = 1 \Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 1$ .

$$\text{Mà } v_n = u_n + g(n) \Rightarrow u_n = v_n - g(n) = \frac{2}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{6}n + 1.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số trên là  $u_n = \frac{2}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{6}n + 1$ .

**Bài 8.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 3n + 1, n \geq 1 \end{cases}$$

**Lời giải**

Theo đề  $\Rightarrow q = 2, \beta = 1$ , bậc của  $f(n)$  bằng 2 suy ra bậc của  $g(n)$  bằng 2

Xét  $g(n) = an^2 + bn + c$  sao cho  $u_{n+1} + g(n+1) = 2[u_n + g(n)]$

$$\Rightarrow u_{n+1} + a(n+1)^2 + bn + c = 2[u_n + an^2 + bn + c]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2u_n + an^2 + (b-2a)n + c - a.$$

$$\text{Mà } u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 3n + 1 \text{ nên ta phải có } \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -3 \\ c - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(n) = n^2 - n + 2 \text{ và } u_{n+1} + g(n+1) = 2[u_n + g(n)].$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + g(n) \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1) = 2 \text{ và } v_{n+1} = 2v_n.$$

$$\text{Do đó } (v_n) \text{ là cấp số nhân có công bội } q = 2 \text{ nên } v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = v_n - g(n) = 2^n - n^2 + n - 2.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = 2^n - n^2 + n - 2$ .

**Bài 9.** Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$ .

**Lời giải**

Cho  $n$  chạy từ 1 đến  $n-1$  ở hệ thức truy hồi rồi cộng các hệ thức lại ta được

$$u_n = u_1 + 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2] + n - 1 = n(n+1) + n - 1 = (n-1)^2 - 2.$$

**Bài 10.** Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3n + 2 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$ .

**Lời giải**

**Cách 1.** Từ hệ thức truy hồi ta suy ra

$$u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1; 2u_{n-1} = 2^2u_{n-2} + 2(3n-4) \dots 2^{n-2}u_2 = 2^{n-1}u_1 + 2^{n-2} \cdot 5$$

$$\Rightarrow u_n = 2^{n-1}u_1 + S = 2^n + S \text{ với } S = 3n-1 + 2(3n-4) + 2^2(3n-7) + \dots + 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2S = 2(3n-1) + 2^2(3n-4) + \dots + 8 \cdot 2^{n-2} + 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow S = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{n-2} + 5 \cdot 2^{n-1} - 3n + 1 = 6(1 + 2 + \dots + 2^{n-3}) + 5 \cdot 2^{n-1} - 3n + 1$$

$$= 6(2^{n-2} - 1) + 5 \cdot 2^{n-1} - 3n + 1 = 8 \cdot 2^{n-1} - 3n - 5 = 4 \cdot 2^n - 3n - 5 \Rightarrow u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5.$$

**Chú ý:** trong lời giải trên ta đã tính tổng của tích các số hạng tương ứng của một cấp số cộng và một cấp số nhân.

**Cách 2.** Đặt  $v_n = u_n + an + b$  sao cho  $v_n = 2v_{n-1}$

$$\Rightarrow v_n = u_n + an + b = 2u_{n-1} + 3n - 1 + an + b = 2[u_{n-1} + a(n-1) + b] \Rightarrow a = 3, b = 5.$$

$$\text{Có } v_1 = u_1 + 3 \cdot 1 + 5 = 10 \Rightarrow v_n = u_n + 3n + 5 = v_1 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n \Rightarrow u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5.$$

**Chú ý:** trong lời giải trên ta đã tính tổng của tích các số hạng tương ứng của một cấp số cộng và một cấp số nhân.

- **Cách 2:** Đặt  $v_n = u_n + an + b$  sao cho  $v_n = 2v_{n-1}$

$$\Rightarrow v_n = u_n + an + b = 2u_{n-1} + 3n - 1 + an + b = 2(u_{n-1} + a(n-1) + b) \Rightarrow a = 3; b = 5$$

$$\text{Có } v_1 = u_1 + 3 \cdot 1 + 5 = 10 \Rightarrow v_n = u_n + 3n + 5 = v_1 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5.$$

**Bài 11.**

**Bài 12.** Tìm số dạng tổng quát của dãy  $(x_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = 15x_n - 14n + 1 \end{cases}$$

**Bài giải:**

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng  $x_{n+1} = 15x_n$  là

Ta có  $f(n) = -14n + 1$  là đa thức bậc nhất,  $\lambda = 15 \neq 1$  nên một nghiệm riêng có dạng  $x_n^* = an + b$

Thay vào phương trình đã cho ta được:  $a(n+1) + b = 15(an + b) - 14n + 1$

Suy ra  $a = 1, b = 0$ .

Vậy  $x_n^* = n$ . còn  $\hat{x}_n = C \cdot 15^n$  (với  $C$  là hằng số) và nghiệm tổng quát là:  $\hat{x}_n = C \cdot 15^n + n$ , mà  $x_0 = 7$  nên  $C = 7$ .

Vậy phương trình có nghiệm:  $x_n = 7 \cdot 15^n + n$ .

**Bài 13.** Giải phương trình sai phân: 
$$\begin{cases} x_0 = 99 \\ x_{n+1} = x_n - 2n - 1 \end{cases}$$

**Bài giải:**

Ta có:  $f(n) = -2n - 1$  là đa thức bậc nhất,  $\lambda = 1$  nên ta chọn  $x_n^* = n(an + b)$ . Thay vào ta được:

$$(n+1)[a(n+1) + b] = n(an + b) - 2n - 1 \Rightarrow a = -1; b = 0 \Rightarrow x_n^* = -n^2; \hat{x}_n = C \cdot 1^n = C \Rightarrow x_n = C \Rightarrow x_n = C - n^2, \text{ mà } x_0 = 99 \Rightarrow C = 99.$$

Vậy phương trình có nghiệm:  $x_n = 99 - n^2$ .

**Bài 14.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy  $(u_n)$  được xác định: 
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \cdot 4^n \end{cases}$$

**Hướng dẫn giải**

Các bài toán dãy số ôn học sinh giỏi

Theo đề ta có:  $u_{n+1} = u_n + 4^n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 4^n$ .

Thay  $n$  lần lượt bằng  $1, 2, \dots, n-1$  và cộng  $(n-1)$  đẳng thức ta được:

$$u_n - u_1 = 3 \sum_{i=1}^{n-1} 4^i = 3 \cdot 4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{3} = 4^n - 4.$$

Vậy ta được:  $u_n = 4^n - 1$ .

**Bài 15.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy  $(u_n)$  được xác định:  $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 5 \cdot 3^n \end{cases}$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy  $a = \beta = 3$  nên ta đặt  $v_n = u_n + An \cdot 3^n$  với  $v_{n+1} = 3v_n$ .

$$\text{Với } v_{n+1} = 3v_n \Leftrightarrow u_{n+1} + A(n+1)3^{n+1} = 3(u_n + An \cdot 3^n)$$

$$\Leftrightarrow 3u_n + 5 \cdot 3^n + A(n+1)3^{n+1} = 3(u_n + An \cdot 3^n)$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 3^n + A(n+1)3^{n+1} = 3An \cdot 3^n$$

$$\Leftrightarrow 5 + 3A(n+1) = 3An$$

$$\text{Suy ra: } A = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Ta được: } v_n = u_n - \frac{5}{3}n \cdot 3^n \Leftrightarrow u_n = v_n + \frac{5}{3}n \cdot 3^n.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 5 \cdot 3^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}.$$

Áp dụng công thức tính số hạng tổng quát của cấp số nhân ta được  $v_n = 3^{n-1}$ .

$$\text{Vậy ta được } u_n = 3^{n-1} + \frac{5}{3}n \cdot 3^n = (1+5n)3^{n-1}.$$

**Bài 16.** Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

**Giải:**

- **Cách 1:** Theo giả thiết ta có:  $u_n = 3u_{n-1} + 2^n; 3u_{n-1} = 3^2u_{n-2} + 2^{n-1} \cdot 3; \dots 3^{n-2}u_2 = 3^{n-1}u_1 + 2^2 \cdot 3^{n-2}$

$$\Rightarrow u_n = 3^{n-1}u_1 + 2^n \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \dots + \frac{3^{n-2}}{2^{n-2}}\right) = 3^{n-1} + 4(3^{n-1} - 2^{n-1}) = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

**Chú ý:** Trong lời giải trên ta đã tính tổng của tích các số hạng tương ứng của hai cấp số nhân.

- **Cách 2:** Đặt  $v_n = u_n + k.2^n$  với

$$v_n = 3v_{n-1} \Rightarrow 3u_{n-1} + 2^n + k.2^n = 3(u_{n-1} + k.2^{n-1}) \Rightarrow 2 + 2k = 3k \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow u_n + 2.2^n = v_n = v_1.3^{n-1} = 5.3^{n-1} \Rightarrow u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}.$$

**Bài 17.** Giải phương trình sai phân: 
$$\begin{cases} x_0 = 8 \\ x_{n+1} = 2x_n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

**Bài giải:**

Do  $\lambda = 2 \neq 3 = \beta$  nên ta chọn  $x_n^* = d.3^n$ .

Thay vào phương trình đã cho được  $d = 1 \Rightarrow x_n^* = 3^n$ .

Ta có  $\hat{x}_n = C.2^n$ , vậy  $x_n = C.2^n + 3^n$ , mà  $x_0 = 8$  nên  $C = 7$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x_n = 7.2^n + 3^n$ .

**Bài 18.** Giải phương trình sai phân: 
$$\begin{cases} x_0 = 101 \\ x_{n+1} = 7x_n + 7^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

**Bài giải:**

Do  $\lambda = 7 \neq \beta$  nên ta chọn  $x_n^* = d.n.3^n$ .

Thay vào phương trình đã cho được  $d = 1 \Rightarrow x_n^* = n.7^n$ .

Ta có  $x = C.7^n$ , vậy  $x_n = C.7^n + n.7^n$ , mà  $x_0 = 101$  nên  $C = 101$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x_n = (101 + n).7^n$ .

**Bài 19.** Giải phương trình sai phân: 
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \sqrt{2}.x_{n+1} = x_n - \sin \frac{n\pi}{4} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

**Bài giải:**

Có  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $f(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$  nên ta chọn  $x_n^* = A.\cos \frac{n\pi}{4} + B.\sin \frac{n\pi}{4}$ .

Thay  $x_n^*$  vào phương trình trên, biến đổi và so sánh các hệ số ta được  $A=1; B=0$  suy ra

$$x_n^* = \cos \frac{n\pi}{4}.$$

Ta có  $\hat{x}_n = C.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Rightarrow x_n = C.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \cos \frac{n\pi}{4}$ .

Thay vào điều kiện biên  $x_0 = 1$  ta được  $C = 0$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x_n = \cos \frac{n\pi}{4}$ .

**Bài 20.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi công thức:  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 1 - 2 \cdot 5^n; n \geq 1 \end{cases}$ . Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số

**Giải**

Theo đề bài suy ra

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + 3 \cdot 1 - 1 - 2 \cdot 5^1$$

$$u_3 = u_2 + 3 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 5^2$$

...

$$u_n = u_{n-1} + 3 \cdot (n-1) - 1 - 2 \cdot 5^{n-1}$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế suy ra

$$u_n = 1 + 3[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] - (n-1) - 2[5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1}]$$

$$\text{Trong đó } 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Và tổng  $A = 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$  là tổng  $n-1$  số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng thứ nhất  $a_1 = 5$ , công bội  $q = 5$

$$\Rightarrow A = S_{n-1} = a_1 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \Rightarrow A = 5 \cdot \frac{1-5^{n-1}}{-4} = -\frac{5}{4} + \frac{5^n}{4}$$

$$u_n = 2 - n + 3 \frac{(n-1)n}{2} - 2 \left[ -\frac{5}{4} + \frac{5^n}{4} \right] = \frac{1}{2} (3n^2 - 5n + 9 - 5^n)$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là  $u_n = \frac{1}{2} (3n^2 - 5n + 9 - 5^n)$

**Bài 21.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + (n-3)2^n; n \geq 2 \end{cases}$$

**Giải**

**Cách 1.** Theo đề bài suy ra

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + (2-3) \cdot 2^2$$

$$u_3 = u_2 + (3-3) \cdot 2^3$$

Các bài toán dãy số ôn học sinh giỏi

$$u_4 = u_3 + (4-3) \cdot 2^4$$

... ..

$$u_n = u_{n-1} + (n-3)2^n$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được

$$u_n = 1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n - 3[2^2 + 2^3 + \dots + 2^n]$$

Trong đó tổng  $A = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$  là tổng  $n-1$  số hạng đầu của một cấp số nhân có phần tử thứ nhất  $a_1 = 2^2 = 4$ , công bội  $q = 2$

$$\Rightarrow A = a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{-1} = 2^{n+1} - 4$$

$$\text{Xét } B = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow 2B = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên suy ra

$$B - 2B = 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow -B = A + 2^2 - n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+1} \Rightarrow B = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + B - 3A = 1 + (n-1)2^{n+1} - 3(2^{n+1} - 4) = (n-4)2^{n+1} + 13$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số trên là  $u_n = (n-4)2^{n+1} + 13$

**Cách 2.** Xét hàm số  $g(n) = (an+b) \cdot 2^{n+1}$  sao cho

$$u_n + g(n) = u_{n-1} + g(n-1)$$

$$\Rightarrow u_n + (an+b)2^{n+1} = u_{n-1} + [a(n-1)+b]2^n$$

$$\Rightarrow u_n = u_{n-1} + [a(-n-1)-b]2^n$$

Mà  $u_n = u_{n-1} + (n-3)2^n$  nên ta phải có

$$a(-n-1)-b = n-3 \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ -a-b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(n) = (-n+4) \cdot 2^{n+1}$$

$$\text{Do đó } u_n + (-n+4)2^{n+1} = u_{n-1} + [-(n-1)+4]2^n$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + (-n+4)2^{n+1} \Rightarrow v_1 = u_1 + (-1+4)2^2 = 13 \text{ và } v_n = v_{n-1}$$

Suy ra  $(v_n)$  là cấp số nhân có  $v_1 = 13$ , công bội  $q = 1$

$$\Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow v_n = 13 \text{ mà } v_n = u_n + (-n+4)2^{n+1} \Rightarrow u_n = 13 + (n-4)2^{n+1}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số trên là  $u_n = (n-4)2^{n+1} + 13$

**Bài 22.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n^2 + 1)3^n; n \geq 1 \end{cases}$$

**Giải**

Theo đề  $\Rightarrow q = 1, \beta = 3$ , bậc của  $f(n)$  bằng 2 suy ra bậc của  $g(n)$  bằng 2

Xét hàm số  $g(n) = an^2 + bn + c$  sao cho  $u_{n+1} + g(n+1)3^{n+1} = u_n + g(n)3^n$

$$\Rightarrow u_{n+1} + [a(n+1)^2 + b(n+1) + c]3^{n+1} = u_n + [an^2 + bn + c]3^n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + [-2an^2 + (-2b - 6a)n - 2c - 3b - 3a]3^n$$

Mà  $u_{n+1} = u_n + (n^2 + 1)3^n$  nên ta phải có

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2b - 6a = 0 \\ -2c - 3b - 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}; c = -2$$

$$\Rightarrow g(n) = -\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2 \text{ và } u_{n+1} + g(n+1)3^{n+1} = u_n + g(n)3^n$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + g(n)3^n \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1)3^1 = -2 \text{ và } v_{n+1} = v_n$$

Do đó  $(v_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 1$  nên  $v_n = v_1 = -2$

$$\Rightarrow -2 = u_n + g(n)3^n \Rightarrow u_n = -2 - g(n)3^n = -2 + \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2\right)3^n$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = -2 + \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2\right)3^n$

**Bài 23.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + (n+1)3^n; n \geq 1 \end{cases}$$

**Giải**

Theo đề  $\Rightarrow q = 2, \beta = 3; q \neq \beta$ , bậc của  $f(n)$  là 1 suy ra bậc của  $g(n)$  là 1

Xét hàm số  $g(n) = an + b$  sao cho  $u_{n+1} + g(n+1)3^{n+1} = 2[u_n + g(n)3^n]$

$$\Rightarrow u_{n+1} + [a(n+1) + b]3^{n+1} = 2u_n + 2(an+b)3^n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2u_n + [-an - b - 3a]3^n$$

Mà  $u_{n+1} = 2u_n + (n+1)3^n$  nên ta phải có  $\begin{cases} -a = 1 \\ -b - 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(n) = -n + 2$$

Đặt  $v_n = u_n + g(n)3^n \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1)3^1 = 3$  và  $v_{n+1} = 2v_n$

Do đó  $(v_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 2$  nên  $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = u_n + g(n)3^n \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1} + (n-2)3^n$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = 3 \cdot 2^{n-1} + (n-2)3^n$

**Bài 24.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + (n+5)2^n; n \geq 1 \end{cases}$$

**Giải**

Theo đề  $\Rightarrow q = \beta = 2$ , bậc của  $f(n)$  là 1 suy ra bậc của  $g(n)$  là 2

Xét hàm số  $g(n) = an^2 + bn + c$  sao cho

$$u_{n+1} + g(n+1)2^{n+1} = 2[u_n + g(n)2^n]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} + [a(n+1)^2 + b(n+1) + c]2^{n+1} = 2[u_n + (an^2 + bn + c)2^n]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2u_n + [-4an - 2b - 2a]2^n$$

Mà  $u_{n+1} = 2u_n + (n+5)2^n$  nên ta phải có  $\begin{cases} -4a = 1 \\ -2b - 2a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}; b = -\frac{9}{4} \Rightarrow g(n) = -\frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n$

Và  $u_{n+1} + g(n+1)2^{n+1} = 2[u_n + g(n)2^n]$

Đặt  $v_n = u_n + g(n)2^n \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1)2^1 = -2$  và  $v_{n+1} = 2v_n$

Do đó  $(v_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 2$  nên  $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$$\Rightarrow -2^n = u_n + g(n)2^n \Rightarrow u_n = -2^n - \left(-\frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n\right)2^n = -2^n + (n^2 + 9n)2^{n-2}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = -2^n + (n^2 + 9n)2^{n-2}$

**Bài 25.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + (n+5)2^n; n \geq 1 \end{cases}$$

**Lời giải**

Theo đề  $\Rightarrow q = \beta = 2$ , bậc của  $f(n)$  là 1 suy ra bậc của  $g(n)$  là 2.

Xét hàm số  $g(n) = an^2 + bn + c$  sao cho  $u_{n+1} + g(n+1)2^{n+1} = 2[u_n + g(n)2^n]$

$$\Rightarrow u_{n+1} + [a(n+1)^2 + b(n+1) + c]2^{n+1} = 2[u_n + (an^2 + bn + c)2^n]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 2u_n + [-4an - 2b - 2a]2^n$$

$$\text{Mà } u_{n+1} = 2u_n + (n+5)2^n \text{ nên ta phải có } \begin{cases} -4a = 1 \\ -2b - 2a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}; b = -\frac{9}{4} \Rightarrow g(n) = -\frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n$$

$$\text{Và } u_{n+1} + g(n+1)2^{n+1} = 2[u_n + g(n)2^n]$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + g(n)2^n \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1)2^1 = -2 \text{ và } v_{n+1} = 2v_n$$

$$\text{Do đó } (v_n) \text{ là cấp số nhân có công bội } q = 2 \text{ nên } v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$$

$$\Rightarrow -2^n = u_n + g(n)2^n \Rightarrow u_n = -2^n - \left(-\frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n\right)2^n = -2^n + (n^2 + 9n)2^{n-2}$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là } u_n = -2^n + (n^2 + 9n)2^{n-2}.$$

**Bài 26.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 - (n-1) \cdot 3^n; n \geq 1 \end{cases}$$

**Lời giải**

Theo đề  $\Rightarrow q = 3, \beta = 3$ , bậc của  $2n+1$  bằng 1 bậc của  $n-1$  bằng 1.

Xét  $g(n) = an + b + n(cn + d)3^n$  sao cho:  $u_{n+1} + g(n+1)3^{n+1} = 3[u_n + g(n)3^n]$

$$u_{n+1} + a(n+1) + b + (n+1)[c(n+1) + d]3^{n+1} = 3[u_n + an + b + n(cn + d)3^n]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 3u_n + 2an + 2b - a + (-6cn - 3d - 3c)3^n$$

$$\text{Mà } u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 - (n-1) \cdot 3^n \text{ nên ta phải có:}$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - a = 1 \\ -6c = -1 \\ -3d - 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = 1; c = \frac{1}{6}; d = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(n) = n + 1 + n\left(\frac{1}{6}n - \frac{1}{2}\right)3^n \text{ và } u_{n+1} + g(n+1) = 3[u_n + g(n)]$$

$$\text{Đặt } v_n = u_n + g(n) \Rightarrow v_1 = u_1 + g(1) = 2 \text{ và } v_{n+1} = 3v_n$$

$$\text{Do đó } (v_n) \text{ là cấp số nhân có công bội } q = 3 \text{ nên } v_n = v_1 q^{n-1} = 2.3^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2.3^{n-1} = u_n + g(n) \Rightarrow u_n = 2.3^{n-1} - g(n)$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là } u_n = 2.3^{n-1} - n - 1 - n\left(\frac{1}{6}n - \frac{1}{2}\right)3^n.$$

**Bài 27.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy  $(u_n)$  được xác định:  $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 3.2^n, n \geq 1 \end{cases}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có giả thiết } u_{n+1} = 2u_n + n^2 + 3.2^n$$

$$\text{Đặt } u_n = x_n + y_n$$

$$\text{với } x_{n+1} = 2x_n + n^2, n \geq 1; y_{n+1} = 2y_n + 3.2^n, n \geq 1 \text{ và } u_1 = x_1 + y_1 = 5.$$

$$\text{Suy ra } x_{n+1} + y_{n+1} = 2(x_n + y_n) + n^2 + 3.2^n$$

Ta giải tương tự như ví dụ 3 và ví dụ 5 ta xác định được:

$$x_n = (x_1 + 6)2^{n-1} - (n^2 + 2n + 3) \text{ và } y_n = (y_1 - 3).2^{n-1} + 3n.2^{n-1}.$$

$$\text{Ta được } u_n = x_n + y_n = (x_1 + 6).2^{n-1} - (n^2 + 2n + 3) + (y_1 - 3).2^{n-1} + 3n.2^{n-1}$$

$$= (x_1 + y_1 + 3).2^{n-1} + 3n.2^{n-1} - (n^2 + 2n + 3)$$

$$\text{Vậy } u_n = 2^{n+2} + 3.2^{n-1} - (n^2 + 2n + 3).$$

**Bài 28.** Giải phương trình sai phân:  $\begin{cases} x_0 = 17 \\ x_{n+1} = 2x_n - n^2 + 2n + 1 + 6.2^n \end{cases}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lambda = 2, f_1(n) = -n^2 + 2n + 1, f_2(n) = 6.2^n. \text{ Suy ra: } x_n = C.2^n; x_{n_1}^* = an^2 + bn + c; x_{n_2}^* = d.n.2^n.$$

Vậy ta chọn  $x_n^* = an^2 + bn + c + d.n.2^n$ . Thay vào phương trình đã cho ta suy ra được:  $a = 1, b = c = 0, d = 3$ . Vậy  $x_n = C.2^n + n^2 + 3n.2^n$ , mà  $x_0 = 17$  ta được  $C = 17$  và do đó nghiệm của phương trình sai phân đã cho là:  $x_n = 17.2^n + n^2 + 3n.2^n$ .

**Bài 29.** Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ : 
$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

**Lời giải**

Từ giả thiết ta suy ra:  $u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n)$ . Đặt  $v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = 3.v_n$ . Vậy  $(v_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 3$  và  $v_1 = u_2 - 2u_1 = 5 - 2.1 = 3$

$$\Rightarrow v_{n-1} = u_n - 2u_{n-1} = v_1.3^{n-2} = 3^{n-1} \Rightarrow u_n = 2u_{n-1} + 3^{n-1}. \text{ Đặt } x_n = u_n + k.3^{n-1} \text{ sao cho: } x_n = 2.x_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_n = u_n + k.3^{n-1} = 2.u_{n-1} + 3^{n-1} + k.3^{n-1} = 2.x_{n-1} = 2(u_{n-1} + k.3^{n-2}) \Rightarrow 3 + 3.k = 2.k \Rightarrow k = -3.$$

Do  $(x_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 2$  và  $x_1 = u_1 + k.3^0 = -2$

$$\Rightarrow x_n = x_1.2^{n-1} = -2^n \Rightarrow u_n = x_n - k.3^{n-1} = x_n + 3^n = 3^n - 2^n.$$

**Bây giờ ta giải bài toán tổng quát của bài toán trên:**

**Bài 30.** Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ : 
$$\begin{cases} u_1 = a; u_2 = b \\ u_{n+2} = cu_{n+1} + du_n \quad (1), \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$
 trong đó  $a, b, c, d$  là các hằng số thực;  $a$  và  $b$  khác 0.

**Lời giải**

Giả sử  $u_n = r^n$  với  $r$  là một số thực nào đó. Khi đó từ (1) ta suy ra:  $r^{n+2} - c.r^{n+1} - d.r^n = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - c.r - d = 0$  (2), Phương trình (2) được gọi là phương trình đặc trưng (PTĐT) của dãy  $(u_n)$ .

Có hai trường hợp:

a) Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt  $r_1$  và  $r_2$ . Khi đó ta có:  $r_1^{n+2} - c.r_1^{n+1} - d.r_1^n = 0$  và

$$r_2^{n+2} - c.r_2^{n+1} - d.r_2^n = 0 \Rightarrow (k.r_1^{n+2} + l.r_2^{n+2}) - c.(k.r_1^{n+1} + l.r_2^{n+1}) - d.(k.r_1^n + l.r_2^n) = 0$$

Điều đó chứng tỏ  $u_n = k.r_1^n + l.r_2^n$  thỏa mãn (1). Trong đó  $k$  và  $l$  là các hằng số thỏa mãn hệ

phương trình sau: 
$$\begin{cases} k.r_1 + l.r_2 = a \\ k.r_1^2 + l.r_2^2 = b \end{cases}$$
. Do  $D = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 (r_1 - r_2) = -d(r_1 - r_2) \neq 0$  nên hệ phương

trình trên có nghiệm duy nhất; điều đó cũng chứng tỏ dãy số đã cho được xác định một cách duy nhất.

Áp dụng vào bài 6 ta có  $a = 1; b = 5; c = 5; d = -6 \Rightarrow r_1 = 2; r_2 = 3 \Rightarrow k = -1; l = 1$

$$\Rightarrow u_n = k.r_1^n + l.r_2^n = -2^n + 3^n$$

Đối với dãy Fibônaxi ta có  $a = b = c = d = 1$  nên PTĐT  $r^2 - r - 1 = 0$  có hai nghiệm:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \& \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{ Từ đó ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.k + \frac{1-\sqrt{5}}{2}.l = 1 & (3) \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}.k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}.l = 1 & (4) \end{cases}$$

Lấy (4) trừ (3) ta được:  $k + l = 0$ . Thay  $l = -k$  vào (3) ta được:  $\sqrt{5}.k = 1 \Rightarrow k = 1/\sqrt{5}$ .

$$\text{Vậy } u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

b) Phương trình (2) có nghiệm kép  $r_1 = r_2 = \frac{c}{2} \Rightarrow -d = r_1.r_2 = \frac{c^2}{4}$ . Đặt  $u_n = r_1^n.v_n$ ; thay vào (1) ta được:

$$r_1^{n+2}.v_{n+2} = c.r_1^{n+1}.v_{n+1} + d.r_1^n.v_n = 2.r_1^{n+2}.v_{n+1} - r_1^{n+2}.v_n \Rightarrow v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$$

Vậy  $(v_n)$  là một cấp số cộng nên  $v_n = k.n + l$  với  $k$  và  $l$  là các số thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} (k+l).r_1 = a \\ (2k+l).r_1^2 = b \end{cases} \text{ Do } D = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & 2.r_1^2 \end{vmatrix} = r_1^3 \neq 0 \text{ nên } k \text{ và } l \text{ được xác định một cách duy nhất; tức là có}$$

duy nhất dãy  $(u_n)$  mà  $u_n = (k.n + l)r_1^n$  thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Áp dụng: Tìm số hạng tổng quát của dãy  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = 4; u_2 = 20 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

Ở đây ta có:  $a = 4$ ;  $b = 20$ ;  $c = 4$ ;  $d = -4$  nên PTĐT có nghiệm:  $r_1 = r_2 = 2$ .

Giải hệ phương trình ta tìm được:  $k = 3$  và  $l = -1$ . Vậy  $u_n = (3n - 1).2^n$ .

**Bài 31.** Giải phương trình sai phân:  $\begin{cases} x_0 = 2; x_1 = -8 \\ x_{n+2} = -8x_{n+1} + 9x_n \end{cases}$

**Lời giải**

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$  hoặc  $\lambda = -9$ . Suy ra  $\hat{x}_n = x_n = A + B.(-9)^n$ .

Mà  $x_0 = 2$ ;  $x_1 = -8$  nên suy ra  $A = 1$ ;  $B = 1$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:  $x_n = 1 + (-9)^n$ .

**Bài 32.** Tìm một nghiệm riêng  $x_n^*$  của phương trình sai phân:  $x_{n+2} = -4x_{n+1} + 5x_n + 12n + 8$ .

**Lời giải**

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$  hoặc  $\lambda = -5$ ;  $f(n) = 12n + 8$ .

Chọn  $x_n^* = n(an + b)$ . Thay vào phương trình đã cho ta suy ra:  $a = 1$ ;  $b = 0$ .

Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm riêng là  $x_n^* = n^2$ .

**Bài 33.** Giải phương trình sai phân:  $2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = n^2 - 2n + 3$  với  $x_0 = 1; x_1 = 3$ .

**Lời giải**

Phương trình đặc trưng:  $2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$  hoặc  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $f(n) = n^2 - 2n + 3$ .

Vậy phương trình thuần nhất có nghiệm thuần nhất tổng quát  $\hat{x}_n = x_n = A.2^n + B.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Chọn  $x_n^* = an^2 + bn + c$ . Thay vào phương trình đã cho rồi cho  $n$  bất kì để giải hệ ta suy ra được  $a = -1, b = 4, c = -10$ .

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là  $x_n^* = -n^2 + 4n - 10$ .

Do đó phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = A.2^n + B.\left(\frac{1}{2}\right)^n - n^2 + 4n - 10.$$

Thay vào  $x_0 = 1$  và  $x_1 = 3$  ta tìm được  $A = 3; B = 8$ . Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_n = 3.2^n + 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n - n^2 + 4n - 10.$$

**Bài 34.** Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:  $2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51).3^n$ .

**Lời giải**

Ta có  $\beta = 3$ ,  $P_k(n) = 35n + 51$  là đa thức bậc nhất.

Phương trình đặc trưng:  $2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$  hoặc  $\lambda = -\frac{1}{2}$  (đều khác  $\beta$ ).

Chọn  $x_n^* = (an + b).3^n$ . Thay vào phương trình đã cho rồi cho  $n$  bất kì ta suy ra:  $a = 1, b = 0$ .

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là:  $x_n^* = n.3^n$ .

**Bài 35.** Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = (8n + 11)2^n$ .

**Lời giải**

Ta có  $\beta = 2$ ,  $P_k(n) = 8n + 11$  là đa thức bậc nhất.

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2$  hoặc  $\lambda_2 = 3$  ( $\lambda_1 = \beta$ ).

Chọn  $x_n^* = n(an + b).2^n$ . Thay vào phương trình đã cho rồi cho  $n$  bất kì ta suy ra:  $a = -4, b = -23$ .

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là:  $x_n^* = -(4n^2 + 23n).2^n$ .

**Bài 36.** Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:  $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = (n+2)5^{n+1}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\beta = 5$ ,  $P_k(n) = 5n + 10$  là đa thức bậc nhất.

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5$  ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta$ ).

Chọn  $x_n^* = n^2(an+b).5^n$ . Thay vào phương trình đã cho rồi cho số nguyên dương  $n$  bất kì ta suy ra:

$a = \frac{4}{50}$ ,  $b = \frac{7}{50}$ . Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là:  $x_n^* = \frac{n^2}{50}(4n + 7).5^n$ .

**Bài 37.** Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:  $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 2^n + n - 1$ .

**Lời giải**

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2$  hoặc  $\lambda_2 = 3$ .

$$f(n) = 2^n + n - 1 = f_1(n) + f_2(n) \text{ với } f_1(n) = 2^n; f_2(n) = n - 1.$$

Đối với phương trình:  $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 2^n$  (\*), do  $\lambda_1 = 2 = \beta$  nên ta chọn nghiệm riêng:

$x_{n_1}^* = an.2^n$ . Thay vào (\*) rồi chia cả hai vế cho  $2^n$  ta được:  $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{n_1}^* = -\frac{1}{2}n.2^n$ .

Đối với phương trình:  $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + n - 1$ . (\*\*)

Ta chọn nghiệm riêng:  $x_{n_2}^* = cn + d$ . Thay vào (\*\*) rồi cho số nguyên dương  $n$  bất kì ta suy ra

$$c = \frac{1}{2}; d = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{n_2}^* = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng:  $x_n^* = x_{n_1}^* + x_{n_2}^* = -\frac{1}{2}n.2^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$ .

**Bài 38.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}; n \geq 2 \end{cases}$

**Lời giải**

(Áp dụng cách giải như bài toán 5 với  $a = 1$ ,  $b = 2$ )

Ta có  $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2(u_n - u_{n-1})$

Đặt  $v_n = u_{n+1} - u_n$  với  $n \geq 1$ .

Ta được:  $\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n; n \geq 1 \\ v_1 = u_2 - u_1 = 1 \end{cases}$ ;  $(v_n)$  là cấp số nhân công bội 2 với  $v_1 = 1$ .

Suy ra:

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 \\ &= v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3} + \dots + v_1 + u_1 \\ &= v_1 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} + u_1 = 2^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số trên là:  $u_n = 2^{n-1} + 1$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài 39.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 9u_{n+1} - 18u_n; n \geq 1 \end{cases}$

**Lời giải**

Ta có:  $u_{n+2} = 9u_{n+1} - 18u_n; n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - 3u_{n+1} = 6(u_{n+1} - 3u_n)$

Đặt  $v_n = u_{n+1} - 3u_n$  với  $n \geq 1$  (\*)

Ta được:  $\begin{cases} v_{n+1} = 6v_n; n \geq 1 \\ v_1 = u_2 - 3u_1 = -1 \end{cases}$ ;  $(v_n)$  là cấp số nhân công bội 6 với  $v_1 = -1$ .

Thay  $n$  lần lượt bởi  $n-1, n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1$  vào (\*)

Ta được:

$$\left. \begin{aligned} u_n - 3u_{n-1} &= v_{n-1} \\ u_{n-1} - 3u_{n-2} &= v_{n-2} \\ u_{n-2} - 3u_{n-3} &= v_{n-3} \\ &\dots\dots\dots \\ u_4 - 3u_3 &= v_3 \\ u_3 - 3u_2 &= v_2 \\ u_2 - 3u_1 &= v_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} u_n - 3u_{n-1} &= v_{n-1} \\ 3u_{n-1} - 3^2u_{n-2} &= 3v_{n-2} \\ 3^2u_{n-2} - 3^3u_{n-3} &= 3^2v_{n-3} \\ &\dots\dots\dots \\ 3^{n-4}u_4 - 3^{n-3}u_3 &= 3^{n-4}v_3 \\ 3^{n-3}u_3 - 3^{n-2}u_2 &= 3^{n-3}v_2 \\ 3^{n-2}u_2 - 3^{n-1}u_1 &= 3^{n-2}v_1 \end{aligned} \right. \quad (n-1) \text{ đẳng thức.}$$

Cộng  $n-1$  đẳng thức trên suy ra:

$$\begin{aligned} u_n - 3^{n-1}u_1 &= 3^{n-2}v_1 + 3^{n-3}v_2 + \dots + 3v_{n-2} + v_{n-1} \\ &= (3^{n-2} + 3^{n-3} \cdot 6 + 3^{n-4} \cdot 6^2 + \dots + 3^2 \cdot 6^{n-4} + 3 \cdot 6^{n-3} + 6^{n-2})v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên ta được } u_n &= 3^{n-1}u_1 + (3^{n-2} + 3^{n-3} \cdot 6 + 3^{n-4} \cdot 6^2 + \dots + 3^2 \cdot 6^{n-4} + 3 \cdot 6^{n-3} + 6^{n-2})v_1 \\ &= 3^{n-1} - (3^{n-2} + 3^{n-3} \cdot 6 + 3^{n-4} \cdot 6^2 + \dots + 3^2 \cdot 6^{n-4} + 3 \cdot 6^{n-3} + 6^{n-2}) \end{aligned}$$

Ta có  $S = 3^{n-2} + 3^{n-3} \cdot 6 + 3^{n-4} \cdot 6^2 + \dots + 3^2 \cdot 6^{n-4} + 3 \cdot 6^{n-3} + 6^{n-2}$  là tổng của  $(n-1)$  số hạng của cấp số

nhân có công bội  $q = 2$  nên  $S = 3^{n-2} \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot 6^{n-2} - 3^{n-2}$ . Vậy ta có:

$$u_n = 3^{n-1} + 3^{n-2} - 2 \cdot 6^{n-2} = 4 \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 6^{n-2}.$$

**Bài 40.** Giải phương trình sai phân: 
$$\begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 3 \\ x_n = 7x_{n-1} - 11x_{n-2} + 5x_{n-3}. \end{cases}$$

**Lời giải**

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$ ; có  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 5$ .

Vậy phương trình có nghiệm tổng quát:  $x_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 1^n + C_3 \cdot 5^n = C_1 + C_2 n + C_3 \cdot 5^n$

Thay vào điều kiện biên ta suy ra được:  $C_1 = -\frac{13}{16}; C_2 = \frac{3}{4}; C_3 = \frac{1}{80}$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:  $x_n = \frac{1}{16}(5^{n-1} + 12n - 13)$ .

**Bài 41.** Giải phương trình sai phân: 
$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 2; x_2 = 3 \\ x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 1. \end{cases}$$

**Lời giải**

Phương trình đặc trưng:  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ; có nghiệm  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .

Vậy phương trình có nghiệm tổng quát:  $x_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$ .

Do  $f(n) = 1$  nên ta chọn nghiệm riêng bằng  $B \cdot n^3$ . Thay vào phương trình đã cho rồi so sánh các hệ số ta suy ra được:  $B = \frac{1}{6} \Rightarrow x_n^* = \frac{1}{6} n^3$ .

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:  $x_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{1}{6} n^3$ .

Thay vào các điều kiện biên và giải hệ phương trình ta thu được:  $C_1 = 1; C_2 = \frac{4}{3}; C_3 = -\frac{1}{2}$ . Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:  $x_n = 1 + \frac{4}{3}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3$ .

**Bài 42.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_n = \frac{4u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 3}; n \geq 1 \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

GIẢI:

$$\text{Ta có } u_n + 1 = \frac{4u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 3} + 1 = \frac{5u_{n-1} + 5}{u_{n-1} + 3}$$

$$u_n - 2 = \frac{4u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 3} - 2 = \frac{2u_{n-1} - 4}{u_{n-1} + 3}$$

$$\text{Nên } \frac{u_n + 1}{u_n - 2} = \frac{5}{2} \left( \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} - 2} \right).$$

$$\text{Đặt } v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} \text{ thì có } v_n = \frac{5}{2} v_{n-1} \text{ và } v_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1 - 2} = 4.$$

Áp dụng cấp số nhân ta có  $v_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ .

$$\text{Từ } v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2} = 1 - \frac{1}{u_n - 2} \text{ suy được } u_n = \frac{2v_n + 1}{v_n - 1} = \frac{8\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + 1}{4\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1}.$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số trên là : } u_n = \frac{8\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + 1}{4\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1}.$$

**Bài 43.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  của dãy số  $(u_n)$  xác định bởi : 
$$\begin{cases} u_n = \frac{5u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3}; n \geq 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } u_n - 1 = \frac{5u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} - 1 = \frac{4u_{n-1} - 4}{u_{n-1} + 3}$$

$$\text{Nên } \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{4} \left( \frac{u_{n-1} + 3}{u_{n-1} - 1} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{u_{n-1} - 1}.$$

$$\text{Đặt } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ thì có } v_n = v_{n-1} + \frac{1}{4} \text{ và } v_1 = \frac{1}{u_1 - 1} = 1.$$

$$\text{Áp dụng cấp số cộng được } v_n = v_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{n-1}{4} = \frac{n+3}{4}$$

$$\text{Suy ra } u_n - 1 = \frac{4}{n+3} \text{ hay } u_n = \frac{4}{n+3} + 1 = \frac{n+7}{n+3}.$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số là } u_n = \frac{n+7}{n+3}, \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

**Bài 44.** Cho dãy số xác định như sau: 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)u_n}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tìm  $u_{1998}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\tan \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$ , viết lại biểu thức dưới dạng sau:  $u_{n+1} = \frac{u_n + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - u_n \tan \frac{\pi}{12}}$  (1)

$u_n = \tan \beta$  thay vào (1) suy ra:  $u_{n+1} = \tan(\beta + \frac{\pi}{12})$  (2)

Vì  $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$  nên từ (2) theo nguyên lý quy nạp suy ra  $u_n = \tan(\frac{\pi}{6} + (n-1)\frac{\pi}{12})$

Vậy:  $u_{1998} = \tan(\frac{\pi}{6} + \frac{1997\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{6} + 166\pi + \frac{5\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{12}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan \frac{5\pi}{12}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \tan \frac{5\pi}{12}}$  (3)

Do  $\tan \frac{5\pi}{12} = \cot \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$  (4)

Thay lại vào (3) ta được  $u_{1998} = -(2 + \sqrt{3})$

**Bài 45.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n + 10$  với mọi  $n \geq 1$   
 Tìm số hạng tổng quát  $u_n$ .

**Lời giải**

Có  $u_1 = 1, u_2 = 13 = 2 \cdot 3^2 - 5, u_3 = 49 = 2 \cdot 3^3 - 5$ .

Ta chứng minh  $u_n = 2 \cdot 3^n - 5$  với mọi  $n \geq 1$ .

Thật vậy, giả sử:  $u_k = 2 \cdot 3^k - 5$  ta có  $u_{k+1} = 3u_k + 10 = 3(2 \cdot 3^k - 5) + 10 = 2 \cdot 3^{k+1} - 5$  (đpcm)

**Bài 46.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 2$  và  $u_{n+1} = 5u_n$  với mọi  $n \geq 1$   
 Tìm số hạng tổng quát  $u_n$ .

**Lời giải**

Ta có  $u_1 = 2, u_2 = 10 = 2 \cdot 5^{2-1}, u_3 = 50 = 2 \cdot 5^{3-1}$ .

Giả sử  $u_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ , ta chứng minh  $u_{k+1} = 2 \cdot 5^k$ .

Thật vậy:  $u_{k+1} = 5u_k = 5 \cdot 2 \cdot 5^{k-1} = 2 \cdot 5^k$  (đpcm)

**Bài 47.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng  $u_n \neq -4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Chứng minh rằng dãy  $(v_n)$  với  $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  là một CSN. Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp  $u_n \neq -4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Với  $n = 1$ , ta có  $u_1 = 1 \neq -4$ .

Giả sử  $u_k \neq -4, \forall k \in \mathbb{N}^*$ , ta chứng minh  $u_{k+1} \neq -4$ .

Thật vậy, giả sử ngược lại  $u_{k+1} = -4$ , khi đó  $\frac{u_k - 4}{u_k + 6} = -4 \Rightarrow u_k - 4 = -4u_k - 24 \Rightarrow u_k = -4$ , trái với

giả thiết quy nạp. Vậy  $u_n \neq -4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Từ câu a) suy ra dãy  $(v_n)$  luôn xác định với mọi  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Ta có } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{u_n - 4}{u_n + 6} + 1}{\frac{u_n - 4}{u_n + 6} + 4} = \frac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \frac{2}{5} v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy  $(v_n)$  là 1 CSN lùi vô hạn với công bội  $q = \frac{2}{5}$ . Suy ra  $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ .

$$\text{Nên } u_n = \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}. \text{ Do đó } \lim u_n = \lim \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = -1.$$

**Bài 48.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$
 Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \dots + u_2 - u_1 + u_1 \\ &\Rightarrow u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim u_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

**Bài 49.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$
 Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \dots + u_2 - u_1 + u_1$$

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Do đó } \lim u_n = \lim \left[ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = 2.$$

**Bài 50.** Cho dãy số  $(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) được xác định bởi  $x_1 = 5$  và  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$

a) Tìm  $x_n$ .

b) Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}$ .

c) Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)$ .

**Lời giải**

a) Đặt  $a = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$ . Khi đó  $a + \frac{1}{a} = 5 = x_1$ . Ta có  $x_2 = x_1^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ .

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $x_n = a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy  $x_n = \left( \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right)^{2^{n-1}} + \left( \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^{2^{n-1}}$ .

b) Ta có  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{a}{a^2 - 1} \cdot \left( a^{2^n} - \frac{1}{a^{2^n}} \right)$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{a^2 - 1}{a} \cdot \frac{a^{2^n} + a^{-2^n}}{a^{2^n} - a^{-2^n}} = \frac{a^2 - 1}{a} \cdot \frac{1 + a^{-2^{n+1}}}{1 - a^{-2^{n+1}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{a^2 - 1}{a} = \sqrt{21}$$

c) Với  $k \geq 2$  ta có  $\frac{1}{x_1 \cdot x_2 \dots x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{x_k}{x_1 x_2 \dots x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_1 x_2 \dots x_k} \right)$

Suy ra

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt{21} \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \dots + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right) = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

**Bài 51.** Cho các dãy số thực dương  $(x_n), (y_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  và

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1}, y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \text{ với mọi số nguyên dương } n. \text{ Tìm giới hạn của các dãy } (x_n), (y_n).$$

### Lời giải

Từ giả thiết suy ra  $y_n > \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*$

Trước hết ta chứng minh  $x_n^2 + y_n^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k$  tức là  $x_k^2 + y_k^2 = 1$ . Đặt  $a = x_{k+1}, b = y_{k+1}$  ta có

$$x_k = a(4b^2 - 1), y_k = b(1 - 4a^2). \text{ Vì } x_k^2 + y_k^2 = 1 \text{ nên}$$

$$a^2(4b^2 - 1)^2 + b^2(1 - 4a^2)^2 = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2 - 1)(16a^2b^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1$$

Ta chứng minh  $y_n = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k$ , tức là  $y_k = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{k-1}}$ .

Ta có  $y_{k+1} > \frac{1}{2}$  nên tồn tại  $\alpha_{k+1} \in (0; \frac{\pi}{3})$  sao cho  $y_{k+1} = \cos \alpha_{k+1}$

$$\text{Ta có } y_{k+1}(1 - 4x_{k+1}^2) = y_k \Rightarrow 4y_{k+1}^3 - 3y_{k+1} = y_k \Rightarrow \cos 3\alpha_{k+1} = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{k-1}}$$

Vì  $0 < \alpha_{k+1} < \frac{\pi}{3}$  nên  $\alpha_{k+1} = \frac{\pi}{4 \cdot 3^k} \Rightarrow y_{k+1} = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^k}$ . Vậy mệnh đề cũng đúng với

$n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tức là

$$y_n = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Suy ra } x_n = \sin \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$ .

**Bài 52.** Cho hai dãy số dương  $(x_n), (y_n)$  được xác định bởi  $x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$

$$\text{và } \begin{cases} x_{n+1}y_{n+1} - x_n = 0 \\ x_{n+1}^2 + y_n = 2 \end{cases}$$

với mọi  $n = 1, 2, \dots$ . Chứng minh rằng hai dãy số trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

### Lời giải

Ta có  $x_1 = \sqrt{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6}$ ,  $y_1 = \sqrt{3} = 2 \cos \frac{\pi}{6}$ . Chúng ta chứng minh rằng với mọi

số nguyên dương  $n$  thì  $x_n = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$  và  $y_n = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ . Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k (k \geq 1)$  tức là  $x_k = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$  và  $y_k = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$

Ta có  $x_{k+1}^2 = 2 - 2y_k = 2 - 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$ . Suy ra  $x_{k+1} = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$  (vì  $x_{k+1} > 0$ )

và  $y_{k+1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}} = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$ . Vậy mệnh đề cũng đúng với  $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương  $n$ . Từ đó

suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}) = 0$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}) = 2$

Vậy các dãy  $(x_n), (y_n)$  hội tụ và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2$ .

**Bài 53.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} \cdot u_n}{2u_{n+1} - u_n} \end{cases}$$

### Lời giải

Bài này có thể đổi điều kiện của các số hạng đầu để không rơi vào trường hợp đặc biệt. Ta xét bài toán tổng quát hơn là:

Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b, (2a - b \neq 0) \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} u_n}{2u_{n+1} - u_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Từ công thức xác định dãy, ta có  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} u_n} = \frac{2}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ .

Đặt  $y_n = \frac{1}{u_n}, n = 1, 2, 3, \dots$

Ta có  $y_{n+1} = 2y_n - y_{n+1}, \forall n$ .

Xét phương trình đặc trưng  $t^2 = 2 - t \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2$ .

Công thức tổng quát của dãy có dạng:  $y_n = r \cdot (-2)^n + s, n = 1, 2, 3, \dots$

So sánh với hai số hạng đầu của dãy, ta có: 
$$\begin{cases} -2r + s = \frac{1}{a} \\ 4r + s = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{a-b}{6ab} \\ s = \frac{a+2b}{3ab} \end{cases}$$

Từ đây thay vào suy ra công thức tổng quát của dãy ban đầu là

$$x_n = \frac{1}{\frac{a-b}{6ab}(-2)^n + \frac{a+2b}{3ab}} = \frac{6ab}{(a-b)(-2)^n + 2(a+2b)}, \forall n$$

Trong bài toán ban đầu, nếu thay  $a = b = 1$ , ta có công thức tổng quát của dãy là  $x_n = 1, \forall n$ .

### Nhận xét.

Trong bài toán trên, ta không nhắc đến điều kiện của  $a, b$  để dãy xác định với mọi  $n$ .

Điều kiện đó chính là  $2x_{n+1} - x_n \neq 0, \forall n$  hay

$$\frac{12ab}{(a-b)(-2)^{n+1} + 2(a+2b)} - \frac{6ab}{(a-b)(-2)^n + 2(a+2b)} \neq 0, \forall n$$

Ngoài điều kiện  $ab \neq 0$  suy ra từ đó, ta còn cần có  $(a-b)(-2)^n + 2(a+2b) \neq 0, \forall n$  và

$$2(a-b)(-2)^n + 4(a+2b) - (a-b)(-2)^{n+1} - 2(a+2b) = 4a(-2)^n + 2a + 4b \neq 0$$

Đây chính là hai điều kiện của các số hạng đầu để dãy đã cho luôn xác định.

Ngoài ra, còn một bài toán có giả thiết tương tự như trên nhưng yêu cầu khác:

**Bài 54.** Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn  $x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1}}{2x_n - x_{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm điều kiện của  $x_1, x_2$  để dãy số trên có vô hạn số nguyên.

### Lời giải

Đặt  $x_1 = a, x_2 = b, ab \neq 0$ . Trước hết, dãy đã cho phải có tất cả các số hạng khác 0.

Ta có  $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{2}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n, n \in \mathbb{N}^*$  với  $y_n = \frac{1}{x_n}, n \geq 1$ .

Phương trình đặc trưng của dãy này có nghiệm kép  $t = 1$  nên công thức tổng quát của nó có dạng

$$y_n = rn + s \text{ với } r, s \text{ được xác định theo } y_1 = \frac{1}{a}, y_2 = \frac{1}{b}.$$

Ta có: 
$$\begin{cases} r + s = \frac{1}{a} \\ 2r + s = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, s = \frac{2}{a} - \frac{1}{b}$$

Do đó  $y_n = \left(\frac{a-b}{ab}\right)n + \frac{2b-a}{ab} \Rightarrow x_n = \frac{ab}{(a-b)n + (2a-a)}.$

Ta thấy  $a, b$  nhận những giá trị không đổi và muốn dãy đã cho có vô số số nguyên thì cần phải

$[(a-b)n + (2b-a)] \mid ab$  với vô số  $n$ . Để thấy cần có hệ số trước  $n$  phải bằng 0 và  $a = b$ .

Khi đó  $x_n = a$  nguyên khác 0. Thử lại thấy thỏa.

Vậy điều kiện để dãy có vô số số nguyên là  $a = b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Bài 55.** Cho dãy số  $(a_n)$  xác định như sau : 
$$\begin{cases} a_1 = 6, a_2 = 14 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n - 24 \cdot (-1)^n \end{cases}$$
 Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ .

**Lời giải**

Xét phương trình  $x^2 - 6x + 1 = 0$  có hai nghiệm là

$$x_1 = 3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2, x_2 = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2.$$

Phương trình sai phân ở trên có nghiệm tổng quát là:

$$a_n = \lambda_1 (3 - 2\sqrt{2})^n + \lambda_2 (3 + 2\sqrt{2})^n + \lambda_3 (-1)^n.$$

Thay vào công thức truy hồi, ta được:  $\lambda_3 (-1)^{n+2} = 6\lambda_3 (-1)^{n+1} - \lambda_3 (-1)^n - 24(-1)^n$  hay

$$(-1)^n (8\lambda_3 + 24) = 0.$$

Công thức này phải đúng với mọi  $n$  nên  $\lambda_3 = -3$ .

Tiếp tục so sánh với điều kiện  $a_1 = 6, a_2 = 14$ , ta tính được hai giá trị của tham số tương ứng là

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ . Do đó, công thức tổng quát của dãy là:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[ (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n \right] - 3(-1)^n, \forall n.$$

Đặt  $b_n = (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n, n = 1, 2, 3, \dots$  Ta có:

$$\begin{aligned} b_n b_{n+2} &= \left[ (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n \right] \left[ (1 - \sqrt{2})^{n+2} + (1 + \sqrt{2})^{n+2} \right] \\ &= (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2})^n \left[ (1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 \right] \\ &= (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n - 6(-1)^n \end{aligned}$$

Từ biến đổi trên, ta cũng có

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 - b_{n-1} b_{n+3} &= \left[ (1 - \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^{n+1} \right]^2 - \left[ (1 - \sqrt{2})^{n-1} + (1 + \sqrt{2})^{n-1} \right] \left[ (1 - \sqrt{2})^{n+3} + (1 + \sqrt{2})^{n+3} \right] \\ &= 2(1 - \sqrt{2})^{n+1} (1 + \sqrt{2})^{n+1} - \left[ (1 - \sqrt{2})^3 + (1 + \sqrt{2})^3 \right] (1 - \sqrt{2})^{n+1} (1 + \sqrt{2})^{n+1} = 32(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{16(-1)^n}{a_n} = \frac{32(-1)^n}{b_{n-1}b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}^2 - b_{n-1}b_{n+3}}{b_{n-1}b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}} - \frac{b_{n+3}}{b_{n+1}}, n = 2, 3, 4, \dots$$

Ta xét hai trường hợp sau:

-Nếu  $n$  chẵn, đặt  $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ . Ta có:

$$\frac{16}{a_{2k}} = \frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} - \frac{b_{2k+3}}{b_{2k+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{16}{a_{2k}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} - \frac{b_{2k+3}}{b_{2k+1}} \right) = \frac{b_3}{b_1} - \frac{b_{2n+3}}{b_{2n+1}}.$$

-Nếu  $n$  lẻ, đặt  $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^+$ . Ta có:

$$\frac{16}{a_{2k+1}} = \frac{b_{2k+4}}{b_{2k+2}} - \frac{b_{2k+2}}{b_{2k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{16}{a_{2k+1}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{b_{2k+4}}{b_{2k+2}} - \frac{b_{2k+2}}{b_{2k}} \right) = \frac{b_{2n+4}}{b_{2n+2}} - \frac{b_2}{b_0}.$$

Đễ dàng thấy rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{b_{2n+3}}{b_{2n+1}} - \frac{b_{2n+4}}{b_{2n+2}} \right] = 0$  và  $\frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2}{b_0} = 4$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{16}{a_i} = 4 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = \frac{1}{4}.$

Vậy giới hạn của dãy đã cho là  $\frac{1}{4}.$

**Bài 56.** a) Dãy  $(u_n)$  xác định như sau:  $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$  ( $n$  dấu căn). Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 u_2 \dots u_n}{2^n}.$$

b) Dãy  $(u_n)$  xác định như sau:  $u_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$  ( $n$  dấu căn). Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$

### Lời giải

a) Ta sẽ chứng minh  $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Thật vậy, với  $n = 1$  ta có  $u_1 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^2}$

Vậy giả thiết đúng với  $n = 1$ , giả sử giả thiết đúng với  $n = k$ , tức là  $u_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$

$$\text{Ta có: } u_{k+1} = \sqrt{2 + 2u_k} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{k+2}} - 2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Vậy điều giả sử là đúng.

Ta có:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 u_2 \dots u_n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

CM được:  $2^n \sin \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 1$  nên  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} \right)$

Lại có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1 \Rightarrow L = \frac{2}{\pi}$ .

b) Từ câu a ta suy ra  $u_n = 2^n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^n}} = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Ta có:  $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \right) = \pi$ .

**Bài 57.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định như sau: 
$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

a) CMR dãy số  $(v_n)$  xác định bởi  $v_n = u_n - \frac{15}{4}$  là một cấp số nhân.

b) Tính  $\lim u_n$ .

### Lời giải

a) Ta có  $(v_n)$  là CSN  $\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n \cdot q$  với  $q = \text{const}; \forall n \geq 1$ . Thật vậy, ta có:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{4} = \frac{1}{5}u_n + 3 - \frac{15}{4} = \frac{1}{5}\left(v_n + \frac{15}{4}\right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}v_n.$$

Nên  $(v_n)$  là một CSN có công bội  $q = \frac{1}{5}$  và

$$v_1 = \frac{25}{4}. \text{ Do đó } v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}.$$

b) Từ câu a) suy ra  $u_n = v_n + \frac{15}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} + \frac{15}{4}$ . Do đó  $\lim u_n = \frac{15}{4}$ .

### Nhận xét:

1/ Vì sao lại nghĩ ra được phép đổi biến  $v_n = u_n - \frac{15}{4}$  để dãy  $(v_n)$  là một CSN?

Ta thấy  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$ , ta cần tìm số  $b$  sao cho  $u_{n+1} - b = \frac{1}{5}(u_n - b)$

$$\Rightarrow u_{n+1} = b - \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}u_n = \frac{1}{5}u_n + 3 \Rightarrow b = \frac{15}{4}$$

Do vậy, nếu đặt  $v_n = u_n - \frac{15}{4}$  thì  $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n, \forall n \geq 1$  nên  $(v_n)$  là một CSN

2/ Ngoài ra, có thể đặt  $v_n = 5^n \cdot u_n, \forall n \geq 1$ , khi đó ta có  $v_{n+1} - v_n = 3 \cdot 5^{n+1}, \forall n \geq 1$ . Suy ra

$$v_n = \frac{15}{4}(5^n - 1) + 35 \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{5^n} = \frac{15}{4} \cdot \frac{5^n - 1}{5^n} + \frac{35}{5^n} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{5} \right)^{n-3} + \frac{15}{4}.$$

**Bài 58.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (\forall n \geq 1)$ .

a) CMR dãy số  $(v_n)$  với  $v_n = u_n - 1 \quad (n \geq 1)$  là một CSN lùi vô hạn.

b) Tính  $\lim S_n$ .

### Lời giải

a) Ta có  $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n, \forall n \geq 1$

Suy ra dãy số  $(v_n)$  là một CSN lùi vô hạn với công bội  $q = \frac{1}{2}$ . Nên  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

b) Từ câu a) suy ra  $u_n = v_n + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1, \forall n \geq 1$

Suy ra  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + n = 4 + n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

Vậy  $\lim S_n = +\infty$ .

### Nhận xét:

Có thể tìm CTTQ của dãy  $(u_n)$  bằng phép đổi biến  $v_n = 2^n \cdot u_n, \forall n \geq 1$

Ta có  $v_{n+1} = 2^{n+1} \cdot u_{n+1} = 2^{n+1} \left( \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} \right) = v_n + 2^n, \forall n \geq 1 \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 2^n, \forall n \geq 1$

Do đó  $v_n = v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + \dots + v_2 - v_1 + v_1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 6$

Hay  $v_n = 2(2^{n-1} - 1) + 6 = 2^n + 4 \Rightarrow u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

**Bài 59.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR  $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$ .

b) CMR dãy  $(v_n)$  với  $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$  là một CSN. Tính  $\lim u_n$ .

### Lời giải

a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp  $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$ .

Khi  $n = 1$  ta có  $u_1 = 1 \neq -4$

Giả sử  $u_k \neq -4, \forall k \geq 1$ , ta chứng minh  $u_{k+1} \neq -4$ .

Thật vậy, giả sử ngược lại  $u_{k+1} = -4$ .

Khi đó  $\frac{u_k - 4}{u_k + 6} = -4 \Rightarrow u_k - 4 = -4u_k - 24 \Rightarrow u_k = -4$ , trái với giả thiết quy nạp.

Vậy  $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$

b) Từ câu a) suy ra  $v_n$  luôn xác định với mọi  $\forall n \geq 1$

$$\text{Ta có } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{u_n - 4}{u_n + 6} + 1}{\frac{u_n - 4}{u_n + 6} + 4} = \frac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \frac{2}{5}v_n, \forall n.$$

Vậy  $(v_n)$  là 1 CSN lùi vô hạn với công bội  $q = \frac{2}{5}$ . Suy ra  $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$\text{Nên } u_n = \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}. \text{ Do đó } \lim u_n = \lim \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = -1.$$

**Bài 60.** Bài Cho dãy số  $u_n$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1 \end{cases}$ . Tính  $\lim u_n$ .

**lời giải**

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \dots + u_2 - u_1 + u_1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{n}.$$

$$\text{Do đó } \lim u_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

**Bài 61.** Cho dãy số  $u_n$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ . Tính  $\lim u_n$ .

**lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \dots + u_2 - u_1 + u_1 \\ &\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim u_n = \lim \left[ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = 2.$$

**Bài 62.** Cho dãy số  $a_n$  với  $n \in \mathbb{N}$  được xác định bởi  $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 13 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ .

Chứng minh rằng phương trình  $x^2 + x + 1 = a_n$  và phương trình  $x^3 - x^2 = a_n^2$  có nghiệm tự nhiên với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**lời giải**

Phương trình đặc trưng của dãy  $a_n$  là  $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$ . Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 7 + \sqrt{48}$ ,  $\lambda_2 = 7 - \sqrt{48}$ . Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho

$$a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Vì } a_0 = 1 \text{ và } a_1 = 13 \text{ nên } \alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, \beta = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} (7 + \sqrt{48})^n + \frac{2 - \sqrt{3}}{4} (7 - \sqrt{48})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2a_n - 1 = \left[ \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} (2 + \sqrt{3})^n - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} (2 - \sqrt{3})^n \right]^2.$$

Xét dãy số  $b_n$  với  $n \in \mathbb{N}$  được xác định bởi

$$b_n = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} (2 + \sqrt{3})^n - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} (2 - \sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} b_0 = 1, b_1 = 5 \\ b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $b_n \in \mathbb{Z}$  với  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác  $b_n > 0$  với  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Suy ra  $b_n \in \mathbb{N}^*$  và  $2a_n - 1 = b_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ . Suy ra  $b_n$  là số tự nhiên lẻ. Suy ra tồn tại số tự nhiên  $c_n$  sao cho  $b_n = 2c_n + 1$ . Ta có

$$c_n^2 + c_n + 1^2 = \frac{1}{2} \left[ 2c_n + 1^2 + 1 \right] = \frac{1}{2} b_n^2 + 1 = a_n.$$

Vậy phương trình  $x^2 + x + 1^2 = a_n$  có nghiệm tự nhiên. Ta có

$$\frac{2a_n + 1}{3} = \left[ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}} 2 + \sqrt{3}^n + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}} 2 - \sqrt{3}^n \right]^2. \text{ Xét dãy số } d_n \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ được xác}$$

$$\text{định bởi } d_n = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}} 2 + \sqrt{3}^n + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}} 2 - \sqrt{3}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_0 = 1, d_1 = 3 \\ d_{n+2} = 4d_{n+1} - d_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $d_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác  $d_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Suy ra  $d_n \in \mathbb{N}^*$  và  $2a_n + 1 = 3d_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Cũng bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta dễ dàng chứng minh được  $d_n$  là số nguyên lẻ với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Ta có } \left( \frac{b_n d_n + 1}{2} \right)^3 - \left( \frac{b_n d_n - 1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} 3b_n^2 d_n^2 + 1 = a_n^2.$$

Vì  $b_n$  và  $d_n$  là các số tự nhiên lẻ nên  $\frac{b_n d_n - 1}{2}$  là số tự nhiên.

Vậy phương trình  $x^3 + 1^3 - x^3 = a_n^2$  có nghiệm tự nhiên với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bài 63.** Cho các dãy số thực dương  $x_n, y_n$  với  $n \in \mathbb{N}^*$  được xác định bởi  $x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

và  $x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1}; y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2}$  với mọi số nguyên dương  $n$ . Tìm giới hạn của các

dãy số  $x_n, y_n$ .

**lời giải**

Từ giả thiết suy ra  $y_n > \frac{1}{2}$  với  $\forall n \in N^*$ .

Trước hết ta chứng minh  $x_n^2 + y_n^2 = 1, \forall n \in N^*$ .

Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k$  tức là  $x_k^2 + y_k^2 = 1$ . Đặt  $a = x_{k+1}$ ,  $b = y_{k+1}$  ta có

$$x_k = a \sqrt{4b^2 - 1}, y_k = b \sqrt{1 - 4a^2}. \text{ Vì } x_k^2 + y_k^2 = 1 \text{ nên}$$

$$a^2 (4b^2 - 1) + b^2 (1 - 4a^2) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 16a^2b^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1$$

Ta chứng minh  $y_n = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}, \forall n \in N^*$ .

Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k$ , tức là  $y_k = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{k-1}}$ .

Ta có  $y_{k+1} > \frac{1}{2}$  nên tồn tại  $\alpha_{k+1} \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$  sao cho  $y_{k+1} = \cos \alpha_{k+1}$ .

$$\text{Ta có } y_{k+1} \sqrt{1 - 4x_{k+1}^2} = y_k \Rightarrow 4y_{k+1}^3 - 3y_{k+1} = y_k \Rightarrow \cos 3\alpha_{k+1} = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{k-1}}$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha_{k+1} < \frac{\pi}{3} \text{ nên } \alpha_{k+1} = \frac{\pi}{4 \cdot 3^k} \Rightarrow y_{k+1} = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^k}.$$

Vậy mệnh đề cũng đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi  $n \in N^*$ .

Tức là  $y_n = \cos \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}$  với mọi  $n \in N^*$ . Suy ra  $x_n = \sin \frac{\pi}{4 \cdot 3^{n-1}}, \forall n \in N^*$ .

Từ đó suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$ .

**Bài 64.** Cho hai dãy số dương  $x_n$ ,  $y_n$  được xác định bởi  $x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$  và

$$\begin{cases} x_{n+1}y_{n+1} - x_n = 0 \\ x_{n+1}^2 + y_n = 2 \end{cases} \text{ với mọi } n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng hai dãy số trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

**lời giải**

Ta có  $x_1 = \sqrt{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6}, y_1 = \sqrt{3} = 2 \cos \frac{\pi}{6}$ .

Chúng ta chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $x_n = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$  và  $y_n = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ .

Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k$   $k \geq 1$  tức là  $x_k = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$  và  $y_k = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$

Ta có  $x_{k+1}^2 = 2 - 2y_k = 2 - 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$ .

Suy ra  $x_{k+1} = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$  (vì  $x_{k+1} > 0$ )

và  $y_{k+1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}} = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$ .

Vậy mệnh đề cũng đúng với  $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương  $n$ . Từ đó

suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) = 0$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) = 2$

Vậy các dãy  $x_n$ ,  $y_n$  hội tụ và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2$ .

**Bài 65.** Cho  $x_1 = 2012, x_2 = 2011$  và  $x_{n+2} = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) x_{n+1} + \frac{x_n}{n}, n = 2, 3, \dots$  Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**lời giải**

Giải: Ta có  $x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{n} \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{-1}{n!} x_2 - x_1 = -\frac{1}{n!}$  và

$$x_{n+2} = x_2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

Dãy này rõ ràng hội tụ và có giới hạn là  $x_2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = x_2 + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = x_2 + 1 - \frac{1}{e}$

Từ đó suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2012 - \frac{1}{e}$ .

**Bài 66.** Cho dãy  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i-1! + i!}$ , tính tổng  $\left(\sum_{i=1}^n i a_i\right)$ .

**lời giải**

Giải: Ta có  $\frac{1}{i-1! + i!} = \frac{1}{i-1!} - \frac{1}{i+1!}$  vậy  $a_n = 1 - \frac{1}{n+1!}$ .

$$\text{Do đó } n a_n = n - \frac{n}{n+1!} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{n+1!}\right) - \left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{n!}\right).$$

Từ đó ta tìm được tổng cần tính là  $\boxed{\frac{n}{2} + \frac{1}{n+1!} - 1}$ .

**Bài 67.** Cho dãy  $u_k$  được xác định bởi  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_k = \frac{k+2}{k} u_{k-1} + \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ . Tìm công thức tổng quát của  $u_n$ .

**lời giải**

Giải: Đặt  $u_n = \frac{n+1}{n+2} v_n$  thì hệ thức ban đầu trở thành

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_n = v_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\text{Vậy } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \text{ và } v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\right).$$

Từ đó ta tìm được  $\boxed{u_n = \frac{n(n+3)}{4}}$ .

**Bài 68.** Cho  $a_n$  xác định bởi công thức truy hồi sau  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Tìm công thức tổng quát của  $a_n$ .

**lời giải**

$$\text{Từ đề bài suy ra } 24a_{n+1} + 1 = \frac{9}{4} + \frac{24a_n + 1}{4} + \frac{3}{2} \sqrt{24a_n + 1} = \left(\frac{\sqrt{24a_n + 1} + 3}{2}\right)^2.$$

$$\text{Đặt } b_n = \sqrt{24a_n + 1} \text{ ta có } b_1 = 5, b_{n+1} = \frac{b_n + 3}{2} \text{ và } b_{n+1} - 3 = \frac{b_n - 3}{2}.$$

Vậy  $b_n = 3 + 2^{2-n}$  và  $a_n = \frac{3 + 2^{2-n} - 1}{24}$ .

**Bài 69.** Cho  $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^6}{2^k}$ , tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**lời giải**

Đặt  $f_i(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^i x^k$  xác định với mọi  $x \in (-1, 1)$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = f_6\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Ta có  $f_{i+1}(x) = x f_i'(x)$ . Áp dụng công thức trên ta lần lượt có các hệ thức sau

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f_1(x) = x f_0'(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

$$f_2(x) = x f_1'(x) = \frac{x^2 + x}{1-x^3}$$

$$f_3(x) = x f_2'(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{1-x^4}$$

$$f_4(x) = x f_3'(x) = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{1-x^5}$$

$$f_5(x) = x f_4'(x) = \frac{x^5 + 26x^4 + 66x^3 + 26x^2 + x}{(1-x)^6}$$

$$f_6(x) = x f_5'(x) = \frac{x^6 + 57x^5 + 302x^4 + 302x^3 + 57x^2 + x}{1-x^7}.$$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = f_6\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 57 \cdot 2^{-2} + 302 \cdot 2^{-3} + 302 \cdot 2^{-4} + 57 \cdot 2^{-5} + 2^{-6} = 9366$ .

**Bài 70.** Tìm công thức thu gọn tính  $u_n$  theo  $n$  của các dãy số

a)  $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ .

b)  $u_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ .

$$c) \quad u_n = \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

$$d) \quad u_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$e) \quad u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$

**lời giải**

$$a) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\text{Khi } k=1 \Rightarrow \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\text{Khi } k=3 \Rightarrow \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$\text{Khi } k=n \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được  $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = \frac{n}{n+1}$

$$b) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k+1-2k-1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right]$$

$$\text{Khi } k=1 \Rightarrow \frac{1}{1.3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right]$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow \frac{1}{3.5} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]$$

$$\text{Khi } k=3 \Rightarrow \frac{1}{5.7} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right]$$

...

$$\text{Khi } k=n \Rightarrow \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được

$$u_n = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2n+1} \right] \Rightarrow u_n = \frac{n}{2n+1}$$

c)  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  ta có  $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+k\sqrt{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$

Suy ra  $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+k\sqrt{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ .

Khi  $k=1 \Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi  $k=2 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Khi  $k=3 \Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$

...

Khi  $k=n \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được:  $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$ .

d)  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  ta có  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$ .

Khi  $k=1 \Rightarrow \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right]$

Khi  $k=2 \Rightarrow \frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right]$

Khi  $k=3 \Rightarrow \frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} \right]$

...

Khi  $k=n \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được  $u_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$ .

Vậy  $u_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ .

$$\begin{aligned} \text{e) } \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} &= \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2 + 2k(k+1) + 1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{[k(k+1)+1]^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\text{Khi } k=1 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\text{Khi } k=n \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được  $u_n = n+1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$ .

**Bài 71.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n; n \geq 1 \end{cases}$ . Hãy tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$ .

**Lời giải**

Theo đề bài ta có  $u_1 = 1$

$$u_2 = u_1 + 1$$

$$u_3 = u_2 + 2$$

...

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)$$

Cộng theo vế  $n$  đẳng thức trên ta được  $u_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}[n^2 - n + 2]$ .

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + n = \frac{1}{2}[n^2 + n + 2]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1$$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ .

**Bài 72.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = \frac{P_n}{A_{n+2}^n}$  trong đó  $P_n$  là số hoán vị của  $n$  phần tử,  $A_n^k$  là số chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Tìm  $\lim S_n$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } P_n = n!, A_{n+2}^n = \frac{(n+2)!}{2!} \text{ nên } u_n = \frac{n! \cdot 2!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{Do đó } S_n = 2 \left[ \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = 2 \left[ \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{5-4}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = 2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right]$$

$$\Rightarrow S_n = 2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right].$$

Vậy  $\lim S_n = 1$ .

**Bài 73.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = a, & u_2 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3}, & n \geq 2 \end{cases}$ . Tìm số hạng tổng quát  $u_n$ .

**Lời giải**

$$\text{Theo đề bài ta có } u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3} \Rightarrow 3u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$$

$$\Rightarrow 3u_{n+1} - 3u_n = -u_n + u_{n-1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}(u_n - u_{n-1}).$$

$$\text{Đặt } v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \Rightarrow v_1 = u_2 - u_1 = b - a \text{ và } v_n = -\frac{1}{3}v_{n-1}$$

$$\text{Do đó } (v_n) \text{ là một cấp số nhân có công bội } q = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Nên } v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = (b-a) \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1}.$$

Mà  $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$  suy ra

$$u_2 - u_1 = v_1$$

$$u_3 - u_2 = v_2$$

$$u_4 - u_3 = v_3$$

...

$$u_n - u_{n-1} = v_{n-1}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được  $u_n - u_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} \Rightarrow u_n = u_1 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

$$\Rightarrow u_n = a + v_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = a + (b-a) \frac{3}{4} \left[ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right] \Rightarrow u_n = a + (b-a) \frac{3}{4} \left[ 1 + (-1)^n 3^{1-n} \right]$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = a + \frac{3}{4}(b-a) \left[ 1 + (-1)^n 3^{1-n} \right]$ .

**Bài 74.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{2013n}, (n \geq 1) \end{cases}$ . Tìm số hạng tổng quát  $u_n$ .

**Lời giải**

Từ  $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{2013n}$  ta có  $\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2013} \cdot \frac{u_n}{n}$ .

Đặt  $v_n = \frac{u_n}{n} \Rightarrow v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$  và  $v_{n+1} = \frac{1}{2013} \cdot v_n$

Suy ra  $(v_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = \frac{1}{2013}$

Nên  $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2013} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 2013^{1-n}$

Mà  $v_n = \frac{u_n}{n} \Rightarrow u_n = n \cdot v_n = \frac{1}{3} n \cdot 2013^{1-n}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{1}{3} n \cdot 2013^{1-n}$ .

**Bài 75.** Cho dãy số  $\{a_n\}$  xác định như sau  $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right), n \geq 1 \end{cases}$ . Chứng minh dãy số

$\{a_n\}$  hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

**Lời giải**

Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh rằng  $a_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Thật vậy:

Với  $n = 1$  ta có:  $a_1 = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{4}$ , nên (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với số tự nhiên bất kì  $k \geq 1$  nghĩa là:  $a_k = \frac{1}{2^k} \cot \frac{\pi}{2^{k+1}}$ .

Ta phải chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ . Từ giả thiết quy nạp và công thức xác định dãy

$$\text{có: } a_{k+1} = \frac{1}{2} \left( a_k + \sqrt{a_k^2 + \frac{1}{4^k}} \right) \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2^k} \left( \cot \frac{\pi}{2^{k+1}} + \frac{1}{\sin \frac{1}{2^{k+1}}} \right) \right] \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Tức là (1) đúng với  $n = k + 1$  và (1) được chứng minh.

$$\text{Ta có } \lim a_n = \lim \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \lim \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Vậy dãy  $(a_n)$  hội tụ và  $\lim a_n = \frac{2}{\pi}$ .

**Bài 76.** Cho hai dãy  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  như sau:  $a < b$  cho trước thì

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = \sqrt{a \cdot a_1}$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$$

...

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_n \cdot b_{n-1}}$$

a. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

b. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Nhận xét:**

Bài toán đã giấu đi tính lượng giác rất khéo. Ta hãy quan sát thật kĩ, do  $a < b$  nên ta có thể đặt  $\cos \alpha = \frac{a}{b}$  hoặc  $\sin \alpha = \frac{a}{b}$ . Vậy nên chọn là  $\sin \alpha$  hay  $\cos \alpha$ ?

Ta thử đặt:

$$\text{- Nếu } \sin \alpha = \frac{a}{b} \text{ thì } a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b(\sin \alpha + 1)}{2}; b_1 = \sqrt{a_1 \cdot b} = \sqrt{\frac{b^2}{2} ((\sin \alpha + 1) \cdot \sin \alpha)}.$$

Ta sẽ không thể giải tiếp. Vậy ta sẽ không đặt với  $\sin \alpha$ .

$$\text{- Nếu } \cos \alpha = \frac{a}{b} \text{ thì } a_1 = \frac{b(\cos \alpha + 1)}{2} = b \cos^2 \frac{\alpha}{2}; b_1 = \sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = b \cos \frac{\alpha}{2}!$$

Vậy ta tiến hành giải.

**Lời giải**

a. Đặt  $\cos \alpha = \frac{a}{b} \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$

Ta có 
$$\begin{cases} a_1 = b \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ b_1 = b \cos \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = b \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2} \\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2}} = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2} \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng có:

$$\begin{cases} a_n = b \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \cdot \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2^n}}{2^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}} \\ b_n = b \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{2^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}} \end{cases}$$

Vậy:  $b_n = \frac{b}{2^n \cdot \sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} \cdot \frac{b \sin \alpha}{\alpha}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b \sin \alpha}{\alpha}$$

b. Ta cũng có:  $a_n = b_n \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b \sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \sin \alpha}{\alpha}$$

Chú ý: Với  $a = 2005$ ,  $b = 2006$  ta sẽ có bài 3 Olympic 30/4/2005.

**Bài 77.** Cho  $a_0 = 2$ ,  $b_0 = 1$ . Lập hai dãy số  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$  theo quy tắc sau:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n}. \text{ Chứng minh rằng các dãy } \{a_n\}, \{b_n\} \text{ có cùng một giới hạn khi}$$

$n \rightarrow \infty$ . Tìm giới hạn đó.

**Nhận xét:**

Để thấy dãy  $\{a_n\}$  là dãy trung bình điều hòa,  $\{b_n\}$  là dãy tựa trung bình nhân. Để chứng minh hai dãy cùng giới hạn thì nhất thiết phải tìm công thức tổng quát.

Trong trường hợp này, lượng giác hóa là biện pháp tối ưu nhất.

### Lời giải

Ta chú ý:  $a_0 = 2 = \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3}}, b_0 = 1$

$$a_1 = \frac{2a_0b_0}{a_0 + b_0} = \frac{2}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}} = \frac{2}{\cos \frac{\pi}{3} + 1} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}}$$

$$b_1 = \sqrt{a_1b_0} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}}$$

Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:

$$a_n = \left( \cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \right)^{-1}$$

$$b_n = \left( \cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \right)^{-1} \quad \forall n \geq 1$$

Lưu ý rằng:  $\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}} \quad \forall n \geq 1$

Ta có:  $a_n = \frac{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3}} (1); b_n = \frac{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3}} (2)$

Từ (1), (2) tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Ngòai ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Vậy hai dãy  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  có cùng giới hạn chung là  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

**Bài 78.** Cho dãy số  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_1| < 1$  được xác định bởi hệ thức:  $x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3-3x_n^2}}{2}$

a. Có cần thêm điều kiện gì đối với  $x_1$  để dãy toàn số dương.

b. Dãy số này có tuần hoàn không? Tại sao?

**Nhận xét:**

Ta quan sát rằng  $\sqrt{3-3x_n^2}$  cho ta cảm giác về dạng  $1-\cos^2 x$ , hơn nữa  $|x_1| < 1$ , điều đó càng củng cố suy nghĩ về lượng giác hóa bài toán. Ta tiến hành giải.

**Lời giải**

a. Để  $x_n > 0$ , trước hết ta phải có  $x_1 > 0$  và  $x_2 > 0$ .

Nhưng  $x_2 > 0$  tức là  $\sqrt{3-3x_1^2} > x_1$  hay  $x_1^2 < \frac{3}{4}$ .

Suy ra:  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ngược lại, nếu  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$  thì tồn tại  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$  sao cho  $\sin \alpha_1 = x_1$ . Khi đó:

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right), 0 < \frac{\pi}{3} - \alpha < \frac{\pi}{3}$$

Ta lại có:  $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \alpha$

Từ đó suy ra:  $x_1 = x_3 = \dots = \sin \alpha > 0$

Vậy điều kiện là:  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Xét hai trường hợp đối với  $x_1$ :

• Trường hợp  $x_1 \geq 0$ :

- Nếu  $x_2 \geq 0$  thì tương tự phần a ta có:  $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$  và

$$x_1 = x_3 = \dots; x_2 = x_4 = \dots$$

- Nếu  $x_2 < 0$  thì  $x_3 > 0$  và cũng có  $x_3 = x_1$

Thật vậy từ:  $x_2 = \frac{-x_1 + \sqrt{3-3x_1^2}}{2}$

Suy ra:  $\sqrt{3-3x_1^2} = 2x_2 + x_1 \quad (1) \Rightarrow 3-3x_1^2 = (2x_2 + x_1)^2 \quad (2)$

Do (1) mà:  $2x_1 + x_2 > 0$ . Suy ra:

$$2x_1 + x_2 = x_1 + (x_1 + x_2) > x_1 - x_2 > 0 \quad (x_1 \geq 0, x_2 < 0)$$

Vì thế từ (2) ta có:  $\sqrt{3-3x_2^2} = 2x_1 + x_2$

Suy ra:  $x_1 = \frac{-x_2 + \sqrt{3-3x_2^2}}{2} = x_3$

Tương tự:  $m > 0 : (2) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{m} \leq 1 \dots$

Vậy ta có:  $\{x_n\}$  là dãy tuần hoàn.

- Trường hợp  $x_1 < 0$ .

Khi đó  $x_2 > 0$  và theo trường hợp 1 suy ra  $x_n$  kể từ hạng thứ hai trở đi là dãy tuần hoàn.

**Bài 79.** Cho dãy  $\{u_n\}$  xác định bởi:  $\begin{cases} u_1 = 2; u_2 = 8 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$  và  $S_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot}(u_i^2)$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

**Nhận xét:**

Đây là bài toán rất khó vì sử dụng kiến thức về dãy Lucas và hàm  $\operatorname{arctg}$  và  $\operatorname{arccotg}$ .

Ta cần biết:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y$$

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{1+xy}{y-x}\right) = \operatorname{arccot}g(x) - \operatorname{arccot}g(y)$$

**Lời giải**

-Ta sẽ chứng minh:  $u_i^2 - u_{n+1} \cdot u_{n-1} = 4 \quad (\forall n \geq 2)$

Thật vậy:  $u_n(4u_{n-1}) = u_{n-1}(4u_n)$

$$\Rightarrow u_n(u_n + u_{n-2}) = u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1}) \Rightarrow u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = u_{n-1}^2 - u_nu_{n-2} = \dots = u_2^2 - u_3u_1 = 4$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} g u_n^2 &= \operatorname{arccot} g \left[ u_n \left( \frac{4u_n}{4} \right) \right] = \operatorname{arccot} g \left[ \frac{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})}{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}} \right] \\ &= \operatorname{arccot} g \left[ \frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_n}{u_{n-1}} + 1}{\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}} \right] = \operatorname{arccot} g \frac{u_{n+1}}{u_n} - \operatorname{arccot} g \frac{u_n}{u_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} g(u_i^2) = \operatorname{arccot} g(u_1^2) + \sum_{i=2}^n \operatorname{arccot} g(u_i^2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng  $\frac{u_{n-1}}{u_n}$  có giới hạn bởi vì  $0 < u_{n-1} < u_n \Rightarrow \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1$

Mặt khác  $\frac{u_{n-1}}{u_n}$  là dãy giảm, suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

$$\text{Mà: } u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$$

$$\Rightarrow 1 = 4 \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_n} \Rightarrow 1 = 4 \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$\text{Nếu đặt: } x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$\Rightarrow 1 = 4x - x^2 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \operatorname{arccot} g(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Bài 80. Cho dãy } \{u_n\} \text{ như sau: } \begin{cases} u_1 = \sqrt{e^{\sqrt{3}}} \\ u_2 = \sqrt{e} \\ u_{n+1}u_{n-1} = u_n^{\sqrt{3}} (\forall n \geq 2) \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{e} \leq u_n \leq e; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

b. Lập dãy số  $\{v_n\}$  biết:  $v_n = (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{1}{n}}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

**Nhận xét:**

Trước hết ta hãy trả lời cho câu hỏi: Có thể tiến hành lượng giác hóa cho bài toán được hay không?  
Để trả lời, ta cần quan sát thật kỹ điều kiện:

Các bài toán dãy số ôn học sinh giỏi

$$\sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{3}}$$

Vậy ta sẽ tiến hành giải.

### Lời giải

a. Ta chứng minh  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Thật vậy  $u_1 > 0, u_2 > 0$ . Giả sử  $u_n > 0, \forall n \geq k$ .

$$\text{Ta có } u_{k+1} = \frac{u_k^{\sqrt{3}}}{u_{k-1}} > 0. \text{ Vậy } u_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Ta lại có: } \sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\cos \frac{2\pi}{6}}$$

$$\text{Giả sử } u_n = e^{\cos \frac{n\pi}{6}}, \forall n \leq k$$

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{u_n^{\sqrt{3}}}{u_{n-1}} = \frac{e^{\sqrt{e} \cos \frac{n\pi}{6}}}{e^{\cos \frac{(n-1)\pi}{6}}} = e^{\cos \frac{(n+1)\pi}{6}}$$

$$\text{Vậy } u_n = e^{\cos \frac{n\pi}{6}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{e} \leq e^{\cos \frac{n\pi}{6}} \leq e \text{ và hàm là hàm đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$  đpcm

$$\text{b. Ta có: } v_n = \sqrt[n]{u_1 \cdot u_2 \cdots u_n} = e^{\frac{1}{n} \left( \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \cdots + \cos \frac{n\pi}{6} \right)}$$

Đến đây áp dụng công thức tính tổng của bài 1, chương I, ta có:

$$v_n = e^{\frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{12}} \left( \sin \frac{(2n+1)\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right)} = e^{\frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} \cdot \cos \frac{(n+1)\pi}{12} \cdot \sin \frac{n\pi}{12}}$$

$$\text{Mặt khác ta có: } \frac{-1}{n \sin \frac{\pi}{12}} \leq \frac{\cos \frac{(n+1)\pi}{12} \cdot \sin \frac{n\pi}{12}}{n \cdot \sin \frac{\pi}{12}} \leq \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n \sin \frac{\pi}{12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} = 0$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = e^0 = 1$$

**Bài 81.** Cho  $a_0 = 2, b_0 = 1$ . Ta lập hai dãy số  $\{a_n\}, \{b_n\}$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$  theo quy tắc sau:

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n}$ . Chứng minh rằng các dãy  $\{a_n\}, \{b_n\}$  có cùng một giới hạn khi  $n \rightarrow \infty$ . Tìm giới hạn đó.

**Nhận xét:**

Để thấy dãy  $\{a_n\}$  là dãy trung bình điều hòa,  $\{b_n\}$  là dãy tựa trung bình nhân. Để chứng minh hai dãy cùng giới hạn thì nhất thiết phải tìm công thức tổng quát. Trong trường hợp này, lượng giác hóa là biện pháp tối ưu nhất.

**Giải:**

$$\text{Ta chú ý: } a_0 = 2 = \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3}}, b_0 = 1.$$

$$a_1 = \frac{2a_0 b_0}{a_0 + b_0} = \frac{2}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0}} = \frac{2}{\cos \frac{\pi}{3} + 1} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} \Rightarrow b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}}.$$

Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng:

$$a_n = \left( \cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \right)^{-1}$$

$$b_n = \left( \cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \right)^{-1}; \forall n \geq 1$$

$$\text{Lưu ý rằng: } \cos \frac{\pi}{2 \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^2 \cdot 3} \dots \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}; \forall n \geq 1$$

Ta có:

$$a_n = \frac{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3}} \quad (1)$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = a_n \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} \quad (2)$$

Từ (1), (2) tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Ngoài ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n \cdot 3}}{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^n \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Vậy hai dãy  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  có cùng giới hạn chung là  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ .

**Bài 82.** Cho dãy số  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_1| < 1$  được xác định bởi hệ thức:  $x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3-3x_n^2}}{2}$

a) Có cần thêm điều kiện gì đối với  $x_1$  để dãy toàn số dương.

b) Dãy số này có tuần hoàn không? Tại sao?

**Nhận xét:**

Ta quan sát rằng  $\sqrt{3-3x_n^2}$  cho ta cảm giác về dạng  $1 - \cos^2 x$ , hơn nữa  $|x_1| < 1$ , điều đó càng củng cố suy nghĩ của ta về lượng giác hóa bài toán. Ta tiến hành giải.

**Giải:**

a) Để  $x_n > 0$ , trước hết ta phải có  $x_1 > 0$  và  $x_2 < 0$ .

Nhưng  $x_2 > 0$  tức là  $\sqrt{3-3x_1^2} > x_1$  hay  $x_1^2 < \frac{3}{4}$ . Suy ra:  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ngược lại, nếu  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$  thì tồn tại  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$  sao cho  $\sin \alpha_1 = x_1$ . Khi đó:

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right), \quad 0 < \frac{\pi}{3} - \alpha < \frac{\pi}{3}$$

Ta lại có:  $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \alpha$

Từ đó suy ra:  $x_1 = x_3 = \dots = \sin \alpha > 0$

Vậy điều kiện là:  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b) Xét hai trường hợp đối với  $x_1$ :

\* Trường hợp  $x_1 \geq 0$ :

- Nếu  $x_2 \geq 0$  thì tương tự phần a ta có:  $x_3 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 0$  và  $x_1 = x_3 = \dots$ ;  $x_2 = x_4 = \dots$

Các bài toán dãy số ôn học sinh giỏi

- Nếu  $x_2 < 0$  thì  $x_3 > 0$  và cũng có  $x_3 = x_1$

$$\text{Thật vậy từ: } x_2 = \frac{-x_1 + \sqrt{3-3x_1^2}}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{3-3x_1^2} = 2x_2 + x_1 \quad (1) \Rightarrow 3-3x_1^2 = (2x_2 + x_1)^2 \quad (2)$$

Do (1) mà:  $2x_1 + x_2 > 0$ . Suy ra:

$$2x_1 + x_2 = x_1 + (x_1 + x_2) > x_1 - x_2 > 0 \text{ với } (x_1 \geq 0, x_2 < 0)$$

$$\text{Vì thế từ (2) ta có: } \sqrt{3-3x_2^2} = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Suy ra: } x_1 = \frac{-x_2 + \sqrt{3-3x_2^2}}{2} = x_3$$

Tương tự:  $x_2 = x_4 \dots$

Vậy ta có  $\{x_n\}$  là dãy tuần hoàn.

\* Trường hợp  $x_1 < 0$ .

Khi đó  $x_2 > 0$  và theo trường hợp 1 suy ra  $x_n$  kể từ hạng thứ hai trở đi là dãy tuần hoàn.

**Bài 83.** Cho dãy  $\{u_n\}$  xác định bởi:  $\begin{cases} u_1 = 2; u_2 = 8 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$  và  $S_n = \sum_{i=1}^n \arccot(u_i^2)$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

**Nhận xét:**

Đây là bài toán rất khó vì sử dụng kiến thức về dãy Lucas và hàm arctan và arccot.

Ta cần biết:

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan x + \arctan y$$

$$\arccot\left(\frac{1+xy}{y-x}\right) = \arccot(x) - \arccot(y)$$

**Giải:**

- Ta sẽ chứng minh:  $u_i^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 4 (\forall n \geq 2)$

$$\text{Thật vậy: } u_n(4u_{n-1}) = u_{n-1}(4u_n)$$

$$\Rightarrow u_n(u_n + u_{n-2}) = u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1}) \Rightarrow u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = u_{n-1}^2 - u_nu_{n-2} = \dots = u_2^2 - u_3u_1 = 4.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc cot} u_n^2 &= \operatorname{arc cot} \left[ u_n \left( \frac{4u_n}{4} \right) \right] = \operatorname{arc cot} \left[ \frac{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})}{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}} \right] = \operatorname{arc cot} \left[ \frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_n}{u_{n-1}} + 1}{\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}} \right] \\ &= \operatorname{arc cot} \frac{u_{n+1}}{u_n} - \operatorname{arc cot} \frac{u_n}{u_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{i=1}^n \operatorname{arc cot}(u_i^2) = \operatorname{arc cot}(u_1^2) + \sum_{i=2}^n \operatorname{arc cot}(u_i^2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng  $\frac{u_{n-1}}{u_n}$  có giới hạn bởi vì  $0 < u_{n-1} < u_n \Rightarrow \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1$

Mặt khác  $\frac{u_{n-1}}{u_n}$  là dãy giảm, suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

$$\text{Mà } u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \Rightarrow 1 = 4 \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_n} \Rightarrow 1 = 4 \frac{u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$\text{Đặt } x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow 1 = 4x - x^2 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \operatorname{arc cot}(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.$$

**Bài 84.** Cho dãy  $\{u_n\}$  như sau: 
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{e^{\sqrt{3}}} \\ u_2 = \sqrt{e} \\ u_{n+1}u_{n-1} = u_n^{\sqrt{3}}; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng:  $\frac{1}{e} \leq u_n \leq e; \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

b) Lập dãy số  $\{v_n\}$  biết:  $v_n = (u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^{\frac{1}{n}}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .

**Nhận xét:**

Trước hết ta hãy trả lời cho câu hỏi: Có thể tiến hành lượng giác hóa cho bài toán được hay không? Để trả lời, ta cần quan sát thật kĩ điều kiện:

$$\sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{3}}$$

Vậy ta sẽ tiến hành giải.

**Giải:**

a) Ta chứng minh  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Thật vậy  $u_1 > 0, u_2 > 0$ . Giả sử  $u_n > 0, \forall n \geq k$ . Ta có  $u_{k+1} = \frac{u_k^{\sqrt{3}}}{u_{k-1}} > 0$ . Vậy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ .

Ta lại có:

$$\sqrt{e^{\sqrt{3}}} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = e^{\cos \frac{2\pi}{6}}$$

Giả sử  $u_n = e^{\cos \frac{n\pi}{6}}, \forall n \leq k$

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{u_n^{\sqrt{3}}}{u_{n-1}} = \frac{e^{\sqrt{e} \cos \frac{n\pi}{6}}}{e^{\cos \frac{(n-1)\pi}{6}}} = e^{\cos \frac{(n+1)\pi}{6}}$$

Vậy  $u_n = e^{\cos \frac{n\pi}{6}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Ta lại có  $\frac{1}{e} \leq e^{\cos \frac{n\pi}{6}} \leq e$  và hàm là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$ . (đpcm)

b) Ta có:  $v_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} = e^{\frac{1}{n} \left( \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos \frac{n\pi}{6} \right)}$

Đến đây áp dụng công thức tính tổng của bài 1, chương I, ta có:

$$v_n = e^{\frac{1}{2n \sin \frac{\pi}{12}} \left( \sin \frac{(2n+1)\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right)} = e^{\frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} \cdot \cos \frac{(n+1)\pi}{12} \cdot \sin \frac{n\pi}{12}}$$

$$\text{Mặt khác ta có: } -\frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} \leq \frac{\cos \frac{(n+1)\pi}{12} \cdot \sin \frac{n\pi}{12}}{n \cdot \sin \frac{\pi}{12}} \leq \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n \sin \frac{\pi}{12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{12}} = 0.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = e^0 = 1.$$

**Bài 85.** Dãy  $\{h_n\}$  được cho bởi điều kiện  $h_1 = \frac{1}{2}$  và  $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - h_n^2}}{2}}; \forall n \geq 1$ . Đặt

$$S_n = \sum_{i=1}^n h_i; \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Hãy chứng minh rằng: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 1,03.$$

**Nhận xét:**

Bài toán này nếu không lượng giác hóa thì sẽ đi vào thế bế tắc. Thật vậy, vì phương pháp sai phân không thể giải quyết bài toán có nhiều căn như vậy. Bây giờ ta chú ý đại lượng  $\sqrt{1 - h_n^2}$ , điều này cho ta một cảm giác gần giống công thức  $\sqrt{1 - \sin^2 x}$  hay  $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ ! Vậy ta tiến hành giải.

**Giải:**

Ta có:  $h_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} \Rightarrow h_2 = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2}$ .

Ta sẽ chứng minh rằng  $h_n = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$

Giả sử rằng  $\sin h_k = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$

$$h_{k+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{2}} = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$$

Mặt khác  $\sin x < x; \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Nên  $S_n = \sum_{i=1}^n h_i = \frac{1}{2} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \dots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2}$

Do  $S_n$  là dãy tăng nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2} < 1,03$ . (đpcm)

**Bài 86.** Dãy  $\{h_n\}$  được cho bởi điều kiện  $h_1 = \frac{1}{2}$  và  $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - h_n^2}}{2}}; \forall n \geq 1$ . Đặt

$$S_n = \sum_{i=1}^n h_i; \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Hãy chứng minh rằng: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 1,03.$$

**Nhận xét:**

Bài toán này nếu không lượng giác hóa thì sẽ đi vào thế bế tắc. Thật vậy, vì phương pháp sai phân không thể giải quyết bài toán có nhiều căn như vậy.

Bây giờ ta chú ý đại lượng  $\sqrt{1 - h_n^2}$ , điều này cho ta một cảm giác gần giống công thức  $\sqrt{1 - \sin^2 x}$  hay  $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ ! Vậy ta tiến hành giải.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } h_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2} \Rightarrow h_2 = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^2}.$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh rằng: } h_n = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}.$$

$$\text{Giả sử rằng: } \sin h_k = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$$

$$h_{k+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{2}} = \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$$

$$\text{Mặt khác: } \sin x < x; \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Nên: } S_n = \sum_{i=1}^n h_i = \frac{1}{2} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \dots + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2}$$

$$\text{Do } S_n \text{ là dãy tăng nên } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3 \cdot 2} < 1,03.$$

$\Rightarrow$  đpcm.

$$\text{Bài 87. Cho dãy } \{u_n\} \text{ và } \{v_n\} \text{ như sau: } \begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - u_n^2}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + v_n^2} - 1}{v_n} \end{cases}$$

Chứng minh rằng:  $2^{n+2} \cdot u_n < \pi < 2^{n+2} \cdot v_n$ .

**Nhận xét:**

Với dãy  $\{u_n\}$  ta thấy có biểu thức  $\sqrt{1 - u_n^2}$ , ta nghĩ ngay đến lượng giác hóa bằng sin, cos.

Còn dãy  $\{v_n\}$ ? Câu trả lời nằm ở biểu thức  $\sqrt{1 + v_n^2}$  và  $v_0 = 1$ , cho ta suy nghĩ nên sử dụng hàm tang và cotang.

**Lời giải**

Ta có:  $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{2^2}$ ,  $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{2^2}} = \sin \frac{\pi}{2^3}$ .

Vậy:  $u_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}$ .

Tương tự:  $v_0 = 1 = \tan \frac{\pi}{2^2}$ .

$$v_n = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\pi}{2^{n+1}}}}{\tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} - 1}{\tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

Bằng cách xét:  $f(x) = \sin x - x$ ,  $g(x) = \tan x - x$ ;  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta suy ra:  $\sin x < x < \tan x$ ;  $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Khi đó:  $\sin \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \Leftrightarrow 2^{k+2} \cdot u_n < \pi < 2^{k+2} \cdot v_n \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Bài 88.** Cho cấp số cộng gồm 1987 số hạng với số hạng đầu  $u_1 = \frac{\pi}{1987}$  và công sai là  $\frac{\pi}{3974}$ .

Tính giá trị:  $S = \sum \cos(\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_{1987})$  ở đó tổng  $\sum$  chứa tất cả các số hạng ứng với tất cả các cách khác nhau có thể được để lấy dấu cộng hay trừ trước các số  $u_1, u_2, \dots, u_{1987}$ .

**Nhận xét:**

Ta thấy rằng số 1987 là cố ý cho trùng với năm thi. Điều đó chứng tỏ có thể tổng quát hóa bài toán. Đôi khi việc này khiến bài toán dễ dàng hơn và không còn che giấu như bài toán nguyên thủy.

#### Lời giải

Ta sẽ chứng minh từ bài toán tổng quát hơn. Bài toán thực chất là:

$$\forall \{u_j\}_1^n \text{ (kí hiệu dãy)} \sum \cos(\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_{1987}) = 2^n \cdot \prod_{j=1}^n \cos u_j.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp:

Với  $n = 1$ :

$$\cos u_1 + \cos(-u_1) = 2 \cos u_1$$

Với  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} & \cos(u_1 + u_2) + \cos(u_1 - u_2) + \cos(u_2 - u_1) + \cos(-u_1 - u_2) \\ &= 2 \cos u_1 \cdot \cos u_2 + 2 \cos(-u_1) \cdot \cos u_2 = 4 \cos u_1 \cdot \cos u_2 \end{aligned}$$

Giả sử bài toán đúng với  $n$ , khi đó:

$$\begin{aligned} & 2^{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} \cos u_j = 2 \left( 2^n \cdot \prod_{j=1}^n \cos u_j \right) \cos u_{n+1} \\ &= 2 \left[ \sum \cos(\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_{1987}) \right] \cos u_{n+1} \end{aligned}$$

Các bài toán dãy số ôn học sinh giỏi

$$= \sum \cos(\pm u_1 \pm u_2 \dots \pm u_{1987})$$

Trở lại bài toán ta có:  $S = 2^{1987} \prod_{j=1}^{1987} \cos u_j$

Do  $\{u_j\}$  là cấp số cộng nên:

$$u_{1987} = u_1 + 1985d = \frac{\pi}{1987} + \frac{1985\pi}{2 \cdot 1987} = \frac{\pi}{2}.$$

**Bài 89.** Cho dãy số  $u_1, u_2, \dots$  như sau:  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ . Dãy số  $v_1, v_2, \dots$  được theo quy luật:  $v_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{arccot} u_i$ . Hãy tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .

### Lời giải

Trước hết nhận xét rằng dãy  $u_1, u_2, \dots$  chính là các số hạng lẻ của dãy Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, ....

Gọi dãy đó là  $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$

Ta có:  $t_1 = t_2 = 1$  và  $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$  ( $n \geq 1$ ).

**a.** Trước hết ta chứng minh rằng:

$$\operatorname{arccot} t_2 - \operatorname{arccot} t_3 - \operatorname{arccot} t_5 - \dots - \operatorname{arccot} t_{2n+1} = \operatorname{arccot} t_{2n+2} \quad (1)$$

Thật vậy theo công thức cộng cung ta có:

$$\operatorname{arccot} t_{2n} - \operatorname{arccot} t_{2n+1} = \operatorname{arccot} \frac{t_{2n}t_{2n+1} + 1}{t_{2n+1} - t_{2n}} = \operatorname{arccot} \frac{t_{2n}t_{2n+1}}{t_{2n-1}}. \text{ Chú ý là:}$$

$$t_{m+1} \cdot t_{m+2} - t_m \cdot t_{m+3} = (-1)^m.$$

Nếu đặt  $m = 2n - 1$  thì  $t_{2n} \cdot t_{2n+1} - t_{2n-1} \cdot t_{2n+2} = -1$ .

Từ đó:  $t_{2n} \cdot t_{2n+1} + 1 = t_{2n-1} \cdot t_{2n+2}$ .

Suy ra:  $\operatorname{arccot} t_{2n} - \operatorname{arccot} t_{2n+1} = \operatorname{arccot} t_{2n+2}$  (2)

Trong (2) lần lượt thay  $n = 1, 2, 3, \dots$  rồi cộng lại sẽ được (1).

**b.** Từ (1) suy ra:

$$\operatorname{arccot} u_i - \sum_{i=2}^n \operatorname{arccot} u_i = \operatorname{arccot} t_{2n+2}$$

Do:  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{2n+2} = +\infty$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} t_{2n+2} = 0$ .

Từ đó suy ra  $\lim \left( \sum_{i=2}^n \operatorname{arccot} u_i \right) = \operatorname{arccot} u_1 = \frac{\pi}{4}$ .

Vậy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim \left( \sum_{i=2}^n \operatorname{arccot} u_i \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

**Bài 90.** Cho dãy số  $(x_n)$  ( $n \geq 1$ ) được xác định bởi  $x_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^k$ ,  $\forall n \geq 1$ . Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

**Lời giải**

Với  $n \geq 2$  ta có  $1 = \frac{n^n}{n^n} < x_n < \frac{1}{n^n} \left( \sum_{k=1}^n n^k \right) = \frac{n^{n+1} - n}{n^n(n-1)} = \frac{n^n - 1}{n^n} \cdot \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-1}$

Vì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$

**Bài 91.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng:  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}, \forall n$ .

b) Chứng minh rằng:  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}, \forall n$ . Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

a) Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được  $0 \leq u_n, \forall n$ . Ta CM  $u_n \leq \frac{1}{4}, \forall n$ . Với  $n=1$  thì  $u_1 = \frac{1}{4}$  đúng. Giả sử  $u_k \leq \frac{1}{4}, \forall k \geq 1$ , ta chứng minh  $u_{k+1} \leq \frac{1}{4}$ . Thật vậy, ta có  $u_k \leq \frac{1}{4} \Rightarrow u_k^2 \leq \frac{1}{4}u_k$  và

$$\frac{3}{4}u_k \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}. \text{ Do đó } u_{k+1} \leq \frac{1}{4}u_k + \frac{1}{2}u_k = \frac{3}{4}u_k \leq \frac{3}{16} < \frac{1}{4}.$$

Vậy  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}, \forall n$ .

b) Từ câu a) suy ra  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \forall n$

Do đó ta có  $0 < u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot u_1 \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot u_1 = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1}, \forall n$ .

Mà  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1} = 0$ , nên theo nguyên lí kẹp thì  $\lim u_n = 0$ .

**Bài 92.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

a) CMR:  $u_n > 0$  và  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}, \forall n$ .

b) Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

**Nhận xét:** Việc xác định CTTQ của dãy  $(u_n)$  rất khó khăn, nhưng từ hệ thức truy hồi ta thấy có thể đánh giá tỉ số  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  dễ dàng.

a) Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được  $u_n > 0, \forall n$ .

Từ hệ thức truy hồi ta có  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ .

b) Từ câu a) ta có  $0 < u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot u_1 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Mà  $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ . Nên theo nguyên lí kẹp ta có  $\lim u_n = 0$ .

**Bài 93.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$ . Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

**Nhận xét:** Việc xác định CTTQ của dãy  $(u_n)$  thật không đơn giản, nhưng ta thấy rằng  $u_n > 1$ , với mọi  $n$  (kiểm tra bằng quy nạp). Hơn nữa theo bất đẳng thức Cosi, ta có  $u_{n+1} = \sqrt{u_n} = \sqrt{1 \cdot u_n} \leq \frac{1+u_n}{2}$ .

Dấu “=” không xảy ra vì  $u_n > 1, \forall n$ , do đó  $u_{n+1} < \frac{1+u_n}{2}, \forall n$ .

$$\Rightarrow u_{n+1} - 1 < \frac{u_n - 1}{2}, \forall n (*)$$

Áp dụng (\*) liên tiếp nhiều lần ta có

$$0 < u_n - 1 < \frac{u_{n-1} - 1}{2} < \frac{u_{n-2} - 1}{2^2} < \dots < \frac{u_1 - 1}{2^{n-1}} = \frac{9}{2^{n-1}}, \forall n \geq 1,$$

$$\text{Hay } 1 < u_n < 1 + \frac{9}{2^{n-1}}, \forall n \geq 1.$$

Mà  $\lim \left(1 + \frac{9}{2^{n-1}}\right) = 1$  nên theo nguyên lí kẹp ta có  $\lim u_n = 1$ .

**Bài 94.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$  (với  $-1 < a < 0$ ).

a) Chứng minh rằng:  $0 < u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(u_n + 1), \forall n \geq 1$ .

b) Tính  $\lim u_n$ .

**Lời giải**

Nhận xét rằng  $-1 < u_n < 0$ , với mọi  $n$  (kiểm tra bằng chứng minh quy nạp). Từ đó suy ra  $0 < u_n + 1 < 1$  và  $\sqrt{u_n^2 + 1} > 1$ .

Suy ra  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1 < (u_n + 1) - 1 = u_n, \forall n \geq 1$  nên Dãy  $(u_n)$  là dãy giảm.

Do đó  $-1 < u_n \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_1 = a < 0, \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow u_n^2 \geq a^2 \Rightarrow \sqrt{u_n^2 + 1} \geq \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\text{Nên } 0 < u_{n+1} + 1 = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(u_n + 1), \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 < u_n + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(u_{n-1} + 1) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^2 (u_{n-2} + 1) \leq \dots \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^{n-1} (u_1 + 1), \forall n \geq 1.$$

$$\text{Hay } -1 < u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^{n-1} \cdot (a+1) - 1, \forall n \geq 1$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \lim \left[ (a+1) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^{n-1} - 1 \right] = -1.$$

Do đó theo nguyên lý kẹp ta được  $\lim u_n = -1$ .

**Bài 95.** Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_1 \in (1; 2)$  và  $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ . Chứng minh rằng  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  dần đến vô cùng và tìm giới hạn đó.

**Lời giải.** Giả sử  $x_n$  có giới hạn là  $a$  thì  $a = 1 + a - \frac{a^2}{2}$  từ đó suy ra  $a = \sqrt{2}$ . Ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh  $\lim x_n = \sqrt{2}$ .

Ta có

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \left| 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} - \sqrt{2} \right| = |x_n - 2| \left| \frac{\sqrt{2} + x_n - 1}{2} \right|.$$

Tiếp theo ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng  $1 < x_n < \frac{3}{2}$  với mọi  $n = 2, 3, \dots$ . Từ đó, do

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2 \text{ nên suy ra } \lim x_n = \sqrt{2}.$$

**Bài 96.** Xét dãy số với số hạng tổng quát như sau:

$$1. \quad u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$$

$$2. \quad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

$$3. \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh rằng các dãy số trên nếu có giới hạn hữu hạn.

**Bài giải**

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} - \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \right) \right]$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \right) = \left( \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n \text{ là dãy giảm.}$$

$$\text{mặt khác } \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \quad (1)$$

Trong (1) lần lượt thay  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$$

Cộng tổng về các bất đẳng thức trên ta có:

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} > -2$$

Như vậy  $(u_n)$  bị chặn bởi  $-2$ , theo nguyên lý giới hạn dãy số  $(u_n)$  tồn tại giới hạn.

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

Rõ ràng  $u_{n+1} > u_n$  nên  $(u_n)$  là dãy tăng.

Ta chứng minh rằng  $u_n < 2$ .

$$\text{Thật vậy ta có: } u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Chú ý rằng } 3! > 2 \cdot 3 > 2^2$$

$$4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^3$$

.

$$n! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n > 2^{n-1}$$

$$\text{Vậy } u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 2(*).$$

$(u_n)$  là dãy tăng và bị chặn trên nên  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Dễ dàng chứng minh được nhận xét sau đây:

Nếu  $r$  là số hữu tỷ dương thì  $r + 1 < 3^r$ .

xét dãy

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{1!}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2!}\right) + \left(1 + \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n!}\right), n \in \mathbb{N}.$$

ta thấy  $u_n$  là dãy tăng và

$$\left(1 + \frac{1}{1!}\right) < 3^{\frac{1}{1!}}$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{2!}\right) < 3^{\frac{1}{2!}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{3!}\right) < 3^{\frac{1}{3!}}$$

...

$$\left(1 + \frac{1}{n!}\right) < 3^{\frac{1}{n!}}$$

Ta thấy  $(u_n)$  là dãy tăng và  $u_n < 3^2$ .

Vậy  $(u_n)$  là dãy tăng và bị chặn bởi 9 nên  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 97.** Cho dãy số:  $(u_n)$  xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Tìm  $\lim u_n$

**Bài giải**

Ta nhận thấy

$\forall n \geq 2$  thì  $-1 < u_n < 0$ . từ đó suy ra nếu  $(u_n)$  có giới hạn là  $a$  thì  $-1 < a < 0$ .

$$\text{và } a \text{ thỏa } a = \frac{a^2}{2} - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \sqrt{3} (IL) \\ a = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Xét

$$\begin{aligned} \left| u_{n+1} - (1 - \sqrt{3}) \right| &= \left| \frac{u_n^2}{2} - 1 - (1 - \sqrt{3}) \right| = \left| \left( \frac{u_n^2}{2} - 1 \right) - \left( \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{1} - 1 \right) \right| \\ &= \left| \frac{u_n^2}{2} - \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{2} \right| = \left| \frac{u_n}{2} (1 - \sqrt{3}) \right| = |u_n + (1 - \sqrt{3})| \end{aligned}$$

Do  $-1 < u_n < 0$  nên

Do  $u_n < 0$  và  $1 - \sqrt{3} < 0$  nên

$$|u_n + (1 - \sqrt{3})| = |u_n| + |1 - \sqrt{3}| = |u_n| + \sqrt{3} - 1 < \sqrt{3}; \Rightarrow |u_{n+1} - (1 - \sqrt{3})| = \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - (1 - \sqrt{3})|$$

lặp lại bất đẳng thức (\*) đến  $n$  lần ta có:

$$\Rightarrow \left| u_{n+1} - (1 - \sqrt{3}) \right| = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \left| u_2 - (1 - \sqrt{3}) \right| < \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \quad \forall n = 1; 2 \dots \infty$$

như thế ta có:  $0 < \left| u_{n+1} - (1 - \sqrt{3}) \right| < \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \rightarrow 0$

theo nguyên lý kẹp ta có  $\lim u_n = 1 - \sqrt{3}$ .

**Bài 98.** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương  $n_0$  sao cho với mọi  $n > n_0$  thì  $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_n} < n - 2009$ .

Lời giải: Đặt  $b_n = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Khi đó ta có:

$$b_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} - 1} = n^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + 1}} > \frac{2n+1}{(n+1)^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} \right) > \frac{2n+1}{2(n+1)^2}$$

Lại có  $(2n+1)(n+2) - 2(n+1)^2 = n > 0$  nên  $b_n > \frac{1}{n+2}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Đặt  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Nếu  $n = 2^k - 2 > 1$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), áp dụng chứng minh trên ta được:

$$\begin{aligned} S_n &> \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^k} = \left( \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2} \right) + \left( \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) \\ &> 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{k-1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn  $n_0 = 2^{4019} - 2$ , khi đó với mọi  $n > n_0$ , để ý rằng  $1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$  nên ta có:

$$S_n > S_{n_0} > \frac{4019-1}{2} = 2009 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_n} < n - 2009.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 99.** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} a_0 = x, a_1 = y \\ a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

(1) Tìm tất cả số thực  $x$  và  $y$  sao cho tồn tại số nguyên dương  $n_0$  mà với mọi  $n > n_0$  thì  $a_n$  là hằng số.

(2) Tìm công thức tổng quát tính  $a_n$ .

Lời giải: (1) Ta có:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_n + a_{n-1}} = \frac{a_n^2 - 1}{a_n + a_{n-1}} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Do đó nếu tồn tại số nguyên dương  $n$  sao cho  $a_n = a_{n+1}$  thì  $a_n^2 = 1$  và  $a_n + a_{n-1} \neq 0$ .

Nếu  $n = 1$ , ta có  $|y| = 1$  và  $x \neq -y$ . ( I )

$$\text{Nếu } n > 1, \text{ ta có : } a_n - 1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} + 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} - 1 = \frac{(a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}{a_{n-1} + a_{n-2}} \quad ( \text{ II } )$$

$$\text{Và } a_n + 1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} + 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} + 1 = \frac{(a_{n-1} + 1)(a_{n-2} + 1)}{a_{n-1} + a_{n-2}} \quad ( \text{ III } )$$

$$\text{Từ ( II ) và ( III ) ta có : } a_n^2 - 1 = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}^2 - 1}{a_{n-1} + a_{n-2}} \quad ( \text{ IV } )$$

Vậy  $a_{n-1}^2 = 1$  hoặc  $a_{n-2}^2 = 1$ , cứ tiếp tục lui dần cho đến khi ta được  $a_0^2 = 1$  hoặc  $a_1^2 = 1$ , tức là ta có :

$$\begin{cases} |x| = 1 \\ |y| = 1 \\ x + y \neq 0 \end{cases} \quad ( * ). \text{ Thử lại nếu } x, y \text{ thỏa mãn điều kiện } ( * ) \text{ thì } a_n = c \text{ với mọi } n = 2, 3, \dots \text{ trong đó } c$$

nhận giá trị là  $-1$  hoặc  $1$ .

$$\text{Vậy các số } x, y \text{ cần tìm chính là } \begin{cases} |x| = 1 \\ |y| = 1 \\ x + y \neq 0 \end{cases}.$$

$$( 2 ) \text{ Từ ( II ) và ( III ) , ta có : } \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 1} \cdot \frac{a_{n-2} - 1}{a_{n-2} + 1} \text{ với mọi } n = 2, 3, \dots \text{ Đặt } b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \text{ thì ta}$$

được :

$$b_n = b_{n-1} \cdot b_{n-2}. \text{ Bằng phép quy nạp đơn giản, ta thu được : } b_n = b_0^{F_{n-2}} \cdot b_1^{F_{n-1}} \text{ với mọi } n = 2, 3, \dots$$

$$\text{Hay ta có } \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \left( \frac{y-1}{y+1} \right)^{F_{n-1}} \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{F_{n-2}} \Rightarrow a_n = \frac{(x+1)^{F_{n-2}} \cdot (y+1)^{F_{n-1}} + (x-1)^{F_{n-2}} \cdot (y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}} \cdot (y+1)^{F_{n-1}} - (x-1)^{F_{n-2}} \cdot (y-1)^{F_{n-1}}}.$$

Trong đó  $F_n$  là số hạng thứ  $n$  của dãy Fibonaci.

**Bài 100.** Cho dãy số  $(a_n)$  bị chặn và thỏa mãn:  $a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $a_n < \frac{1}{n}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Lời giải : Đặt  $b_n = a_n - \frac{1}{n}$ . Khi đó theo giả thiết ta có  $b_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Vì dãy  $(a_n)$  bị chặn nên tồn tại số thực  $M$  sao cho  $b_n < M \quad \forall n$ .

$$\text{Với } n > 100000, \text{ ta có } b_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1} < M \cdot \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{1}{k+1} < M \cdot \sum_{k=n}^{\left[ \frac{3n}{2} \right]} \frac{1}{k+1} + M \cdot \sum_{k=\left[ \frac{3n}{2} \right]+1}^{2n+2006} \frac{1}{k+1}$$

$$< M \cdot \frac{1}{2} + M \cdot \frac{\frac{n}{2} + 2006}{\frac{3n}{2} + 1} < \frac{6}{7} M.$$

Tiếp tục làm như vậy khi thay  $M$  bởi  $\frac{6}{7}M$ , ta sẽ thu được với  $n$  đủ lớn thì  $b_n < \left(\frac{6}{7}\right)^m M$  với mọi  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Lại có  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7}\right)^m = 0$  nên  $b_n \leq 0$  với  $n$  đủ lớn. Mà  $b_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{b_k}{k+1}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$  nên  $b_n < 0$

với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Vậy  $a_n < \frac{1}{n}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Đây cũng chính là điều phải chứng minh.

**Bài 101.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi  $\begin{cases} x_1 = x_2 = 0; x_3 = 9 \\ x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = 3x_{n+2} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Lời giải

Đặt  $a_n = \max\{x_n; x_{n+1}; x_{n+2}\}$  và  $b_n = \min\{x_n; x_{n+1}; x_{n+2}\}$ .

Giả sử tồn tại  $n$  sao cho  $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} \neq x_{n+1}, x_{n+2} \Rightarrow a_{n+1} = x_{n+3} \Rightarrow 3x_{n+3} > x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = 3x_{n+3}$  (vô lý)

Vậy  $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ .

Hoàn toàn tương tự ta có  $b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ . Vậy ta có dãy các đoạn đan lồng nhau :

$[b_1; a_1] \supset [b_2; a_2] \supset \dots \supset [b_n; a_n] \supset \dots$ . Đặt  $d_n = a_n - b_n$  thì theo trên  $(d_n)$  là dãy giảm.

Ta có  $\begin{cases} x_{n+3} - x_n \leq a_{n+3} - b_n \leq a_n - b_n = d_n \\ x_{n+3} - x_n \geq b_{n+3} - a_n \geq b_n - a_n = -d_n \end{cases} \Rightarrow |x_{n+3} - x_n| \leq d_n$

$$\Rightarrow |x_{n+4} - x_{n+3}| = \left| \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}}{3} - \frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{3} \right| = \left| \frac{x_{n+3} - x_n}{3} \right| \leq \frac{d_n}{3}.$$

Tương tự  $|x_{n+5} - x_{n+4}| \leq \frac{d_n}{3}$ . Do đó ta có

$$|x_{n+5} - x_{n+3}| \leq |x_{n+5} - x_{n+4}| + |x_{n+4} - x_{n+3}| \leq \frac{2}{3} d_n \Rightarrow d_{n+3} = a_{n+3} - b_{n+3} \leq \frac{2}{3} d_n.$$

Từ đó ta dễ dàng có được  $d_n^3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} d_1 d_2 d_3$ . Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} d_1 d_2 d_3 = 0$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ .

Vậy các đoạn thắt  $[b_i; a_i]$  có một điểm chung  $c$  duy nhất.

Ta có  $\begin{cases} b_n \leq x_n \leq a_n \\ b_n \leq c \leq a_n \end{cases} \Rightarrow |x_n - c| \leq a_n - b_n = d_n$ . Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

Dễ dàng quy nạp từ giả thiết rằng  $x_{n+2} = 9 - \frac{1}{3}x_n - \frac{2}{3}x_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ , chuyển qua giới hạn ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c = \frac{9}{2}$$

**Bài 102.** Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn điều kiện với mọi số nguyên dương  $m, n$  thì

$$|x_{m+n} - x_n - x_m| < \frac{1}{m+n}.$$

Chứng minh rằng  $(x_n)$  là một cấp số cộng.

Lời giải

Với mọi số nguyên dương  $k, n$ , theo giả thiết ta có :

$$\begin{aligned} |(x_{n+1} - x_n) - (x_{k+1} - x_k)| &= |(x_{n+k+1} - x_n - x_{k+1}) - (x_{n+k+1} - x_k - x_{n+1})| \leq |x_{n+k+1} - x_n - x_{k+1}| + |x_{n+k+1} - x_k - x_{n+1}| \\ &< \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k+1} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Cố định  $k$  và cho  $n \rightarrow +\infty$ , ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = x_{k+1} - x_k \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$

Vậy dãy  $(x_n)$  là một cấp số cộng với công sai là  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$ .

Đó cũng chính là điều phải chứng minh.

**Bài 103.** Dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi công thức  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} \quad \forall n \geq 1$ . Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và giới hạn đó là một số vô tỷ.

Lời giải

Vì  $\frac{1}{(k!)^2} > 0 \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$  nên  $u_n$  là dãy đơn điệu tăng.

Với mọi số nguyên dương  $k$  thì  $\frac{1}{(k!)^2} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , do đó ta có :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k!)^2} < 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Vậy  $(u_n)$  bị chặn trên bởi  $\frac{7}{4}$  và là dãy đơn điệu tăng nên tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ .

Xét dãy  $(v_n)$  được xác định như sau, với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $v_n = u_n + \frac{1}{(n!)^2(n+1)}$ .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(n+1)(n^2 + 2n - 1)}{((n+1)!)^2(n+1)(n+2)} < 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots. \text{ Vậy } (v_n) \text{ là dãy đơn điệu giảm, dễ thấy nó bị}$$

chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$ .

$$v_n = u_n + \frac{1}{(n!)^2(n+1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \Rightarrow a = b. \text{ Giả sử phản chứng rằng } a \text{ là một số hữu tỷ, tức là}$$

$a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$ . Theo các chứng minh trên, ta có với mọi  $n$  nguyên dương thì :

$$\begin{aligned} u_n < \frac{p}{q} < v_n &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} < \frac{p}{q} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} + \frac{1}{(n!)^2(n+1)} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2(n+1)}{(k!)^2} < \frac{p(n!)^2(n+1)}{q} < \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2(n+1)}{(k!)^2} + 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Với  $n$  đủ lớn thì  $\frac{p(n!)^2(n+1)}{q}, \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2(n+1)}{(k!)^2}$  là các số nguyên, do đó từ (\*) cho ta có một số nguyên nằm giữa hai số nguyên liên tiếp, đó là điều vô lý. Vậy điều giả sử là sai, tức là  $a$  là một số vô tỷ.

Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.

**Bài 104.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi 
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{x_n}{2} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad \text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $x_n < \frac{1}{n} \forall n > 5$  (\*)

Với  $n = 6, 7$ , dễ thấy (\*) đúng.

Giả sử (\*) đúng đến  $k+1 \leq n$ , ta sẽ chứng minh (\*) đúng đến  $k+2$ .

Thật vậy, ta có  $|x_{k+2}| = |x_{k+1}^2 - \frac{x_k}{2}| < x_{k+1}^2 + \left| \frac{x_k}{2} \right| < \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{2k} < \frac{1}{k+2} \forall k > 5$ .

Vậy (\*) đúng đến  $k+2$ , theo nguyên lý quy nạp thì nó đúng với mọi  $n > 5$ .

Mà  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Bài 105.** Cho dãy số dương  $(a_n)$  thỏa mãn các điều kiện :

1)  $a_{n+1} \leq a_n + a_n^2$

2) Tồn tại một số dương  $M$  sao cho  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)$ .

Lời giải

Đặt  $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , do  $a_k > 0 \forall k = 1, 2, 3, \dots$  nên  $(b_n)$  là dãy tăng thực sự. Lại theo giả thiết 2) thì  $(b_n)$  bị chặn trên bởi  $M$ , vậy tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

Đặt  $c_n = b_{2n} - b_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}$ , khi đó ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - a = 0$ .

Đặt  $a_t = \min_{1 \leq k \leq n} a_k$ , từ điều kiện 1) ta được  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1 + a_k \Rightarrow \frac{a_{2n}}{a_t} = \prod_{k=t}^{2n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k=t}^{2n-1} (1 + a_k)$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc  $1 + x < e^x \forall x > 0$ , ta thu được  $\frac{a_{2n}}{a_t} < e^{\sum_{k=t}^{2n-1} a_k} < e^{c_n} \Rightarrow a_{2n} < e^{c_n} \cdot a_t$

Lại có theo cách xác định  $a_t$  thì  $a_t \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{b_n}{n}$ , do đó theo chứng minh trên ta được

$$a_{2n} < \frac{c_n \cdot e^{c_n}}{n} \Rightarrow 0 < 2n \cdot a_{2n} < 2c_n e^{c_n}.$$

Lại có  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2c_n e^{c_n} = 0$  (do  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ) do đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot a_{2n} = 0$ .

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \cdot a_{2n+1} = 0$ .

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \cdot a_{2n+1} = 0$ .

**Bài 106.** Dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $1 < x_1 < 2$  và  $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2} x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:  $|x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 3$ . Thật vậy ta kiểm tra được

ngay bất đẳng thức đúng với  $n = 3$ . Giả sử bất đẳng thức đúng với  $n \geq 3$ , tức là  $|x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}$ . Khi

đó ta có

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{2}| &= \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}| |2 - \sqrt{2} - x_n| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}| (|\sqrt{2} - x_n| + |2 - 2\sqrt{2}|) \\ &< \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến  $n+1$ . Mặt khác do  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$  nên từ bất đẳng thức trên và nguyên lý kẹp ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Bài 107.** Cho dãy các hàm số  $\{P_n(x)\}$  xác định như

$$\text{sau } P_0(x) = 0, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n^2(x)}{2}, \forall n \geq 0; x \in \mathbb{R}.$$

Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ .

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:  $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}, \forall n \in \mathbb{N}$ .  
(1)

Thật vậy, với  $x \in [0, 1]$  suy ra  $x - 2\sqrt{x} \leq 0$  nên  $0 \leq \frac{x}{2} = P_1(x) \leq \sqrt{x}$ . Như vậy (1) đúng với  $n=1$ . Giả sử (1) đúng đến  $n$ . Xét hàm số  $f(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$  với  $t \in [0, 1]$ . Dễ thấy hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $[0, 1]$ . theo giả thiết quy nạp ta có  $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$  với mọi  $x \in [0, 1]$

(2)

nên  $P_{n+1}(x) = f(P_n(x)) \leq f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$  với mọi  $x \in [0, 1]$ . Mặt khác, từ (2) ta có  $x - P_n^2(x) \geq 0 \Rightarrow P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$ . Vậy  $0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ . Do đó (1) đúng đến  $n+1$  nên theo nguyên lý quy nạp ta có (1) đúng với mọi  $n$ .

Tiếp theo ta chứng minh  $\sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$  với  $x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$ .  
(3)

$$\text{Thật vậy ta có } \sqrt{x} - P_n(x) = \left[ \sqrt{x} - P_{n-1}(x) \right] \left[ 1 - \frac{\sqrt{x} + P_{n-1}(x)}{2} \right]$$

$$\leq \left[ \sqrt{x} - P_{n-1}(x) \right] \left[ 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right] \quad (\text{do } P_{n-1}(x) \geq 0)$$

$$\leq \dots \leq \left[ \sqrt{x} - P_0(x) \right] \left[ 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right]^n = \frac{2}{n} \frac{n\sqrt{x}}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right]^n$$

$$\leq \frac{2}{n} \left[ \frac{\frac{n\sqrt{x}}{2} + n \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{n+1} \right]^{n+1} = \frac{2}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n < \frac{2}{n+1}.$$

Từ đó ta thu được bất đẳng thức  $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) < \frac{2}{n+1}$  với mọi  $x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$ .

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$  nên theo nguyên lý kẹp ta được  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sqrt{x}$ , với mọi  $x \in [0, 1]$ .

**Bài 108.** Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1; n \in \{ab+1, ab+2, \dots\}$ . Kí hiệu  $r_n$  là số cặp số

$(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  sao cho  $n = au + bv$ . Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$ .

Lời giải

Xét phương trình  $au + bv = n$  (1). Gọi  $(u_0, v_0)$  là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử  $(u, v)$  là một nghiệm nguyên dương khác  $(u_0, v_0)$  của (1). Ta có  $au_0 + bv_0 = n, au + bv = n$  suy ra  $a(u - u_0) + b(v - v_0) = 0$  do đó tồn tại  $k$  nguyên dương sao cho  $u = u_0 + kb, v = v_0 - ka$ . Do  $v$  là số nguyên dương nên  $v_0 - ka \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{v_0 - 1}{a}$ . (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số  $k$  nguyên dương cộng với 1. Do đó  $r_n = \left[ \frac{v_0 - 1}{a} \right] + 1 = \left[ \frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} \right] + 1$ . Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau:

$$\frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} \leq r_n \leq \frac{n}{ab} - \frac{u_0}{b} - \frac{1}{a} + 1.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{ab} - \frac{u_0}{nb} - \frac{1}{na} \leq \frac{r_n}{n} \leq \frac{1}{ab} - \frac{u_0}{nb} - \frac{1}{na} + \frac{1}{n}.$$

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \frac{1}{ab}$ .

**Bài 109.** Tìm giới hạn của dãy số  $(x_n)$  biết  $x_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$

Lời giải 1.

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(1+x)\sqrt{\dots}}}$  ta chứng minh  $\frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq \sqrt{2}(x+1)$ . Từ đó

$$2^{-\frac{1}{2^n}}(1+x) \leq f(x) \leq 2^{\frac{1}{2^n}}(1+x).$$

Từ đó, thay  $x = 2$  được  $3 \cdot 2^{-\frac{1}{2^n}} < x_n < 3 \cdot 2^{\frac{1}{2^n}}$ . Từ đó, theo nguyên lý kẹp, suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

Lời giải 2

Với  $1 \leq m \leq n-1$ , đặt  $a_m = \sqrt{1+m\sqrt{1+(1+m)\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$  ta có

$$\begin{aligned} a_m^2 &= 1 + ma_{m+1} \Leftrightarrow a_m^2 - (m+1)^2 = ma_{m+1} - m^2 - 2m \\ &\Leftrightarrow a_m^2 - (m+1)^2 = m(a_{m+1} - (m+2)) \end{aligned}$$

Suy ra

$$|a_m - (m+1)| \leq \frac{m|a_{m+1} - a_{m+2}|}{|a_m + (m+1)|} \leq \frac{m}{m+2} |a_{m+1} - m+2|.$$

Từ đó  $|a_2 - 3| \leq \frac{n-1}{n+1} |a_{n-1} - n| < \frac{n-1}{n+1} |\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}} - n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Lời giải 3

Đề ý rằng

$3 = \sqrt{1+2 \cdot 4} = \sqrt{1+2 \cdot \sqrt{16}} = \sqrt{1+2 \cdot \sqrt{1+3 \cdot 25}} = \sqrt{1+2 \cdot \sqrt{1+3 \cdot \sqrt{1+4 \cdot 36}}}$  bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} = 3$$

Suy ra  $x_n \leq 3$  (1)

**Nhận xét.** Cho  $\alpha > 1$ . Khi đó  $\sqrt{1+\alpha x} \leq \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{1+x} \quad \forall x \geq 0$ .

Áp dụng nhận xét trên với  $x = n, \alpha = n+2$  được

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} \leq \sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1}.$$

Từ đó

$$\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}} \leq \sqrt{1+\sqrt{n+2} \cdot (n-1) \cdot \sqrt{1+n}} \leq \sqrt[4]{n+2} \cdot \sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}.$$

Do đó, bằng quy nạp, thu được  $3 \leq (n+2)^{2^{-n}} x_n$  (2)

Từ (1), (2) và nguyên lý kẹp, suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

**Bài 110.** Cho dãy số thực  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Ta xác định dãy  $\{y_n\}$  bởi công thức  $y_n = \sum_{i=1}^n x_i 2^i, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm công thức tổng quát của dãy  $\{y_n\}$ .

### Lời giải

Ta có

$$x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}} = (\sqrt{1+\sqrt{x_n}} - 1)^2$$

Từ đó tính được

$$x_1 = (\sqrt{2} - 1)^2, x_2 = (\sqrt{\sqrt{2}} - 1)^2, \dots, x_n = (2^{1/2^n} - 1)^2$$

Ta viết

$$x_1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2},$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2} - 2 \cdot 2^{1/4}$$

$$x_3 = 1 + 2^{1/4} - 2 \cdot 2^{1/8}$$

...

$$x_n = 1 + 2^{1/2^{n-1}} - 2 \cdot 2^{1/2^n}$$

Nhân đẳng thức đầu với 2, đẳng thức thứ hai với  $2^2$ , đẳng thức thứ ba với  $2^3$  ... đẳng thức thứ n với  $2^n$  rồi cộng vế theo vế, chú ý đến những sự giản ước, ta được.

$$y_n = 2 + 4 + \dots + 2^n + 4 - 2^{n+1} \cdot 2^{1/2^n} = 2^{n+1} (1 - 2^{1/2^n}) + 2.$$

**Bài 111.** Xét phương trình:  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{k^2x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$  trong đó  $n$  nguyên dương

1/. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$ , phương trình trên có duy nhất nghiệm lớn hơn 1, kí hiệu nghiệm đó là  $x_n$

2/. Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$  có giới hạn bằng 4 khi  $n \rightarrow +\infty$

**Lời giải.**

Kí hiệu  $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{k^2x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$

1/. Dễ thấy, với mỗi  $n \in N^*$ , hàm số  $f_n(x)$  liên tục và nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Hơn nữa

$f_n(x) \rightarrow +\infty$  khi  $x \rightarrow 1^+$  và  $f_n(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$  khi  $x \rightarrow +\infty$ . Từ đó suy ra với mỗi  $n \in N^*$  phương

trình  $f_n(x)$  có nghiệm duy nhất  $x_n > 1$

2/. Với mỗi  $n \in N^*$ , ta có  $f_n(4) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2k)^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n)^2-1}$

$$= \frac{1}{2} \left( -1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2(2n+1)} < 0 = f_n(x_n)$$

Từ đó, do hàm  $f_n(x)$  nghịch biến trên  $(1; +\infty)$  suy ra  $x_n < 4$  với mọi  $n \in N^*$  (1)

Mặt khác, với mỗi  $n \in N^*$ , hàm  $f_n(x)$  khả vi trên  $[x_n; 4]$  nên theo định lý Lagrange, với mỗi  $n \in N^*$  tồn tại  $t(x_n; 4)$  sao cho :

$$\frac{f_n(4) - f_n(x_n)}{4 - x_n} = f'_n(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + \frac{-4}{(4t-1)^2} + \dots + \frac{-n^2}{(n^2t-1)^2} < -\frac{1}{9} \text{ với mọi } n \in N^*$$

$$\text{Suy ra } \frac{-1}{2(2n+1)(4-x_n)} < -\frac{1}{9} \text{ với mọi } n \in N^* \Rightarrow x_n > 4 - \frac{9}{2(2n+1)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } 4 - \frac{9}{2(2n+1)} < x_n < 4 \text{ với mọi } n \in N^*$$

Từ đó, theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta có điều phải chứng minh.

**Bài 112.** Cho dãy số  $(u_n) (n=0, 1, 2, \dots)$  được xác định như sau:  $u_0 = a$  và  $u_{n+1} = \sin^2(u_n + 11) - 2007$  với mọi số tự nhiên  $n$ , trong đó  $a$  là số thực cho trước. Chứng minh rằng:

a/. Phương trình  $\sin^2(x+11) - x = 2007$  có nghiệm duy nhất. Kí hiệu nghiệm đó là  $b$ .

b/.  $\lim u_n = b$

**Lời giải.**

a/. Từ giả thiết ta thấy ngay  $u_n \geq -2007, \forall n \in N^*$  Xét hàm số  $f(x) := \sin^2(x+11) - 2007, x \in R$

Ta thấy:  $f'(x) = 2\sin(x+11)\cos(x+11) = \sin 2(x+11)$  và  $u_{n+1} = f(u_n)$  hàm số  $g(x) := f(x) - x$

có  $g'(x) = \sin 2(x+11) - 10 \leq 0$   $g(-2007) = \sin^2(-2006) > 0$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

Vậy hàm số  $g(x)$  nghịch biến và có nghiệm duy nhất trong  $[-2007; +\infty)$  gọi nghiệm đó là  $b$ , thì phương trình  $\sin^2(x+11) - x = 2007$  có nghiệm duy nhất là  $b$ .

b/. Kí hiệu  $\alpha = \max_{[-2007; -2006]} |g'(t)|$ . Khi đó  $\alpha \in [0; 1]$  Ta thấy  $-2007 \leq u_n \leq -2006$  và phương trình  $|\sin 2(x+11)| = 1$  vô nghiệm trên  $[-2007; -2006]$  nên  $0 < \alpha < 1$ .

Theo định lý Lagrange, ứng với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , tồn tại  $c_n \in (-2007; -2006)$  sao cho

$$|u_{n+1} - b| = |g(u_n) - g(b)| = |g'(c_n)| |u_n - b| \leq \alpha |u_n - b|$$

Từ đây theo phương pháp quy nạp ta được  $|u_{n+1} - b| \leq \alpha^n |u_1 - b|$

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - b| = 0$  tức là  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$

**Bài 113.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  cho trước thì phương trình  $x^{2n+1} = x+1$  có đúng một nghiệm thực. Gọi nghiệm đó là  $x_n$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

**Lời giải.**

Nếu  $x < -1$  thì  $x^{2n+1} < x < x+1$ . Nếu  $-1 \leq x \leq 0$  thì  $x^{2n+1} - x = (-x)(1 - x^{2n}) < 1$  suy ra  $x^{2n+1} < x+1$ . Nếu  $0 < x \leq 1$  thì  $x^{2n+1} \leq x < x+1$ . Vậy nếu  $x$  là nghiệm của phương trình  $x^{2n+1} = x+1$  thì ta phải có  $x > 1$ . Đặt  $f_n(x) = x^{2n+1} - x - 1$ . Ta có  $f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$  trên  $[1, +\infty)$  suy ra hàm  $f$  tăng trên nửa khoảng này. Vì  $f(1) = -1 < 0$  và  $f(2) = 2^{2n+1} - 3 > 0$  nên phương trình này có nghiệm  $x_n$  thuộc  $(1, 2)$ . Theo lý luận trên, nghiệm này là duy nhất.

Xét  $f_{n+1} = x^{2n+3} - x - 1$ . Ta có  $f_{n+1}(1) = -1 < 0$  và  $f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} - x_n - 1 = x_n^{2n+3} - x_n^{2n+1} > 0$ . Từ đó ta suy ra  $1 < x_{n+1} < x_n$ . Dãy  $\{x_n\}$  giảm và bị chặn dưới bởi 1, suy ra dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn  $a$ , hơn nữa  $a \geq 1$ . Ta chứng minh  $a = 1$ . Thật vậy, giả sử  $a > 1$ . Khi đó  $x_n^{3a}$  với mọi  $n$  và ta tìm được  $n$  đủ lớn sao cho:  $x_n^{2n+1} \geq a^{2n+1} > 3$ . Trong khi đó ta có  $x_n + 1 < x_1 + 1 < 3$ . Mâu thuẫn vì  $f_n(x_n) = 0$ .

**Bài 114.** Cho phương trình  $x + 2x^2 + \dots + nx^n = -\frac{3}{4}$  với  $n$  nguyên dương.

a/. Chứng minh rằng với mọi  $n$  nguyên dương, trên khoảng  $(0; +\infty)$ , phương trình trên có nghiệm duy nhất, kí hiệu là  $x_n$ .

b/. Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

a/. Xét hàm số  $f_n(x) = x + 2x^2 + \dots + nx^n - \frac{3}{4}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có

$$f'_n(x) = 1 + 2^2x + \dots + n^2x^{n-1} \text{ và } f'_n(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \text{ nên hàm số } f_n(x) \text{ tăng trên } (0; +\infty)$$

Mà  $f_n(0) = -\frac{3}{4} < 0$ ,  $f_n(1) > 0$  nên phương trình  $f_n(x) = 0$  có duy nhất trong khoảng  $(0; +\infty)$

b/. Ta có

$$3f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \dots + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}$$

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$$

Trừ vế theo vế ta được:

$$2f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = -\frac{2n+3}{3 \cdot 3^n} < 0$$

Do đó:  $x_n > \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Áp dụng định lý Lagrange, tồn tại  $y_n \in \left(\frac{1}{3}; x_n\right)$  sao cho:

$$\frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} = \left| f_n(x_n) - f_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| x_n - \frac{1}{3} \right| |f'_n(y_n)| > \left| x_n - \frac{1}{3} \right| \text{ vì } f'_n(y_n) > 1 \text{ với } y_n > 0.$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$$

**Bài 115.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  hãy chứng minh các đẳng thức sau:

a/.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$

b/.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$

c/.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (3)$

**Lời giải.**

Ba bài tập trên là các bài toán rất cơ bản dễ dàng giải quyết theo phương pháp quy nạp. Ta thực hiện lời giải cho ý b/.

**Bước 1:** Khi  $n = 1$  thì  $(2) \Leftrightarrow 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$

Vậy (2) đúng với  $n = 1$

**Bước 2 :** Giả sử đẳng thức (2) đúng với  $n = k (k \geq 1)$  tức là

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (\text{giả thiết quy nạp})$$

Ta phải chứng minh (2) đúng với  $n = k + 1$  tức là phải chứng minh:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (*)$$

$$\text{Thật vậy. Vế trái của } (*) \text{ bằng } [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2] + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \text{ suy ra } (*) \text{ đúng}$$

Theo nguyên tắc quy nạp suy ra đẳng thức (2) đúng  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

**Bài 116.** Rút gọn các biểu thức

a/.  $A = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$

b/.  $B = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$

**Lời giải.**

$$a) \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}[k+k^2]$$

$$\text{Khi } k=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}[1+1^2]$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}[2+2^2]$$

$$\text{Khi } k=3 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}[3+3^2]$$

... ..

$$\text{Khi } k=n \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}[n+n^2]$$

Cộng theo vế  $n$  đẳng thức trên ta được

$$A = \frac{1}{2}[1+2+3+\dots+n] + \frac{1}{2}[1^2+2^2+3^2+\dots+n^2]$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Lời giải**

$$a) \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } k(k+1) = k+k^2.$$

$$\text{Khi } k=1 \Rightarrow 1.2 = 1+1^2.$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow 2.3 = 2+2^2.$$

$$\text{Khi } k=3 \Rightarrow 3.4 = 3+3^2.$$

...

$$\text{Khi } k=n \Rightarrow n(n+1) = n+n^2.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được :

$$S_2 = [1+2+3+\dots+n] + [1^2+2^2+3^2+\dots+n^2].$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$b) \forall k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } k(k+1)(k+2) = k^3+3k^2+2k.$$

$$\text{Khi } k=1 \Rightarrow 1.2.3 = 1^3+3.1^2+2.1.$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow 2.3.4 = 2^3+3.2^2+2.2.$$

$$\text{Khi } k=3 \Rightarrow 3.4.5 = 3^3+3.3^2+2.3.$$

...

$$\text{Khi } k=n \Rightarrow n(n+1)(n+2) = n^3+3.n^2+2.n.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được :

$$S_3 = [1^3+2^3+\dots+n^3] + 3[1^2+2^2+\dots+n^2] + 2[1+2+\dots+n].$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\text{Vậy } S_2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Từ đó dễ dàng dự đoán được công thức tính tổng  $S_4$  và  $S_k$

$$\text{c) } S_4 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

$$\text{d) } S_k = \frac{1}{k+1}n(n+1)\dots(n+k).$$

Tổng  $S_4$  và  $S_k$  được chứng minh theo phương pháp quy nạp.

Trong quá trình giải quyết các bài toán trên ta đã khai thác khá sâu các đẳng thức (1), (2) và (3) đã nêu trong bài 1 nhưng có học sinh lại đặt ra câu hỏi nếu không biết đến các đẳng thức (1), (2) và (3) thì bài toán được giải quyết như thế nào? Vấn đề này có thể giải quyết như sau:

$$\text{Đặt } S_1 = 1 + 2 + \dots + n$$

$$\Rightarrow 2S_1 = 1.2 + 2.2 + 3.2 + \dots + n.2.$$

$$\text{Và } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1).$$

Trừ hai đẳng thức trên theo vế suy ra

$$S_2 - 2S_1 = 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1)n.$$

$$\Rightarrow S_2 - 2S_1 = S_2 - n(n+1) \Rightarrow S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tương tự như vậy

$$S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1).$$

$$\Rightarrow 3S_2 = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + n(n+1).3.$$

$$\text{Và } S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2).$$

Trừ hai đẳng thức trên theo vế suy ra

$$S_3 - 3S_2 = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-1)n(n+1).$$

$$\Rightarrow S_3 - 3S_2 = S_3 - n(n+1)(n+2) \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2).$$

$$\text{Vậy } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Theo cách đó ta sẽ tìm được:

$$S_k = 1.2\dots k + 2.3\dots(k+1) + \dots + n(n+1)\dots(n+k-1).$$

$$= \frac{1}{k}n(n+1)\dots(n+k).$$

Đến đây ta sẽ sử dụng các tổng  $S_1$ ,  $S_2$  và  $S_3$  để xây dựng các đẳng thức (2) và (3)

$$\text{Từ } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + n + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (đây là đẳng thức (2) đã nêu).}$$

$$\text{Từ } S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\text{Ta có } (k-1)k(k+1) = k^3 - k.$$

$$\text{Khi } k = 2 \Rightarrow 1.2.3 = 2^3 - 2.$$

$$\text{Khi } k = 3 \Rightarrow 2.3.4 = 3^3 - 3.$$

...

$$\text{Khi } k = n+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (n+1)^3 - (n+1).$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được :

$$S_3 = 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - [2 + 3 + \dots + (n+1)].$$

$$\Rightarrow S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - [1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)].$$

$$\Rightarrow S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$$\text{Mà } S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ suy ra}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2.$$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ (đây là đẳng thức (3) đã nêu).}$$

**Bài 117.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số cho bởi công thức truy hồi dưới đây :

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1; n \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + (3n+2)u_n}; n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + n^2 + 1}; n \geq 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^3; n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$$

### Lời giải

a) Theo đề bài suy ra:

$$u_1 = 2.$$

$$u_2 = u_1 + 2.1 + 1.$$

$$u_3 = u_2 + 2.2 + 1.$$

$$u_4 = u_3 + 2.3 + 1.$$

...

$$u_n = u_{n-1} + 2.(n-1) + 1.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được

$$u_n = 2 + 2(1 + 2 + \dots + (n-1)) + n - 1.$$

$$\text{Mà } 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$\Rightarrow u_n = n + 1 + (n-1)n = n^2 + 1.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = n^2 + 1$ .

b) Từ công thức truy hồi suy ra  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 3n + 2; n \geq 1$ .

Từ đó ta có :

$$\frac{1}{u_1} = 1.$$

$$\frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_1} + 3.1 + 2.$$

$$\frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_2} + 3.2 + 2.$$

$$\frac{1}{u_4} = \frac{1}{u_3} + 3.3 + 2.$$

...

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + 3(n-1) + 2.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được :

$$\frac{1}{u_n} = 1 + 3[1 + 2 + \dots + (n-1)] + 2(n-1).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1 + 3 \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) = \frac{3n^2 + n - 2}{2}.$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{3n^2 + n - 2}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{2}{3n^2 + n - 2}$ .

c) Từ công thức truy hồi suy ra  $u_{n+1}^2 = u_n^2 + n^2 + 1; n \geq 1$ .

Từ đó ta có

$$u_1^2 = 1.$$

$$u_2^2 = u_1^2 + 1^2 + 1.$$

$$u_3^2 = u_2^2 + 2^2 + 1.$$

$$u_4^2 = u_3^2 + 3^2 + 1.$$

...

$$u_n^2 = u_{n-1}^2 + (n-1)^2 + 1.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được :

$$u_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n.$$

$$\text{Mà } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

$$u_n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n = \frac{1}{6}n(2n^2 - 3n + 7).$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{6}\sqrt{6n(2n^2 - 3n + 7)}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{1}{6}\sqrt{6n(2n^2 - 3n + 7)}.$

d) Theo đề bài suy ra :

$$u_1 = 3.$$

$$u_2 = u_1 + 2.1^3.$$

$$u_3 = u_2 + 2.2^3.$$

$$u_4 = u_3 + 2.3^3.$$

...

$$u_n = u_{n-1} + 2.(n-1)^3.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được :

$$u_n = 3 + 2[1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3].$$

$$\text{Mà } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2.$$

$$\Rightarrow u_n = 3 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = 3 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$

### Lời giải

a)  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  ta có  $k(k+1) = k + k^2.$

Khi  $k = 1 \Rightarrow 1.2 = 1 + 1^2.$

Khi  $k = 2 \Rightarrow 2.3 = 2 + 2^2.$

Khi  $k = 3 \Rightarrow 3.4 = 3 + 3^2.$

... ..

Khi  $k = n \Rightarrow n(n+1) = n + n^2$ .

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được.

$$S_2 = [1 + 2 + 3 + \dots + n] + [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2].$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

b)  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  ta có  $k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$ .

Khi  $k = 1 \Rightarrow 1.2.3 = 1^3 + 3.1^2 + 2.1$ .

Khi  $k = 2 \Rightarrow 2.3.4 = 2^3 + 3.2^2 + 2.2$ .

Khi  $k = 3 \Rightarrow 3.4.5 = 3^3 + 3.3^2 + 2.3$ .

... ..

Khi  $k = n \Rightarrow n(n+1)(n+2) = n^3 + 3.n^2 + 2.n$ .

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được.

$$S_3 = [1^3 + 2^3 + \dots + n^3] + 3[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + 2[1 + 2 + \dots + n].$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\text{Vậy } S_2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Từ đó dễ dàng dự đoán được công thức tính tổng  $S_4$  và  $S_k$ .

$$\text{c) } S_4 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

$$\text{d) } S_k = \frac{1}{k+1}n(n+1)\dots(n+k).$$

Tổng  $S_4$  và  $S_k$  được chứng minh theo phương pháp quy nạp.

Trong quá trình giải quyết các bài toán trên ta đã khai thác khá sâu các đẳng thức (1), (2) và (3) đã nêu trong bài 1 nhưng có học sinh lại đặt ra Câu hỏi nếu không biết đến các đẳng thức (1), (2) và (3) thì bài toán được giải quyết như thế nào? Vấn đề này có thể giải quyết như sau:

Đặt  $S_1 = 1 + 2 + \dots + n$ .

$$\Rightarrow 2S_1 = 1.2 + 2.2 + 3.2 + \dots + n.2.$$

$$\text{Và } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1).$$

Trừ hai đẳng thức trên theo vế suy ra.

$$S_2 - 2S_1 = 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1)n.$$

$$\Rightarrow S_2 - 2S_1 = S_2 - n(n+1) \Rightarrow S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tương tự như vậy.

$$S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1).$$

$$\Rightarrow 3S_2 = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + n(n+1).3.$$

$$\text{Và } S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2).$$

Trừ hai đẳng thức trên theo về suy ra.

$$S_3 - 2S_2 = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-1)n(n+1).$$

$$\Rightarrow S_3 - 2S_2 = S_3 - n(n+1)(n+2) \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}n(n+1)(n+2).$$

$$\text{Vậy } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Theo cách đó ta sẽ tìm được.

$$S_k = 1.2 \dots k + 2.3 \dots (k+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1).$$

$$= \frac{1}{k}n(n+1) \dots (n+k).$$

Đến đây ta sẽ sử dụng các tổng  $S_1$ ,  $S_2$  và  $S_3$  để xây dựng các đẳng thức (2) và (3).

$$\text{Từ } S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow 1(1+1) + 2(2+1) + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + n + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (đây là đẳng thức (2) đã nêu).}$$

$$\text{Từ } S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\text{Ta có } (k-1)k(k+1) = k^3 - k.$$

$$\text{Khi } k=2 \Rightarrow 1.2.3 = 2^3 - 2.$$

$$\text{Khi } k=3 \Rightarrow 2.3.4 = 3^3 - 3.$$

... ..

$$\text{Khi } k=n+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (n+1)^3 - (n+1).$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo về ta được.

$$S_3 = 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - [2 + 3 + \dots + (n+1)].$$

$$\Rightarrow S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - [1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)].$$

$$\Rightarrow S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$$\text{Mà } S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ suy ra.}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3 = \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2.$$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ (đây là đẳng thức (3) đã nêu).}$$

**Bài 118.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số cho bởi công thức truy hồi dưới đây

a)  $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1; n \geq 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + (3n+2)u_n}; n \geq 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + n^2 + 1}; n \geq 1 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^3; n \geq 1 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$

### Lời giải

a) Theo đề bài suy ra ;

$$u_1 = 2.$$

$$u_2 = u_1 + 2.1 + 1.$$

$$u_3 = u_2 + 2.2 + 1.$$

$$u_4 = u_3 + 2.3 + 1.$$

... ..

$$u_n = u_{n-1} + 2.(n-1) + 1.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được.

$$u_n = 2 + 2(1 + 2 + \dots + (n-1)) + n - 1.$$

$$\text{Mà } 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$\Rightarrow u_n = n + 1 + (n-1)n = n^2 + 1.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = n^2 + 1$ .

b) Từ công thức truy hồi suy ra  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 3n + 2; n \geq 1$ .

Từ đó ta có.

$$\frac{1}{u_1} = 1.$$

$$\frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_1} + 3.1 + 2.$$

$$\frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_2} + 3.2 + 2.$$

$$\frac{1}{u_4} = \frac{1}{u_3} + 3.3 + 2.$$

... ..

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + 3(n-1) + 2.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được.

$$\frac{1}{u_n} = 1 + 3[1 + 2 + \dots + (n-1)] + 2(n-1).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1 + 3 \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) = \frac{3n^2 + n - 2}{2}.$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{3n^2 + n - 2}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{2}{3n^2 + n - 2}$ .

c) Từ công thức truy hồi suy ra  $u_{n+1}^2 = u_n^2 + n^2 + 1; n \geq 1$ .

Từ đó ta có.

$$u_1^2 = 1.$$

$$u_2^2 = u_1^2 + 1^2 + 1.$$

$$u_3^2 = u_2^2 + 2^2 + 1.$$

$$u_4^2 = u_3^2 + 3^2 + 1.$$

... ..

$$u_n^2 = u_{n-1}^2 + (n-1)^2 + 1.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được.

$$u_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n.$$

$$\text{Mà } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

$$u_n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n = \frac{1}{6}n(2n^2 - 3n + 7).$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{6}\sqrt{6n(2n^2 - 3n + 7)}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{1}{6}\sqrt{6n(2n^2 - 3n + 7)}$ .

d) Theo đề bài suy ra ;.

$$u_1 = 3.$$

$$u_2 = u_1 + 2.1^3.$$

$$u_3 = u_2 + 2.2^3.$$

$$u_4 = u_3 + 2.3^3.$$

... ..

$$u_n = u_{n-1} + 2.(n-1)^3.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được.

Các bài toán dãy số ôn học sinh giỏi

$$u_n = 3 + 2 \left[ 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 \right].$$

$$\text{Mà } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \left( \frac{(n-1)n}{2} \right)^2.$$

$$\Rightarrow u_n = 3 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là } u_n = 3 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

e. Từ công thức truy hồi suy ra

$$u_1 = 1.$$

$$u_2 = 2.$$

$$u_3 = 2u_2 - u_1 + 1.$$

$$u_4 = 2u_3 - u_2 + 1.$$

$$\dots \dots$$

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 1.$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được

$$u_1 + u_n = u_{n-1} + 2 + n - 1 \Rightarrow u_n = u_{n-1} + n \quad (*)$$

Từ đề bài và (\*) ta lại suy ra

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + 1$$

$$u_3 = u_2 + 2$$

$$u_4 = u_3 + 3$$

$$\dots \dots$$

$$u_n = u_{n-1} + n - 1$$

Cộng  $n$  đẳng thức trên theo vế ta được

$$u_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là } u_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

**Bài 119.** Cho dãy số  $(u_n)$  có : 
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{12}{u_n}; n \geq 1 \end{cases}$$
 với  $a \neq 0$  Tìm  $a$  để  $(u_n)$  là cấp số nhân.

**Lời giải**

$$\text{Theo đề bài suy ra } u_1 = a; u_2 = \frac{12}{a}; u_3 = a.$$

$$\text{Dãy số } (u_n) \text{ là cấp số nhân} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \Rightarrow \frac{12}{a^2} = \frac{a^2}{12} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{12}.$$

Lưu ý là phải thử lại

$$+) \text{ với } a = \sqrt{12} \text{ thì theo đề bài suy ra } u_1 = \sqrt{12}, u_2 = \sqrt{12}, u_3 = \sqrt{12}, \dots, u_n = \sqrt{12}$$

nên  $(u_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 1$ .

+) với  $a = -\sqrt{12}$  thì theo đề bài suy ra  $u_1 = -\sqrt{12}, u_2 = -\sqrt{12}, u_3 = -\sqrt{12}, \dots, u_n = -\sqrt{12}$  nên  $(u_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = 1$ .

Vậy dãy số  $(u_n)$  là cấp số nhân khi  $a = \pm\sqrt{12}$ .

**Bài 120.** Cho dãy số  $(u_n)$  có số hạng tổng quát  $u_n = \frac{n}{3^n}$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Hãy rút gọn  $S_n$  theo  $n$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } S_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} \Rightarrow 3S_n = 1 + \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}}.$$

Trừ theo về hai đẳng thức trên ta được

$$3S_n - S_n = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n}$$

Theo công thức tổng các số hạng của cấp số nhân suy ra

$$2S_n = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2} \left[1 - 3^{-n}\right] - \frac{n}{3^n} \Rightarrow S_n = \frac{4}{3} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{4}{3} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

**Bài 121.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + (2n+3)u_n}; n \geq 1 \end{cases}$ .

**Lời giải**

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + (2n+3)u_n}{u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 2n+3; n \geq 1$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{u_1} = 1$$

$$\frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_1} + 2 \cdot 1 + 3$$

$$\frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_2} + 2 \cdot 2 + 3$$

$$\frac{1}{u_4} = \frac{1}{u_3} + 2 \cdot 3 + 3$$

$$\dots \dots$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + 2 \cdot (n-1) + 3$$

Cộng theo về  $n$  đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{u_n} = 1 + 2[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] + 3(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1 + (n-1)n + 3(n-1) = n^2 + 2n - 2 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^2 + 2n - 2}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{1}{n^2 + 2n - 2}$ .

**Bài 122.** Tìm số hạng tổng quát của các dãy số  $(u_n)$  cho bởi 
$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + (3n+5)u_n}; n \geq 1 \end{cases}$$

**Lời giải**

Theo đề bài suy ra  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + (3n+5)u_n}{2u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{2u_n} + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}; n \geq 1$ .

Đặt  $v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{-1} = -1$  và  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}; n \geq 1$ .

Xét  $g(n) = an + b$  sao cho  $v_{n+1} + g(n+1) = \frac{1}{2}[v_n + g(n)]$

$$\Rightarrow v_{n+1} + a(n+1) + b = \frac{1}{2}[v_n + an + b]$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}an - a - \frac{1}{2}b$$

Mà  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$  nên ta phải có 
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a = \frac{3}{2} \\ -a - \frac{1}{2}b = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(n) = -3n + 1 \text{ và } v_{n+1} + g(n+1) = \frac{1}{2}[v_n + g(n)]$$

$$\text{Đặt } x_n = v_n + g(n) \Rightarrow x_1 = v_1 + g(1) = -3 \text{ và } x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n.$$

Do đó  $(x_n)$  là cấp số nhân có công bội  $q = \frac{1}{2}$  nên  $x_n = x_1 \cdot q^{n-1} = -3 \cdot 2^{1-n}$

$$\Rightarrow v_n = x_n - g(n) = -3 \cdot 2^{1-n} + 3n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{-3 \cdot 2^{1-n} + 3n - 1}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là  $u_n = \frac{1}{-3 \cdot 2^{1-n} + 3n - 1}$ .

**Bài 123.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}, n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Chứng minh rằng dãy số  $(u_n)$  giảm và bị chặn.

2) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$ .

**Lời giải**

$$1) \text{ Ta có } u_1 = 2, u_2 = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow u_2 < u_1$$

Giả sử  $u_k > 1, k \geq 2$  (giả thiết quy nạp)

Ta sẽ chứng minh  $u_{k+1} > 1 (*)$

$$\text{Theo công thức truy hồi, } (*) \Leftrightarrow \frac{u_k^2}{2u_k - 1} > 1 \Leftrightarrow u_k^2 > 2u_k - 1 \text{ (vì } 2u_k - 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow u_k^2 - 2u_k + 1 > 0 \Leftrightarrow (u_k - 1)^2 > 0 \text{ đúng (vì } u_k > 1)$$

Vậy  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$  suy ra  $(u_n)$  bị chặn dưới

$$+) \text{ Xét hiệu } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0 \text{ (vì } u_n > 1)$$

$\Rightarrow (u_n)$  giảm

$\Rightarrow 2 = u_1 > u_2 > u_3 > \dots > \dots \Rightarrow (u_n)$  bị chặn trên

Vậy dãy số  $(u_n)$  giảm và bị chặn.

$$2) \text{ Từ } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2}{u_n} - \frac{1}{u_n^2} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = -\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{u_n} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = -\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)^2$$

$$\text{Đặt } v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \text{ và } v_{n+1} = -v_n^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } v_1 = -2^{-1}, v_2 = -2^{-2}, v_3 = -2^{-4}, v_4 = -2^{-8}$$

Gả sử  $v_n = -2^{-2^{n-1}}, n \geq 4$  (giả thiết quy nạp)

$$\Rightarrow v_{n+1} = -\left(2^{-2^{n-1}}\right)^2 = -2^{-2^n}. \text{ Do đó } v_n = -2^{-2^{n-1}}, \forall n$$

$$\text{Mà } v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 + v_n} = \frac{1}{1 - 2^{-2^{n-1}}} = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}.$$

$$\text{Vậy số hạng tổng quát của dãy số } (u_n) \text{ là } u_n = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}.$$

**Bài 124.** Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi:  $x_1 = \frac{2}{3}$  và  $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Hãy tính tổng 2001 số hạng đầu tiên của dãy số

**Lời giải**

$$\text{Cách 1. Theo đề bài } \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{2}{15}, x_3 = \frac{2}{35}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{1.3}, x_2 = \frac{2}{3.5}, x_3 = \frac{2}{5.7}$$

$$\text{Theo quy nạp ta dễ dàng chứng minh được } x_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{2001} &= \frac{2}{1.2} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{4001.4003} \\ &= \frac{3-1}{1.3} + \frac{5-3}{3.5} + \dots + \frac{4003-4001}{4001.4003} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4001} - \frac{1}{4003} \\ &= 1 - \frac{1}{4003} = \frac{4002}{4003} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 + \dots + x_{2001} = \frac{4002}{4003}$$

$$\text{Cách 2. Từ } x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{x_n}$$

$$\text{Nên ta có } \frac{1}{x_1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{x_2} = 2(2 \cdot 1 + 1) + \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_3} = 2(2 \cdot 2 + 1) + \frac{1}{x_2}$$

...

$$\frac{1}{x_n} = 2[2(n-1) + 1] + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Cộng theo về các đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{x_n} = \frac{3}{2} + 4[1 + 2 + \dots + (n-1)] + 2(n-1) = \frac{3}{2} + 2(n-1)n + 2(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}[4n^2 - 1] \Rightarrow x_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\text{Từ đó } \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{2001} = \frac{4002}{4003}$$

$$\text{Bài 125. Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi } \begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}. \text{ Tính } \lim u_n$$

**Bài giải:**

Trước hết ta sẽ chứng minh dãy số  $(u_n)$  tăng và bị chặn trên.

Chứng minh dãy  $(u_n)$  tăng bằng quy nạp, tức là  $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$

$$\text{Khi } n = 1 \text{ ta có } u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_1$$

$$\text{Giả sử } u_{k+1} > u_k, \text{ khi đó } u_{k+2} = \sqrt{2 + u_{k+1}} > \sqrt{2 + u_k} = u_{k+1}. \text{ Vậy } u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$$

Nên  $(u_n)$  bị chặn dưới bởi  $\sqrt{2}$ . Ta sẽ chứng minh dãy  $(u_n)$  bị chặn trên bởi 2 bằng quy nạp, thật vậy

$$\text{Khi } n = 1 \text{ ta có } u_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$\text{Giả sử } u_k < 2, \forall k \geq 1, \text{ khi đó } u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên bởi 2. Do đó dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn, giả sử  $\lim u_n = a$ , thì  $a \geq \sqrt{2}$ .

$$\text{Từ hệ thức truy hồi, lấy giới hạn hai vế ta có } \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n}$$

$$\text{Hay } a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 = a+2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Vì  $a \geq \sqrt{2}$  nên  $a = 2$ . Vậy  $\lim u_n = 2$

**Nhận xét:** Với ví dụ này, ta có thể tìm được CTTQ của dãy  $(u_n)$  là  $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \geq 1$ , tuy nhiên việc xác định CTTQ của  $(u_n)$  không phải là đơn giản và mất nhiều thời gian. Với kĩ thuật tính giới hạn như bài giải trên, bài toán được giải quyết gọn nhẹ.

**Bài 126.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geq 2 \end{cases}$ . Tính  $\lim u_n$

**Bài giải:**

Nhận xét: Ta thấy  $u_1 = u_2 = 1, u_3 = 1+1 = 2 > u_2; u_4 = \sqrt{u_3} + \sqrt{u_2} = \sqrt{2} + 1 > u_3$ . Dự đoán dãy số  $(u_n)$  là dãy dương và tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp, tức là  $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 2$

Rõ ràng  $u_n > 0, \forall n \geq 1$ . Khi  $n = 2$  ta có  $u_3 = 2 > u_2 = 1$

Giả sử  $u_{k+1} > u_k, \forall k \geq 2$ . Ta có  $u_{k+2} = \sqrt{u_{k+1}} + \sqrt{u_k} > \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} = u_{k+1}, \forall k \geq 2$

Nên dãy  $(u_n)$  là dãy số dương tăng  $\Rightarrow u_n \geq u_1 = 1, \forall n \geq 1$

Hơn nữa, ta thấy  $\forall n \geq 3, u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} < \sqrt{u_n} + \sqrt{u_n} = 2\sqrt{u_n}$

Hay  $u_n^2 < 4u_n \Rightarrow u_n < 4$  (do  $u_n > 0$ ). Nên  $(u_n)$  bị chặn trên bởi 4

Do đó dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Giả sử  $\lim u_n = a$ , khi đó  $a \geq 1$

Từ hệ thức truy hồi suy ra  $\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{u_n} + \lim \sqrt{u_{n-1}}$

Hay  $a = \sqrt{a} + \sqrt{a} \Rightarrow a^2 = 4a$ . Do  $a \geq 1 > 0$  nên  $a = 4$

Vậy  $\lim u_n = 4$ .

**Bài 127.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 2010 \\ u_n^2 - 2u_n \cdot u_{n+1} + 2011 = 0, \forall n \geq 1 \end{cases}$  Chứng minh rằng

dãy  $(u_n)$  có giới hạn và tính giới hạn đó.

**Bài giải:**

Trước hết ta nhận xét rằng  $u_n > 0$ , với mọi  $n$ ,

Thật vậy, ta có  $u_1 = 2010 > 0$  Giả sử  $u_k > 0, \forall k \geq 1$ , ta chứng minh  $u_{k+1} > 0$

Từ hệ thức truy hồi suy ra  $2u_k \cdot u_{k+1} = u_k^2 + 2011 > 0 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{u_k^2 + 2011}{2u_k} > 0$

Do đó ta có  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2011}{2u_n} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2011}{u_n} \right)$ . Theo bất đẳng thức Cosi, ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2011}{2u_n} \geq \sqrt{u_n \cdot \frac{2011}{u_n}} = \sqrt{2011}, \forall n \geq 1.$$

Mặt khác ta có  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2011}{2u_n^2} = \frac{1}{2} + \frac{2011}{2u_n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(vì  $u_n \geq \sqrt{2011}, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{2011}{2u_n^2} \leq \frac{2011}{2 \cdot 2011} = \frac{1}{2}$ )

Nên  $(u_n)$  là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi  $\sqrt{2011}$ , do đó dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Giả sử  $\lim u_n = a$ , khi đó  $0 < a \leq 2010$

Và ta có  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2011}{2u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2011}{2u_n} \Rightarrow a = \frac{a^2 + 2011}{2a}$

$\Rightarrow a^2 = 2011 \Rightarrow a = \sqrt{2011}$ . Vậy  $\lim u_n = \sqrt{2011}$

**Bài 128.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = \sqrt{30} \\ u_{n+1} = \sqrt{30u_n^2 + 3u_n + 2011}, \forall n \geq 1 \end{cases}$  Tính  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$

**Bài giải:**

Nhận xét rằng  $u_n > 0, \forall n$  (kiểm tra bằng chứng minh quy nạp)

Hơn nữa, ta có  $u_{n+1} = \sqrt{30u_n^2 + 3u_n + 2011} > \sqrt{30u_n^2} > \sqrt{u_n^2} = u_n, \forall n \geq 1$

Nên dãy số  $(u_n)$  là dãy tăng. Giả sử dãy  $(u_n)$  bị chặn trên, khi đó  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và ta đặt  $\lim u_n = a (a > 0)$

Ta có  $\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{30u_n^2 + 3u_n + 2011} \Rightarrow a = \sqrt{30a^2 + 3a + 2011}$

$\Rightarrow a^2 = 30a^2 + 3a + 2011 \Rightarrow 29a^2 + 3a + 2011 = 0$ . Phương trình này vô nghiệm nên dẫn đến mâu thuẫn. Vậy dãy  $(u_n)$  không bị chặn hay  $\lim u_n = +\infty$

Mặt khác  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{30u_n^2 + 3u_n + 2011}{u_n^2}} = \sqrt{30 + \frac{3}{u_n} + \frac{2011}{u_n^2}}$

Do đó  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{30 + \lim \frac{3}{u_n} + \lim \frac{2011}{u_n^2}} = \sqrt{30}$

**Bài 129.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2010} + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$  . Tính

$\lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

**Bài giải:**

Từ hệ thức truy hồi ta có  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2010} > 0, \forall n \geq 1 (*) \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$ , do đó dãy

$(u_n)$  là dãy số tăng  $\Rightarrow u_n > u_1 = 1 > 0, \forall n \geq 1$

Từ (\*) suy ra  $2010 \cdot \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} \cdot u_n} = \frac{u_n^2}{u_{n+1} \cdot u_n}$  hay  $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 2010 \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2010 \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2010 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

Do đó  $\lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim 2010 \cdot \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

Giả sử  $(u_n)$  bị chặn trên, khi đó dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn, giả sử  $\lim u_n = a$  (Vì  $u_n > 1, \forall n \geq 1 \Rightarrow a \geq 1$ ).

Từ hệ thức truy hồi suy ra  $\lim u_{n+1} = \lim \left( \frac{u_n^2}{2010} + u_n \right)$

Hay  $a = \frac{a^2}{2010} + a \Rightarrow a = 0$  (vô lý). Vậy  $(u_n)$  không bị chặn, tức là  $\lim u_n = +\infty$

$\Rightarrow \lim u_{n+1} = +\infty$ . Vậy  $\lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 2010$

**Bài 130.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  là dãy số tăng

b) Tính  $\lim(u_n)$

**Bài giải:**

a) Nhận xét rằng  $(u_n)$  là dãy bị chặn

Hơn nữa  $0 < u_n < 1 \Rightarrow 1 - u_n > 0$  và  $u_{n+1} > 0, \forall n$ . Theo bất đẳng thức Cosi, ta có

$u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2 \cdot \sqrt{u_{n+1} \cdot (1 - u_n)} > 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 1, \forall n \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n$ . Do đó  $(u_n)$  là dãy số tăng

b) Từ câu a) và nhận xét trên suy ra dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Giả sử  $\lim u_n = a$ , thì  $a \geq 0$ .

Do đó  $\lim [u_{n+1}(1 - u_n)] = \lim u_{n+1} \cdot \lim(1 - u_n) = a(1 - a)$ . Mặt khác từ giả thiết suy ra,

$$\lim [u_{n+1}(1 - u_n)] \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a(1 - a) \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Vậy  $\lim u_n = \frac{1}{2}$

**Bài 131.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}), \forall n \geq 1 (a > 0) \end{cases}$  Tính  $\lim u_n$

**Bài giải:**

Nhận xét rằng  $(u_n)$  bị chặn dưới bởi  $\sqrt{a}$ .

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cossi ta có  $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + \frac{a}{u_1}) \geq \sqrt{a}$ .

Giả sử  $u_k \geq \sqrt{a}, \forall k \geq 2$ , ta chứng minh  $u_{k+1} \geq \sqrt{a}$

Theo bất đẳng thức Cossi và giả thiết quy nạp ta có  $u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + \frac{a}{u_k}) \geq \sqrt{u_k \cdot \frac{a}{u_k}} = \sqrt{a}$ . Do đó

$u_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2$ , nên  $(u_n)$  bị chặn dưới bởi  $\sqrt{a}$

Mặt khác, ta có  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2u_n^2}$  mà  $u_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2u_n^2} \leq \frac{1}{2a}$

Do đó  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2u_n^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n, \forall n \geq 1$  nên  $(u_n)$  là dãy giảm.

Vậy dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Giả sử  $\lim u_n = \alpha$ , khi đó  $\alpha > 0$

Từ hệ thức truy hồi suy ra

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{a}{\alpha}) \Rightarrow \alpha = \sqrt{a} \text{ (Do } \alpha > 0)$$

Vậy  $\lim u_n = \sqrt{a}$

**Bài 132.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}, \forall n \geq 0 \end{cases}$ . Tính  $\lim(u_n)$

**Bài giải:**

Nhận xét rằng  $u_n > 0$  với mọi  $n$ . Thật vậy,  $u_0 > 0$  và  $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0^2} > 0$

Giả sử  $u_k > 0, \forall k \Rightarrow u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k^2} > 0$ . Do đó  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} < 1, \forall n$  (vì  $u_n^2 > 0$ )

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \Rightarrow (u_n)$  là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Đặt,  $\lim u_n = a$  khi đó từ hệ thức truy hồi suy ra

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n}{1+u_n^2} \Rightarrow a = \frac{a}{1+a^2} \Rightarrow a^3 + a = a \Rightarrow a = 0. \text{ Vậy } \lim u_n = 0$$

**Bài 133.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ . Đặt  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}$ . Tính

$\lim S_n$

**Bài giải:**

Nhận xét: Dễ thấy  $u_n > 1$ ,  $\forall n \geq 1 \Rightarrow u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{k-1} > 1$

Ta có  $u_{n+1} - u_n = 1 + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n - u_n > 1 + u_n - u_n = 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$ , do đó  $(u_n)$  là dãy số tăng. Giả sử  $(u_n)$  là dãy bị chặn trên, khi đó dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn, và ta đặt  $\lim u_n = a$

Ta có  $a = \lim u_{n+1} = \lim(1 + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1} \cdot u_n) = 1 + \lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1}) \cdot \lim u_n$

Vì  $\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1}) \geq 1 \Rightarrow a \geq 1 + 1 \cdot a$ . Điều này vô lí. Vậy  $(u_n)$  không bị chặn trên tức là  $\lim u_n = +\infty$

Mặt khác ta có,  $u_{k+1} - 1 = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k = u_k(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{k-1} + 1 - 1) = u_k(u_k - 1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{k+1} - 1} = \frac{1}{u_k(u_k - 1)} = \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_k}, \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$\text{Do đó } \lim S_n = \lim(2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}) = 2$$

**Bài 134.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định như sau:  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x_n}$  với mọi  $n \in N^*$ . Chứng minh rằng dãy số  $(u_n)$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Bài giải:**

Nhận xét rằng,  $\forall n \in N^*$ . Xét hàm số  $f(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^x$  nghịch biến trong khoảng  $[0; +\infty)$ . Khi

đó  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in N^*$  và  $f(x) \leq f(0)$  nên  $0 \leq x_n \leq 1$

Ta có  $x_0 = 0; x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{27}$  nên  $x_1 \leq x_3$  và  $x_4 = f(x_3) \leq f(x_1) \leq x_2$

Bây giờ ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp  $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ , và  $x_{2n+2} \leq x_{2n}$

với  $n \in N^*$

Thật vậy, giả sử có  $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$  thì  $f(x_{2n-1}) \geq f(x_{2n+1})$  nên  $x_{2n+2} \leq x_{2n}$  và vì vậy

$$f(x_{2n}) \leq f(x_{2n+2}) \text{ suy ra } x_{2n+1} \leq x_{2n+3}$$

Tương tự, giả sử có  $x_{2n+2} \leq x_{2n}$  thì  $f(x_{2n}) \leq f(x_{2n+2})$  suy ra  $x_{2n+1} \leq x_{2n+3}$  vì vậy

$$f(x_{2n+1}) \geq f(x_{2n+3}) \text{ suy ra } x_{2n+2} \geq x_{2n+4}$$

Vậy dãy  $x_{2n-1}$  là dãy tăng và dãy  $x_{2n}$  là dãy giảm và đều thuộc  $[0; 1]$  nên có giới hạn hữu hạn:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n-1}) = b$

$$\text{Và } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(x_{2n})) = f(f(a))$$

$$\text{Nên } a = \left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{27}\right)^a} \text{ suy ra } a = \frac{1}{3}$$

Tương tự ta cũng tìm được  $b = \frac{1}{3}$ . Vậy  $a = b = \frac{1}{3}$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{3}$

**Bài 135.** Cho dãy số thực  $(u_n)$  xác định như sau:  $x_1 = 0; x_2 = 2$  và  $x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2}$  với mọi  $n = 1; 2; 3; \dots$  Chứng minh rằng dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Bài giải:**

Xét hàm số  $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta có  $x_{n+4} = f(x_{n+2}) = f(f(x_n))$  hay  $x_{n+4} = g(x_n)$ , trong đó  $g$  là hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$  và  $g(x_n) = f(f(x_n)) \forall x \in \mathbb{R}$  (1)

Để thấy hàm số  $f$  giảm trên  $\mathbb{R}$ , do đó hàm số  $g$  tăng trên  $\mathbb{R}$ . Vì thế từ (1) suy ra với mỗi  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ , dãy  $x_{4n+k}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) là dãy đơn điệu, Hơn nữa, từ cách xác định dãy  $(x_n)$  dễ thấy  $0 \leq x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Do đó với mỗi  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ , dãy  $x_{4n+k}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) là dãy hội tụ

Với mỗi  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ , đặt  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{4n+k} = a_k$  ta có  $0 \leq a_k \leq 2$ . Hơn nữa, do hàm số  $g$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên từ (1) suy ra  $g(a_k) = a_k$  (2)

Xét hàm số  $h(x) = g(x) - x$  trên  $[0; 2]$  Ta có  $h'(x) = 2^{-(f(x)+x)} \cdot (\ln 2)^2 - 1 < 0 \forall x \in [0; 2]$  (do  $f(x) + x > 0 \forall x \in [0; 2]$ )

Suy ra, hàm số  $h$  giảm trên  $[0; 2]$ . Vì thế có nhiều nhất một điểm  $x \in [0; 2]$  sao cho  $h(x) = 0$  hay  $g(x) = x$ . Mà  $g(1) = 1$  nên từ (2) ta được  $a_k = 1$  với mọi  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$   
 Từ đây, vì dãy  $(u_n)$  là hợp của bốn dãy con  $x_{4n+k}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) nên dãy  $(u_n)$  hội tụ và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = 1$

**Bài 136.** Cho dãy số thực  $(x_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_1 = 2007 \\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} \end{cases} \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh dãy số  $(x_n)$  bị chặn.

b) Chứng minh dãy số  $(x_n)$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Bài giải:**

Hiển nhiên  $x_n > \sqrt{3}$  và

$$x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2 - 1}} < \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1.$$

Vậy  $x_n \leq 2007$  với mọi  $n$ . Suy ra dãy bị chặn.

Cách 1:

Hàm số  $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}}$  nghịch biến trên  $(\sqrt{3}; +\infty)$  nên chứng minh được

các dãy con  $(x_{2n})$  và  $(x_{2n+1})$  là đơn điệu. Theo 1/các dãy đó bị chặn nên có  $\lim x_{2n} = a$  và

$$\lim x_{2n+1} = b. \text{ Từ } x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} \text{ qua giới hạn ta có : } \begin{cases} a = \sqrt{3} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \\ b = \sqrt{3} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \end{cases}. \text{ Suy ra}$$

$$a + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} = b + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}}.$$

Xét hàm số  $g(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  có  $g'(x) = 1 - \frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \quad \forall x \geq \sqrt{3}$  nên  $g(x)$  đồng biến,

Từ đó  $a = b$  hay  $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = a$ .

$$\text{Lúc đó } a \text{ là nghiệm phương trình } x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} \Rightarrow \lim x_n = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}.$$

### Cách 2

$$f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ khi } x > \sqrt{3}.$$

$$\text{Có } f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{3}x)^2 - 2(x^2 - \sqrt{3}x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{3}x = -1 \\ x^2 - \sqrt{3}x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} = a.$$

Áp dụng định lý Lagrang có:

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = |f'(\theta_n)| |x_n - a| < \frac{1}{2\sqrt{2}} |x_n - a| < \dots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Do đó } \lim x_{2n} = a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Bài 137. Ví dụ 14: Cho dãy số } (x_n) \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, \quad a > 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{a - \sqrt{a + x_n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn.

### Bài giải:

- Bằng quy nạp chứng minh được rằng  $0 \leq x_n \leq \sqrt{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Xét hàm  $f(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}, \quad \forall x \in [0; \sqrt{a}]$  có  $x_{n+1} = f(x_n)$  và

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{a - \sqrt{a + x}}\sqrt{a + x}} < 0, \quad \forall x \in [0; \sqrt{a}].$$

Suy ra  $f(x)$  là hàm nghịch biến.

Do đó dãy  $(x_n)$  được tách thành hai dãy con  $(x_{2n})$  và  $(x_{2n+1})$ , trong đó một dãy tăng và một dãy giảm, mặt khác lại có dãy  $(x_n)$  bị chặn nên tồn tại  $\lim x_{2n} = \alpha$ ,  $\lim x_{2n+1} = \beta$ , trong đó  $\alpha, \beta$  là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} = x$$

$$F(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} - x, \text{ với } x \in [0; \sqrt{a}]$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}} \sqrt{a - \sqrt{a + x}} \sqrt{a + x}} - 1$$

với  $x \in [0; \sqrt{a}]$ , ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a - \sqrt{a + x}} \sqrt{a + x} &\geq \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a}}} \sqrt{a} > \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a} + \frac{1}{4}}} \sqrt{a} \\ &= \sqrt{a - \sqrt{a} - \frac{1}{2}} \sqrt{a} = \sqrt{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} \sqrt{a} > \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} \sqrt{2} > \sqrt{0,12} > 0,3 \end{aligned}$$

Thay vai trò của  $x$  bởi  $\sqrt{a - \sqrt{a + x}}$  chứng minh tương tự ta có

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}} > 0,3.$$

Suy ra  $F'(x) < -0,9$  nên  $F(x)$  là hàm nghịch biến, lại có  $F(0) > 0; F(\sqrt{a}) < 0$  nên phương trình

$F(x) = 0$  có nghiệm duy nhất. Do đó  $\alpha = \beta$ .

Suy ra  $\lim x_n = \lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = T$ .

Vậy có  $\lim x_n = T$  với  $T$  thỏa mãn  $f(T) = T$ .

**Bài 138. Ví dụ 20:** Cho dãy số  $(x_n)$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  được xác định bởi:  $\lim x_{2n} = a$ .

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \ln x_n. \text{ Đặt } S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_{2k-1}} \quad (n \geq 2). \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{S_n}{n} \right).$$

**Bài giải:**

Nhận xét rằng  $x_{2n} = 1$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 1$ .

Tiếp theo ta chứng minh dãy  $(x_{2n+1})$  cũng có giới hạn là 1.

Xét hàm số  $f(x) = x - \ln x$  liên tục và đồng biến trong  $(1; +\infty)$  vì  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$  với mọi  $x > 1$ .

Trước hết ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, dãy  $(x_{2n+1})$  bị chặn dưới bởi 1. Theo giả thiết thì  $x_1 = a > 1$ , giả sử  $x_{2k+1} > 1$  thì  $f(x_{2k+1}) > f(1)$  nên hiển nhiên  $x_{2k+3} > 1$  tức dãy  $(x_{2n+1})$  bị chặn dưới bởi 1.

Tiếp theo ta chứng minh dãy  $(x_{2n+1})$  là dãy giảm. Thật vậy, do  $x_{2k+1} > 1$  nên  $\ln x_{2k+1} > 0$  vì thế  $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -\ln x_{2n+1} < 0$ , tức dãy  $(x_{2n+1})$  là dãy giảm.

Từ đó suy ra  $(x_{2n+1})$  có giới hạn  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$ .

Chuyển qua giới hạn dãy số ta được  $c = c - \ln c \Leftrightarrow c = 1$ .

Vậy dãy số  $(x_n)$  có giới hạn là 1.

Theo định lý Cessaro, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} \right) &= 1 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(x_1 + x_3 + \dots + x_{2n+1}) + (x_2 + x_4 + \dots + x_{2n})}{2n} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{nx_1 - (n-1)\ln x_1 - (n-2)\ln x_3 - \dots - \ln x_{2n-3} + n}{2n} \right) &= 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a}{2} - \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2} \right) = 1 \text{ hay } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{S_n}{n} \right) = \frac{a-1}{2}.$$

**Bài 139.** Xét tính hội tụ của dãy sau tùy ý theo giá trị của  $a$ :

$$\begin{cases} x_1 = a \neq -1 \\ x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2x_n^2 + 2} - 2}{2x_n + \sqrt{2x_n^2 + 2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

**Bài giải:**

Giải phương trình  $f(x) = x$  với  $x \neq -1$ :

$$\frac{3\sqrt{2x^2 + 2} - 2}{2x + \sqrt{2x^2 + 2}} = x \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2 + 2} - 2 = 2x^2 + x\sqrt{2x^2 + 2}.$$

Đặt  $\sqrt{2x^2 + 2} = t > 0$ , khi đó ta có hệ:  $\begin{cases} 2x^2 - t^2 = -2 \\ 3t - 2 = 2x^2 + xt \end{cases}$ . Cộng theo vế 2 phương trình của hệ:

$$t^2 + t(x-3) = 0 \Leftrightarrow t = 3-x \text{ (do nghiệm } t = 0 \text{ loại)}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2} = 3-x \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -7.$$

Xét dấu của  $f(x) - x$  trên từng khoảng  $(-\infty; -7)$ ,  $(1; +\infty)$ , ta có:

$$f(x) > x, \forall x < -7 \text{ và } f(x) < x, \forall x > 1.$$

Xét phương trình  $f(x) = 1$  chỉ có nghiệm  $x = 1$  nên  $f(x) - 1$  không đổi dấu trên từng khoảng  $(-1; 1)$  và  $(1; +\infty)$ , ta có:

$$f(x) \geq 1, \forall x > -1.$$

Tương tự, trường hợp  $f(x) = -7$  thì  $f(x) \leq -7, \forall x < -1$ .

Suy ra:

- Nếu  $a > -1$  thì dãy  $(x_n)$  giảm và bị chặn dưới nên nó hội tụ với  $\lim x_n = 1$ .
- Nếu  $a < -1$  thì dãy  $(x_n)$  tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ với  $\lim x_n = -7$ .

**Bài 140. Ví dụ 22:** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi  $u_1 = 2$  và  $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ . Tìm  $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$ .

**Bài giải:**

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được  $(u_n)$  là dãy tăng.

Ta chứng minh dãy trên không bị chặn trên. Giả sử  $(u_n)$  bị chặn trên thì  $(u_n)$  hội tụ, khi đó  $\lim u_n = a \Rightarrow a = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow a = 1$  (mâu thuẫn). Từ đó  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\text{Ta có } u_{i+1} - 1 = u_i(u_i - 1) \Rightarrow \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_{i+1} - 1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \rightarrow 1 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Vậy } \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} = 1.$$

**Bài 141. Ví dụ 23:** Cho dãy  $(x_n)$  được xác định bởi  $u_1 = 1$  và  $x_{n+1} = 2008x_n^2 + x_n$ . Tìm

$$\lim \left( \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} \right).$$

**Bài giải:**

Ta có :  $x_{n+1} - x_n = 2008x_n^2 > 0$  nên  $(x_n)$  là dãy tăng và dương.

Ta chứng minh  $\lim x_n = +\infty$ .

Giả sử  $\lim x_n = a > 0$  ta được  $a = 2008a^2 + a \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \lim x_n = +\infty$ .

Ta có:  $x_{n+1} = 2008x_n^2 + x_n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{1}{2008} \left( \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right) \\ \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \frac{1}{2008} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} \right). \\ \Rightarrow \lim \left( \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) &= \frac{1}{2008}. \end{aligned}$$

**Bài 142. Ví dụ 24:** Cho dãy  $(x_n)$  được xác định bởi  $u_1 = 1$  và  $x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$ .

Tìm  $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_{i+2}}$ .

**Bài giải:**

Ta có:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1 \Rightarrow$$

$x_{n+1} - x_n = (x_n+1)^2 > 0$  nên  $(x_n)$  là dãy tăng. Ta chứng minh  $\lim x_n = +\infty$ . Giả sử  $\lim x_n = a \Rightarrow a = a^2 + 3a + 1 \Rightarrow a = -1$  (vô lý)  $\lim x_n = +\infty$ .

Biến đổi:

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} + 1 = (x_n + 1)(x_n + 2) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{(x_n + 1)(x_n + 2)} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}.$$

Do đó:

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Vậy } \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_{i+2}} = \frac{1}{2}.$$

**Lời giải 2**

Ta có  $x_2 = 5$  và  $x_n > 0$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$$

Từ đó suy ra :  $x_{n+1} = (x_n+1)(x_n+2)$

$$\frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{(x_n+1)(x_n+2)} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_n+2} \Rightarrow \frac{1}{x_n+2} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$$

$$\text{Do đó } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i+2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_{i+1}+1} \right) = \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1}+1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Vậy } \lim_{i=1}^n \frac{1}{u_{i+2}} = \frac{1}{2}.$$

**Bài 143.** Cho dãy  $(x_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad (n=2,3,\dots) \end{cases}$$
 . Chứng minh rằng

dãy  $(y_n)$ ,  $n=1,2,3,\dots$  với  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Bài giải:**

Từ giả thiết ta có  $x_n > 0, \forall n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x_n - x_{n-1} &= \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} \\ &= \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}}{2} > 0. \end{aligned}$$

Do đó dãy  $(x_n)$  tăng. Giả sử  $\lim x_n = a$  thì  $a > 0$ , ta có

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Vậy  $\lim x_n = +\infty$ .

Từ giả thiết suy ra

$$x_n^2 = (x_n+1)x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \quad \forall n \geq 2. \text{ Do đó}$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n} \quad \forall n \geq 2.$$

Suy ra  $y_n \leq 6$  và dãy  $(y_n)$  tăng vì  $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ .

Vậy  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn và  $\lim y_n = 6$ .

**Bài 144.** Ví dụ 26: Xét dãy số  $(x_n)$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) xác định bởi :  $x_1 = 2$  và  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$  với

mọi  $n=1,2,3,\dots$  Đặt  $S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

**Lời giải**

Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau:

Cho dãy  $(u_n)$  thỏa mãn 
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c} \end{cases}$$

Ta chứng minh 
$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i + b} = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$$

Thật vậy.

Ta có  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c}$  suy ra  $u_{n+1} + c = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + bc}{b-c} = \frac{(u_n + b)(u_n + c)}{b-c}$

Từ đó  $\frac{1}{u_{n+1} + c} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_n + b} \Rightarrow \frac{1}{u_n + b} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c} \Rightarrow \frac{1}{u_n + b} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$

Khai triển và ước lượng được

$$\frac{1}{u_1 + b} = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_2 + c}$$

$$\frac{1}{u_2 + c} = \frac{1}{u_2 + c} - \frac{1}{u_3 + c}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{u_n + b} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$$

Do đó 
$$S_n = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$$

Từ đó vận dụng vào bài toán trên với  $b = 1, c = -1$  ta có :

$$S_n = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

Mà  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên dãy  $(x_n)$  là dãy tăng. Giả sử  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \quad (a > 2)$ .

Thì  $2a = a^2 + 1$  suy ra  $a = 1$ . Vô lý

Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ . Do đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$

Ví dụ 27 : Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi :  $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(2x_n + 1)^{2012}}{2012} + x_n$  với  $n$  là số nguyên

dương. Đặt  $u_n = \frac{(2x_1 + 1)^{2011}}{2x_2 + 1} + \frac{(2x_2 + 1)^{2011}}{2x_3 + 1} + \frac{(2x_3 + 1)^{2011}}{2x_4 + 1} + \dots + \frac{(2x_n + 1)^{2011}}{2x_{n+1} + 1}$ . Tìm  $\lim u_n$

**Lời giải**

Ta có  $x_{n+1} - x_n = \frac{(2x_n + 1)^{2012}}{2012}, \forall n \geq 1$

Suy ra  $\frac{1}{2x_n + 1} - \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{(2x_n + 1)(2x_{n+1} + 1)} = \frac{(2x_n + 1)^{2011}}{1006(2x_{n+1} + 1)}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i + 1)^{2011}}{2x_{i+1} + 1} = 1006 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2x_i + 1} - \frac{1}{2x_{i+1} + 1} \right) = 1006 \left( \frac{1}{2x_1 + 1} - \frac{1}{2x_{n+1} + 1} \right)$$

Mặt khác :  $x_{n+1} - x_n \geq 0$  nên dãy số  $(x_n)$  là dãy số tăng  $\forall n \geq 1$ . Nếu  $(x_n)$  bị chặn thì  $\lim x_n = +\infty$

$$\text{suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = 0$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1006}{3}$$

**Bài 145.** Ví dụ 28 : Cho dãy số  $(x_n)$  ( $n \geq 1$ ) thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $0 < x_1 < 1$  và

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, \quad \forall n \geq 1. \text{ Chứng minh rằng dãy } (x_n) \text{ có giới hạn hữu hạn khi } n \rightarrow +\infty$$

Lời giải

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Ta có } x_2 < 2x_1, x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1x_2 < 2x_1, x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $x_n < nx_1, \forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

Vì vậy tồn tại số nguyên  $m \geq 2$  sao cho  $x_m < m - 1$

$$\text{Ta có } x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ là dãy tăng}$$

$$\text{Giả sử } n > m (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq 3$$

$$\text{Với } k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{k^2}{k^2x_k + x_k^2} = \frac{1}{x_k + k^2} < \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Giả sử } n > m (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq 3$$

$$\text{Ta có } \sum_{k=m}^{n-1} \left( \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2}. \text{ Suy ra } \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} < \frac{1}{m-1}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1} > 0 \text{ suy ra } x_n < \frac{(m-1)x_m}{m-1-x_m}. \text{ Vậy dãy } (x_n) \text{ có giới hạn khi } n \rightarrow +\infty.$$

Chú ý rằng chúng ta có thể chứng minh được  $x_n + n^2 \geq \sqrt{x_1}n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài 146.** Ví dụ 29: Cho dãy số thực  $(x_n)$  được xác định bởi  $x_1 = 1$  và  $x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \forall n \geq 2$ .

Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $y_n = x_{n+1} - x_n$ . Chứng minh rằng dãy số  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x_n &= \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \Rightarrow x_n \left[ 1 + \frac{2n}{(n-1)^2} \right] = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{2n}{(n-1)^2} \\ &\Rightarrow x_n \frac{n^2 + 1}{2n} = \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } x_{n+1} \frac{n^2}{2(n+1)} = \sum_{i=1}^n x_i \text{ nên } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)(n^2 + 1)}{n^3}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right), \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{n-1} \right], \quad (n \geq 3), \quad (n \geq 3)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} y_n &= x_{n+1} - x_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^3} x_n \\ &= \frac{n^2 + n + 1}{n^3} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right] \dots \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \right] \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) \left( 1 + \frac{1}{n-2} \right) \dots \left( 1 + \frac{1}{2} \right) x_2 \\ &= \frac{2(n^2 + n + 1)}{n^2} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right] \dots \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \right], \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

Xét dãy  $z_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) được xác định bởi :

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = 1, \quad z_n = \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{3^2} \right] \dots \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right], \quad (n \geq 3)$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{n^2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Hiển nhiên dãy  $z_n$  là dãy tăng. Ta chứng minh bất đẳng thức :

$$\ln(1+x) < x \quad (1), \quad \forall x > 0$$

Thật vậy xét hàm số  $f(x) = x - \ln(1+x)$ , ( $x \geq 0$ )

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, \quad \forall x > 0$$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  |   | 0         |

$$\Rightarrow f(x) > f(0), \quad \forall x > 0 \text{ suy ra bất đẳng thức (1) đúng.}$$

Hiển nhiên  $z_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

Với  $n \geq 3$  ta có :

$$\ln z_n < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} < 1$$

$$\Rightarrow z_n < 3, \quad (n \geq 3)$$

$$\text{Dãy } (z_n) \text{ bị chặn trên } \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2a$$

Vậy dãy  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$

**Bài 147.** Ví dụ 30 : Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi :  $x_1 = 3$  và  $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$  với mọi  $n \geq 2$ . Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm giới hạn đó.

**Cách tiếp cận lời giải:** Giả sử  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = a$  suy ra  $a = 1$ . Mặt khác  $x_1 = 3, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = \frac{80}{27}$

$x_4 = \frac{67}{27}$ . Như vậy chúng ta có thể dự đoán rằng  $x_{n-1} > x_n, \forall n \geq 3$ .

Mặt khác  $x_{n-1} > x_n \Leftrightarrow x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1}$ . Chúng ta có lời giải của bài toán như sau:

**Lời giải**

Ta có  $x_1 = 3, x_2 = \frac{10}{3}$ . Ta chứng minh  $x_n > 1 + \frac{3}{n}$  (1) với mọi  $n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

Thật vậy (1) đúng với  $n = 2$  giả sử (1) đúng với  $n = k (k \geq 2)$  tức là  $x_k > 1 + \frac{3}{k}$ .

Ta có  $x_{k+1} = \frac{k+3}{3(k+1)}(x_k + 2) > \frac{k+3}{3(k+1)}\left(3 + \frac{3}{k}\right) = \frac{k+3}{k} > 1 + \frac{3}{k+1}$ , tức là (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng với mọi  $n \geq 2$

Với  $n \geq 3$  ta có  $x_{n-1} - x_n = x_{n-1} - \frac{n+2}{3n}x_{n-1} - \frac{2(n+2)}{3n} = \frac{2n-2}{3n}x_{n-1} - \frac{2(n+2)}{3n}$

Vì  $x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1}$  nên  $x_{n-1} - x_n > \frac{2n-2}{3n}\left(1 + \frac{3}{n-1}\right) - \frac{2(n+2)}{3n} = 0$ . Vậy  $x_{n-1} > x_n, n \geq 3$

Mặt khác  $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Vậy dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Đặt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = a (a \geq 1)$  ta có  $a = \frac{1}{3}(a+2) \Rightarrow a = 1$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = 1$

**Bài 148.** Cho dãy số thực  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_1 = 1$  và  $a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}}$  với mọi  $n \geq 1$ .

Chứng minh rằng dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Lời giải**

Ta có  $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = 3 - \frac{7}{4\sqrt{2}}$

Xét hàm số  $f(x) = 3 - \frac{2+x}{2^x} (x \geq 0)$ . Ta có  $f'(x) = \frac{2^x(x+2)\ln 2 - 2^x}{2^{2x}} > 0, \forall x > 0$

Suy ra  $f(x)$  đồng biến trên  $[0; +\infty) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$  và  $a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Suy ra dãy  $(a_n)$  là dãy tăng. Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được

$\frac{3}{2} < a_n < 2, \forall n \geq 3$ . Vậy dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Đặt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b \left(3 - \frac{7}{4\sqrt{2}} < b \leq 2\right)$  ta có  $b = 3 - \frac{2+b}{2^b} \Rightarrow 2^b(3-b) - b - 2 = 0$

Xét hàm số  $g(x) = 2^x(3-x) - x - 2 \left(2 \geq x > 3 - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$ . Ta có:

$g'(x) = 2^x[(3-x)\ln 2 - 1] - 1 < 0, \forall x \in \left(3 - \frac{7}{4\sqrt{2}}; 2\right)$ .

Mặt khác  $g(x)$  liên tục trên  $\left(3 - \frac{7}{4\sqrt{2}}; 2\right)$

Vậy  $g(x)$  nghịch biến trên  $\left(3 - \frac{7}{4\sqrt{2}}; 2\right)$ . Mặt khác  $g(2) = 0$ . Vậy phương trình  $g(x) = 0$  có một nghiệm duy nhất  $x = 2$ . Vậy  $b = 2$ . Tóm lại dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$

**Bài 149.** Ví dụ 32 : Cho dãy số  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  thỏa mãn  $0 < x_1 < 1$  và  $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n}$  với mọi  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

**Lời giải**

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  $0 < x_n < 1$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{1-x} (0 < x < 1)$ . Khi đó  $f(x)$  nghịch biến trên  $(0; 1)$  và

$$x_{k+1} = f(x_k), \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Trường hợp 1:  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Khi đó  $x_3 > x_1 \Rightarrow x_4 < x_2$ . Bằng phương pháp quy nạp

toán học ta chứng minh được dãy  $(x_{2k-1})$  là dãy tăng và  $x_{2k}$  là dãy giảm. Bằng

phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $x_{2k-1} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_{2k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = a \left( 0 < x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1 \right) \text{ và } \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = b \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq b < x_2 < 1 \right). \text{ Ta có } b = \sqrt{1-a}$$

$$\text{và } a = \sqrt{1-b}$$

$$a = \sqrt{1-\sqrt{1-a}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (vì } 0 < a < 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\text{Trường hợp 2: } 1 > x_2 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \text{ Tương tự ta có } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\text{Trường hợp 3: } x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

**Bài 150.** Cho dãy  $(u_n)$  như sau:  $\begin{cases} u_1 = 2, 7 \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$  Chứng minh rằng dãy

$(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Lời giải**

Ta có :

$$u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow (u_{n+1} - 1)^3 = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

• Do  $u_1 = 2, 7 > 0$  nên bằng quy nạp ta chứng minh được  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

• Xét hàm  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ , với  $x > 1$ , có  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$  với mọi  $x > 1$ . Do đó  $f(x)$  là hàm đồng biến.

• Lại có  $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ , và  $u_1 = 2,7 > u_2 = \sqrt[3]{2,7} + 1$  nên ta suy ra được  $(u_n)$  là dãy giảm mà lại bị chặn dưới tại 1 nên dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 151.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $\begin{cases} u_1 = 2,9 \\ u_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ . Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Giải.**

Xét hàm  $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \forall x > 1$ , có:  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}, \forall x > 1$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm nghịch biến.

• Ta chứng minh  $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Thật vậy:

- Bài toán đúng với  $n = 1$ .

- Giả sử bài toán đúng với  $n = k, k \in \mathbb{N}^*$  ta chứng minh bài toán đúng với  $n = k + 1$ .

Ta có:  $u_{k+1} = f(u_k)$ , mà:  $u_k > \sqrt{3} \Rightarrow f(u_k) < f(\sqrt{3})$  (Do  $f(x)$  là hàm giảm)

$\Rightarrow u_{k+1} < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Lại có  $u_k > \sqrt{3} \Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{3} + \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2 - 1}} > \sqrt{3}$ .

Vậy  $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

• Do  $u_{n+1} = f(u_n)$  và  $f(x)$  là hàm nghịch biến nên  $(u_n)$  tách làm 2 dãy:  $(u_{2k+1})$  và  $(u_{2k})$  trong đó có một dãy tăng và một dãy giảm, lại có dãy  $(u_n)$  bị chặn  $\Rightarrow \exists \lim(u_{2k+1}); \lim(u_{2k})$ .

Đặt  $\lim u_{2k+1} = a; \lim u_{2k} = b$  thì  $a$  và  $b$  là nghiệm của phương trình  $f(f(x)) = x$ .

Xét hàm  $F(x) = f(f(x)) - x, \sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ , có  $F'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) - 1$ .

Do  $f(x) > \sqrt{3}$  với mọi  $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$  và  $0 > f'(x) > -\frac{1}{8}$  nên  $-\frac{1}{8} < f'(f(x)) < 0$

$\Rightarrow F'(x) < 0$

$\Rightarrow$  phương trình  $F(x) = 0$  có nghiệm duy nhất là  $a$ .

$\Rightarrow \lim(u_{2k+1}) = \lim(u_{2k}) = \lim u_n = a$ .

Vậy dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Bài 152.** Cho số thực  $a$  và dãy số  $(u_n)$  xác định như sau: 
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + \sin u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \end{cases}$$

Tìm  $\lim u_n$ .

**Giải.**

Xét hàm  $f(x) = x + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ , ta có  $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó với  $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$  ta có: trong  $[x_1; x_2]$  có hữu hạn điểm mà tại đó  $f'(x) = 0$ , vì vậy  $f(x)$  đồng biến trên  $[x_1; x_2] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Vậy  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

• Nếu  $a = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$  dễ dàng chứng minh được bằng qui nạp  $u_n = a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

• Nếu  $k2\pi < a < \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin a > 0$ .

Có  $u_{n+1} = f(u_n)$  và  $f(x)$  là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , mà  $u_1 = a < u_2 = a + \sin a$  nên bằng qui nạp ta chứng minh được  $(u_n)$  là dãy tăng và  $(u_n)$  bị chặn trong khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$  tức là  $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  và  $k2\pi < u_n < \pi + k2\pi, \forall n \in \mathbb{N}^*$  (1).

$\Rightarrow \exists \lim u_n$  và đặt  $\lim u_n = b$ ,  $b$  là nghiệm của phương trình:  $b = b + \sin b \Rightarrow \sin b = 0$ .

Kết hợp với (1)  $\Rightarrow b = \pi + k2\pi$ .

Vậy  $\lim u_n = \pi + k2\pi$ .

• Nếu  $\pi + k2\pi < a < (2k+1)\pi \Rightarrow \sin a < 0$ .

Có  $u_{k+1} = f(u_n)$  và  $f(x)$  là hàm đồng biến  $\mathbb{R}$  mà  $u_1 = a > u_2 = a + \sin a$  nên bằng qui nạp chứng minh được  $(u_n)$  là dãy giảm và  $(u_n)$  bị chặn trong khoảng  $(\pi + k2\pi; (2k+1)\pi)$  tức là  $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  và  $\pi + k2\pi < u_n < (2k+1)\pi, \forall n \in \mathbb{N}^*$  (2).

$\Rightarrow \exists \lim u_n$  và đặt  $\lim u_n = b$ ,  $b$  là nghiệm của phương trình:  $b = b + \sin b \Rightarrow \sin b = 0$ .

Kết hợp với (2)  $\Rightarrow b = \pi + k2\pi$ .

Vậy  $\lim u_n = \pi + k2\pi$ .

**Bài 153.** Cho dãy số  $(x_n)$  như sau: 
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, a > 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{a - \sqrt{a + x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$

có giới hạn hữu hạn.

**Giải.**

Bằng quy nạp ta chứng minh được  $0 \leq x_n \leq \sqrt{a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Xét hàm  $f(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}, \forall x \in [0; \sqrt{a}]$  có  $x_{n+1} = f(x_n)$  và  $F(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} - x$ .

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{a - \sqrt{a + x}} \cdot \sqrt{a + x}} < 0, \forall x \in [0; \sqrt{a}] \Rightarrow f(x)$$
 là hàm nghịch biến.

Do đó dãy  $(x_n)$  được tách thành 2 dãy con  $(x_{2n})$  và  $(x_{2n+1})$ . Trong đó dãy  $(x_{2n})$  tăng, dãy  $(x_{2n+1})$  giảm. Mặt khác dãy  $(x_{2n})$  và  $(x_{2n+1})$  đều bị chặn suy ra  $\Rightarrow \exists \lim x_{2n}$  và  $\lim x_{2n+1}$ .

Đặt  $\lim x_{2n} = \alpha; \lim x_{2n+1} = \beta$ . Khi đó  $\alpha, \beta$  là nghiệm của phương trình:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} = x.$$

Xét hàm  $F(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} - x$ , với  $x \in [0; \sqrt{a}]$  có

$$F'(x) = \frac{1}{16\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{a + x}} \cdot \sqrt{a + x}} - 1$$

Với  $x \in [0; \sqrt{a}]$  ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a - \sqrt{a + x}} \cdot \sqrt{a + x} &\geq \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a}}} \cdot \sqrt{a} > \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a} + \frac{1}{4}}} \cdot \sqrt{a} \\ &= \sqrt{a - \sqrt{a} - \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a} > \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{2} > \sqrt{0,12} > 0,3. \end{aligned}$$

Thay vai trò của  $x$  bởi  $\sqrt{a - \sqrt{a + x}}$  chứng minh tương tự có

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}} > 0,3 \Rightarrow F'(x) < -0,9 < 0 \Rightarrow F(x) \text{ là hàm đồng biến.}$$

$\Rightarrow$  Phương trình  $F(x) - x = 0$  có nghiệm duy nhất  $\Rightarrow \alpha = \beta$ .

$$\Rightarrow \lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = \lim x_n.$$

Vậy có  $\lim x_n = T$  với  $T$  thỏa mãn  $f(f(T)) = T$ .

**Bài 154.** Cho dãy số  $(a_n)$  xác định như sau:  $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{a_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Hãy xét tính hội tụ của dãy.

**Giải.**

Dễ thấy  $a_n > 0, \forall n \geq 2$ .

Đặt  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ , ta có  $f(x)$  là hàm số nghịch biến nên  $f(f(x))$  là hàm số đồng biến.

Xét  $F(x) = f(f(x)) - x$ , ta có  $F'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x + x} \cdot \ln^2 4 - 1$ . Ta chứng minh  $F'(x) < 0, \forall x > 0$ .

Xét hàm số  $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + x$ , có  $g'(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \ln 4 + 1$ , lập bảng biến thiên ta thấy  $g(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 4}$ .

$\Rightarrow F'(x)$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\frac{1}{e \cdot \ln 4}$  khi  $x = \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 4}$ . Từ đó có  $F'(x) < 0, \forall x > 0$ , suy ra

$F(x)$  là hàm số nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ . Hơn nữa  $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , do đó có  $F(x) > 0, 0 < x < \frac{1}{2}$  và

$F(x) < 0, x > \frac{1}{2}$ . Ta thu được:  $\frac{1}{2} = f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) < f(f(x)) < x, \forall x > \frac{1}{2}$ .

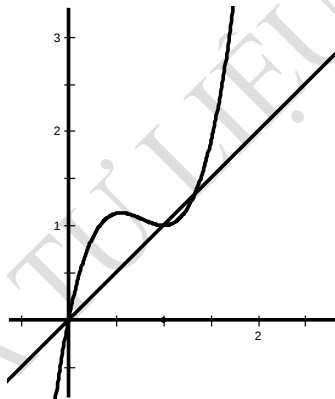
Do  $a_2 = 1 > \frac{1}{2}$ , dẫn đến  $a_4 = f(f(a_2)) < a_2$  và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  $(a_{2n})$  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi  $\frac{1}{2}$ . Do đó  $(a_{2n})$  có giới hạn hữu hạn  $\lim a_{2n} = \alpha$ . Chứng minh tương tự có  $(a_{2n+1})$  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi  $\frac{1}{2}$  nên có giới hạn hữu hạn  $\lim a_{2n+1} = \beta$ . Với  $\alpha, \beta$  là nghiệm của phương trình  $f(f(x)) = x$ . Từ chứng minh trên thu được  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ .

Vậy dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn  $\lim a_n = \frac{1}{2}$ .

**Bài 155.** Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi:  $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n \end{cases}$ . Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để dãy số có giới hạn hữu hạn.

**Giải.**

Khảo sát hàm số  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x$  và xét sự tương giao của nó với hàm số  $y = x$ , ta được đồ thị sau.



Kết hợp với bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  và đồ thị trên ta thấy:

+  $y = f(x)$  tăng trên  $(-\infty; \frac{5}{9})$ ;  $(1; +\infty)$  và giảm trên  $(\frac{5}{9}; 1)$ .

+  $y = f(\frac{5}{9}) < \frac{4}{3}$ .

+  $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \\ x = 1 \end{cases}$ .

+ Với  $x \in (0; 1) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$  thì  $f(x) > x$  và  $f(x) < x, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (1; \frac{4}{3})$ .

Lại có  $f\left(\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)\right) = \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ ,  $f\left(\left(1; \frac{4}{3}\right)\right) = \left(1; \frac{4}{3}\right)$  và  $f((-\infty; 0)) = (-\infty; 0)$ , mà trong các khoảng này  $y = f(x)$  là hàm số tăng, nên nếu  $a$  thuộc vào một trong các khoảng này thì  $(x_n)$  là dãy số đơn điệu.

- Với  $a \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$  thì  $x_2 = f(x_1) = f(a) > a$  mà  $f(x)$  lại là hàm số tăng trên miền này nên  $(x_n)$  là dãy tăng. Nếu  $(x_n)$  bị chặn trên thì  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn  $\alpha = \lim x_n$ , với  $\alpha$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = x \Rightarrow \alpha \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$  điều này mâu thuẫn vì  $x_n > x_1 = a > \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \lim x_n \geq a > \frac{4}{3}$ .

Vậy  $(x_n)$  không bị chặn trên, do đó  $(x_n)$  không có giới hạn hữu hạn.

- Với  $a \in (-\infty; 0)$ , chứng minh tương tự trường hợp trên suy ra  $(x_n)$  giảm và không bị chặn dưới, do đó cũng không có giới hạn hữu hạn.

- Với  $a \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$  thì dãy  $(x_n)$  giảm và bị chặn dưới bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn  $\alpha = \lim x_n$

với  $\alpha$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = x \Rightarrow \alpha \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$ , vì  $1 \leq \alpha \leq a < \frac{4}{3}$  suy ra  $\alpha = 1$ .

- Với  $a = 0; 1; \frac{4}{3}$  thì  $(x_n)$  là dãy hằng do đó có giới hạn tương ứng là  $0; 1; \frac{4}{3}$ .

- Với  $\alpha \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$  thì  $x_2 = f(x_1) = f(a) \in \left[1; \frac{4}{3}\right)$ , từ đó áp dụng phần trên suy ra dãy  $(x_n)$  giảm với mọi  $n \geq 2$  và có giới hạn là 1.

- Với  $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ , ta đi chứng minh tồn tại  $n \geq 2$  để  $x_n \geq \frac{1}{3}$ . Giả sử ngược lại  $x_n \leq \frac{1}{3}, \forall n \geq 1$ , do khi

đó  $f(x)$  là hàm tăng trên  $\left(0; \frac{1}{3}\right)$  và  $x_2 = f(x_1) = f(a) > a = x_1$  nên  $(x_n)$  là dãy số tăng, mà lại bị chặn suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn  $\alpha = \lim x_n$ , với  $\alpha$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = x \Rightarrow \alpha \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$ . Điều này vô lý vì  $0 < a \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ . Vậy tồn tại  $n$  sao cho  $x_n > \frac{1}{3}$ . Gọi  $n_0$  là

số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này, thì ta có  $x_{n_0-1} < \frac{1}{3}, x_{n_0} = f(x_{n_0-1}) < 1$  dẫn đến

$x_{n_0+1} = f(x_{n_0}) \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$  và khi đó áp dụng chứng minh trên ta suy ra kể từ  $n_0$  dãy số  $(x_n)$  là dãy số giảm và có giới hạn là 1.

**Bài 156.** Cho dãy số xác định như sau: 
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} - 2)x_n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$
. Tính  $u_{2014}$

Lời giải:

Ta có: 
$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Nên từ giả thiết ta có: 
$$x_{n+1} = \frac{x_n + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - x_n \cdot \tan \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Đặt } 2 = \tan \alpha \Rightarrow x_1 = \tan \alpha, \text{ suy ra } x_2 = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{12}} = \tan \left( \alpha + \frac{\pi}{12} \right)$$

Theo quy nạp ta dễ dàng suy ra:  $x_n = \tan \left( \alpha + (n-1) \frac{\pi}{12} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Vậy } x_{2014} = \tan \left( \alpha + 2013 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = \tan \left( \alpha + 168\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}$$

**Bài 157.** Cho dãy số thực  $(x_n)$  xác định như sau: 
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Tìm số hạng tổng quát  $x_n$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } x_1 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^3}$$

$$\text{Ta chứng minh } x_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (1)$$

Với  $n = 1$  mệnh đề (1) đúng

$$\text{Giả sử mệnh đề đúng đến } n = k \text{ tức là } x_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

Ta chứng minh mệnh đề (1) đúng đến  $n = k + 1$

$$\text{Thật vậy } x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} = \sqrt{2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} \right)} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$$

$$\text{Vậy } x_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

**Bài 158.** Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})x_n} \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, \dots \text{ Tìm } x_{2003}$$

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2} \\ \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (L)$$

$$\text{Suy ra } x_{n+1} = \frac{x_n + \tan \frac{\pi}{8}}{1 + \tan \frac{\pi}{8} x_n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Do đó } x_1 = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3},$$

$$x_2 = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{8}} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$x_3 = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right) + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{\pi}{8}} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$x_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{8}\right), \quad \forall n=1, 2, \dots$$

$$\text{Vậy } x_{2003} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2002 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{3} + \left(250\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = -(2 + \sqrt{3})$$

**Bài 159.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(x_n)$  cho bởi 
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ x_{n+1} = x_n^4 - 4x_n^2 + 2, \end{cases} \quad \forall n=1, 2, \dots$$

**Lời giải:**

Đặt  $x_n = 2y_n$ . Khi đó

$$2y_{n+1} = 16y_n^4 - 16y_n^2 + 2 \quad \forall n=1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} = 8y_n^4 - 8y_n^2 + 1 \quad \forall n=1, 2, \dots$$

$$\text{Ta có } y_1 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \cos \frac{\pi}{12}$$

Áp dụng công thức lượng giác  $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

Ta suy ra

$$y_2 = 8\cos^4 \frac{\pi}{12} - 8\cos^2 \frac{\pi}{12} + 1 = \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$$

$$y_3 = 8\cos^4\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right) - 8\cos^2\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right) + 1 = \cos\left(4^2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  $y_n = \cos\left(4^{n-1} \cdot \frac{\pi}{12}\right), \quad \forall n=1, 2, \dots$

$$\text{Vậy } x_n = 2\cos\left(4^{n-1} \cdot \frac{\pi}{12}\right), \quad \forall n=1, 2, \dots$$

**Bài 160.** Cho dãy số  $(x_n)$  định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ 25x_{n+1}x_n + 15x_{n+1} + 15x_n + 10 = \sqrt{25x_n^2 + 30x_n + 10} \end{cases} \quad \forall n=1, 2, \dots$$

Xác định số hạng tổng quát  $x_n$ .

**Lời giải:**

$$\text{Ta có } 25x_{n+1}x_n + 15x_{n+1} + 15x_n + 10 = \sqrt{25x_n^2 + 30x_n + 10}$$

$$\Leftrightarrow (5x_{n+1} + 3)(5x_n + 3) = \sqrt{(5x_n + 3)^2 + 1} - 1$$

Xét dãy số  $y_n = 5x_n + 3$ . Vậy ta có 
$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 3 = 1 \\ y_{n+1}y_n = \sqrt{y_n^2 + 1} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{n+1} = \frac{\sqrt{y_n^2 + 1} - 1}{y_n} \end{cases}$$

Ta chứng minh  $y_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Với  $n = 1$  mệnh đề trên đúng

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k$ , tức là  $y_k = \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với  $n = k + 1$ . Thật vậy:

$$y_{k+1} = \frac{\sqrt{y_k^2 + 1} - 1}{y_k} = \frac{\sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2^{k+1}} + 1} - 1}{\tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \tan \frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Vậy  $x_n = \frac{\tan \frac{\pi}{2^{k+1}} - 3}{5}$

**Bài 161. (VMO 2014)** Cho hai dãy số thực dương  $(x_n), (y_n)$ , trong đó  $x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$ ;

ngoài ra với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $\begin{matrix} x_{n+1}y_{n+1} - x_n = 0 \\ x_{n+1}^2 + y_n = 2 \end{matrix}$ . Chứng minh rằng hai dãy số nói trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng

**Lời giải:**

Từ giả thiết  $x_1 = 1 = 2 \sin \frac{\pi}{6}, y_1 = \sqrt{3} = 2 \cos \frac{\pi}{6}$

Suy ra  $x_2 = \sqrt{2 - y_1} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{6}} = 2 \sin \frac{\pi}{12}$  và  $y_2 = \frac{x_1}{x_2} = 2 \cos \frac{\pi}{12}$

Bằng chứng minh quy nạp ta chứng minh được

$$x_n = 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}; \quad y_n = 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Ta tính  $\lim x_n = \lim 2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 0$  và  $\lim y_n = \lim 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 2$

**Bài 162.** Tính giới hạn của dãy số thực  $(x_n)$  được xác định bởi

$$x_n = 2^n \sqrt[n+1]{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad \text{với } n = 1, 2, \dots$$

**Lời giải:**

Đặt  $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$  với  $n = 1, 2, \dots$ . Ta chứng minh  $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$  (\*)

Thật vậy ta có  $u_1 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^2}$

Khi  $n = 1$  mệnh đề (\*) đúng

Giả sử mệnh đề (\*) đúng khi  $n = k$  tức là  $u_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$ . Khi đó ta có

$$u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{2^{k+1}})} = \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\pi}{2^{k+1}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Do đó theo nguyên lý quy nạp (\*) đúng với mọi  $n$  thuộc  $\mathbb{N}^*$

Ta có

$$\begin{aligned} x_n &= 2^n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= 2^n \sqrt{2(1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}})} \\ &= 2^n \sqrt{2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim x_n = \frac{\pi}{2} \lim \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\pi}{2}$$

**Bài 163.** Cho  $a$  là số thực dương tùy ý. Xét dãy số  $(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) xác định bởi:

$$x_1 = a; x_{n+1} = \frac{x_n \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}{x_n + 1} \quad (\text{có } n \text{ số } 2 \text{ ở trên tử})$$

Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó

**Lời giải:**

Đặt  $y_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$  ta đã có kết quả ở bài 2  $y_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1, 2, \dots$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Để thấy  $x_n > 0$ . Đặt  $a_n = \frac{1}{x_n}$ . Khi đó từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n+1}} &= \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} + \frac{1}{2x_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \quad \forall n = 1, 2, \dots \\ \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{a_n}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} + \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } b_n = \frac{4a_n}{\sin \frac{\pi}{2^n}}. \text{ Từ (2) ta được } \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} b_{n+1}}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^n} b_n}{4 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} + \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{4}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \quad \forall n = 1, 2, \dots \Leftrightarrow b_{n+1} - 4 \cot \frac{\pi}{2^{n+1}} = b_n - 4 \cot \frac{\pi}{2^n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - 4 \cot \frac{\pi}{2^{n+1}} = b_n - 4 \cot \frac{\pi}{2^n} = b_{n-1} - 4 \cot \frac{\pi}{2^{n-1}} = \dots = b_1 - 4 \cot \frac{\pi}{2^1} = b_1$$

Do đó  $b_n = b_1 + 4 \cot \frac{\pi}{2^n}$ . Bởi vậy  $a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{2^n} \cdot b_n}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{4} \left( b_1 + 4 \cot \frac{\pi}{2^n} \right) = \frac{b_1 \sin \frac{\pi}{2^n}}{4} + \cos \frac{\pi}{2^n}$

Suy ra  $\lim a_n = \lim \left( \frac{b_1 \sin \frac{\pi}{2^n}}{4} + \cos \frac{\pi}{2^n} \right) = 1 \Rightarrow \lim x_n = \frac{1}{\lim a_n} = 1$

**Bài 164.** Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm  $\lim (2^n \cdot x_n)$ .

**Lời giải:**

Ta có nhận xét: Với mọi  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  ta luôn có:

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}-1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} - 1 = \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Áp dụng nhận xét trên dễ thấy  $x_1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = \tan \frac{\pi}{2^3}$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:  $x_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \forall n \geq 1$ .

Do đó  $\lim (2^n \cdot x_n) = \lim \left( 2^n \cdot \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = \lim \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

**Bài 165.** Cho hai dãy số  $(x_n), (y_n)$  như sau:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

Chứng minh rằng  $x_n y_n \in (2; 3) \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots$  và  $\lim y_n = 0$

**Lời giải:**

Đặt  $a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}$ . Ta có  $x_1 = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} = \cot a = \cot \frac{a}{2^0}$

$$x_2 = \cot a + \sqrt{1+\cot^2 a} = \cot a + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 a}} = \frac{1+\cos a}{\sin a} = \cot \frac{a}{2^1}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  $x_n = \cot \frac{a}{2^{n-1}}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Ta lại có  $y_1 = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} = \cot a = \cot \frac{b}{2^0}$

$$y_2 = \frac{\tan b}{1 + \sqrt{1 + \tan^2 b}} = \frac{\tan b}{1 + \frac{1}{\cos b}} = \tan \frac{b}{2^1}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  $y_n = \tan \frac{b}{2^{n-1}}$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{Do đó } x_n y_n = \cot \frac{a}{2^{n-1}} \tan \frac{b}{2^{n-1}} = \cot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{2}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Vì  $0 < \tan^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $\forall n \geq 2$  và hàm số  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  nên

$$2 < \frac{2}{1 - \tan^2 \frac{b}{3 \cdot 2^n}} < 3 \text{ vậy } x_n y_n \in (2; 3) \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots$$

Và dễ thấy  $\lim y_n = \lim \tan \frac{b}{2^{n-1}} = \tan 0 = 0$

**Bài 166.** Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

**Lời giải.**

Đặt  $y_n = \min\{x_n, x_{n+1}\}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)y_n = y_n$$

$$\Rightarrow y_n = \min\{x_n, x_{n+1}\} \leq \min\{x_n, x_{n+1}, \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1}\} \leq \min\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = y_{n+1}$$

Theo giả thiết thì dãy  $\{x_n\}$  bị chặn trên nên dãy  $\{y_n\}$  cũng bị chặn trên. Đồng thời, theo nhận xét trên thì dãy  $\{y_n\}$  nên nó hội tụ. Đặt  $\lim y_n = \ell$ .

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N$  nguyên dương sao cho với mọi  $n > N$  thì:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n < \ell + \frac{\varepsilon}{7}$ .

Theo định nghĩa của dãy  $\{y_n\}$ , suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n \leq x_n$ .

- Nếu  $x_n \leq \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  thì suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n < \ell + \frac{\varepsilon}{7}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim x_n = \ell$ .

- Nếu  $x_n > \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  thì theo định nghĩa của  $\{y_n\}$ , ta được  $x_{n+1} < \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  (vì nếu ngược lại thì suy ra rằng

$y_n > \ell + \frac{\varepsilon}{7}$ ). Do đó, ta có  $x_{n+1} \geq \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n-1} \Rightarrow x_n \leq 4x_{n+1} - 3x_{n-1} \leq 4\left(\ell + \frac{\varepsilon}{7}\right) - 3\left(\ell - \frac{\varepsilon}{7}\right) = \ell + \varepsilon$ , tức

là:

$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$  nên theo định nghĩa giới hạn thì dãy  $\{x_n\}$  cũng hội tụ về  $\ell$ .

Vậy trong mọi trường hợp, dãy đã cho đều có giới hạn. Ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Bài toán này đã từng xuất hiện trên tạp chí THPT. Một bài toán tương tự quen thuộc hơn đã có trong đề chọn đội tuyển của Việt Nam 1988:

Cho  $\{u_n\}$  là dãy bị chặn thỏa mãn:  $2a_{n+2} \leq a_n + a_{n+1}, \forall n$ . Chứng minh rằng dãy  $\{a_n\}$  này hội tụ.

\*Các bài này đều có thể tổng quát lên thành:

Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq px_{n+1} + qx_n, n = 1, 2, 3, \dots \text{ trong đó } p + q = 1, p, q > 0$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

(Nếu đổi điều kiện chặn trên thành chặn dưới thì điều kiện của dãy cũng tương ứng đổi thành

$$x_{n+2} \leq px_{n+1} + qx_n).$$

**Bài 167.** (Romania 2007) Cho  $a \in (0, 1)$  và dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_0 = a$ ,  $x_{n+1} = x_n(1-x_n^2)$  với mọi  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Hãy tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n$ .

**Phân tích.** Dạng  $\sqrt{n}x_n$  gợi cho chúng ta nhớ đến định lý trung bình Cesaro. Tuy nhiên để dãy thực sự có dạng này  $\left(\frac{x_n}{n}\right)$  ta phải xét bình phương của dãy và nghịch đảo lại, tức là  $\frac{1}{nx_n^2}$ . Từ đó dẫn đến việc xét hiệu  $\frac{1}{x_{n+2}^2} - \frac{1}{x_n^2}$ .

**Lời giải.**

Để dàng chứng minh được rằng dãy  $\{x_n\}$  giảm và bị chặn dưới bởi 0. Từ đó dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn. Chuyển hệ thức truy hồi sang giới hạn, ta dễ dàng tính được  $\lim x_n = 0$ .

$$\text{Xét } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - x_n^2(1-x_n^2)^2}{x_n^2(1-x_n^2)^2 x_n^2} = \frac{2-x_n^2}{(1-x_n^2)^2} \rightarrow 2$$

Từ đó, theo định lý trung bình Cesaro ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} = 2$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Bài 168.** Dãy số  $\{u_n\}$  vô hạn,  $n = 1, 2, \dots$  xác định như

$$\text{sau: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 \cdot u_2 \dots u_n \end{cases} \quad (n = 1; 2; 3; \dots). \text{ Đặt } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}. \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= 1 + u_1 \cdot u_2 \dots u_i, \quad \forall i = 1; 2; \dots \\ \Rightarrow u_{i+1} - 1 &= u_i (u_1 \cdot u_2 \dots u_{i-1} + 1 - 1) \\ \Rightarrow u_{i+1} - 1 &= u_i (u_i - 1), \quad \forall i = 2; 3; \dots \end{aligned}$$

Mặt khác hiển nhiên ta có  $u_i > 1 \quad \forall i = 2, 3, \dots$

Từ các lập luận trên ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{i+1} - 1} &= \frac{1}{u_i (u_i - 1)} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_i} \quad \forall i = 2, 3, \dots \\ \Rightarrow S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$$

$$\text{Do } u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 u_3 \dots u_n > u_1 (1 + u_1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$

(Chú ý: Do  $u_2 = 1 + u_1$ ;  $u_3 = 1 + u_1 u_2 = 1 + u_1(1 + u_1) > 1 + u_1 \Rightarrow u_n > 1 + u_1 \Rightarrow u_1 u_2 \dots u_n > u_1(1 + u_1)^{n-1}$ )

**Bài 169.**

Cho dãy  $\{u_n\}$  thỏa mãn điều

kiện  $u_{n+1} = \sqrt{u_n} = \sqrt{u_{n-1}}$ ,  $u_0 = u_1$ . Chứng minh rằng dãy  $\{u_n\}$  có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Xác định các dãy  $\{a_n\}$  và  $\{b_n\}$  như sau:  $a_n = 2\sqrt{a_{n-1}} \forall n \geq 1$ ;  $b_n = 2\sqrt{b_{n-1}}, \forall n \geq 1$ .

$$a_0 = \min\{u_0; u_1; 4\}, b_0 = \max\{u_0; u_1; 4\}$$

Bằng phương pháp quy nạp theo  $n$ , ta sẽ chứng minh được các bất đẳng thức sau:

$$a_1 \leq 4 \text{ và } a_n < a_{n+1} \forall n \quad (2)$$

$$b_1 \geq 4 \text{ và } b_n < b_{n+1} \forall n \quad (3)$$

$$a_n \leq \min\{u_{2n}; u_{2n+1}\} \leq \max\{u_{2n}; u_{2n+1}\} \leq b_n \quad (4)$$

Từ (2) và (3) các hệ thức xác định  $a_n; b_n$  suy ra các dãy  $\{a_n\}$  và  $\{b_n\}$  có giới hạn

$$\text{và } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n) = 4$$

$$\text{Từ (4) suy ra } \frac{a_n}{2} \leq u_n \leq \frac{b_n}{2} \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} = 4$$

**Bài 170.** Cho  $\{x_n\}$  được xác định như sau:  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right), \forall n \geq 2, a > 0, x_1 > 0$

Chứng minh rằng dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của dãy

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{a}{x_1} \right) \geq \sqrt{a} > 0$$

Bằng phương pháp quy nạp và bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra  $x_n \geq \sqrt{a} > 0$  tức  $\{x_n\}$  bị chặn dưới bởi  $\sqrt{a}$

$$\text{Mặt khác, ta có: } \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2x_{n-1}^2} = 1 \text{ và } x_{n-1} \geq \sqrt{a}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1$$

Do đó  $x_n \leq x_{n-1}$  hay  $\{x_n\}$  là dãy giảm. Kết hợp với điều kiện dãy bị chặn, ta suy ra dãy  $\{x_n\}$  hội tụ về  $a$

Từ hệ thức quy nạp, chuyển qua giới hạn, ta thu được  $a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{a}{a} \right) \Leftrightarrow a^2 = a$

Vì  $a > 0$  nên  $a = \sqrt{a}$ .

Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{a}$

**Bài 171.** Cho dãy  $\{y_n\}$  được xác định như sau:  $y_n = \frac{1}{3} \left( 2y_{n-1} + \frac{a}{y_{n-1}^2} \right), \forall n \geq 2, a > 0, y_1 > 0$

Chứng minh rằng dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của dãy

**Lời giải.**

Tương tự như Bài toán 2, dùng phương pháp quy nạp và bất đẳng thức Cauchy ta suy ra

$$\text{Mặt khác } y_n = \frac{1}{3} \left( 2y_{n-1} + \frac{a}{y_{n-1}^2} \right) \geq \sqrt[3]{a} \Rightarrow \frac{y_n}{y_{n-1}} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow y_n \leq y_{n-1}$$

Vậy dãy số  $\{y_n\}$  hội tụ từ hệ thức quy nạp ta suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sqrt[3]{a}$

**Bài 172.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó

**Lời giải.**

$$\text{Ta thấy } u_n > 0, \forall n \text{ và từ: } u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 1 + \frac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 - \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1},$$

ta có:  $1 < u_n < 2, \forall n$ .

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in (1; 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1 - x^2)}{x^2 + x + 1} < 0.$$

Suy ra là hàm này nghịch biến trên  $(1; 2)$ .

$$\text{Dãy số đã cho có thể viết dưới dạng: } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta thấy: } u_1 = 1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 < u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5.$$

Tiến hành tương tự, suy ra:

$$u_1 < u_3 < u_5 < \dots \Rightarrow \text{Dãy } u_{2n+1} \text{ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là } \alpha \in [1; 2].$$

$$u_2 > u_4 > u_6 > \dots \Rightarrow \text{Dãy } u_{2n} \text{ giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là } \beta \in [1; 2].$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \end{cases}. \text{Chuyển qua giới hạn, ta có: } \begin{cases} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha - \beta &= f(\beta) - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\beta^2 + 4\beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1} \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta &= 3 \left( \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha + 1} \right) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)}{(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 3(\alpha\beta - 1) = (\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy phương trình thứ hai không có giá trị  $\alpha, \beta \in [1; 2]$  thỏa mãn  $\alpha = \beta = t$ .

Do đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = t$ , hai dãy con đã có cùng giới hạn là  $t$ .

Ta thấy,  $t$  phải thỏa mãn đẳng thức:  $t = \frac{t^2 + 4t + 1}{t^2 + t + 1} \Leftrightarrow t^3 - 3t = 1 \quad (*)$ .

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm  $|t| \leq 2$ . Đặt  $t = 2 \cos \varphi$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ , thay vào phương trình (\*):

$$8 \cos^3 \varphi - 6 \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}. \text{ Do } \varphi \in [0; 2\pi] \text{ nên:}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}, \text{ tương ứng với các nghiệm của } (*) \text{ là: } t = 2 \cos \frac{\pi}{9}; 2 \cos \frac{5\pi}{9}; 2 \cos \frac{7\pi}{9}.$$

Phương trình (\*) đã cho đủ 3 nghiệm nên đã không có nghiệm  $|t| > 2$ .

Trong các nghiệm này, chỉ có  $t = 2 \cos \frac{\pi}{9} \in [1; 2]$  thỏa mãn vì vậy cũng chính là giới hạn cần tìm.

Vậy dãy số  $u_n$  có giới hạn hữu hạn và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \cos \frac{\pi}{9}$ .

**Bài 173.** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n^2}{a_n} + \frac{a_n}{n^2} + 2 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$ . Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n).$$

**Lời giải.**

$$\text{Từ giả thiết ta thu được } a_{n+1} = \left( \frac{n}{\sqrt{a_n}} + \frac{\sqrt{a_n}}{n} \right)^2 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{a_n}} + \frac{\sqrt{a_n}}{n} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Đặt } b_n = \sqrt{a_n} \text{ thì ta có } \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \frac{n}{b_n} + \frac{b_n}{n} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } x = \frac{n}{x} + \frac{x}{n} \text{ có nghiệm } x = \frac{n}{\sqrt{n-1}} \quad \forall n > 1.$$

Xét hai dãy số  $(x_n)$  và  $(y_n)$  thỏa mãn  $x_n = \frac{n}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$  và  $y_n = \frac{n-\frac{1}{2}}{\sqrt{n-\frac{3}{2}}}$ .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $x_n < b_n < y_n$  (\*)

Với  $n = 1, 2$ , dễ thấy (\*) đúng.

Giả sử (\*) đúng đến  $k \leq n \Rightarrow x_k < b_k < y_k$ . Dễ thấy hàm  $f(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x}$  nghịch biến trên  $(0; n)$  nên do đó

$$f(x_k) > f(b_k) > f(y_k) \Rightarrow y_{k+1} > b_{k+1} > x_{k+1} \quad (\text{Dễ thấy } f(x_k) = y_{k+1}; f(y_k) = x_{k+1}; f(b_k) = b_{k+1}).$$

Vậy (\*) cũng đúng đến  $k+1$  nên theo nguyên lý quy nạp thì (\*) đúng với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Vậy ta được  $\frac{n^2}{n-\frac{1}{2}} < b_n^2 < \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{n-\frac{3}{2}}$ . Dễ thấy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n-\frac{1}{2}} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{n-\frac{3}{2}} - n = \frac{1}{2}$  nên ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n^2 - n) = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = \frac{1}{2}.$$

**Bài 174.** Cho các dãy số  $(x_n), (y_n)$  được xác định như sau

$$x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng các dãy số  $(x_n), (y_n)$  hội tụ và  $\lim x_n = \lim y_n$ .

**Lời giải.**

Ta xét hai trường hợp sau:

(i) Nếu  $a \geq b$  thì bằng quy nạp ta chỉ ra được dãy  $(x_n)$  là dãy giảm bị chặn dưới bởi  $a$ , còn dãy  $(y_n)$  là dãy tăng bị chặn trên bởi  $a$ . Do đó theo **định lý 1.7** tồn tại  $\lim x_n, \lim y_n$  và từ giả thiết chuyển qua giới hạn ta được  $\lim x_n = \lim y_n$ .

(ii) Nếu  $a \leq b$  tương tự như trường hợp (i).

**Bài 175.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}, \forall n \geq 1$ .

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Dễ thấy bằng quy nạp ta chỉ ra được  $(x_n)$  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 4. Do đó theo **định lý**

**1.7** ta có tồn tại  $\lim x_n = a$ . Từ đẳng thức  $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$  chuyển qua giới hạn ta được  $a = 2\sqrt{a}$  nhưng do  $a > 0$  nên chỉ lấy  $a = 4$ . Vậy  $\lim a_n = 4$ .

**Bài 176.** Cho dãy  $(u_n)$  như sau:  $\begin{cases} u_1 = 2,7 \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ .

Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Lời giải.**

Ta có:

$$u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow (u_{n+1} - 1)^3 = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

• Do  $u_1 = 2,7 > 0$  nên bằng quy nạp ta chứng minh được  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

• Xét hàm  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ , với  $x > 1$ , có  $(1; +\infty) f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$  với mọi  $x > 1$ . Do đó  $f(x)$  là hàm đồng biến.

• Lại có  $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ , và  $u_1 = 2,7 > u_2 = \sqrt[3]{2,7} + 1$  nên ta suy ra được  $(u_n)$  là dãy giảm mà lại bị chặn dưới tại 1 nên dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 177.** (Hà Tĩnh) Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

**Lời giải.**

Đặt  $y_n = \min\{x_n, x_{n+1}\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy

$$\begin{aligned} x_{n+2} &\geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)y_n = y_n \Rightarrow y_n = \min\{x_n, x_{n+1}\} \leq \min\left\{x_n, x_{n+1}, \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1}\right\} \\ &\leq \min\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = y_{n+1} \end{aligned}$$

Theo giả thiết thì dãy  $\{x_n\}$  bị chặn trên nên dãy  $\{y_n\}$  cũng bị chặn trên. Đồng thời, theo nhận xét trên thì dãy  $\{y_n\}$  nên nó hội tụ. Đặt  $\lim y_n = \ell$ .

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N$  nguyên dương sao cho với mọi  $n > N$  thì:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n < \ell + \frac{\varepsilon}{7}$ .

Theo định nghĩa của dãy  $\{y_n\}$ , suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n \leq x_n$ .

- Nếu  $x_n \leq \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  thì suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n < \ell + \frac{\varepsilon}{7}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim x_n = \ell$ .

- Nếu  $x_n > \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  thì theo định nghĩa của  $\{y_n\}$ , ta được  $x_{n+1} < \ell + \frac{\varepsilon}{7}$

(vì nếu ngược lại thì suy ra rằng  $y_n > \ell + \frac{\varepsilon}{7}$ ).

Do đó, ta có  $x_{n+1} \geq \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n-1} \Rightarrow x_n \leq 4x_{n+1} - 3x_{n-1} \leq 4\left(\ell + \frac{\varepsilon}{7}\right) - 3\left(\ell - \frac{\varepsilon}{7}\right) = \ell + \varepsilon$ , tức là:

$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$  nên theo định nghĩa giới hạn thì dãy  $\{x_n\}$  cũng hội tụ về  $\ell$ .

Vậy trong mọi trường hợp, dãy đã cho đều có giới hạn.

### Nhận xét.

Bài toán này đã từng xuất hiện trên tạp chí THPT. Một bài toán tương tự quen thuộc hơn đã có trong đề chọn đội tuyển của Việt Nam 1988:

Cho  $\{u_n\}$  là dãy bị chặn thỏa mãn:  $2a_{n+2} \leq a_n + a_{n+1}, \forall n$ . Chứng minh rằng dãy  $\{a_n\}$  này hội tụ.

\*Các bài này đều có thể tổng quát lên thành:

Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq px_{n+1} + qx_n, n = 1, 2, 3, \dots \text{ trong đó } p + q = 1, p, q > 0$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

(Nếu đổi điều kiện chặn trên thành chặn dưới thì điều kiện của dãy cũng tương ứng đổi thành  $x_{n+2} \leq px_{n+1} + qx_n$ ).

**Bài 178. (Romania 2007)** Cho  $a \in (0; 1)$  và dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_0 = a$ ,

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n^2) \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots \text{ Hãy tính } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n.$$

**Phân tích.** Dạng  $\sqrt{n}x_n$  gợi cho chúng ta nhớ đến định lý trung bình Cesaro. Tuy nhiên để dãy thực sự có dạng này ( $x_n/n$ ) ta phải xét bình phương của dãy và nghịch đảo lại, tức là  $\frac{1}{nx_n^2}$ .

Từ đó dẫn đến việc xét hiệu  $\frac{1}{x_{n+2}^2} - \frac{1}{x_n^2}$ .

### Lời giải.

Để dàng chứng minh được rằng dãy  $x_n$  giảm và bị chặn dưới bởi 0. Từ đó dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn. Chuyển hệ thức truy hồi sang giới hạn, ta dễ dàng tính được  $\lim x_n = 0$ .

$$\text{Xét } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - x_n^2(1 - x_n^2)^2}{x_n^2(1 - x_n^2)^2 x_n^2} = \frac{2 - x_n^2}{(1 - x_n^2)^2} \rightarrow 2$$

Từ đó, theo định lý trung bình Cesaro ta suy ra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} = 2 \text{ Suy ra } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{n}x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Bài 179.** Cho dãy  $\{u_n\}$  thỏa mãn điều kiện

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} = \sqrt{u_{n-1}}, u_0 = u_1$$

Chứng minh rằng dãy  $\{u_n\}$  có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

### Lời giải.

Xác định các dãy  $\{a_n\}$  và  $\{b_n\}$  như sau:

$$a_n = 2\sqrt{a_{n-1}} \text{ và } b_n = 2\sqrt{b_{n-1}}, \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \min \{u_0, u_1, 4\}; b_0 = \max \{u_0, u_1, 4\}$$

Bằng phương pháp quy nạp theo  $n$ , ta sẽ chứng minh được các bất đẳng thức sau:

$$a_n \leq 4 \text{ và } a_n \leq a_{n+1} \forall n \quad (2)$$

$$b_n \geq 4 \text{ và } b_n \leq b_{n+1} \forall n \quad (3)$$

$$a_n \leq \min \{u_{2n}, u_{2n+1}\} \leq \max \{u_{2n}, u_{2n+1}\} \leq b_n \quad (4)$$

Từ (2) và (3) các hệ thức xác định  $a_n, b_n$  suy ra các dãy  $\{a_n\}, \{b_n\}$  có giới hạn và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

Từ (4) suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4 \frac{a_n}{2} \leq u_n \leq \frac{b_n}{2} \forall n$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4$

**Bài 180.** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{n^2}{a_n} + \frac{a_n}{n^2} + 2 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n)$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết ta thu được  $a_{n+1} = \left( \frac{n}{\sqrt{a_n}} + \frac{\sqrt{a_n}}{n} \right)^2 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{a_n}} + \frac{\sqrt{a_n}}{n} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Đặt  $b_n = \sqrt{a_n}$  thì ta có 
$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \frac{n}{b_n} + \frac{b_n}{n} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Xét phương trình  $x = \frac{n}{x} + \frac{x}{n}$  có nghiệm  $x = \frac{n}{\sqrt{n-1}} \quad \forall n > 1$ .

Xét hai dãy số  $(x_n)$  và  $(y_n)$  thỏa mãn  $x_n = \frac{n}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$  và  $y_n = \frac{n-\frac{1}{2}}{\sqrt{n-\frac{3}{2}}}$ .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $x_n < b_n < y_n$  (\*)

Với  $n = 1, 2$ , dễ thấy (\*) đúng.

Giả sử (\*) đúng đến  $k \leq n \Rightarrow x_k < b_k < y_k$ . Dễ thấy hàm  $f(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x}$  nghịch biến trên  $(0; n)$  nên do đó

$$f(x_k) > f(b_k) > f(y_k) \Rightarrow y_{k+1} > b_{k+1} > x_{k+1} \quad (\text{Dễ thấy } f(x_k) = y_{k+1}; f(y_k) = x_{k+1}; f(b_k) = b_{k+1})$$

Vậy (\*) cũng đúng đến  $k+1$  nên theo nguyên lý quy nạp thì (\*) đúng với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Vậy ta được  $\frac{n^2}{n-\frac{1}{2}} < b_n^2 < \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{n-\frac{3}{2}}$ . Dễ thấy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n-\frac{1}{2}} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{n-\frac{3}{2}} - n = \frac{1}{2}$  nên ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n^2 - n) = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = \frac{1}{2}.$$

**Bài 181.** Cho các dãy số  $(x_n), (y_n)$  được xác định như sau

$$x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng các dãy số  $(x_n), (y_n)$  hội tụ và  $\lim x_n = \lim y_n$ .

**Lời giải.**

Ta xét hai trường hợp sau:

(i) Nếu  $a \geq b$  thì bằng quy nạp ta chỉ ra được dãy  $(x_n)$  là dãy giảm bị chặn dưới bởi  $a$ , còn dãy  $(y_n)$  là dãy tăng bị chặn trên bởi  $a$ . Do đó theo **định lý 1.7** tồn tại  $\lim x_n, \lim y_n$  và từ giả thiết chuyển qua giới hạn ta được  $\lim x_n = \lim y_n$ .

(ii) Nếu  $a \leq b$  tương tự như trường hợp (i).

**Bài 182.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}, \forall n \geq 1$ .

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Dễ thấy bằng quy nạp ta chỉ ra được  $(x_n)$  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 4.

Do đó theo **định lý 1.7** ta có tồn tại  $\lim x_n = a$ . Từ đẳng thức  $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$  chuyển qua giới hạn ta được  $a = 2\sqrt{a}$  nhưng do  $a > 0$  nên chỉ lấy  $a = 4$ . Vậy  $\lim a_n = 4$ .

**Bài 183.** Cho dãy  $(u_n)$  như sau:  $\begin{cases} u_1 = 2, 7 \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Lời giải.**

$$u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow (u_{n+1} - 1)^3 = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

• Do  $u_1 = 2, 7 > 0$  nên bằng quy nạp ta chứng minh được  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

• Xét hàm  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ , với  $x > 1$ , có  $(1; +\infty) f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$  với mọi  $x > 1$ . Do đó

$f(x)$  là hàm đồng biến.

• Lại có  $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ , và  $u_1 = 2, 7 > u_2 = \sqrt[3]{2, 7} + 1$  nên ta suy ra được  $(u_n)$  là dãy giảm mà lại bị chặn dưới tại 1 nên dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 184.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $\begin{cases} u_1 = 2, 9 \\ u_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Giải.** Xét hàm  $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \forall x > 1$ , có:  $f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x^2 - 1})^3}, \forall x > 1$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .

• Ta chứng minh  $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Thật vậy:

✓ Bài toán đúng với  $n = 1$ .

✓ Giả sử bài toán đúng với  $n = k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  ta chứng minh bài toán đúng với  $n = k + 1$ .

Ta có:  $u_{k+1} = f(u_k)$ , mà:  $u_k > \sqrt{3} \Rightarrow f(u_k) < f(\sqrt{3})$  (Do  $f(x)$  là hàm giảm)

$$\Rightarrow u_{k+1} < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Lại có } u_k > \sqrt{3} > 0 \Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{3} + \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2 - 1}} > \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

• Do  $u_{n+1} = f(u_n)$  và  $f(x)$  là hàm nghịch biến nên  $(u_n)$  tách hàm làm 2 dãy:  $(u_{2k+1})$  và  $(u_{2k})$  trong đó có một dãy tăng và một dãy giảm, lại có dãy  $(u_n)$  bị chặn  $\Rightarrow \exists \lim(u_{2k+1}); \lim(u_{2k})$ .

Đặt  $\lim u_{2k+1} = a$ ;  $\lim u_{2k} = b$  thì  $a$  và  $b$  là nghiệm của phương trình  $f(f(x)) = x$ .

Xét hàm  $F(x) = f(f(x)) - x$ ,  $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ , có  $F'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) - 1$ .

Do  $f(x) > \sqrt{3}$  với mọi  $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$  và  $0 > f'(x) > -\frac{1}{8}$  nên  $-\frac{1}{8} < f'(f(x)) < 0$

$\Rightarrow F'(x) < 0 \Rightarrow$  phương trình  $F(x) = 0$  có nghiệm duy nhất là  $a$ .

$$\Rightarrow \lim u_{2k+1} = \lim u_{2n} = \lim u_n = a.$$

Vậy dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Bài 185.** Cho dãy số  $(x_n)$ ,  $(n \geq 1)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $0 < x_1 < 1$  và

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, \forall n \geq 1. \text{ Chứng minh rằng dãy } (x_n) \text{ có giới hạn hữu hạn khi } n \rightarrow +\infty.$$

**Lời giải:**

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Ta có } x_2 < 2x_1, x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $x_n < nx_1, \forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

Vì vậy tồn tại số nguyên  $m \geq 2$  sao cho  $x_m < m - 1$ .

$$\text{Ta có } x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ là dãy tăng}$$

$$\text{Giả sử } n > m (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq 3.$$

$$\text{Với } k \in \mathbb{N}^* \text{ ta có } \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{k^2}{k^2 x_k + x_k^2} = \frac{1}{x_k + k^2} < \frac{1}{k^2}.$$

$$\text{Giả sử } n > m (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n \geq 3.$$

Ta có  $\sum_{k=m}^{n-1} \left( \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ . Suy ra  $\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} < \frac{1}{m-1}$ .

Suy ra  $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1} > 0$ . suy ra  $x_m < \frac{(m-1)x_m}{m-1-x_m}$ . Vậy dãy  $(x_n)$  có giới hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Chú ý rằng chúng ta có thể chứng minh được  $x_n + n^2 \geq \sqrt{x_1}n(n+1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài 186.** Cho dãy số thực  $(x_n)$  được xác định bởi  $x_1 = 1$  và  $x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ ,  $\forall n \geq 2$ . Với

mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $y_n = x_{n+1} - x_n$ . Chứng minh rằng dãy số  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x_n &= \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \Rightarrow x_n \left[ 1 + \frac{2n}{(n-1)^2} \right] = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{2n}{(n-1)^2} \\ &\Rightarrow x_n \frac{n^2+1}{2n} = \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } x_{n+1} \frac{n^2}{2(n+1)} = \sum_{i=1}^n x_i \text{ nên } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right), \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow x_n = x_{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{n-1} \right], \quad (n \geq 3)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} y_n &= x_{n+1} - x_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n. \\ &= \frac{n^2+n+1}{n^3} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right] \dots \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \right] \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) \left( 1 + \frac{1}{n-2} \right) \dots \left( 1 + \frac{1}{2} \right) x_2 \\ &= \frac{2(n^2+n+1)}{n^2} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(n-2)^2} \right] \dots \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \right], \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

Xét dãy  $(z_n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) được xác định bởi :

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = 1, \quad z_n = \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{3^2} \right] \dots \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)^2} \right], \quad (n \geq 3) \Rightarrow y_n = \frac{2(n^2+n+1)}{n^2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

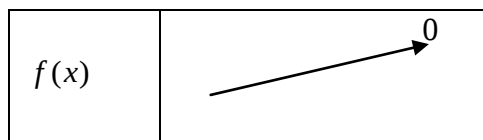
Hiển nhiên dãy  $(z_n)$  là dãy tăng.

**Ta chứng minh bất đẳng thức :**  $\ln(1+x) < x$  (1),  $\forall x > 0$

Thật vậy xét hàm số  $f(x) = x - \ln(1+x)$ , ( $x \geq 0$ )

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, \quad \forall x > 0$$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |   | +         |



$\Rightarrow f(x) > f(0), \forall x > 0 \Rightarrow$  bất đẳng thức (1) đúng.

Hiển nhiên  $z_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$

Với  $n \geq 3$  ta có:  $\ln z_n < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} < 1$

$z_n < e. (\forall n \geq 3)$

Dãy  $(z_n)$  bị chặn trên  $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2a$

Vậy dãy  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm học 2011-2012 có bài toán sau

**Bài 187.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi  $x_1 = 3$  và  $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$  với mọi  $n \geq 2$ .

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm giới hạn đó.

**Cách tiếp cận lời giải:** Giả sử  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  suy ra  $a = 1$ . Mặt khác  $x_1 = 3, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = \frac{80}{27}$

$x_4 = \frac{67}{27}$ . Như vậy chúng ta có thể dự đoán rằng  $x_{n-1} > x_n, \forall n \geq 3$ .

Mặt khác  $x_{n-1} > x_n \Leftrightarrow x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1}$ . Chúng ta có lời giải của bài toán như sau:

**Lời giải:**

Ta có  $x_1 = 3, x_2 = \frac{10}{3}$ . Ta chứng minh  $x_n > 1 + \frac{3}{n} (1)$  với mọi  $n \geq 2 (n \in \mathbb{N}^*)$

Thật vậy (1) đúng với  $n = 2$  giả sử (1) đúng với  $n = k (k \geq 2)$  tức là  $x_k > 1 + \frac{3}{k}$ .

Ta có  $x_{k+1} = \frac{k+3}{3(k+1)}(x_k + 2) > \frac{k+3}{3(k+1)}\left(3 + \frac{3}{k}\right) = \frac{k+3}{k} > 1 + \frac{3}{k+1}$ , tức là (1) cũng đúng với

$n = k + 1$ . Theo nguyên lí quy nạp thì (1) đúng với mọi  $n \geq 2$

Với  $n \geq 3$  ta có  $x_{n-1} - x_n = x_{n-1} - \frac{n+2}{3n}x_{n-1} - \frac{2(n+2)}{3n} = \frac{2n-2}{3n}x_{n-1} - \frac{2(n+2)}{3n}$

Vì  $x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1}$  nên  $x_{n-1} - x_n > \frac{2n-2}{3n}\left(1 + \frac{3}{n-1}\right) - \frac{2(n+2)}{3n} = 0$ . Vậy  $x_{n-1} > x_n, \forall n \geq 3$

Mặt khác  $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Vậy dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Đặt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a (a \geq 1)$  ta có  $a = \frac{1}{3}(a + 2) \Rightarrow a = 1$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2013 có hai bài toán sau

**Bài 188.** Cho dãy số thực  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_1 = 1$  và  $a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}}$  với mọi  $n \geq 1$ .

Chứng minh rằng dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Lời giải:**

Ta có  $a_1=1, a_2=\frac{3}{2}, a_3=3-\frac{7}{4\sqrt{2}}$ .

Xét hàm số  $f(x)=3-\frac{2+x}{2^x}$  ( $x \geq 0$ ). Ta có  $f'(x)=\frac{2^x(x+2)\ln 2-2^x}{2^{2x}} > 0, \forall x > 0$ .

Suy ra  $f(x)$  đồng biến trên  $[0; +\infty) \Rightarrow f(x) > 0, \forall x > 0$  và  $a_{n+1}=f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Suy ra dãy  $(a_n)$  là dãy tăng. Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được

$\frac{3}{2} < a_n < 2, \forall n \geq 3$ . Vậy dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Đặt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$  ( $3-\frac{7}{4\sqrt{2}} < b \leq 2$ ) ta có  $b=3-\frac{2+b}{2^b} \Rightarrow 2^b(3-b)-b-2=0$

Xét hàm số  $g(x)=2^x(3-x)-x-2$  ( $2 \geq x > 3-\frac{7}{4\sqrt{2}}$ ).

Ta có:  $g'(x)=2^x[(3-x)\ln 2-1]-1 < 0, \forall x \in (3-\frac{7}{4\sqrt{2}}; 2)$ .

Mặt khác  $g(x)$  liên tục trên  $(3-\frac{7}{4\sqrt{2}}; 2]$ .

Vậy  $g(x)$  nghịch biến trên  $(3-\frac{7}{4\sqrt{2}}; 2]$ . Mặt khác  $g(2)=0$ . Vậy phương trình  $g(x)=0$  có một nghiệm duy nhất  $x=2$ . Vậy  $b=2$ .

Tóm lại dãy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$ .

**Bài 189.** Cho dãy số  $(x_n)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) được xác định như sau  $x_1=1$  và

$x_{n+1}=\sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$  với  $n=1, 2, 3, \dots$ . Đặt  $y_n=\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i+2}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Tìm

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**Lời giải**

Ta có  $x_2=5$  và  $x_n > 0$  với mọi  $n=1, 2, 3, \dots$

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}=\sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1}=x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1}+1=x_n^2+3x_n+2=(x_n+1)(x_n+2).$$

$$\frac{1}{x_{n+1}+1}=\frac{1}{(x_n+1)(x_n+2)}=\frac{1}{x_n+1}-\frac{1}{x_n+2} \Rightarrow \frac{1}{x_n+2}=\frac{1}{x_n+1}-\frac{1}{x_{n+1}+1}.$$

$$\text{Do đó } y_n=\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i+2}=\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i+1}-\frac{1}{x_{i+1}+1} \right)=\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_{n+1}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x_{n+1}+1}.$$

Từ (1)  $x_{k+1}=x_k^2+3x_k+1 > 3x_k \geq 3 \cdot 3^{k-1}=3^k$ .

Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp  $x_n > 3^{n-1}$  (2)

Nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}$  (vì do (2)  $x_{n+1} > 3^n$ )

Ta có thể chứng minh  $\lim x_n = +\infty$  với cách khác:

Để thấy  $(x_n)$  là dãy tăng, giả sử  $\lim x_n = a$  ( $a \geq 1$ ). Nên ta có  $a = \sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$

Suy ra  $a^2 = a(a+1)(a+2)(a+3)+1$  hay  $a^4 + 6a^3 + 10a^2 + 6a + 1 = 0$ .

Rõ ràng phương trình này không có nghiệm thỏa mãn ( $a \geq 1$ ). Vậy  $\lim x_n = +\infty$ .

**Bài 190.** Cho dãy  $(x_n)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad (n=2, 3, \dots) \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy  $(y_n)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) với  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Lời giải**

Từ giả thiết ta có  $x_n > 0, \forall n \geq 1$

Ta có  $x_n - x_{n-1} = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}}{2} > 0, \forall n \geq 2$ .

Do đó dãy  $(x_n)$  tăng. Giả sử  $\lim x_n = a$  thì  $a > 0$  và  $a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0$  (vô lý).

Vậy  $\lim x_n = +\infty$

Từ  $x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 2$  suy ra  $x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 2$ .

Do đó

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n} \quad \forall n \geq 2$$

Suy ra  $y_n < 6, \forall n \geq 1$  và dãy  $(y_n)$  tăng vì  $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{x_n} > y_{n-1}$ .

Vậy  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn và  $\lim y_n = 6$ .

**Bài 191.** Xét dãy số  $(x_n)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) xác định bởi:  $x_1 = 2$  và  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$  với mọi

$n=1, 2, 3, \dots$ . Đặt  $S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

**Lời giải**

Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau:

Cho dãy  $(u_n)$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c} \end{cases}$$

Ta chứng minh:  $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i + b} = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$

Thật vậy.

Ta có  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c}$  suy ra  $u_{n+1} + c = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + bc}{b-c} = \frac{(u_n + b)(u_n + c)}{b-c}$

$$\text{Từ đó } \frac{1}{u_{n+1}+c} = \frac{1}{u_n+c} - \frac{1}{u_n+b} \Rightarrow \frac{1}{u_n+b} = \frac{1}{u_n+c} - \frac{1}{u_{n+1}+c}$$

Khai triển và ước lượng được

$$\frac{1}{u_1+b} = \frac{1}{u_1+c} - \frac{1}{u_2+c}$$

$$\frac{1}{u_2+b} = \frac{1}{u_2+c} - \frac{1}{u_3+c}$$

.....

$$\frac{1}{u_n+b} = \frac{1}{u_n+c} - \frac{1}{u_{n+1}+c}$$

$$\text{Do đó } S_n = \frac{1}{u_1+c} - \frac{1}{u_{n+1}+c}$$

Từ đó vận dụng vào bài toán trên với  $b=1, c=-1$  ta có

$$S_n = \frac{1}{x_1-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-1}$$

Mà  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên dãy  $(x_n)$  là dãy tăng.

Giả sử  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  ( $a > 2$ ) thì  $2a = a^2 + 1$  suy ra  $a = 1$  (Vô lý)

Vậy:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ . Do đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$

**Bài 192.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi:  $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(2x_n+1)^{2012}}{2012} + x_n$ . Với  $n$  là số nguyên dương. Đặt  $u_n = \frac{(2x_1+1)^{2011}}{2x_2+1} + \frac{(2x_2+1)^{2011}}{2x_3+1} + \frac{(2x_3+1)^{2011}}{2x_4+1} + \dots + \frac{(2x_n+1)^{2011}}{2x_{n+1}+1}$  Tìm  $\lim u_n$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } x_{n+1} - x_n = \frac{(2x_n+1)^{2012}}{2012}, \forall n \geq 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2x_n+1} - \frac{1}{2x_{n+1}+1} = \frac{2(x_{n+1}-x_n)}{(2x_n+1)(2x_{n+1}+1)} = \frac{(2x_n+1)^{2011}}{1006(2x_{n+1}+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i+1)^{2011}}{2x_{i+1}+1} = 1006 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2x_i+1} - \frac{1}{2x_{i+1}+1} \right) = 1006 \left( \frac{1}{2x_1+1} - \frac{1}{2x_{n+1}+1} \right)$$

Mặt khác:  $x_{n+1} - x_n \geq 0$  nên dãy  $(x_n)$  là dãy số tăng  $\forall n \geq 1$ . Nếu  $(x_n)$  bị chặn thì  $\lim x_n$  tồn tại.

Đặt  $\lim x_n = a \Rightarrow a \geq 1$  và  $a = \frac{(a+1)^{2012}}{2012} + a$  (vô lý). Suy ra  $(x_n)$  không bị chặn trên hay

$$\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x_{n+1}+1} = 0.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1006}{3}$$

**Bài 193.** Cho dãy số  $(x_n)$  với  $n=1, 2, \dots$  được xác định bởi:  $x_1 = a, (a > 1), x_2 = 1$ .

$$x_{n+2} = x_n - \ln x_n \quad (n \in \mathbb{N}^*), \text{ Đặt } S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_{2k-1}} \quad (n \geq 2) \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{S_n}{n} \right).$$

**Lời giải**

Nhận xét rằng  $x_{2n} = 1, n = 1, 2, \dots$  do  $\ln 1 = 0$  suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 1$ .

Tiếp theo ta chứng minh dãy  $(x_{2n+1})$  cũng có giới hạn là 1.

Xét hàm số  $f(x) = x - \ln x$  liên tục và đồng biến trong  $(1; +\infty)$  vì  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$  với mọi  $x > 1$

Trước hết ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, dãy  $(x_{2n+1})$  bị chặn dưới bởi 1. Theo giả thiết thì  $x_1 = a > 1$ , giả sử  $x_{2k+1} > 1$  thì  $f(x_{2k+1}) > f(1) > 1$  nên hiển nhiên  $x_{2k+3} > 1$  tức dãy  $(x_{2n+1})$  bị chặn dưới bởi 1.

Tiếp theo ta chứng minh dãy  $(x_{2n+1})$  là dãy giảm. Thật vậy, do  $x_{2n+1} > 1$  nên  $\ln x_{2n+1} > 0$  vì thế  $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -\ln x_{2n+1} < 0$ , tức dãy  $(x_{2n+1})$  là dãy giảm. Từ đó suy ra  $(x_{2n+1})$  có giới hạn  $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$ . Chuyển qua giới hạn dãy số ta được  $c = c - \ln c \Leftrightarrow c = 1$ . Vậy dãy số  $(x_n)$  có giới hạn là 1.

Theo định lý Cessaro, ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} \right) &= 1 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(x_1 + x_3 + \dots + x_{2n+1}) + (x_2 + x_4 + \dots + x_{2n})}{2n} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{nx_1 - (n-1)\ln x_1 - (n-2)\ln x_3 - \dots - \ln x_{2n-3} + n}{2n} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a}{2} - \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2} \right) &= 1 \text{ hay } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{S_n}{n} \right) = \frac{a-1}{2}. \end{aligned}$$

**Bài 194.**

Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau:  $\begin{cases} x_n = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2009} + x_n \end{cases}$ . Tìm

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1}}.$$

**Lời giải**

Ta có:  $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . (1)

Giả sử  $(x_n)$  bị chặn trên, ta được  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x > a$ . Khi đó  $a = \frac{a^2}{2009} + a \Rightarrow a = 0$  (vô lí).

$\Rightarrow (x_n)$  không bị chặn trên. (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n^2}{2009} + x_n \Rightarrow 2009(x_{n+1} - x_n) = x_n^2 \Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2009 \left( \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1}} = \sum_{i=1}^n 2009 \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1}} &= \frac{2009}{x_1} = 2009. \end{aligned}$$

**Bài 195.** Cho dãy số  $(U_n)$  xác định bởi:  $\begin{cases} U_1 = a > 1 \\ 2009U_{n+1} = U_n^2 + 2008U_n, n \geq 1 \end{cases}$  H·y tÝnh

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{U_{i+1} - 1}$$

**Lời giải**

\*Bằng quy nạp ta chứng minh:  $U_{n+1} > U_n \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$

\*Nếu dãy  $(U_n)$  bị chặn trên thì nó hội tụ. Đặt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = u \geq \alpha$

Từ  $2009U_{n+1} = U_n^2 + 2008U_n, n \geq 1$  cho  $n \rightarrow +\infty$  ta được :

$$2009u = u^2 + 2008u \Leftrightarrow u^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ u=0 \end{cases} \text{ vô lí vì } u \geq \alpha > 1$$

$\Rightarrow (U_n)$  không bị chặn trên  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

\* Giả thiết

$$\Rightarrow 2009(U_{n+1} - U_n) = U_n^2 - U_n \Leftrightarrow 2009(U_{n+1} - U_n) = U_n(U_n - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2009 \left( \frac{1}{U_n - 1} - \frac{1}{U_{n+1} - 1} \right) = \frac{U_n}{U_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{U_{i+1} - 1} = 2009 \left( \frac{1}{U_1 - 1} - \frac{1}{U_{n+1} - 1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{U_{i+1} - 1} = \frac{2009}{\alpha - 1}$$

Nhận xét:

$$\alpha = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{U_{i+1} - 1} = \frac{2009}{2 - 1} = 2009$$

**Bài 196.** Cho dãy số  $(v_n)$  thỏa mãn:  $\begin{cases} v_1 = \sqrt{2015} \\ v_{n+1} = v_n^2 - 2; n \geq 1 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_n^2} = 2011$$

**Lời giải**

Theo đề bài suy ra  $v_{n+1}^2 = (v_n^2 - 2)^2 = v_n^4 - 4v_n^2 + 4$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_n^2} = \frac{v_n^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-1}^2} - \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-1}^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_n^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-1}^2} = \frac{v_{n-1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-2}^2} - \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-2}^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-1}^2}$$

$$\frac{v_{n-1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-1}^2} = \frac{v_{n-2}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-3}^2} - \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-3}^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_{n-2}^2}$$

...

$$\frac{v_4^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot v_3^2} = \frac{v_3^2}{v_1^2 \cdot v_2^2} - \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot v_3^2}$$

$$\frac{v_3^2}{v_1^2 \cdot v_2^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} - \frac{4}{v_1^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_n^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} - \frac{4}{v_1^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_n^2} = \frac{v_2^2 - 4}{v_1^2} + \frac{4}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdots v_n^2}$$

**Bài 197.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_n = \frac{4n+1}{2^n}$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Tìm  $\lim S_n$ .

**Lời giải**

Ta có  $u_n = 4 \cdot \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow S_n = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] + 4 \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} \right]$$

+) Xét  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$  là tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng thứ nhất  $a_1 = \frac{1}{2}$  công bội  $q = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim a_n = 1$$

+)  $b_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$

$$\Rightarrow 2b_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 2b_n - b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$\Rightarrow b_n = 2 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] - \frac{n}{2^{n-1}}$$

Theo quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:  $2^n > n^2, \forall n \geq 5$

$$\Rightarrow \forall n \geq 5, \text{ ta có } 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \frac{n}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim b_n = 2$$

Vậy  $\lim S_n = 9$

**Bài 198.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = \sqrt{a} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + a}, n \geq 1 \end{cases}$  Với  $a$  là số thực dương cho trước. Hãy tìm  $\lim u_n$

**Lời giải**

Theo đề bài  $\Rightarrow u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} \Rightarrow u_2 > u_1$

Giả sử  $u_{k+1} > u_k, k \geq 1$  (giả thiết quy nạp)

Ta sẽ chứng minh  $u_{k+2} > u_{k+1}$  (\*)

Theo đề bài (\*)  $\Leftrightarrow \sqrt{u_{k+1} + a} > \sqrt{u_k + a} \Leftrightarrow u_{k+1} > u_k$  đúng (theo giả thiết quy nạp).

Vậy dãy số  $(u_n)$  tăng và  $u_n > 0, \forall n$

Vì  $(u_n)$  tăng  $\Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow \sqrt{u_n + a} > u_n \Leftrightarrow u_n + a > u_n^2$

$$\Leftrightarrow u_n^2 - u_n - a < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < u_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Mà  $u_n > 0, \forall n \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

Do đó dãy số  $(u_n)$  tăng và bị chặn trên  $\Rightarrow \exists \lim u_n$

Đặt  $\lim u_n = x \Rightarrow x \geq 0$  và  $\lim u_{n+1} = x$

Mà  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + a} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{u_n + a} \Rightarrow x = \sqrt{x + a}$

$$\Leftrightarrow x^2 = x + a \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \text{ (vì } x \geq 0 \text{)}. \text{ Vậy } \lim u_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

**Bài 199.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2005}, n \geq 1 \end{cases}$ . Hãy tìm

$$\lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$

**Giải**

$$\text{Ta có } \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1} \cdot u_n} = \frac{2005(u_{n+1} - u_n)}{u_{n+1} \cdot u_n} = 2005 \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = 2005 \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right)$$

$$\frac{u_2}{u_3} = 2005 \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right)$$

...

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 2005 \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2005 \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2005 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$\Rightarrow \lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 2005 \left( 1 - \lim \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$\text{Theo đề bài } \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 1 + \frac{1}{2005} \Rightarrow u_2 > u_1 \geq 1$$

Giả sử  $u_{k+1} > u_k \geq 1, k \geq 1$  (giả thiết quy nạp). Ta sẽ chứng minh  $u_{k+2} > u_{k+1}$  (\*)

Theo đề bài, (\*)  $\Leftrightarrow u_{k+1} + \frac{u_{k+1}^2}{2005} > u_k + \frac{u_k^2}{2005} \Leftrightarrow u_{k+1} - u_k + \frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{2005} > 0$  đúng (theo giả thiết quy nạp).

Vậy dãy số  $(u_n)$  tăng.

Ta lại chứng minh  $(u_n)$  không bị chặn trên.

Giả sử  $(u_n)$  bị chặn trên  $\Rightarrow \exists \lim u_n$ . Đặt  $\lim u_n = x \Rightarrow x \geq 1$  và  $\lim u_{n+1} = x$ .

$$\text{Mà } u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2005} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim u_n + \frac{\lim u_n^2}{2005} \Rightarrow x = x + \frac{x^2}{2005}$$

$\Leftrightarrow x = 0$  loại. Suy ra giả sử  $(u_n)$  bị chặn trên là sai. Do đó  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\text{Vậy } \lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 2005.$$

**Bài 200.** Cho dãy  $(x_n)$  xác định bởi  $x_0 = \sqrt{2}$  và  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$  với  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

### Giải

Đặt  $f(x) = (\sqrt{2})^x$  thì dãy số có dạng  $x_0 = \sqrt{2}$  và  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Ta thấy  $f(x)$  là hàm số tăng và  $x_1 = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$ .

Do  $f(x)$  là hàm số tăng nên  $x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1, x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \dots$

Suy ra  $(x_n)$  là dãy tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp  $x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Với  $n = 0, \sqrt{2} = x_0 < 2$  đúng.

Giả sử  $x_n < 2$  đúng với  $n = k \in \mathbb{N}$  hay ta có  $x_k < 2$ , khi đó  $x_{k+1} = (\sqrt{2})^{x_k} < (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow$  đpcm.

Dãy số  $(x_n)$  tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có hội tụ. Đặt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , ta có  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$  nên

$$a = 2^{\frac{a}{2}} \text{ và } a \leq (\text{định lí 1c}).$$

Giải phương trình  $a = 2^{\frac{a}{2}}$  ta được  $a = 2$  thỏa mãn  $a \leq 2$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

**Bài 201.** Ký hiệu  $x_n$  là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0 \text{ thuộc khoảng } (0;1)$$

a) Chứng minh dãy  $\{x_n\}$  hội tụ;

b) Hãy tìm giới hạn đó.

**Bình luận:**  $x_n$  được xác định là duy nhất vì hàm số  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$  liên tục và đơn điệu trên  $(0;1)$ . Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của  $x_n$ . Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của  $x_n$ , ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn, mọi thứ đều ổn vì  $0 < x_n < 1$ . Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút

đến mối liên hệ giữa  $f_n(x)$  và  $f_{n+1}(x)$ :  $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1}$ . Đây chính là chìa khóa để chứng minh tính đơn điệu của  $x_n$

### Giải

Rõ ràng  $x_n$  được xác định 1 cách duy nhất,  $0 < x_n < 1$ . Ta có

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x) + \frac{1}{x_n - n - 1} = \frac{1}{x_n - n - 1} < 0, \text{ trong khi đó } f_{n+1}(0^+) > 0. \text{ Theo tính chất của hàm liên}$$

tục, trên khoảng  $(0; x_n)$  có ít nhất 1 nghiệm của  $f_{n+1}(x)$ . Nghiệm đó chính là  $x_{n+1}$ . Như thế ta đã chứng minh được  $x_{n+1} < x_n$ . Tức là dãy số  $\{x_n\}$  giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n)$$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

Thật vậy, giả sử  $\lim x_n = a > 0$ . Khi đó, do dãy số giảm nên ta có  $x_n \geq a$  với mọi  $n$ .

Do  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$  nên tồn tại  $N$  sao cho với mọi  $n \geq N$  ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}.$$

Khi đó với  $n \geq N$  ta có  $0 < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \dots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có  $\lim x_n = 0$ .

### Bài 202.

Cho  $n$  là một số nguyên dương  $> 1$ . Chứng minh rằng phương trình  $x^n = x + 1$  có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là  $x_n$ . Chứng minh rằng  $x_n$  dần về 1 khi  $n$  dần đến vô cùng và tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ .

### Giải

Rõ ràng  $x_n > 1$ . Đặt  $f_n(x) = x^n - x - 1$ .

Khi đó  $f_{n+1}(1) = -1 < 0$  và  $f_{n+1}(x_n) = x_{n+1}^n - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0$ . Từ đó ta suy ra  $1 < x_{n+1} < x_n$ . Suy ra dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn  $a$ .

Ta chứng minh  $a = 1$ .

Thật vậy, giả sử  $a > 1$ . Khi đó  $x_n \geq a$  với mọi  $n$  và ta tìm được  $n$  đủ lớn sao cho:  $x_n^n \geq a^n > 3$  và  $x_n + 1 < 3$ , mâu thuẫn vì  $f_n(x_n) = 0$ .

Để giải phần cuối của bài toán, ta đặt  $x_n = 1 + y_n$  với  $\lim y_n = 0$ . Thay vào phương trình  $f_n(x_n) = 0$  ta được  $(1 + y_n)^n = 2 + y_n$ .

Lấy logarit hai vế, ta được  $n \ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n)$ . Từ đó suy ra  $\lim(n \ln(1 + y_n)) = \ln 2$ .

Nhưng  $\lim \frac{1 + y_n}{y_n} = 1$  nên từ đây suy ra  $\lim ny_n = \ln 2$ , tức là  $\lim n(x_n - 1) = \ln 2$ .

**Bài 203.** (VMO 2007) Cho số thực  $a > 2$  và  $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

- Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$ , phương trình  $f_n(x) = a$  luôn có đúng 1 nghiệm dương duy nhất.
- Gọi nghiệm đó là  $x_n$ , chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  dần đến vô cùng.

### Lời giải

a) Ta thấy hàm  $f_n(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  mà ta thấy với mọi  $b > 0$  thì  $f(0) \neq f(b)$  nên  $f_n(x) = a$  có ít nhất 1 nghiệm. Ta chứng minh  $f_n(x) = a$  có duy nhất một nghiệm duy nhất.

Giả sử phương trình trên có 2 nghiệm dương  $x_1 < x_2$ , khi đó áp dụng định lí Rolle: tồn tại  $c \in (x_1, x_2)$  sao cho  $f'_n(c) = 0$  (1).

Mặt khác, hàm  $g(x) = f'_n(x) = a^{10}(n+10)x^{n+9} + nx^{n-1} + \dots + 1$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  nên ta luôn có  $g(0)g(b) > 0$  kết hợp với (1), suy ra mâu thuẫn với tính chất hàm liên tục  $\Rightarrow$  đpcm.

b) Dễ thấy  $0 < x_n < 1$ . Ta chứng minh  $(x_n)$  tăng. Ta thấy:

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + \dots + x_n + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1.$$

Và  $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 2 > a$  nên ta chỉ cần chứng minh  $ax_n + 1 < a$  thì  $x_n < x_{n+1} < 1$ , vậy cần chứng minh  $x_n < \frac{a-1}{a}$ .

Thật vậy, nếu  $x_n \geq \frac{a-1}{a}$  thì:

$$f_n(x_n) \geq a^{10} \left( \frac{a-1}{a} \right)^{n+10} + \frac{1 - \left( \frac{a-1}{a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}} = (a-1)^{10} \left( \frac{a-1}{a} \right)^n + a - (a-1) \left( \frac{a-1}{a} \right)^n > a$$

(do  $a > 2$ )  $\Rightarrow$  vô lí vì  $f_n(x) = a$ .

Vậy dãy  $(x_n)$  tăng và bị chặn nên hội tụ.

**Bài 204.** (VMO 2002) Cho  $n$  là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình:

$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$  có một nghiệm duy nhất  $x_n > 1$ . Chứng minh rằng khi  $n$  dần đến vô cùng,  $x_n$  dần đến 4.

**Bình luận:** Việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất  $x_n > 1$  là hiển nhiên. Mỗi liên hệ

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2 x - 1} \quad \text{cho thấy } x_n \text{ là dãy số tăng (ở đây}$$

$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2 x - 1} - \frac{1}{2}$ ). Đề bài cho sẵn giới hạn của  $x_n$  là 4 đã làm cho bài toán trở nên dễ hơn nhiều. Tương tự như cách chứng minh  $\lim x_n = c$  ở nhận xét trên, ta sẽ dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa  $x_n$  và 4. Để làm điều này, ta cần tính  $f_n(4)$ , với  $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2 x - 1} - \frac{1}{2}$ . Rất may mắn, bài tính  $f_n(4)$  này liên quan đến 1 dạng tổng quen thuộc.

#### Lời giải

Đặt  $f_n(x)$  như trên và gọi  $x_n$  là nghiệm  $> 1$  duy nhất của phương trình  $f_n(x) = 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} f_n(4) &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n} \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có:  $\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)| \cdot |x_n - 4|$  với  $c$  thuộc  $(x_n; 4)$ .

$$\text{Nhưng do } |f'_n(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \dots > \frac{1}{9}$$

Nên từ đây  $|x_n - 4| < \frac{9}{4n}$ , suy ra  $\lim x_n = 4$ .

**Bài 205.** Cho  $n$  là một số nguyên dương  $> 1$ . Chứng minh rằng phương trình  $x^n = x^2 + x + 1$  có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là  $x_n$ . Hãy tìm số thực  $a$  sao cho giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a (x_n - x_{n+1}) \text{ tồn tại, hữu hạn và khác } 0.$$

**Bình luận.** Dễ thấy giá trị  $a$ , nếu tồn tại, là duy nhất. Tương tự như ở bài toán 2, có thể chứng minh được rằng  $x_n \sim 1 + \frac{\ln(3)}{n}$ . Từ đó có dự đoán là  $a = 2$ . Định lý Lagrange sẽ giúp chúng ta đánh giá hiệu  $x_n - x_{n+1}$  và chứng minh dự đoán này.

#### Lời giải

$$\text{Đặt } P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1.$$

$$\text{Ta có } P_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^2 - x - 1 = x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x).$$

$$\text{Từ đó } P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n-1) + P_n(x_n) = (x_n^2 + x_n + 1)(x_n-1) = x_n^3 - 1.$$

$$\text{Áp dụng định lý Lagrange, ta có: } (x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P'_{n+1}(c)$$

$$\text{với } c \text{ thuộc } (x_{n+1}; x_n), P'_{n+1}(x) = (n+1)x^n - 2x - 1.$$

$$\text{Từ đó: } (n+1) \left( x_{n+1} + 1 + \frac{1}{x_{n+1}} \right) - 2x_{n+1} - 1 = P'_{n+1}(x_{n+1}) < P'_{n+1}(c)$$

$$< P'_{n+1}(x_n) = (n+1)(x_n^2 + x_n + 1) - 2x_n - 1.$$

$$\text{Từ đây, với lưu ý } \lim x_n = 1, \text{ ta suy ra: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3$$

Tiếp tục sử dụng  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = 3$ , ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP'_{n+1}(c)(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = 3\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \cdot \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1})3 = 3\ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(x_n - x_{n+1}) = \ln(3)$$

Vậy với  $c = 2$  thì giới hạn đã cho tồn tại, hữu hạn và khác 0. Dễ thấy với  $c > 2$  thì giới hạn đã cho bằng vô cùng và với  $c < 2$  thì giới hạn đã cho bằng 0. Vậy  $c = 2$  là đáp số duy nhất của bài toán.

**Bài 206.** Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên dương  $n \geq 2$ , phương trình  $\cos x = x^n$  (1) có nghiệm dương duy nhất  $x = x_n$ . Xét tính hội tụ của dãy  $(x_n)$ .

**Lời giải.**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow x^n - \cos x = 0$ . Đặt  $f_n(x) = x^n - \cos x$ . Khi đó, với  $x > 1$  thì  $x^n > \cos x$ , do đó (1) không thể có nghiệm với  $x > 1$ .

Mặt khác,  $f_n(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 1]$  và  $f_n(0) \cdot f_n(1) < 0$ , suy ra phương trình  $f_n(x) = 0$  có nghiệm trên khoảng  $(0; 1)$ . Hơn nữa,  $f'_n(x) = nx^{n-1} + \sin x > 0, \forall x \in [0; 1]$ , nên  $f_n(x)$  đồng biến trên đoạn  $[0; 1]$ , do đó (1) có nghiệm duy nhất  $x = x_n \in (0; +\infty)$ .

Dãy  $(x_n)$  hiển nhiên là bị chặn. Hơn nữa,  $(x_n)$  còn là dãy tăng vì nếu  $x_{n+1} < x_n$  thì từ  $x_{n+1}, x_n \in (0; 1)$  ta suy ra  $\cos x_{n+1} > \cos x_n \Rightarrow x_{n+1}^{n+1} > x_n^n \Rightarrow x_{n+1}^n > x_n^{n+1} > x_n^n \Rightarrow x_{n+1} > x_n$ .

Điều này là vô lí. Vậy tồn tại giới hạn hữu hạn  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ . Từ  $x_n = (\cos x_n)^{\frac{1}{n}}$  suy ra

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (\cos x_n)^{\frac{1}{n}} \right] = (\cos l)^0 = 1.$$

**Nhận xét.** Trong ví dụ trên, vấn đề mấu chốt là chứng minh dãy  $(x_n)$  tăng. Việc này được thực hiện bằng cách chuyển đổi tính đơn điệu của hai hàm số  $y = \cos x$  và  $y = x^n$ . Đây là một trong những kĩ thuật cơ bản trong những bài toán dạng này.

**Bài 207.** Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên dương  $n \geq 2$ , phương trình  $x^n = x + 2014$  (3) có nghiệm dương duy nhất  $x = x_n$ . Xét tính hội tụ của dãy  $(x_n)$ .

**Lời giải**

Đặt  $f_n(x) = x^n - x - 2014, \forall n \geq 2$ . Với  $x \in (0; 1)$  thì  $x^n < x + 2014$ , do đó (3) không có nghiệm với  $x \in (0; 1)$ .

Mặt khác,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ , do đó tồn tại  $a > 1$  sao cho  $f_n(a) > 0 \Rightarrow f_n(a) \cdot f_n(1) < 0$ . Vì  $f_n(x)$  liên tục trên đoạn  $[1; a]$  nên phương trình  $f_n(x) = 0$  có nghiệm trên khoảng  $(1; a)$ .

Từ  $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$  suy ra  $f_n(x)$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$ , do đó (3) có nghiệm duy nhất trên  $[1; +\infty)$ , suy ra (3) có nghiệm dương duy nhất  $x = x_n$ . Vì  $x_n \in [1; +\infty)$  nên

$$x_n^{n+1} > x_n^n \Rightarrow f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 2014 > x_n^n - x_n - 2014 = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) (*).$$

Do  $f_{n+1}(x)$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$  nên (\*) suy ra  $x_n > x_{n+1}$ , hay dãy  $(x_n)$  giảm ngặt. Hiển nhiên dãy  $(x_n)$  bị chặn dưới. Do đó dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn  $l = \lim x_n$ .

Từ  $x_n = (x_n + 2014)^{\frac{1}{n}}$ , suy ra  $l = (l + 2014)^0 = 1$ . Vậy  $\lim x_n = 1$ .

**Bài 208.** Cho phương trình  $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  (4).

a) Chứng minh rằng (4) có nghiệm dương duy nhất  $x = x_n$ .

b) Tìm  $\lim x_n$  và  $\lim \sqrt[n]{2 - x_n}$ .

### Lời giải

Với  $n \geq 2$  thì  $x = 1$  không là nghiệm của (4). Sử dụng hằng đẳng thức

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1),$$

ta viết phương trình lại (4) dưới dạng  $x^n(x - 2) + 1 = 0$ .

Đặt  $P_n(x) = x^n(x - 2) + 1$  thì  $P_n(2) > 0$ . Áp dụng Bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{n-1}{n+1}\right)^n \left(\frac{-2}{n+1}\right) + 1 \leq \left(1 + \frac{n(n-1)}{n+1}\right) \left(\frac{-2}{n+1}\right) + 1 = \frac{-(n-1)^2}{(n+1)^2} < 0.$$

Vậy  $P_n(2) \cdot P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$ . Hiển nhiên  $P_n(x)$  liên tục trên đoạn  $\left[\frac{2n}{n+1}; 2\right]$ . Do đó  $P_n(x)$  có nghiệm trên khoảng  $\left(\frac{2n}{n+1}; 2\right)$ .

Mặt khác, với  $x \geq 2$  thì  $P_n(x) > 0$ , với  $0 < x \leq \frac{2n}{n+1}$  thì  $P_n(x) < 0$  (chứng minh đơn giản bằng

đạo hàm). Vậy  $P_n(x)$  không có nghiệm  $x \in \left(0; \frac{2n}{n+1}\right] \cup [2; +\infty)$ . Trên khoảng  $\left(\frac{2n}{n+1}; 2\right)$  thì

$P'_n(x) > 0$ , do đó  $P_n(x)$  có nghiệm duy nhất trên khoảng này. Suy ra,  $P_n(x)$  có nghiệm dương duy nhất  $x = x_n \in \left(\frac{2n}{n+1}; 2\right)$ . Ta lại có  $P_{n+1}(x_n) = x_n P_n(x_n) - 1 = -1 < P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ .

Bởi vậy  $2 > x_{n+1} > x_n \Rightarrow 0 < 2 - x_n = \frac{1}{x_n^n} < \frac{1}{x_n^2}$  (\*).

Vì  $\lim \frac{1}{x_n^2} = 0$  nên  $\lim x_n = 2$ . Hơn nữa, cũng từ (\*) suy ra  $\sqrt[n]{2 - x_n} = \frac{1}{x_n} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{2 - x_n} = \frac{1}{2}$

**Nhận xét.** Mấu chốt trong Ví dụ 4 là tìm ra điểm  $x_0 = \frac{2n}{n+1}$ . Điều này được giải thích như sau: Ta

cần tìm điểm  $x_0 > 0$  sao cho  $P_n(x_0)$  nhỏ nhất (để đảm bảo rằng  $P_n(x_0) < 0$ ), do đó  $x_0$  là một

điểm cực trị của  $P_n(x)$ . Do đó  $P'_n(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2n}{n+1}$ .

**Bài 209.** Cho phương trình  $x^{2n+1} = x + 1$ , với  $n$  nguyên dương cho trước. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có duy nhất một nghiệm thực  $x_n$ . Tìm  $\lim x_n$ .

### Lời giải

Xét hàm số  $f_n(x) = x^{2n+1} - x - 1$ . Ta có  $f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - 1$ . Ta thấy

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}. \text{ Kết hợp bảng biến thiên và các nhận xét:}$$

$$i) f'_n(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} < x < \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}$$

$$ii) f'_n(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}, x \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}$$

$$iii) f\left(-\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}\right) = -\frac{1}{(2n+1)}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} + \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} - 1 < 0$$

$$iv) f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{1}{(2n+1)}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} - \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} - 1 < 0$$

$$v) \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty,$$

ta có thể kết luận được phương trình trên có nghiệm duy nhất  $x_n$ .

Mặt khác  $f_n(1) < 0, f_n(2) > 0 \Rightarrow 1 < x_n < 2$  và  $x_n = \sqrt[n]{2n+1} \Rightarrow \sqrt[n]{2n+1} < x_n < \sqrt[n]{2n+3} (*)$ .

Sử dụng quả  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a^n = 1$  (khi  $a > 1$ ) và cho  $(*)$  qua giới hạn, ta được  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Bài 210.** Cho  $n$  là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình  $x^n = x + 1$  (7) có một nghiệm dương duy nhất  $x = x_n$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(x_n - 1))$ .

### Lời giải

Tương tự Ví dụ 3 ta chứng minh được dãy  $(x_n)$  giảm ngặt và có giới hạn bằng 1.

Để tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$  ta đặt  $y_n = x_n - 1, \forall n \geq 1$ . Khi đó  $y_n > 0$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Thay vào phương trình (7) ta được

$$(1 + y_n)^n = 2 + y_n \Rightarrow n \ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(1 + y_n)) = \ln 2.$$

$$\text{Mặt khác, vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n y_n) = \ln 2 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} (n(x_n - 1)) = \ln 2.$$

**Bài 211.** Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  và phương trình  $x^n = x^2 + x + 1$  (10).

a) Chứng minh rằng (10) có một nghiệm dương duy nhất  $x = x_n$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

b) Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2(x_n - x_{n+1}))$ .

### Lời giải

a) Đặt  $P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1$ . Ta thấy, với  $0 < x \leq 1$  thì  $P_n(x) < 0$ . Do đó, nếu (10) có nghiệm dương thì nghiệm đó phải lớn hơn 1.

Ta lại có  $P_n(1) = -2 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty, P'_n(x) = nx^{n-1} - 2x - 1 > 0, \forall x > 1$ .

Suy ra (10) có nghiệm dương duy nhất  $x = x_n > 1$ .

Mặt khác  $P_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^2 - x - 1 = x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x)$  (\*).

Từ (\*) suy ra  $P_{n+1}(x_n) > 0 = P_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n > x_{n+1}$ . Vậy  $(x_n)$  giảm ngặt và do đó nó có giới hạn hữu hạn là  $l = \lim x_n$ .

Hơn nữa  $x_n^n = x_n^2 - x_n - 1 \Rightarrow x_n = (x_n^2 - x_n - 1)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow l = (l^2 - l - 1)^0 = 1 \Rightarrow \lim x_n = 1$ .

b) Cũng từ (\*), ta có  $P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1) + P_n(x_n) = (x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = x_n^3 - 1$ .

Áp dụng định lý Lagrange, tồn tại  $\xi_{n+1} \in (x_{n+1}; x_n)$  thỏa mãn

$$(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P'_{n+1}(\xi_{n+1})$$

$$\Rightarrow n^2(x_n - x_{n+1}) = \frac{n(x_n - 1)(x_n^2 + x_n + 1)}{\frac{P'_{n+1}(\xi_{n+1})}{n}}.$$

Từ  $P'_{n+1}(x) = (n+1)x^n - 2x - 1$  suy ra

$$\begin{cases} (n+1)(x_n^2 + x_n + 1) - 2x_n - 1 = P'_{n+1}(x_n) > P'_{n+1}(\xi_{n+1}) \\ P'_{n+1}(\xi_{n+1}) > P'_{n+1}(x_{n+1}) = (n+1)\left(x_{n+1} + 1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - 2x_{n+1} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n} \cdot (x_n^2 + x_n + 1) - \frac{2x_n + 1}{n} > \frac{P'_{n+1}(\xi_{n+1})}{n} > \frac{n+1}{n} \left(x_{n+1} + 1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - \frac{2x_{n+1} + 1}{n} \quad (*).$$

Bất đẳng thức (\*) cùng với kết luận  $\lim x_n = 1$  ta suy ra  $\lim \frac{P'_{n+1}(\xi_{n+1})}{n} = 3$ .

Tương tự Ví dụ 7 ta tính được  $\lim(n(x_n - 1)) = \ln 3$ , do đó

$$\lim(n^2(x_n - x_{n+1})) = \frac{\lim(n(x_n - 1)) \cdot \lim(x_n^2 + x_n + 1)}{\lim \frac{P'_{n+1}(\xi_{n+1})}{n}} = \ln 3.$$

**Bài 212. Bài toán 3.** (VMO 2007) Cho số thực  $a > 2$  và  $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1$ .

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$ , phương trình  $f_n(x) = a$  luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Gọi nghiệm đó là  $x_n$ , chứng minh rằng dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  dần đến vô cùng.

### Lời giải

Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm  $f_n(x)$  tăng trên  $(0, +\infty)$ . Dễ dàng nhận thấy  $0 < x_n < 1$ . Ta sẽ chứng minh dãy  $x_n$  tăng, tức là  $x_{n+1} > x_n$ . Tương tự như ở những lời giải trên, ta xét

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \dots + x_n + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1$$

Vì ta đã có  $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$  nên ta chỉ cần chứng minh  $ax_n + 1 < a$  là sẽ suy ra  $x_n < x_{n+1} < 1$ . Như vậy,

cần chứng minh  $x_n < \frac{a-1}{a}$ . Thật vậy, nếu  $x_n \geq \frac{a-1}{a}$  thì

$$f_n(x_n) \geq a^{10} \left( \frac{a-1}{a} \right)^{n+10} + \frac{1 - \left( \frac{a-1}{a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}} = (a-1)^{10} \left( \frac{a-1}{a} \right)^n + a - (a-1) \left( \frac{a-1}{a} \right)^n > a$$

(do  $a-1 > 1$ ). Vậy dãy số tăng  $\{x_n\}$  tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ.

Nhận xét: Một lần nữa mối liên hệ  $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + 1$  lại giúp chúng ta tìm được mối quan hệ giữa  $x_n$  và  $x_{n+1}$ . Từ lời giải trên, ta có thể chứng minh được rằng

$\lim x_n = \frac{a-1}{a}$ . Thật vậy, đặt  $c = \frac{a-1}{a} < 1$ , theo tính toán ở trên thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = kc^n \text{ (với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0 \text{)}$$

Theo định lý Lagrange thì  $f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n)$  với  $\xi$  thuộc  $(x_n, c)$

Nhưng  $f'(\xi) = (n+10)a^{10}x^{n+9} + nx^{n-1} + \dots + 1 > 1$  nên từ đây suy ra  $kc^n > c - x_n$

Từ đó ta có  $c - kc^n < x_n < c$  Và có nghĩa là  $\lim x_n = c$ .

**Bài 213.** Cho dãy số  $(x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $x_1 = -\frac{1}{3}$  và  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

#### Lời giải

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $-1 < x_n < 0, \forall n \geq 1$ . Do đó nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a (a \in \mathbb{R})$  thì  $a$  là nghiệm âm của phương trình

$t = \frac{t^2}{2} - 1 \Rightarrow a = 1 - \sqrt{3}$ . Ta sẽ chứng minh  $a = 1 - \sqrt{3}$  là giới hạn của dãy  $(x_n)$ . Thật vậy

$$|x_{n+1} - a| = \left| \frac{x_n^2}{2} - 1 - \left( \frac{a^2}{2} - 1 \right) \right| = \frac{1}{2} |x_n - a| |x_n + a|. \text{ Vì } -1 < x_n < 0 \text{ nên } -\sqrt{3} < x_n + a < 1 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |x_n + a| < \sqrt{3} \Rightarrow |x_{n+1} - a| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |x_n - a|. \text{ Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh}$$

$$\text{được } 0 \leq |x_{n+1} - a| \leq \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n |x_1 - a|, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vì } 0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - a| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = 1 - \sqrt{3}$$

**Bài 214.** Cho số thực  $a$  và dãy  $(x_n)$  xác định bởi:  $x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ . Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn.

#### Lời giải

Đặt  $f(x) = \ln(3 + \cos x + \sin x) - 2008$ , có:  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \cos x + \sin x}$ .

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = q < 1 \text{ (do } |\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}, |\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2} \text{)}.$$

Áp dụng định lí Lagrange cho  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , do  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên tồn tại  $z \in (x; y) \subset \mathbb{R}$  sao cho  $f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x - y)$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ là một hàm số co trên } \mathbb{R} \text{ nên dãy } (x_n) \text{ hội tụ.}$$

**Bài 215.** Cho dãy  $(x_n)$  xác định như sau:  $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}, n = 0, 1, 2, \dots$

Tìm tất cả các giá trị của  $c$  để với mọi giá trị  $x_0 \in (0; c)$ ,  $x_n$  xác định với mọi  $n$  và tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim x_n$ .

**Lời giải**

$$\text{Để } x_1 \text{ tồn tại thì } c - \sqrt{c + x_0} \geq 0 \quad \forall x_0 \in (0; c) \Leftrightarrow c(c - 1) \geq x_0 \quad \forall x_0 \in (0; c) \Rightarrow c \geq 2.$$

$$\text{Với } c \geq 2 \Rightarrow 0 < x_1 = \sqrt{c - \sqrt{c + x_0}} < \sqrt{c}.$$

Nếu  $0 < x_n < \sqrt{c}$  thì  $c - \sqrt{c + x_n} > c - \sqrt{2c} > 0$  (do  $c \geq 2$ ), suy ra  $x_{n+1}$  tồn tại và

$0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$ . Ngược lại, nếu  $x_n < 0$  hay  $x_n > \sqrt{c}$  thì  $x_{n+1}$  không tồn tại.

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}} \text{ thì } f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{c+x}\sqrt{c-\sqrt{c+x}}}.$$

Với mọi  $x \in (0; c)$  ta có

$$(c+x)(c-\sqrt{c+x}) > c(c-\sqrt{c+\sqrt{c}}) \geq 2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}) > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } |f'(x)| < q < 1 \text{ với mọi } x \in (0; c) \text{ (theo định lí Lagrange thì } \frac{f(c) - f(0)}{c} = f'(x) \text{ với}$$

$x \in (0; c)$ ) hay  $f(x)$  là hàm số co trên  $(0; c)$ , suy ra  $(x_n)$  là dãy hội tụ.

Vậy tất cả các giá trị  $c$  cần tìm là  $c \geq 2$ .

**Bài 216.** Cho dãy số  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $1 < x_1 < \frac{3}{2}$  và

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} \quad (n \geq 1). \text{ Chứng minh rằng dãy } (x_n) \text{ có giới hạn hữu hạn khi } n \rightarrow +\infty \text{ tìm}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

**Lời giải**

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} \quad (x \in [1; \frac{3}{2}]). \text{ Ta có } f'(x) = 1 - x, \forall x \in (1; \frac{3}{2})$$

$$\text{Suy ra } f'(x) < 0, \forall x \in (1; \frac{3}{2}). \text{ Suy ra } f(x) \text{ nghịch biến trên } [1; \frac{3}{2}]. \text{ Suy ra}$$

$$f(\frac{3}{2}) < f(x) < f(1), \forall x \in (1; \frac{3}{2}) \Rightarrow 1 < f(x) < \frac{3}{2}, \forall x \in (1; \frac{3}{2}). \text{ Bằng phương pháp quy nạp toán}$$

$$\text{học ta chứng minh được } 1 < x_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ và } x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ta có  $|f'(x)| < \frac{1}{2}, \forall x \in (1; \frac{3}{2})$ . Theo định lý Lagrăng, tồn tại  $c \in (1; \frac{3}{2})$  sao cho

$$|f(x_n) - f(\sqrt{2})| = |f'(c)| |x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra  $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh

được  $|x_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Vì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}| = 0$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2}$

**Bài 217.** Tính giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$ .

**Lời giải**

Ta xét  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1} \Rightarrow f(0) = 0$ , suy ra giới hạn trên có thể viết lại là:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0), \text{ mà } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ nên giới hạn đã cho là: } f'(0) = -\frac{1}{6}.$$

Theo định lý Lagrange thì  $f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\zeta)(c - x_n)$  với  $\zeta$  thuộc  $(x_n, c)$

Nhưng  $f'(\zeta) = (n+10)a^{10}\zeta^{n+9} + n\zeta^{n-1} + \dots + 1 > 1$  nên từ đây suy ra  $kc^n > c - x_n$

Từ đó ta có  $c - kc^n < x_n < c$  Và có nghĩa là  $\lim x_n = c$ .

**Bài 218.** Ví dụ 1: Cho dãy số  $(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) được xác định bởi  $x_1 = -\frac{1}{3}$  và  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

**Bài giải:**

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $-1 < x_n < 0, \forall n \geq 1$ . Do đó nếu

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, a \in \mathbb{R}$  thì  $a$  là nghiệm âm của phương trình

$t = \frac{t^2}{2} - 1 \Rightarrow a = 1 - \sqrt{3}$ . Ta sẽ chứng minh  $a = 1 - \sqrt{3}$  là giới hạn của dãy  $(x_n)$ . Thật vậy

$$|x_{n+1} - a| = \left| \frac{x_n^2}{2} - 1 - \left( \frac{a^2}{2} - 1 \right) \right| = \frac{1}{2} |x_n - a| |x_n + a|. \text{ Vì } -1 < x_n < 0 \text{ nên } -\sqrt{3} < x_n + a < 1 - \sqrt{3}.$$

$\Rightarrow |x_n + a| < \sqrt{3} \Rightarrow |x_{n+1} - a| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |x_n - a|$ . Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được

$$0 \leq |x_{n+1} - a| \leq \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n |x_1 - a|, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vì } 0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0$$

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - a| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = 1 - \sqrt{3}$

**Bài 219.** Ví dụ 1: Cho số thực  $a$  và dãy  $(x_n)$  xác định bởi:

$x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008, \forall n = 0, 1, 2, \dots$  Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài giải:**

Đặt  $f(x) = \ln(3 + \cos x + \sin x) - 2008$ , có:  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \cos x + \sin x}$ .

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1 \text{ (do } |\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}, |\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2} \text{)}.$$

Áp dụng định lí Lagrange cho  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , do  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên tồn tại  $z \in (x; y) \subset \mathbb{R}$  sao cho  $f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x - y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  là một hàm số co trên  $\mathbb{R}$  nên dãy  $(x_n)$  hội tụ.

**Bài 220. Ví dụ 2:** Cho dãy  $(x_n)$  xác định như sau:  $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}, n = 0, 1, 2, \dots$

Tìm tất cả các giá trị của  $c$  để với mọi giá trị  $x_0 \in (0; c)$ ,  $x_n$  xác định với mọi  $n$  và tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim x_n$ .

**Bài giải:**

Để  $x_1$  tồn tại thì  $c - \sqrt{c + x_0} \geq 0 \forall x_0 \in (0; c) \Leftrightarrow c(c - 1) \geq x_0 \forall x_0 \in (0; c) \Rightarrow c \geq 2$ .

Với  $c \geq 2 \Rightarrow 0 < x_1 = \sqrt{c - \sqrt{c + x_0}} < \sqrt{c}$ .

Nếu  $0 < x_n < \sqrt{c}$  thì  $c - \sqrt{c + x_n} > c - \sqrt{c + \sqrt{c}} > 0$  (do  $c \geq 2$ ), suy ra  $x_{n+1}$  tồn tại và  $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$ . Ngược lại, nếu  $x_n < 0$  hay  $x_n > \sqrt{c}$  thì  $x_{n+1}$  không tồn tại.

Đặt  $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$  thì  $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{c+x}\sqrt{c-\sqrt{c+x}}}$ .

Với mọi  $x \in (0; c)$  ta có

$$(c+x)(c-\sqrt{c+x}) > c(c-\sqrt{c+\sqrt{c}}) \geq 2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}) > \frac{1}{4}.$$

Suy ra  $|f'(x)| < q < 1$  với mọi  $x \in (0; c)$  (theo định lí Lagrange thì  $\frac{f(c) - f(0)}{c} = f'(x)$  với

$x \in (0; c)$ ) hay  $f(x)$  là hàm số co trên  $(0; c)$ , suy ra  $(x_n)$  là dãy hội tụ.

Vậy tất cả các giá trị  $c$  cần tìm là  $c \geq 2$ .

**Bài 221.** Cho dãy số  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $1 < x_1 < \frac{3}{2}$  và

$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} (n \geq 1)$ . Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$  tìm

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

**Lời giải.**

Xét hàm số  $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} (x \in [1; \frac{3}{2}])$ . Ta có  $f'(x) = 1 - x, \forall x \in [1; \frac{3}{2}]$

Suy ra  $f'(x) < 0, \forall x \in [1; \frac{3}{2}]$ . Suy ra  $f(x)$  nghịch biến trên  $[1; \frac{3}{2}]$ . Suy ra

$$f\left(\frac{3}{2}\right) < f(x) < f(1), \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow 1 < f(x) < \frac{3}{2}, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $1 < x_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  và

$$x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ta có  $|f'(x)| < \frac{1}{2}, \forall x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ . Theo định lí Lagrăng, tồn tại  $c \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$  sao cho

$$|f(x_n) - f(\sqrt{2})| = |f'(c)| |x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra,  $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}|, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh

$$\text{được } |x_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}| = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

**Bài 222.** Tính giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$ .

**Lời giải.**

Ta xét  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1} \Rightarrow f(0) = 0$ , suy ra giới hạn trên có thể viết lại là:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0), \text{ mà } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ nên giới hạn đã cho là: } f'(0) = \frac{-1}{6}.$$

**Bài 223.** Tính giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \sqrt{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ .

**Lời giải.**

Tương tự ví dụ trên, ta xét hàm số  $f(x) = \tan x - \sqrt{2} \cos x$ , rõ ràng  $f(x)$  khả vi tại  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x + \sqrt{2} \sin x \text{ và } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ nên ta cũng đưa về tính giá trị:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \sqrt{2} \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.$$

Vậy giới hạn cần tìm là 3.

**Bài 224.** Tính giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+2x} - 1}{x}$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số  $f(x) = e^{x^2+2x} \Rightarrow f(0) = 1$ , rõ ràng  $f(x)$  khả vi tại  $x = 0$  và  $f'(x) = (2x+2) \cdot e^{x^2+2x}$ . Do đó, giới hạn cần tìm là:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = (2 \cdot 0 + 2) e^{0^2+2 \cdot 0} = 2.$$

**Bài 225.**

Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2011]{4x+1}-1}{x}.$$

**Lời giải.**

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sqrt[2011]{4x+1}-1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{2011 \sqrt[2011]{(4x+1)^{2010}}}.$$

Ta thấy:  $f(x)$  khả vi tại 0 và  $f(0) = 0$  nên:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2011]{4x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{4}{2011}.$$

Ta cần chứng minh công thức giới hạn tổng quát: Nếu  $a > 0$  và  $n \in \mathbb{N}^*$  thì  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x} = \frac{a}{n}$ .

Bằng lập luận tương tự, ở bài toán tổng quát, ta xét hàm số:

$$f(x) = \sqrt[n]{ax+1}-1 \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{n \sqrt[n]{(ax+1)^{n-1}}}.$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{a}{n}.$$

**Bài 226.**

Tính giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x - \tan x}{\frac{\pi}{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

**Lời giải.**

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x - \tan x \Rightarrow f'(x) = -\sqrt{3} \sin x + \cos x - (1 + \tan^2 x)$$

Ta thấy:  $f(x)$  khả vi tại  $\frac{\pi}{3}$  và  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$  nên:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x - \tan x}{\frac{\pi}{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} \cdot f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{15}{\pi}.$$

Vậy giới hạn cần tìm là  $-\frac{15}{\pi}$ .

**Bài 227.** Tính giới hạn sau  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\sqrt{x^2+9x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x+125}}{5x}.$

Xét hàm số:

$$f(x) = 5\sqrt{x^2+9x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x+125} \Rightarrow f'(x) = \frac{5(2x+9)}{2\sqrt{x^2+9x+1}} - \frac{3x^2+2}{3\sqrt[3]{(x^3+2x+125)^2}} \quad \text{Ta thấy:}$$

$f(x)$  khả vi tại 0 và  $f(0) = 0$  nên:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\sqrt{x^2+9x+1}-\sqrt[3]{x^3+2x+125}}{5x} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{5} \cdot f'(0) = \frac{3371}{750}.$$

Vậy giới hạn cần tìm là  $\frac{3371}{750}$ .

**Bài 228.** Tính giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{1-\ln x} - \ln x}{x - e}$ .

**Lời giải.**

Xét hàm số:  $f(x) = e^{1-\ln x} - \ln x = \frac{e}{x} - \ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x}$ .

Ta thấy:  $f(x)$  khả vi tại  $e$  và  $f(e) = 0$  nên:  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{1-\ln x} - \ln x}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = -\frac{2}{e}$ .

Vậy giới hạn cần tìm là  $-\frac{2}{e}$ .

**Bài 229.** Tính giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^4 x + \ln(x+1) + 3e^x - \sqrt[3]{x+8}\sqrt{x+4}}{x \cos^5 x}$ .

**Lời giải.**

Trước hết, ta thấy rằng  $\cos^5 x \rightarrow 1$  khi  $x \rightarrow 0$ .

Xét hàm số  $f(x) = \cos^4 x + \ln(x+1) + 3e^x - \sqrt[3]{x+8}\sqrt{x+4}$  thì dễ thấy hàm này khả vi tại 0 và  $f(0) = 0$  nên:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^4 x + \ln(x+1) + 3e^x - \sqrt[3]{x+8}\sqrt{x+4}}{x \cos^5 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

Ta có:

$$f'(x) = -4 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{1}{x+1} + 3 \cdot e^x - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+8)^2}} \cdot \sqrt{x+4} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \cdot \sqrt[3]{x+8}$$

$$\text{nên } f'(0) = 0 + \frac{1}{1} + 3 - \frac{1}{12} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{10}{3}.$$

Vậy giới hạn cần tìm là  $\frac{10}{3}$ .

**Bài 230.** Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos^2 x - 1}{2x} \cdot \frac{\cos^3 x - 1}{3x} \cdots \frac{\cos^{2011} x - 1}{2011x} \right).$$

**Lời giải.**

Trước hết, ta sẽ tính giới hạn dạng tổng quát:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^k x - 1}{kx}$ .

Ta xét hàm số:  $f(x) = \cos^k x - 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = -k \cdot \sin x \cdot \cos^{k-1} x$ .

Dễ thấy hàm này khả vi tại 0 và  $f(0) = 0$  nên:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^k x - 1}{kx} = \frac{1}{k} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(0)}{k} = 0$ .

Vậy giới hạn đã cho là  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos^2 x - 1}{2x} \cdot \frac{\cos^3 x - 1}{3x} \cdots \frac{\cos^{2011} x - 1}{2011x} \right) = 0$ .

**Bài 231.** Cho dãy số  $\{x_n\}$  được xác định

$$\text{bởi: } \begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{2011}{3} \ln(x_n^2 + 2011^2) - 2011^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn.

**Lời giải.**

Xét hàm số tương ứng  $f(x) = \frac{2011}{3} \ln(x^2 + 2011^2) - 2011^2, x \in \mathbb{R}$ .

Dãy số đó cho chính là  $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Ta có  $f'(x) = \frac{2011}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 2011^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2011x}{x^2 + 2011^2} \leq \frac{1}{3}$ .

Xét hàm số  $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 < 0$  nên phương trình  $g(x) = 0$  có không quá một nghiệm. Ta lại có  $g(0) = f(0) = \frac{2011}{3} \ln 2011^2 - 2011^2 < 0$  và  $g(-2011^2) > 0$  nên phương trình  $g(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm do đây là hàm liên tục.

Từ đây suy ra phương trình  $g(x) = 0$  có đúng một nghiệm thực.

Gọi  $a$  là nghiệm của phương trình  $g(x) = 0 \Rightarrow f(a) = a$ .

Áp dụng định lý Lagrange cho  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ , do hàm  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên tồn tại

$z \in (x, y)$  sao cho:  $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ , mà  $f'(z) \leq \frac{1}{3}, \forall z$  nên suy ra

$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|$  với mọi  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

Ta có  $|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \leq \frac{1}{3}|x_n - a| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |x_1 - a|$ .

Dễ thấy rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n |x_1 - a|\right] = 0$  nên theo nguyên lý kẹp, ta có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - a| = 0$ .

Vậy dãy đó có giới hạn hữu hạn. Ta có đpcm.

**Bài 232.**

(Đề dự bị VMO 2008) Cho số thực  $a$  và dãy số thực  $\{x_n\}$  xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến đến dương vô cùng.

**Lời giải.**

Đặt  $f(x) = \ln(3 + \sin x + \cos x) - 2008$  thì  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$

Từ đó, sử dụng đánh giá  $|\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}$ ,  $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$  ta suy ra

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ , ta có  $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$

Từ đó suy ra  $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$  với mọi  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

Áp dụng tính chất này với  $m > n \geq N$ , ta có

$$|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \leq q|x_{m-1} - x_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-1}|x_{m-n+1} - x_1| \leq q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1|.$$

Do dãy  $\{x_n\}$  bị chặn và  $q < 1$  nên với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N$  đủ lớn để  $q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1| < \varepsilon$ . Như vậy dãy  $\{x_n\}$  thoả mãn điều kiện Cauchy do đó hội tụ.

**Bài 233.** (Vô địch sinh viên Moskva, 1982) Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định

$$\text{bởi } x_0 = 1982, x_{n+1} = \frac{1}{4 - 3x_n}, n = 0, 1, 2, \dots. \text{ Hãy tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**Lời giải.**

Tính toán trực tiếp ta thấy  $0 < x_2 < 1, x_3 > x_2$ . Vì  $f(x) = \frac{1}{4 - 3x}$  là một hàm số tăng từ  $[0, 1]$  vào  $[0, 1]$  nên từ đây,  $\{x_n\}_{n \geq 2}$  là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1 do đó có giới hạn. Giả sử giới hạn là  $a$  thì ta có  $a = \frac{1}{4 - 3a} \Leftrightarrow a = 1$  (giá trị  $a = \frac{1}{3}$  loại do dãy tăng).

**Bài 234.** Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_0 = \sqrt{2}$  và  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Chứng minh rằng dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Đặt  $f(x) = (\sqrt{2})^x$  thì dãy số có dạng  $x_0 = \sqrt{2}$  và  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Ta thấy  $f(x)$  là hàm số tăng và  $x_1 = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$ . Từ đó, do  $f(x)$  là hàm số tăng nên ta có  $x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1, x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \dots$   
Suy ra  $\{x_n\}$  là dãy số tăng.

Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng  $x_n < 2$  với mọi  $n$ .

Thật vậy, điều này đúng với  $n = 0$ .

Giả sử ta đã có  $x_k < 2$  thì rõ ràng  $x_{k+1} = (\sqrt{2})^{x_k} < (\sqrt{2})^2 = 2$ .

Theo nguyên lý quy nạp, ta có  $x_n < 2$  với mọi  $n$ .

Vậy dãy  $\{x_n\}$  tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn.

Gọi  $a$  là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức truy hồi:  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$  sang giới hạn, ta được  $a = (\sqrt{2})^a$ .

Ngoài ra ta cũng có  $a \leq 2$ .

Xét phương trình  $x = (\sqrt{2})^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$ . Khảo sát hàm số

$y = \frac{\ln x}{x}$  ta thấy rằng phương trình trên chỉ có 1 nghiệm bé hơn  $e$  và một nghiệm lớn hơn  $e$ .

Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có một nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện không vượt quá 2. Từ đó suy ra  $a = 2$ .

Vậy giới hạn của  $\{x_n\}$  khi  $n$  dần đến vô cùng là 2.

Trong trường hợp  $f(x)$  là hàm giảm, ta có thể chứng minh dãy hội tụ bằng cách chứng minh hai dãy con trên cùng hội tụ về một giới hạn nh định lí 1.

**Bài 235.**

Khảo sát sự hội tụ của dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi

$$u_0 = a \geq 0, u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}.$$

**Lời giải.**

Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng  $u_n \geq 0$  với mọi  $n$ .

Xét hàm số  $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ ,  $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$  là hàm liên tục. Ta có:

$$\forall x \in [0; +\infty), f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Do đó, nếu  $\{u_n\}$  hội tụ thì nó chỉ có thể hội tụ đến 1.

Hàm số  $f$  khả vi trên  $[0; +\infty)$  và  $\forall x \in [0; +\infty)$ ,  $f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ , suy ra  $f$  giảm.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $\lim u_{2k} = 1$  và  $\lim u_{2k+1} = 1$ .

Xét  $g = f \circ f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ ,  $g(x) = \frac{2((1+x^2)^{-1})^2}{(1+(1+x^2)^{-1})^2 + 4}$  thì  $g$  là một hàm tăng vì  $f$  giảm.

$$\text{Ta tính: } g(x) - x = -\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(1+x^2)^2 + 4} = -\frac{(x-1)^3(x^2 + x + 2)}{(1+x^2)^2 + 4}$$

Ta xét các trường hợp sau:

\*Trường hợp 1:

$u_0 = a \in [0, 1]$ . Khi ấy với mọi  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(u_{2k} \in [0, 1] \text{ và } u_{2k+1} \in [1; \infty))$  Vậy với mọi  $k \in \mathbb{N}$ , ta có

$$u_{2k+2} - u_{2k} = g(u_{2k}) - u_{2k} \geq 0,$$

$$u_{2k+3} - u_{2k+1} = g(u_{2k+1}) - u_{2k+1} \leq 0$$

Do đó  $\{u_{2k}\}$  tăng và  $\{u_{2k+1}\}$  giảm.

Hơn nữa, vì  $(\forall p \in \mathbb{N}, u_{2k} \leq 1 \leq u_{2k+1})$ , nên ta suy ra rằng  $\{u_{2k}\}$  hội tụ đến một giới hạn  $L_1$  thuộc  $[0; +\infty)$  và  $\{u_{2k+1}\}$  hội tụ đến một giới hạn  $L_2$  thuộc  $[0; +\infty)$ .

Vì  $g$  liên tục trên  $[0; +\infty)$  và vì phương trình  $g(x) = x$  có nghiệm duy nhất  $x = 1$  trên  $[0; +\infty)$  nên ta suy ra  $L_1 = L_2 = 1$ .

Cuối cùng ta được  $\lim u_n = 1$ .

Trường hợp 2:

Vì ta quy về trường hợp trên (bằng cách thay  $u_0$  bởi  $u_1$ ) và có cùng một kết luận.

**Bài 236.**

Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi:

$$x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2 \text{ có giới hạn hữu hạn.}$$

**Lời giải.**

Hàm số  $f(x) = 2 - x^2$  tăng trên  $(-\infty, 0)$  và giảm trên  $(0, +\infty)$ . Phương trình có hai nghiệm là  $x = -2$  và  $x = 1$ . Đó là những dữ kiện quan trọng trong lời giải bài toán này.

+ Đầu tiên, ta nhận xét rằng nếu  $a < -2$  thì do  $f : (-\infty, -2) \rightarrow (-\infty, -2)$  và là hàm tăng,  $x_1 = 2 - a^2 < x_0$  nên dãy số  $\{x_n\}$  giảm. Nếu dãy  $\{x_n\}$  bị chặn dưới thì nó hội tụ về nghiệm của phương trình, điều này mâu thuẫn vì dãy  $\{x_n\}$  giảm và  $x_0 < -2$ .

Vậy  $\{x_n\}$  không bị chặn dưới, tức không có giới hạn hữu hạn.

Nếu  $a > 2$  thì  $x_1 < -2$  và ta cũng suy  $\{x_n\}$  không có giới hạn hữu hạn.

+ Với  $a = -2$  hoặc  $a = 1$  thì dãy số có giới hạn. Xét  $x_0 \in [-2, 2]$ . Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại  $n$  sao cho  $x_n = -2$  hoặc  $x_n = 1$ .

Thật vậy, giả sử  $x_n$  có giới hạn hữu hạn là  $b$  và  $x_n \notin \{-2, 1\}$  với mọi  $n$ . Khi đó  $b = -2$  hoặc  $b = 1$ . Giả sử thì tồn tại  $N_0$  sao cho  $x_n$  nằm trong lân cận  $-2$  với mọi  $n \geq N_0$ . Nhưng nếu  $x_n = -2 + \varepsilon$  thì  $x_{n+1} = -2 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 > x_n$ , suy ra dãy  $\{x_n\}$  tăng kể từ  $N_0$  và không thể dần về  $-2$ . Nếu  $b = 1$  kể từ  $n \geq N_0$  nào đó  $x_n$  thuộc lân cận  $1$ . Ta có:

$$x_{n+2} - x_n = 2 - (2 - x_n^2)^2 - x_n = (2 - x_n - x_n^2)(x_n^2 - x_n - 1).$$

Tại lân cận  $1$  thì  $x_n^2 - x_n - 1 < 0$ . Vì nếu  $x_n < 1$  thì  $x_{n+1} > 1$  (và ngược lại  $x_n > 1$  thì  $x_{n+1} < 1$ , chúng ta đang xét trong lân cận điểm  $1$ !) nên có thể giả sử  $x_n > 1$ .

Khi đó  $2 - x_n - x_n^2 < 0$  suy ra  $x_{n+2} > x_n$ . Tiếp tục như vậy, suy ra:  $1 < x_n < x_{n+2} < \dots < x_{n+2k} < \dots$ , mâu thuẫn với giả thiết  $b = 1$ .

Vậy điều giả sử là  $2$ , tức là dãy số chỉ có giới hạn khi tồn tại  $n$  sao cho  $x_n = -2$  hoặc  $x_n = 1$ .

Sau khi thu được kết quả này, ta sử dụng hàm ngược  $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2-x}$  để xây dựng tất cả các giá trị  $a$  thỏa mãn điều kiện đầu bài.

**Bài 237.** (Viết Nam, 2000) Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định nh

sau:  $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}, n = 0, 1, 2, \dots$

Tìm tất cả các giá trị của  $c$  để với mọi giá trị  $x_0 \in (0; c)$ ,  $x_n$  xác định với mọi  $n$  và tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim x_n$ .

**Lời giải:**

Để  $x_1$  tồn tại thì ta thì  $c - \sqrt{c + x_n} \geq 0$  với mọi  $x_0 \in (0; c) \Leftrightarrow c(c-1) \geq x_0$  với mọi  $x_0 \in (0; c)$ , suy ra  $c \geq 2$ . Với  $c \geq 2$  thì  $0 < x_1 < \sqrt{c}$ .

Nếu  $0 < x_n < \sqrt{c}$  thì  $c - \sqrt{c + x_n} > c - \sqrt{2c} > 0$ , suy ra  $x_{n+1}$  tồn tại và ta cũng có  $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$ .

Đặt  $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$  thì  $f'(x) = \frac{-1}{4} \sqrt{c + x} \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$ .

Với mọi  $x \in (0, \sqrt{c})$  ta có  $(c+x)(c - \sqrt{c+x}) > c(c - \sqrt{c+\sqrt{c}}) \geq 2(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}) > \frac{1}{4}$ .

Từ đó suy ra  $|f'(x)| < q < 1$  với mọi  $x \in (0, \sqrt{c})$ , tức  $f(x)$  là hàm số co trên  $(0, \sqrt{c})$ , suy ra dãy số đã cho hội tụ. Vậy tất cả các giá trị  $c$  cần tìm là  $c \geq 2$ .

Với kịch bản thứ hai, ta giải phương trình  $f(x) = x$  rồi chọn nghiệm  $L$  phù hợp và xét hiệu  $|x_n - L|$ , tìm cách sử dụng hệ thức truy hồi để đánh giá hiệu số này và chứng minh  $\lim x_n = L$  bằng định nghĩa.

**Bài 238.** Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_1 \in (1; 2)$  và  $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ .

Chứng minh rằng  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  dần đến vô cực. Tìm giới hạn đó.

**Lời giải:**

Giả sử  $x_n$  có giới hạn là  $a$  thì  $a = 1 + a - \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$ .

Ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh  $\lim x_n = \sqrt{2}$ .

Ta có  $|x_{n+1} - \sqrt{2}| = |1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} - \sqrt{2}| = |x_n - \sqrt{2}| \cdot \frac{|\sqrt{2} + x_n - 1|}{2}$ .

Tiếp theo ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng  $1 < x_n < \frac{3}{2}$  với mọi  $n = 2, 3, \dots$

Từ đó, suy ra:  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2} + x_n - 1}{2} < \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2} = q < 1$ .

Như thế ta luôn có  $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < q |x_n - \sqrt{2}|$

Suy ra  $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < q^n |x_1 - \sqrt{2}|$

Vì  $0 < q < 1$  nên với  $n$  đủ lớn thì  $q^n$  nhỏ tùy ý, suy ra  $\lim x_n = \sqrt{2}$ .

**Bài 239.** Cho dãy số xác định bởi:  $u_1 = a \in (0; 1)$ ,  $u_{n+1} = \sqrt[n]{\frac{u_n + k}{k \cdot u_n + 1}}$ ,  $k > 1, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $\lim u_n = 1$ .

**Lời giải:**

Từ công thức xác định của dãy số, bằng quy nạp, ta có  $u_n \in (0; 1), \forall n$ .

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt[n]{\frac{x+k}{kx+1}}, k > 1, x \in [0; 1]$ .

Ta có:  $f'(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1-k^2}{(kx+1)^2} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{kx+1}{x+k}\right)^8} = \frac{1-k^2}{9(kx+1)\sqrt[n]{(kx+1)(x+k)^8}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{9}, \forall x \in [0; 1]$

Nếu dãy đã cho hội tụ thì giới hạn của nó phải là nghiệm của phương trình

$f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\frac{x+k}{kx+1}} \Leftrightarrow kx^{10} + x^9 = x + k \Leftrightarrow k(x^{10} - 1) + x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 > 0$ .

Theo định lý Lagrange thì tồn tại  $c$  thuộc  $(0; 1)$  sao cho:

$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) \Rightarrow |f(x) - 1| < \frac{1}{9} |x - 1|$ , ta cũng có  $f(1) = 1$  nên:

$|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - 1| < \frac{1}{9} |u_n - 1| < \dots < \frac{1}{9^n} |a - 1|$ .

Theo nguyên lý kẹp thì  $\lim(u_n - 1) = 0$  hay  $\lim u_n = 1$ .

**Bài 240. Bài toán 23.** Cho dãy số thực  $(x_n)$  xác định bởi:  $\begin{cases} x_1 = 2007 \\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm giới hạn của dãy số khi  $n$  tiến dần tới dương vô cùng.

**Lời giải:**

Ta có  $x_n > \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Xét  $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ , ta có  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \forall x \in (\sqrt{3}; +\infty)$ .

Nếu  $(x_n)$  có giới hạn thì giới hạn đó là nghiệm lớn hơn  $\sqrt{3}$  của phương trình  $f(x) = x$ .

Ta có  $f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})^2 = \frac{x^2}{x^2-1}$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{3}x)^2 - 2(x^2 - \sqrt{3}x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{3}x = -1 \\ x^2 - \sqrt{3}x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}.$$

Đặt  $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$ , theo định lý Lagrange, luôn tồn tại  $c_n \in (x_n; a)$  hoặc  $(a; x_n)$  thỏa mãn:

$$|f(x_n) - f(a)| = |f'(c_n)| |x_n - a|.$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = |f'(c_n)| |x_n - a| < \frac{1}{2\sqrt{2}} |x_n - a| < \dots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - a|$$

Mà  $\lim \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - a| = 0$ , do đó  $\lim x_n = a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$ .

**Bài 241.** Cho dãy số thực  $(x_n)$  xác định bởi:  $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ . Chứng minh rằng:

a) Nếu  $f(x)$  là hàm số có đạo hàm trên khoảng  $D$  chứa  $a$  và  $|f'(x)| < b < 1, \forall x \in D$  thì  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến dần đến dương vô cùng.

b) Nếu  $f(x)$  là hàm số có đạo hàm trên khoảng  $D$  chứa  $a$ ,  $f(a) \neq 0$  và  $|f'(x)| > b > 1, \forall x \in D$  thì  $|x_n|$  tiến dần đến dương vô cùng khi  $n$  tiến dần đến dương vô cùng.

Phương pháp giải

a) - Nếu phương trình  $f(x) = x$  giải được (tìm được nghiệm) thì ta giải quyết bài toán tổng quát tương tự bài toán trên và khi đó ta tìm được giới hạn của dãy số khi  $n$  tiến dần tới dương vô cùng.

- Nếu phương trình  $f(x) = x$  khó giải thì ta giải quyết bài toán tổng quát bằng cách sử dụng tiêu chuẩn Cauchy. Bài toán sau đây là một ví dụ cụ thể.

b) Tương tự ý a.

- Khi  $\exists a_0 \in D : a_0 \neq a, f(a_0) = a_0$  luôn tồn tại  $c_n \in (x_n; a_0)$  hoặc  $(a_0; x_n)$  thỏa mãn:

$$|f(x_n) - f(a_0)| = |f'(c_n)| |x_n - a_0|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1}| + |a| \geq |x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a_0)| > b |x_n - a_0| > \dots > b^n |a - a_0| \Rightarrow \lim |x_n| = +\infty$$

- Khi phương trình  $f(x) = x$  vô nghiệm, ta có  $f(x) - x > 0 \forall x \in D$  hoặc  $f(x) - x < 0 \forall x \in D$  suy ra  $x_n$  tăng hoặc giảm. Nếu  $x_n$  có giới hạn thì giới hạn đó là nghiệm của phương trình  $f(x) = x$ , do đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = +\infty$

**Bài 242.** (VMO 1998A). Cho số thực  $a \geq 1$ . Xét dãy số  $(x_n), n = 1, 2, \dots$  được xác định bởi

$$x_1 = a, x_{n+1} = 1 + \ln \left( \frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right) \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải**

Xét dãy số  $(x_n)$  với  $x_1 = a (a \geq 1)$  và  $x_{n+1} = 1 + \ln \left( \frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right), n = 1, 2, \dots$

(i) Nếu  $a = 1$  thì  $x_n = 1 (\forall n)$  suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

(ii) Nếu  $a > 1$ . Ta chứng minh bằng quy nạp  $x_n > 1$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Giả sử với  $n$  sao cho  $x_n > 1$ . Ta nhận thấy  $x_{n+1} > 1 \Leftrightarrow x_n^2 - 1 - \ln x_n > 0$ .

Dễ thấy hàm số  $f(x) = x^2 - 1 - \ln x$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$ .

Mặt khác  $x_n > 1$  suy ra  $x_{n+1} > 1$ . Vậy  $x_n > 1 \forall n \geq 1$ .

Tiếp theo ta chứng minh với  $x_n > 1 \forall n \geq 1$  thì  $x_n > x_{n+1} \forall n \geq 1$ .

Xét hàm số  $g(x) = x - 1 - \ln \left( \frac{x^2}{1 + \ln x} \right)$  trên  $[1; +\infty)$ .

Bằng cách khảo sát hàm số này ta chỉ ra được  $g(x)$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$  mà  $g(1) = 0$ , suy ra  $g(x) > 0 \forall x > 1$  và  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Do đó nếu  $x_n > 1 \forall n \geq 1$  thì  $x_n > x_{n+1} \forall n \geq 1$ .

Do vậy dãy  $(x_n)$  là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 1, nên tồn tại  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ .

Dễ thấy  $b \geq 1$  và từ hệ thức truy hồi chuyển qua giới hạn ta được

$$b = 1 + \ln \left( \frac{b^2}{1 + \ln b} \right) \Leftrightarrow b - 1 - \ln \left( \frac{b^2}{1 + \ln b} \right) = 0.$$

Theo kết quả khảo sát của hàm  $g(x)$  ở trên thì  $g(b) = 0 \Leftrightarrow b = 1$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

**Bài 243.** Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 = 2, 9; x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải**

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  với  $x \in (1, +\infty)$ . Dễ thấy  $f(x)$  là hàm số nghịch biến trên  $(1, +\infty)$ .

(i) Ta chứng minh dãy  $(x_n)$  bị chặn.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp  $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} \forall n \in \mathbb{N}^*$  (1).

Thật vậy

Với  $n = 1$  thì bất đẳng thức trên luôn đúng.

Giả sử bất đẳng thức trên đúng đến  $n$ , tức là  $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Ta có  $u_{n+1} = f(u_n)$  và  $f$  là nghịch biến trên  $(1, +\infty)$  nên  $u_{n+1} < f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Mặt khác do  $\sqrt{3} < u_n$  nên từ hệ thức  $u_{n+1} = f(u_n)$  ta có  $\sqrt{3} < u_{n+1}$ . Vậy (1) được chứng minh.

(ii) Từ đó suy ra  $\exists a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n}, \exists b = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$ , trong đó  $a, b$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases}$$

(iii) Xét hàm số  $g(x) = f(f(x)) - x$ , với  $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ , có  $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) - 1$ .

Do  $\sqrt{3} < f(x) < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$  nên  $g'(x) < 0$  với mọi  $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ , cũng với  $g(\sqrt{3}) \cdot g(\sqrt{\frac{3}{2}}) < 0$  suy ra phương trình  $g(x) = 0$  có nghiệm duy nhất. Do đó dãy  $(x_n)$  hội tụ.

**Bài 244.** (VMO 2008) Cho dãy số  $(x_n)$  xác định như sau  $\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2 \\ x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  hội tụ và tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

**Lời giải 1.**

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được  $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2} \quad \forall n > 2$ .

Xét hàm số  $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

Ta có  $f'(x) = 2^{-x} \cdot \ln \frac{1}{2} < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và với mọi  $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  thì  $2^{-x} \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset (0; 1)$ .

Do đó  $|f'(x)| < \frac{\ln 2}{2} = u < 1$ .

Mặt khác, theo định lý Lagrange thì với mọi  $\frac{1}{2} < x \leq y < \frac{3}{2}$  đều tồn tại  $t \in (x; y)$  sao cho  $2^{-x} - 2^{-y} = f'(t)(x - y)$ .

Vậy  $|x_n - x_{n-1}| = |2^{-x_{n-2}} - 2^{-x_{n-3}}| < u \cdot |x_{n-2} - x_{n-3}| = u \cdot |2^{-x_{n-4}} - 2^{-x_{n-5}}| < u^2 \cdot |x_{n-4} - x_{n-5}| \cdot \dots$

Từ đó  $|x_{2n} - x_{2n-1}| < u^n |x_2 - x_1| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$ .

Từ đó, theo định lý Cauchy, dãy  $\{x_n\}$  hội tụ về  $\alpha$  là nghiệm của phương trình  $\alpha = 2^{-\alpha} + \frac{1}{2}$

Giải phương trình này, thu được  $\alpha = 1$ . Vậy,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

**Lời giải 2.**

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được  $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2} \quad \forall n > 2$ .

Xét hàm số  $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . Ta có  $f'(x) = 2^{-x} \cdot \ln \frac{1}{2} < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

Do đó hàm  $y = f(x), x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  là hàm giảm.

Vậy, mỗi dãy  $(x_{2k}), (x_{2k+1})$  chứa hai dãy con đơn điệu ngược chiều.

Từ đó, do  $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2} \quad \forall n > 2$  suy ra bốn dãy con  $(x_{4k}), (x_{4k+1}), (x_{4k+2}), (x_{4k+3})$  hội tụ theo thứ tự về  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} \alpha = f(\gamma) \\ \beta = f(\delta) \\ \gamma = f(\alpha) \\ \delta = f(\beta) \end{cases}$$

Giải hệ thu được  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

### Lời giải 3.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được  $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2} \quad \forall n > 2$ .

Xét hàm số  $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

Ta có  $f'(x) = 2^{-x} \cdot \ln \frac{1}{2} < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và với mọi  $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  thì  $2^{-x} \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset (0; 1)$ .

Do đó  $|f'(x)| < \frac{\ln 2}{2} = u < 1$ .

Mặt khác, theo định lý Lagrange thì với mọi  $\frac{1}{2} < x \leq y < \frac{3}{2}$  đều tồn tại  $t \in (x; y)$  sao cho  $2^{-x} - 2^{-y} = f'(t)(x - y)$ .

Vậy, với mọi  $x, y \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  tồn tại  $u = \frac{\ln 2}{2} \in (0; 1)$  sao cho  $|f(x) - f(y)| = u \cdot |x - y|$ . Suy ra hàm  $f$  là hàm co. Bởi vậy, hai dãy con  $(x_{2k}), (x_{2k+1})$  (đều cho bởi hệ thức truy hồi  $x_{n+2} = f(x_n)$  hội tụ. Bằng việc giải phương trình giới hạn, thu được  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

**Bài 245.** Cho dãy số  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  thỏa mãn  $0 < x_1 < 1$  và  $x_n = \sqrt{1 - x_{n-1}}$  với mọi  $n \geq 1$ .

Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

### Lời giải:

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  $0 < x_1 < 1$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{1-x} (0 < x < 1)$ . Khi đó  $f(x)$  nghịch biến trên  $(0; 1)$  và

$$x_{k+1} = f(x_k), \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Trường hợp 1:  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Khi đó  $x_3 > x_1 \Rightarrow x_4 < x_2$ .

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được dãy  $(x_{2k-1})$  là dãy tăng và  $(x_{2k})$  là dãy

giảm. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $x_{2k-1} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_{2k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = a (0 < x_1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1) \text{ và } \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = b (\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq b < x_2 < 1).$$

Ta có  $b = \sqrt{1-a}$  và  $a = \sqrt{1-b}$

$$\Rightarrow a = \sqrt{1-\sqrt{1-a}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (vì } 0 < a < 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Trường hợp 2:  $1 > x_1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Tương tự ta có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Trường hợp 3:  $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**Bài 246.** Cho dãy  $(x_n)$  được xác định bởi  $x_0 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n - x_n^2$ .

Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$ .

**Bài giải:**

Ta thấy  $\beta = -1$  nên ta thử với  $\gamma = -1$ . Dễ dàng chứng minh được  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . Ta có:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n^2}{(x_n - x_n^2)x_n} = \frac{1}{1 - x_n} \rightarrow 1$$

Từ đó áp dụng định lý trung bình Cesaro, suy ra  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx_n} = 1$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$  (đpcm).

**Bài 247.** Dãy  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_1 = 1$  và  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ .

Hãy tìm tất cả các số thực  $\beta$  để dãy số  $\frac{a_n^\beta}{n}$  có giới hạn hữu hạn khác 0.

**Bài giải:**

Ta chứng minh  $a_n \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Thật vậy, ta có  $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2\sqrt{a_n} + \frac{1}{a_n} > a_n^2 + 2$  (do  $a_n \geq 1$  với mọi  $n$ ).

Từ đó  $a_{n+1}^2 > 1 + 2n \Rightarrow$  đpcm.

Ta xét biểu thức:  $a_{n+1}^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}} = \left(a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}}$

Đặt  $x_n = \frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}$  thì  $x_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Do đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1}^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x_n)^{\frac{3}{2}} - 1}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1}{x}$ .

Mặt khác, với  $x_0 = 0$  thì  $(1+x_0)^{\frac{3}{2}} - 1 = x_0 = 0$  nên áp dụng quy tắc L'Hopital ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ (1+x)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}(1+x)}{1} = \frac{3}{2}.$$

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2}$ .

Với  $\beta > \frac{3}{2}$  thì giới hạn bằng  $\infty$ , với  $\beta < \frac{3}{2}$  thì giới hạn bằng 0.

Vậy  $\beta = \frac{3}{2}$  là giá trị duy nhất thỏa yêu cầu bài toán.

**Bài 248.** Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$ .

**Bài giải**

Ta xét dãy  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  có  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ .

Áp dụng định lí 4, ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e$ .

Mặt khác, ta có:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \dots \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

**Bài 249.** Dãy số  $(a_n)$  là dãy bị chặn thỏa:  $2a_{n+2} \leq a_n + a_{n+1}, \forall n$ .

Chứng minh rằng dãy  $(a_n)$  này hội tụ.

**Bài giải:**

Đặt  $A_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$ . Ta thấy

$$a_{n+2} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \leq A_n \Rightarrow A_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \leq \max\{a_{n+1}, A_n\} = A_n.$$

Do dãy  $(a_n)$  bị chặn nên dãy  $(A_n)$  cũng bị chặn và  $(A_n)$  giảm knn nên nó hội tụ. Đặt  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \ell$ .

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N \in \mathbb{Z}^+$  sao cho  $\forall n > N$  thì:  $\ell - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow a_n \leq A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}$ .

Nếu  $a_n \geq \ell - \frac{\varepsilon}{3}$  thì  $\ell - \frac{\varepsilon}{3} \leq a_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ .

Nếu  $a_n < \ell - \frac{\varepsilon}{3}$ , khi đó do  $A_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$  mà  $A_n > \ell - \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow A_n = a_{n+1} > \ell - \frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow a_n \geq 2a_{n+1} - a_{n-1} \geq 2\left(\ell - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\ell + \frac{\varepsilon}{3}\right) = \ell - \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

Vậy  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn (đpcm).

**Bài 250.**

Dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 5x_{n+2} = x_n + 2x_{n+1} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  hội tụ

**Bài giải:**

Xét dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3}$ , dễ thấy  $(a_n)$  giảm dần về 0.

Ta chứng tỏ  $\max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq a_n, \forall n$  (1)

Thật vậy, (1) đúng với  $n = 0$  và  $n = 1$ . Giả sử (1) đúng với  $n$  và do  $(a_n)$  là dãy giảm nên

$$5x_{2n+2} = x_{2n} + 2x_{2n+1} \leq 3a_n \Rightarrow x_{2n+2} \leq a_{n+1}$$

$$\text{Và } 5x_{2n+3} = x_{2n+1} + 2x_{2n+2} \leq a_n + 2a_{n+1} \leq 3a_n \Rightarrow x_{2n+3} \leq a_{n+1}$$

Như vậy (1) đúng với  $n + 1$  hay (1) đúng  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Dễ thấy  $x_n > 0 \forall n$  và từ (1) theo nguyên lý kẹp ta có  $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = 0$  suy ra  $\lim x_n = 0$

Nhận xét:

Việc đưa vào dãy phụ  $(a_n)$  có tác dụng chặn cả hai dãy con  $(x_{2n})$  và  $(x_{2n+1})$  và làm chúng cùng hội tụ về một điểm

Có thể sử dụng phương pháp sai phân tìm được số hạng tổng quát

$$x_n = C_1 \left( \frac{1-\sqrt{6}}{5} \right)^n + C_2 \left( \frac{1+\sqrt{6}}{5} \right)^n$$

Thay các giá trị của  $x_0, x_1$  để tìm  $C_1, C_2$  từ đó tìm được  $\lim x_n = 0$

**Bài 251.**

Dãy  $(x_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \in (0;1) \\ 3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+2}^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  hội tụ

**Bài giải:**

Ta xét dãy số  $(a_n)$  xác định bởi:  $a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2\}$ ,  $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{3}$

Dễ thấy dãy số  $(a_n)$  giảm dần về 0. Ta chứng tỏ  $\max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n, \forall n$  (1)

Thật vậy, (1) đúng với  $n = 0, 1, 2, \dots$ , Giả sử (1) đúng với  $n$  và do  $(a_n)$  là dãy giảm nên ta có:

$$3x_{3n+3} = x_{3n}^2 + x_{3n+2}^2 \leq 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+3} \leq a_{n+1}$$

$$3x_{3n+4} = x_{3n+1}^2 + x_{3n+3}^2 \leq a_n^2 + a_{n+1}^2 \leq 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+4} \leq a_{n+1}$$

$$\text{và } 3x_{3n+5} = x_{3n+2}^2 + x_{3n+4}^2 \leq a_n^2 + a_{n+1}^2 \leq 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+5} \leq a_{n+1}$$

Như vậy, (1) đúng với  $n + 1$ , theo nguyên lý quy nạp, (1) được chứng minh. Dễ thấy  $x_n > 0$  Từ đó theo nguyên lý kẹp giữa ta có  $\lim x_{3n+i} = 0$  ( $i = 0, 1, 2$ ) do đó  $\lim x_n = 0$

Từ các cách chọn dãy số phụ như trên ta có các dãy số sau đều hội tụ về 0 với  $x_0, x_1, x_2, x_3$  đều thuộc  $(0; 1)$

$$3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+1}x_{n+2}, \quad 3x_{n+3} = x_n^2 + x_nx_{n+1}$$

$$3x_{n+3} = \frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2} + x_{n+1}^2 \quad 6x_{n+4} = x_{n+1}x_{n+2} + x_n^2 + 2x_nx_{n+1} \dots$$

**Bài 252.**

Dãy  $(x_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 > 0 \\ x_{n+3} = \sqrt{x_n + x_{n+2}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  hội tụ

**Bài giải:**

Ta xây dựng hai dãy  $(a_n)$  và  $(b_n)$  như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ b_{n+1} = \sqrt{2b_n} \end{cases}$$

Dãy  $(a_n)$  là dãy giảm dần về 2, dãy  $(b_n)$  tăng dần về 2.

Bằng quy nạp dễ chứng minh được

$$b_{n+1} \leq \min\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq \max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n \quad \forall n$$

Từ đó, dẫn đến  $\lim x_{3n} = \lim x_{3n+1} = \lim x_{3n+2} = 2$  suy ra  $\lim x_n = 2$

### Bài 253.

Cho dãy  $(x_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) được xác định như sau:  $x_0, x_1, x_2$  là các số dương cho trước,  $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$  với mọi  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng dãy  $(x_n)$  hội tụ và tìm giới hạn của dãy

### Bài giải:

Ta xây dựng hai dãy  $(a_n)$  và  $(b_n)$  như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2, 9\} \\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n} \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, x_2, 9\} \\ b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dãy  $(a_n)$  là dãy giảm dần về 9, dãy  $(b_n)$  tăng dần về 9 suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 9$$

Ta chứng minh  $b_{n+1} \leq \min\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq \max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n \quad \forall n$  (1)

Thật vậy, với  $n = 0$  thì (1) hiển nhiên đúng

Giả sử (1) đúng với  $n = k$ , khi đó với  $n = k + 1$  ta có

$$b_n \leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+3} = \sqrt{x_{3k+2}} + \sqrt{x_{3k+1}} + \sqrt{x_{3k}} \leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1} \leq a_n$$

$$b_n \leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+4} = \sqrt{x_{3k+3}} + \sqrt{x_{3k+2}} + \sqrt{x_{3k+1}} \leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1} \leq a_n$$

$$b_n \leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+5} = \sqrt{x_{3k+4}} + \sqrt{x_{3k+3}} + \sqrt{x_{3k+2}} \leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1}$$

Vậy (1) cũng đúng với  $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng với mọi số tự nhiên  $n$

Từ đó theo định lý kẹp ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 9$$

Nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 9$

## MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ CHÍNH PHƯƠNG CỦA DÃY TUYẾN TÍNH CẤP HAI

### LÝ THUYẾT

**1. Công thức tổng quát của dãy  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ .**

**Trường hợp 1:**  $a + b = 1$

Ta có  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \Leftrightarrow u_{n+2} + (1-a)u_{n+1} = u_{n+1} + (1-a)u_n + c$ .

Đặt  $v_n = u_{n+1} + (1-a)u_n$  ta được  $v_{n+1} = v_n + c$ . Từ đó ta được  $v_n = v_1 + (n-1)c$ ,  $n = 1, 2, \dots$  suy ra

$$u_{n+1} = (a-1)u_n + v_1 + (n-1)c. \text{ Do đó}$$

$$u_{n+1} = (a-1)u_n + v_1 + (n-1)c$$

$$(a-1)u_n = (a-1)^2 u_{n-1} + v_1(a-1) + (a-1)(n-2)c$$

$$(a-1)^2 u_{n-1} = (a-1)^3 u_{n-2} + v_1(a-1)^2 + (a-1)^2(n-3)c$$

...

$$(a-1)^{n-1} u_2 = (a-1)^n u_1 + v_1(a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-1}(n-1)c$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_{n+1} = (a-1)^n u_1 + v_1 \sum_{k=0}^{n-1} (a-1)^k + c \sum_{k=0}^{n-1} [(a-1)^k (n-k-1)]$$

**Trường hợp 2:**  $a+b \neq 1$

Đặt  $u_n = x_n + \alpha$ , ta sẽ chọn  $\alpha$  sao cho dãy số  $(x_n)$  là dãy tuyến tính cấp hai.

$$\text{Ta có } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \Leftrightarrow x_{n+2} + \alpha = a(x_{n+1} + \alpha) + b(x_n + \alpha) + c$$

$$\text{Để được dãy số } (x_n) \text{ tuyến tính ta sẽ chọn } \alpha \text{ sao cho } \alpha = \alpha a + \alpha b + c \Leftrightarrow \alpha = \frac{c}{1-a-b}$$

$$\text{Khi đó ta được } x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, n=1, 2, \dots$$

$$\text{Xét phương trình đặc trưng: } t^2 - at - b = 0 \quad (1)$$

+) Nếu phương trình (1) có hai thực phân biệt  $t_1, t_2$  thì  $x_n = At_1^n + Bt_2^n$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số được tính theo các số hạng  $x_1, x_2$ .

+) Nếu phương trình (1) có nghiệm kép  $t_1 = t_2 = t_0$  thì  $x_n = (A+Bn)t_0^n$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số được tính theo các số hạng  $x_1, x_2$ .

+) Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phức  $x \pm yi$  thì  $x_n = r^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số được tính theo các số hạng  $x_1, x_2$  và  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\varphi$  là một arcgument của  $x + yi$ .

## 2. Tính chất cơ bản dãy tuyến tính cấp hai.

Xét dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi:  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, n=1, 2, \dots$

$$\text{Ta có } \frac{u_{n+2} - bu_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - bu_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_n (u_{n+2} - bu_n) = u_{n+1} (u_{n+1} - bu_{n-1})$$

$$\Rightarrow u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = -b(u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2) = \dots = (-b)^{n-1} (u_1 u_3 - u_2^2).$$

$$\text{Do đó dãy } (u_n) \text{ thỏa mãn } u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-b)^{n-1} (u_1 u_3 - u_2^2).$$

Đây là tính chất rất quan trọng về dãy tuyến tính cấp hai, tính chất này thường được sử dụng khi chứng minh các đẳng thức liên quan đến các số hạng của dãy và các tính chất số học của dãy.

**3. Phương pháp thường dùng để chứng minh  $f(u_n)$  là số chính phương, trong đó  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ .**

Để chứng minh dãy số  $(b_n)$  thỏa mãn  $b_n$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$  ta thường sử dụng một số hướng sau:

**Hướng 1:** Ta chỉ ra tồn tại dãy số nguyên  $(c_n)$  thỏa mãn  $b_n = c_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ . Dãy số  $(c_n)$  thường dự đoán bằng cách tính một số giá trị đầu  $c_1, c_2, \dots$  và tìm ra quy luật của dãy  $(c_n)$ .

**Hướng 2:** Ta chứng minh  $b_n b_{n+2}$  là một số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ , sau đó chứng minh bằng quy nạp.

**Hướng 3:** Dựa vào công thức truy hồi ta tính được  $b_n = c_n^2$

## MỘT SỐ BÀI TẬP MINH HỌA

Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

- a)  $a_n - 1$  là số chính phương với mọi  $n$  lẻ  
 b)  $\frac{a_n - 1}{6}$  là số chính phương với mọi  $n$  chẵn.

**Lời giải.**

**Cách 1:** Ta dự đoán dãy số  $(c_n)$  sao cho  $a_{2n+1} - 1 = c_n^2$ , ta có  $a_1 = 2, a_3 = 26, a_5 = 362, a_7 = 5042$  suy ra  $c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 19, c_3 = 71$ . Khi đó ta thử thiết lập quan hệ truy hồi của dãy  $(c_n)$  theo dãy tuyến tính cấp 2, giả sử  $c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n$  và từ  $c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 19, c_3 = 71$  ta được

$$\begin{cases} 5a + b = 19 \\ 19a + 5b = 71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Do đó ta dự đoán dãy số } (c_n) \text{ là:}$$

$$c_0 = 1, c_1 = 5, c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp  $a_{2n+1} - 1 = c_n^2$  (1),  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ . Thật vậy (1) đúng với  $n = 0$ , giả sử (1) đúng đến  $n > 0$ , ta sẽ chứng minh (1) đúng đến  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a_{2n+3} - 1 &= 4a_{2n+2} - a_{2n+1} - 1 = 4(4a_{2n+1} - a_{2n}) - a_{2n+1} - 1 = 16a_{2n+1} - 4a_{2n} - a_{2n+1} - 1 \\ &= 15a_{2n+1} - (a_{2n+1} + a_{2n-1}) - 1 = 14a_{2n+1} - a_{2n-1} - 1 = 14(c_n^2 + 1) - c_{n-1}^2 - 1 - 1 = 12c_n^2 - c_{n-1}^2 - 12 \quad (2) \end{aligned}$$

Theo hệ thức cơ bản của dãy tuyến tính cấp 2 ta được:

$$c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 = -6 \Rightarrow (4c_n - c_{n-1})c_{n-1} - c_n^2 = -6 \Rightarrow c_n^2 + c_{n-1}^2 - 4c_nc_{n-1} - 6 = 0 \quad (3)$$

Ta có

$$\begin{aligned} c_{n+1}^2 &= (4c_n - c_{n-1})^2 = 16c_n^2 - 8c_nc_{n-1} + c_{n-1}^2 = 16c_n^2 - 2(c_n^2 + c_{n-1}^2 - 6) + c_{n-1}^2 \\ &= 14c_n^2 - c_{n-1}^2 - 12 \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$a_{2n+3} - 1 = c_{n+1}^2$$

Do đó ta chứng minh được (1) đúng đến  $n + 1$  suy ra (1) đúng.

**Cách 2:** Ta có  $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 3, \forall n \geq 0$ . Từ hệ thức này ta được:

$$(a_{n+2} - 1)(a_n - 1) = a_{n+2}a_n - a_{n+2} - a_n + 1 = a_{n+1}^2 + 3 - 4a_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - 2)^2 \quad (5).$$

Từ hệ thức (5) bằng phương pháp quy nạp suy ra  $a_n - 1$  là số chính phương với mọi số nguyên dương lẻ  $n$ .

b) Ta chứng minh theo hướng 2 như sau:

$$\text{Ta có } \frac{a_{n+2} - 1}{6} \cdot \frac{a_n - 1}{6} = \frac{a_{n+2}a_n - a_{n+2} - a_n + 1}{36} = \frac{a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} + 4}{36} = \left(\frac{a_{n+1} - 2}{6}\right)^2$$

Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp suy ra  $\frac{a_n - 1}{6}$  là số chính phương.

**Bài 1:** Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 13, a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n$ , tồn tại các số tự nhiên  $k, l$  sao cho  $a_n = k^2 + (k+1)^2, a_n^2 = (l+1)^3 - l^3$

**Lời giải.**

Nhận xét: Ta có  $a_n = k^2 + (k+1)^2 = 2k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow 2a_n - 1 = (2k+1)^2$  và

$$a_n^2 = (l+1)^3 - l^3 = 3l^2 + 3l + 1 \Leftrightarrow 12a_n^2 - 3 = (6l+3)^2.$$

Như vậy bài toán quy về chứng minh  $2a_n - 1, 12a_n^2 - 3$  là các số chính phương.

Nếu ta chứng minh bài toán này theo cách 1 của bài 1 thì gặp phải những tính toán rất lớn và nếu không được sử dụng máy tính thì sẽ mất nhiều thời gian. Ta sẽ chứng minh theo cách 2 của bài 1.

Trước hết ta có hệ thức cơ bản sau:  $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 12, \forall n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 \text{Xét } (2a_{n+2}-1)(2a_n-1) &= 4a_{n+2}a_n - 2(a_{n+2}+a_n)+1 = 4(a_{n+1}^2+12)-28a_{n+1}+1 = (2a_{n+1}+7)^2 \\
 (12a_{n+2}^2-3)(12a_n^2-3) &= 144(a_{n+2}a_n)^2 - 36(a_{n+2}^2+a_n^2)+9 \\
 &= 144(a_{n+2}a_n)^2 - 36(a_{n+2}+a_n)^2 + 72a_{n+2}a_n + 9 = 144(a_{n+2}a_n)^2 - 36(14a_{n+1})^2 + 72a_{n+2}a_n + 9 \\
 &= 144(a_{n+2}a_n)^2 - 36 \cdot 14^2(a_{n+2}a_n-12) + 72a_{n+2}a_n + 9 = 144(a_{n+2}a_n)^2 - 36 \cdot 194a_{n+2}a_n + 291^2 \\
 &= (12a_{n+2}a_n - 291)^2
 \end{aligned}$$

Từ các hệ thức trên và phương pháp quy nạp ta được  $2a_n-1, 12a_n^2-3$  là các số chính phương.

**Bài 2: (TST VN 2012).** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau:

$$x_1 = 1, x_2 = 2011, x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, n = 1, 2, \dots \text{ Chứng minh rằng } \frac{x_{2012}+1}{2012} \text{ là một số chính phương.}$$

**Lời giải.**

Ta sẽ giải bài toán tổng quát sau: Cho  $p$  là một số nguyên dương lẻ và dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau:  $x_1 = 1, x_2 = p, x_{n+2} = 2px_{n+1} - x_n, n = 1, 2, \dots$  Chứng minh rằng  $\frac{x_{2n}+1}{p+1}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Cách 1.** Ta sẽ chứng minh theo hướng 1 của bài 1. Ta tính một vài giá trị đầu tiên

$$\frac{x_2+1}{p+1} = 1, \frac{x_4+1}{p+1} = (2p-1)^2, \frac{x_6+1}{p+1} = (4p^2-2p-1)^2, \dots$$

Ta dự đoán được  $\frac{x_{2n}+1}{p+1} = y_n^2$ , trong đó dãy số  $(y_n)$  được xác định như sau:

$$y_1 = 1, y_2 = 2p-1, \dots, y_{n+2} = 2py_{n+1} - y_n, n = 1, 2, \dots$$

Ta sẽ chứng minh kết quả trên bằng phương pháp quy nạp.

$$\text{Ta có } y_{n+2}y_n - y_{n+1}^2 = (1)^{n-1}(y_3y_1 - y_2^2) = 2p-2 \Rightarrow y_{n+2}y_n = y_{n+1}^2 + 2p-2.$$

$$\Rightarrow (2py_{n+1} - y_n)y_n = y_{n+1}^2 + 2p-2 \Rightarrow y_{n+1}^2 + y_n^2 + 2p-2 = 2py_ny_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } y_{n+2}^2 &= (2py_{n+1} - y_n)^2 = 4p^2y_{n+1}^2 - 4py_{n+1}y_n + y_n^2 \\
 &= 4p^2y_{n+1}^2 - 2(y_{n+1}^2 + y_n^2 + 2p-2) + y_n^2 = (4p^2-2)y_{n+1}^2 - y_n^2 - 4p+4
 \end{aligned}$$

$$(4p^2-2)\frac{x_{2n+2}+1}{p+1} - \frac{x_{2n}+1}{p+1} - 4p+4 = \frac{(4p^2-2)x_{2n+2} - x_{2n} + 1}{p+1} = \frac{x_{2n+4}+1}{p+1}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x_{2n+4}+1}{p+1} = y_{n+2}^2$$

**Cách 2.** Ta sẽ chứng minh theo hướng 2 của bài 1. Trước hết ta có hệ thức cơ bản sau:

$$x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 = (1)^{n-1}(x_3x_1 - x_2^2) = 2p^2-1-p^2 = p^2-1 \Rightarrow x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + p^2-1.$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{x_{n+2}+1}{p+1}\right)\left(\frac{x_n+1}{p+1}\right) = \frac{x_{n+2}x_n + x_{n+2} + x_n + 1}{(p+1)^2} = \frac{x_{n+1}^2 + p^2-1 + 2px_{n+1} + 1}{(p+1)^2} = \left(\frac{x_{n+1}+p}{p+1}\right)^2$$

Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp ta được  $\frac{x_{2n}+1}{p+1}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Nhận xét.** Bằng cách chứng minh tương tự như trên ta được  $\frac{x_{2n}-1}{p-1}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Bài 3: (China South East Mathematical 2011).** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định như sau:

$a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}, n = 2, 3, \dots$  Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  ta có  $a_n + a_{n+1} + 2$  là một số chính phương.

**Lời giải.**

**Cách 1.** Tính một vài giá trị đầu tiên ta được:

$a_1 + a_2 + 2 = 2^2, a_2 + a_3 + 2 = 3^2, a_3 + a_4 + 2 = 7^2, a_4 + a_5 + 2 = 18^2$ . Từ đó ta dự đoán

$a_n + a_{n+1} + 2 = b_n^2$ , trong đó dãy số  $(b_n)$  được xác định như sau:

$b_1 = 2, b_2 = 3, b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1}, n = 2, 3, \dots$

Ta sẽ chứng minh dự đoán này bằng phương pháp quy nạp.

Ta có  $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = 5 \Rightarrow (3b_n - b_{n-1})b_{n-1} - b_n^2 = 5 \Rightarrow 3b_nb_{n-1} = b_{n-1}^2 + b_n^2 + 5$

$= a_{n-1} + a_n + a_n + a_{n+1} + 9 = a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1} + 9$ .

Theo công thức truy hồi của dãy  $(b_n)$  ta được:

$b_{n+1}^2 = (3b_n - b_{n-1})^2 = 9b_n^2 + b_{n-1}^2 - 6b_nb_{n-1} = 9(a_n + a_{n+1} + 2) + a_{n-1} + a_n + 2$

$- 2(a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1} + 9) = 7a_{n+1} - a_n + 7a_n - a_{n-1} + 2 = a_{n+2} + a_{n+1} + 2$ .

Do đó  $b_{n+1}^2 = a_{n+1} + a_{n+2} + 2$  hay bài toán được chứng minh.

**Cách 2.** Ta có các đẳng thức sau:  $a_{n+2} + a_n = 7a_{n+1}, a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 5$ .

Xét  $(a_n + a_{n+1} + 2)(a_{n+1} + a_{n+2} + 2) = a_{n+1}(a_n + a_{n+2}) + a_na_{n+2} + a_{n+1}^2 + 2(a_n + a_{n+2}) + 4a_{n+1} + 4$

$= 7a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 + 5 + a_{n+1}^2 + 14a_{n+1} + 4a_{n+1} + 4 = 9a_{n+1}^2 + 18a_{n+1} + 9 = (3a_{n+1} + 3)^2$ .

Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp ta suy ra  $a_n + a_{n+1} + 2$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Bài 4:** Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 2, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $a_na_{n+2}$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Lời giải.**

Ta sẽ tìm  $x$  sao cho dãy số  $(b_n): a_n = b_n + x$  là dãy tuyến tính cấp hai. Thay vào hệ thức truy hồi của dãy  $(a_n)$  ta được:

$b_{n+2} + x = 3b_{n+1} + 3x - b_n - x + 2 = 3b_{n+1} - b_n + 2x + 2$

Ta chọn  $x$  sao cho  $x = 2x + 2 \Leftrightarrow x = -2$  suy ra  $a_n = b_n - 2$ .

Như vậy bài toán đã cho sẽ tương đương với bài toán sau:

Cho dãy  $(b_n): b_1 = 2, b_2 = 3, b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$ . Chứng minh rằng  $(b_n - 2)(b_{n+2} - 2)$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

Ta có  $b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = 5 \Rightarrow b_{n+2}b_n = b_{n+1}^2 + 5$  và  $b_{n+2} + b_n = 3b_{n+1}$ .

Do đó  $(b_n - 2)(b_{n+2} - 2) = b_{n+2}b_n - 2(b_{n+2} + b_n) + 4 = b_{n+1}^2 + 5 - 6b_{n+1} + 4 = (b_{n+1} - 3)^2$ .

Vậy  $a_na_{n+2}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Bài 5:** Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2, n \geq 0$ . Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

**Lời giải.**

Ta sẽ tìm  $x$  sao cho dãy số  $(b_n): a_n = b_n + x$  là dãy tuyến tính cấp hai.

Thay vào hệ thức truy hồi của dãy  $(a_n)$  ta được:

$$b_{n+2} + x = 7b_{n+1} + 7x - b_n - x - 2 = 3b_{n+1} - b_n + 6x - 2$$

Ta chọn  $x$  sao cho  $x = 6x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$  suy ra  $a_n = b_n + \frac{2}{5}$ .

Như vậy bài toán đã cho sẽ tương đương với bài toán sau:

Cho dãy  $(b_n): b_1 = \frac{3}{5}, b_2 = \frac{3}{5}, b_{n+2} = 7b_{n+1} - b_n$ . Chứng minh rằng  $b_n + \frac{2}{5}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

Cách 1. Ta tính một số giá trị đầu tiên của  $b_n + \frac{2}{5}$ :

$b_1 + \frac{2}{5} = 1^2, b_2 + \frac{2}{5} = 1^2, b_3 + \frac{2}{5} = 2^2, b_4 + \frac{2}{5} = 5^2 \dots$  Khi đó ta dự đoán  $b_n + \frac{2}{5} = c_n^2$ , trong đó  $(c_n)$  được xác định như sau:  $c_1 = c_2 = 1, c_{n+2} = 3c_{n+1} - c_n, n = 1, 2, \dots$

Ta chứng minh dự đoán này bằng phương pháp quy nạp:

Ta có  $c_{n+2}c_n - c_{n+1}^2 = 1 \Rightarrow (3c_{n+1} - c_n)c_n - c_{n+1}^2 = 1 \Rightarrow 3c_n c_{n+1} = c_{n+1}^2 + c_n^2 + 1$

$$\begin{aligned} c_{n+2}^2 &= (3c_{n+1} - c_n)^2 = 9c_{n+1}^2 - 6c_n c_{n+1} + c_n^2 = 9c_{n+1}^2 - 2(c_{n+1}^2 + c_n^2 + 1) + c_n^2 \\ &= 7c_{n+1}^2 - c_n^2 - 2 = 7\left(b_{n+1} + \frac{2}{5}\right) - \left(b_n + \frac{2}{5}\right) - 2 = 7b_{n+1} - b_n + \frac{2}{5} = b_{n+2} + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Suy ra  $c_{n+2}^2 = b_{n+2} + \frac{2}{5}$ . Từ đó suy ra dự đoán là đúng hay bài toán được chứng minh.

Cách 2. Ta có  $b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = \frac{9}{5}$  và  $b_{n+2} + b_n = 7b_{n+1}$ . Khi đó

$$\begin{aligned} \left(b_n + \frac{2}{5}\right)\left(b_{n+2} + \frac{2}{5}\right) &= b_{n+2}b_n + \frac{2}{5}(b_n + b_{n+2}) + \frac{4}{25} = b_{n+1}^2 + \frac{9}{5} + \frac{14}{5}b_{n+1} + \frac{4}{25} \\ &= b_{n+1}^2 + \frac{14}{5}b_{n+1} + \frac{49}{25} = \left(b_{n+1} + \frac{7}{5}\right)^2 \end{aligned}$$

Suy ra  $\left(b_n + \frac{2}{5}\right)\left(b_{n+2} + \frac{2}{5}\right) = \left(b_{n+1} + \frac{7}{5}\right)^2$ . Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp suy ra  $b_n + \frac{2}{5}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Bài 6:** Cho dãy số  $(a_n)$  xác định bởi:  $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$

Chứng minh rằng số  $b_n = \frac{1}{5}(a_{2n} + 8)$  có thể biểu diễn thành tổng của ba số nguyên dương liên tiếp với mọi  $n \geq 1$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết suy ra dãy số  $(a_n)$  là dãy số dương.

$$\text{Ta có } a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60} \Rightarrow (a_{n+1} - 4a_n)^2 = 15a_n^2 - 60$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 8a_n a_{n+1} + a_n^2 + 60 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) ta được: } a_{n+2}^2 - 8a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+1}^2 + 60 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $a_n, a_{n+2}$  là hai nghiệm của phương trình:  $x^2 - 8xa_{n+1} + a_{n+1}^2 + 60 = 0$ .

Do đó theo định lý Viet ta được:  $a_n + a_{n+2} = 8a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n$ . Khi đó dãy số  $(a_n)$  được xác định như sau:  $a_0 = 2, a_1 = 8, a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n, n = 0, 1, 2, \dots$

**Nhận xét.** Giả sử  $\frac{1}{5}(a_{2n} + 8) = (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(a_{2n} + 8) = 3k^2 + 2$   
 $\Leftrightarrow \frac{a_{2n} - 2}{15} = k^2$ .

Như vậy yêu cầu chứng minh của bài toán quy về chứng minh  $\frac{a_{2n} - 2}{15}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Cách 1.** Ta tính một vài giá trị đầu tiên:  $\frac{a_0 - 2}{15} = 0^2, \frac{a_2 - 2}{15} = 2^2, \frac{a_4 - 2}{15} = 16^2, \frac{a_6 - 2}{15} = 126^2$

Khi đó ta dự đoán  $\frac{a_{2n} - 2}{15} = b_n^2$ , trong đó dãy số  $(b_n)$  được xác định như sau:

$b_0 = 0, b_1 = 2, b_2 = 16, b_3 = 126, \dots$  và thử xác định dãy  $(b_n)$  dưới dạng dãy số tuyến tính như sau:  
 $b_{n+2} = xb_{n+1} + yb_n, n = 0, 1, 2, \dots$

Từ  $b_0 = 0, b_1 = 2, b_2 = 16, b_3 = 126$  ta được  $\begin{cases} 2x = 16 \\ 16x + 2y = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases}$ .

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp  $\frac{a_{2n} - 2}{15} = b_n^2$ , trong đó  $(b_n)$  là dãy số thỏa mãn

$b_0 = 0, b_1 = 2, b_{n+2} = 8b_{n+1} - b_n, n = 0, 1, 2, \dots$

Ta có  $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = -4 \Rightarrow (8b_n - b_{n-1})b_{n-1} - b_n^2 = -4 \Rightarrow 8b_nb_{n-1} = b_{n-1}^2 + b_n^2 - 4$

$$\frac{b_{2n-2} - 2}{15} + \frac{b_{2n} - 2}{15} - 4 = \frac{b_{2n-2} + b_{2n} - 64}{15}.$$

$$a_{2n+2} = 8a_{2n+1} - a_{2n} = 8(8a_{2n} - a_{2n-1}) - a_{2n} = 63a_{2n} - (a_{2n} + a_{2n-2}) = 62a_{2n} - a_{2n-2}$$

Theo công thức truy hồi của dãy  $(b_n)$  và các đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= (8b_n - b_{n-1})^2 = 64b_n^2 + b_{n-1}^2 - 16b_nb_{n-1} = 64 \frac{a_{2n} - 2}{15} + \frac{a_{2n-2} - 2}{15} - 2 \left( \frac{a_{2n} + a_{2n-2} - 64}{15} \right) \\ &= \frac{62a_{2n} - a_{2n-2} - 2}{15} = \frac{a_{2n+2} - 2}{15}. \end{aligned}$$

Do đó  $b_{n+1}^2 = \frac{a_{2n+2} - 2}{15}$  hay bài toán được chứng minh.

**Cách 2.**

Ta có  $a_{2n+2}a_{2n} - a_{2n+1}^2 = 60 \Rightarrow a_{2n+2}a_{2n} = a_{2n+1}^2 + 60$

$$\begin{aligned} \text{Ta xét } \left( \frac{a_{2n+2} - 2}{15} \right) \left( \frac{a_{2n} - 2}{15} \right) &= \frac{a_{2n+2}a_{2n} - 2(a_{2n+2} + a_{2n}) + 4}{225} = \frac{a_{2n+1}^2 + 60 - 16a_{2n+1} + 4}{225} \\ &= \left( \frac{a_{2n+1} - 8}{15} \right)^2 \end{aligned}$$

Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp ta được  $\frac{a_{2n} - 2}{15}$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Bài 7: (Balkan MO 2002).** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi:

$$u_1 = 20, u_2 = 30, u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n, n = 1, 2, \dots$$

Tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho  $1+5u_nu_{n+1}$  là một số chính phương.

**Lời giải.**

Dễ thấy dãy  $(u_n)$  là dãy số tăng suy ra với  $n \geq 4 \Rightarrow u_n + u_{n+1} \geq u_4 + u_5 > u_3 + u_4 = 250$  (1)

+)  $n \in \{1, 2\}$  không thỏa mãn

+)  $n = 3$  thì  $1+5u_3u_4 = 251^2$  suy ra  $n = 3$  thỏa mãn.

+)  $n \geq 4$ , theo tính chất cơ bản của dãy tuyến tính cấp hai ta có:

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 + (1)^{n-1}(u_3u_1 - u_2^2) = u_{n+1}^2 + 500$$

$$\Rightarrow (3u_{n+1} - u_n)u_n = u_{n+1}^2 + 500 \Rightarrow 3u_{n+1}u_n = u_{n+1}^2 + u_n^2 + 500$$

$$\Rightarrow 5u_{n+1}u_n + 1 = (u_{n+1} + u_n)^2 + 501.$$

Giả sử  $1+5u_nu_{n+1}$  là số chính phương,  $1+5u_nu_{n+1} = a^2$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó ta có:

$(u_{n+1} + u_n)^2 + 501 = a^2 \Leftrightarrow (a - u_{n+1} - u_n)(a + u_{n+1} + u_n) = 501 = 1.501 = 3.167$ . Ta xét các trường hợp sau:

$$\text{TH1. } \begin{cases} a + u_n + u_{n+1} = 501 \\ a - u_n - u_{n+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 251 \\ u_n + u_{n+1} = 250 \end{cases} \text{ mâu thuẫn với (1).}$$

$$\text{TH2. } \begin{cases} a + u_n + u_{n+1} = 167 \\ a - u_n - u_{n+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 85 \\ u_n + u_{n+1} = 82 \end{cases} \text{ mâu thuẫn với (1).}$$

Do đó với  $n \geq 4$  thì  $1+5u_nu_{n+1}$  không phải là số chính phương.

Vậy  $n = 3$  là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

### BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 13, a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Chứng minh rằng

a)  $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} + 12 = 0, \forall n \geq 0$

b)  $48a_n^2 - 12$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$

c)  $2a_n - 1, \frac{2a_n + 1}{3}$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$

2. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 11, a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n + 10, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

$a_n + 1$  là số chính phương với mọi  $n$  chẵn.

3. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $4a_n a_{n+2} + 1$  là một số chính phương.

4. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 2, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $a_n a_{n+2}$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ .

5. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $a_n^2 + 2^{n+2}$  là bình phương của một số nguyên lẻ.

6. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2, n \geq 0$ . Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

7. (VMO1997) Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 45, a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n, n \geq 0$ .

a) Tính số các ước nguyên dương của số  $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$  theo  $n$ ;

b) Chứng minh rằng  $1997a_n^2 + 4 \cdot 7^{n+1}$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ .

8. (Kiểm tra đội tuyển IMO 2013) Cho dãy số  $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 11, a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n, n \geq 1$ . Chứng minh rằng  $a_n$  không là số chính phương với mọi  $n > 3$ .

9. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 3, a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n + 2, n \geq 0$ . Chứng minh rằng  $a_n^2 + (a_n + 1)^2$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ .

10. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = a, a_1 = b, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, n \geq 0; a, b \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng tồn tại số nguyên  $k$  sao cho  $5a_n^2 + k$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ .

11. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 6, a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

a)  $a_{n+1}^2 - 6a_n a_{n+1} + a_n^2 = 1$  với mọi số tự nhiên  $n$ ;

b) Với mọi số tự nhiên  $n$ , tồn tại số nguyên dương  $k$  sao cho  $a_n^2 = \frac{k(k+1)}{2}$

12. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Tìm  $n$  để  $a_n - 1$  là số chính phương.

13. Cho dãy số  $(a_n): a_1 = 1, a_2 = -1, a_{n+2} = -a_{n+1} - 2a_n, n \geq 1$ . Chứng minh rằng  $2^{2012} - 7a_{2010}^2$  là một số chính phương.

14. Cho dãy số  $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Tìm  $n$  để  $a_n - 1$  là số chính phương.

15. Cho dãy số  $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 1$ . Chứng minh rằng:

a)  $a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-1} = -3, \forall n \geq 2$

b)  $\frac{a_n^2 - 1}{3}$  là một số chính phương.

16. Cho dãy số  $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ . Chứng minh rằng  $a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdot 5$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$ . Chứng minh phương trình  $x^2 - 4xy - y^2 = 5$  có vô số nghiệm nguyên dương.

17. (TSTVN2012) Cho dãy số  $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 2011, a_{n+2} = 4022a_{n+1} - a_n, n \geq 1$ . Chứng minh rằng  $\frac{a_{2012} + 1}{2012}$  là một số chính phương.

18. Cho dãy số  $(x_n): x_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, n \geq 1$ . Chứng minh rằng  $x_{2n+1}$  là số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Bài toán 2:** Cho dãy số  $(a_n)(n \in \mathbb{N})$  được xác định bởi  $a_0 = 1, a_1 = 13$  và  $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng phương trình  $x^2 + (x+1)^2 = a_n$  và phương trình  $(x+1)^3 - x^3 = a_n^2$  có nghiệm tự nhiên với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng của dãy  $(a_n)$  là  $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$ . Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 7 + \sqrt{48}, \lambda_2 = 7 - \sqrt{48}$ . Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho

$$a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Vì } a_0 = 1 \text{ và } a_1 = 13 \text{ nên } \alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \beta = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{4}(7+\sqrt{48})^n + \frac{2-\sqrt{3}}{4}(7-\sqrt{48})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2a_n - 1 = \left[ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}(2+\sqrt{3})^n - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}(2-\sqrt{3})^n \right]^2.$$

$$\text{Xét dãy số } (b_n)(n \in \mathbb{N}) \text{ được xác định bởi } b_n = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}(2+\sqrt{3})^n - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}(2-\sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ta có } b_0 = 1, b_1 = 5 \text{ và } b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác  $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Suy ra  $b_n \in \mathbb{N}^*$  và  $2a_n - 1 = b_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ . Suy ra  $b_n$  là số tự nhiên lẻ.

Suy ra tồn tại số tự nhiên  $c_n$  sao cho  $b_n = 2c_n + 1$ . Ta có:

$$c_n^2 + (c_n + 1)^2 = \frac{1}{2}[(2c_n + 1)^2 + 1] = \frac{1}{2}(b_n^2 + 1) = a_n.$$

Vậy phương trình  $x^2 + (x+1)^2 = a_n$  có nghiệm tự nhiên.

$$\text{Ta có: } \frac{2a_n + 1}{3} = \left[ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}(2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}(2-\sqrt{3})^n \right]^2.$$

Xét dãy số  $(d_n)(n \in \mathbb{N})$  được xác định bởi

$$d_n = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}(2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}(2-\sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ta có: } d_0 = 1, d_1 = 3 \text{ và } d_{n+2} = 4d_{n+1} - d_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được  $d_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác  $d_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Suy ra  $d_n \in \mathbb{N}^*$  và  $2a_n + 1 = 3d_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Cũng bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta dễ dàng chứng minh được  $d_n$  là số nguyên lẻ với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Ta có: } \left( \frac{b_n d_n + 1}{2} \right)^3 - \left( \frac{b_n d_n - 1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} (3b_n^2 d_n^2 + 1) = a_n^2.$$

Vì  $b_n$  và  $d_n$  là các số tự nhiên lẻ nên  $\frac{b_n d_n - 1}{2}$  là số tự nhiên.

Vậy phương trình  $(x+1)^3 - x^3 = a_n^2$  có nghiệm tự nhiên với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán T3:** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_0 = 1, a_1 = -1$  và  $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$  với mọi  $n \geq 2$ .

Chứng minh rằng  $a_{2012} - 2010$  chia hết cho 2011.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2011)

**Lời giải 1:**

Phương trình đặc trưng của dãy  $(a_n)$  là  $\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{14}, \lambda_2 = 3 - \sqrt{14}$

Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -1 = \alpha(3 + \sqrt{14}) + \beta(3 - \sqrt{14}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \beta = \frac{4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_1^{n-1} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_2^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{2012} = \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 + \sqrt{14})^{2011} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 - \sqrt{14})^{2011}$$

$$\text{Ta có } (3 + \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k \text{ và } (3 - \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} (-1)^k C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k$$

$$\Rightarrow a_{2012} = - \sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i} 3^{2011-2i} + 2 \sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i+1} 3^{2010-2i}$$

Với  $p$  là số nguyên tố và  $1 \leq j \leq p-1 (j \in \mathbb{N}^*)$  ta có  $C_p^j$  chia hết cho  $p$ .

$$\text{Suy ra } a_{2012} \equiv (-3)^{2011} + 2 \cdot 14^{1005} \pmod{2011}.$$

$$\text{Ta có } 14 \equiv 2025 \pmod{2011} \Rightarrow 14^{1005} \equiv 15^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}.$$

$$\text{Mặt khác theo định lý nhỏ Fermat ta có } (-3)^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}. \text{ Suy ra } a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}.$$

Suy ra  $a_{2012} + 2010$  chia hết cho 2011

**Lời giải 2:**

Xét dãy số  $(b_n) (n \in \mathbb{N})$  được xác định bởi  $b_0 = 1, b_1 = -1$  và  $b_{n+1} = 6b_n + 2016b_{n-1}, \forall n \geq 1$ .

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$  và  $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ta cũng chứng minh được  $a_n \equiv b_n \pmod{2011}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Phương trình đặc trưng của dãy  $(b_n)$  là  $\lambda^2 - 6\lambda - 2016 = 0$ .

Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 48, \lambda_2 = -42$ .

Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $b_n = \alpha 48^n + \beta (-42)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Vì  $b_0 = 1, b_1 = -1$  nên  $\alpha = \frac{41}{90}, \beta = \frac{49}{90}$ .

Suy ra  $b_n = \frac{41}{90} \cdot 48^n + \frac{49}{90} (-42)^n \Rightarrow b_{2012} = \frac{1}{90} [41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012}]$ .

Theo định lý nhỏ Fermat ta có  $48^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}, 42^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$

Suy ra  $41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90 \equiv 0 \pmod{2011}$

$\Rightarrow 90(b_{2012} + 1) \equiv 0 \pmod{2011} \Rightarrow b_{2012} \equiv -1 \pmod{2011} \Rightarrow a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$

Suy ra  $a_{2012} + 2010$  chia hết cho 2011.

**Bài toán T9:** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi  $x_1 = 1, x_2 = 2011$  và  $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Chứng minh rằng  $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$  là số chính phương.

(Đề thi chọn đội tuyển Việt nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2012).

**Lời giải:**

Phương trình đặc trưng của dãy  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  là  $t^2 - 4022t + 1 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là  $t_1 = 2011 + \sqrt{2010 \cdot 2012}$  và  $t_2 = 2011 - \sqrt{2010 \cdot 2012}$ .

Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $x_n = \alpha t_1^{n-1} + \beta t_2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì  $x_1 = 1, x_2 = 2011$  nên  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Suy ra  $x_{2012} = \frac{1}{2} (t_1^{2011} + t_2^{2011})$ .

Suy ra  $\frac{x_{2012} + 1}{2012} = \left[ \frac{1}{2\sqrt{1006}} (\sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}) \right]^2$ .

Ta có  $\sqrt{t_1} = \sqrt{1006} + \sqrt{1005}, \sqrt{t_2} = \sqrt{1006} - \sqrt{1005}$

Đặt  $a = \sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}$ , ta có  $a = (\sqrt{1006} + \sqrt{1005})^{2011} + (\sqrt{1006} - \sqrt{1005})^{2011}$

$$= 2\sqrt{1006} \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} 1006^{1005-k} \cdot 1005^k.$$

Đặt  $b = \frac{1}{2\sqrt{2016}} a$ , ta có  $b = \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} \cdot 1006^{1005-k} \cdot 1005^k$

Suy ra  $b$  là một số nguyên. Mặt khác  $\frac{x_{2012}+1}{2012} = b^2$ .

Vậy  $\frac{x_{2012}+1}{2012}$  là số chính phương.

**Bài toán 1:** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4, \forall n \geq 1$

Chứng minh mọi số hạng của dãy  $(a_n)$  đều là bình phương của các số nguyên

**Lời giải:**

Xét dãy số  $(b_n) (n \in \mathbb{N})$  được xác định bởi  $b_n = a_n - \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Khi đó ta có  $b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Phương trình đặc trưng của dãy  $(b_n)$  là  $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$ .

Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 7 + \sqrt{48}, \lambda_2 = 7 - \sqrt{48}$ .

Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Vì  $b_1 = b_2 = \frac{2}{3}$  nên  $\alpha = \frac{2-\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2-\sqrt{3}}{6} (7+\sqrt{48})^n + \frac{2+\sqrt{3}}{6} (7-\sqrt{48})^n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n = \left[ \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}} (2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}} (2-\sqrt{3})^n \right]^2$$

Xét dãy số  $(c_n)$  sao cho  $c_n = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}} (2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}} (2-\sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác  $c_0 = c_1 = 1$ . Suy ra  $c_n$  là số nguyên với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

Mặt khác  $a_n = c_n^2$ . Vậy  $a_n$  là số chính phương với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 2:** Chứng minh tồn tại vô số cặp số nguyên dương  $(m, n)$  sao cho  $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$

là một số nguyên dương. (Đề thi Olympic Toán của Anh năm 2007)

**Lời giải:**

Ta chứng minh rằng phương trình  $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4$  (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Thật vậy (1)  $\Leftrightarrow x^2 + (1-4y)x + y^2 + y = 0$  (2)

$(x_1 = 1, y_1 = 1)$  là một nghiệm nguyên dương của (2).

Xét dãy  $(t_k) (k \geq 1)$  sao cho  $t_1 = t_2 = 1, t_{k+2} = 4t_{k+1} - t_k - 1 (k \geq 1)$

Đễ dàng chứng minh được  $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$ .

Ta có  $(t_1, t_2)$  là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2).

Giả sử  $(t_k, t_{k+1})$  là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2)

tức là  $t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$ .

Xét  $t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} - [t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1}]$

$= t_{k+2}^2 - t_k^2 + (1-4t_{k+1})(t_{k+2} - t_k) = (t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} + t_k + 1 - 4t_{k+1}) = 0$

$\Rightarrow t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$

$\Rightarrow (x; y) = (t_{k+1}, t_{k+2})$  cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình (2).

Vì  $t_{k+1} > t_k, \forall k \geq 2$  nên phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương  $(m, n)$  sao cho  $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$  là một số nguyên dương.

**Bài 1.** Cho dãy số  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $x_1 = 3, x_2 = 11, x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$ .

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho

$$x_n = a^2 + 2b^2.$$

**Lời giải**

Ta có

$$x_1 = 1 + 2 \cdot 1^2,$$

$$x_2 = 3^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$x_3 = 3^2 + 2 \cdot 4^2,$$

$$x_4 = 11^2 + 2 \cdot 4^2.$$

Ta chứng minh

$$x_{2n-1} = x_{n-1}^2 + 2 \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2,$$

$$x_{2n} = x_n^2 + 2 \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2.$$

Thật vậy

$$x_{2n+1} = 4x_{2n} - x_{2n-1}$$

$$= 4x_n^2 + 8 \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2 - a_{n-1}^2 - 2 \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_nx_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1}^2 = \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n(4x_n - x_{n+1}) + \frac{1}{2}(4x_n - x_{n+1})^2 \\
 &= \frac{3}{2}x_n^2 - x_nx_{n+1} + \frac{1}{2}x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2.
 \end{aligned}$$

$$x_{2n+2} = 4x_{2n+1} - x_{2n}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4x_n^2 + 8\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2 - x_n^2 - 2\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2 \\
 &= 3x_n^2 + 8\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_{n+1} - 3x_n}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}x_{n+1}^2 - x_nx_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 \\
 &= x_{n+1}^2 - x_nx_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 = x_{n+1}^2 + 2\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2.
 \end{aligned}$$

**Bài 2.** Cho dãy số  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$ . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho

$$x_n = a^2 + 2b^2.$$

**Lời giải**

Xét các dãy số  $(u_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  và  $(v_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi

$$u_1 = 1, v_1 = 0, u_{n+1} = u_n + 2v_n \text{ và } v_{n+1} = u_n + v_n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chúng ta chứng minh  $x_n = u_n^2 + 2v_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$  (1) bằng phương pháp quy nạp toán học.

Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$  và  $n = 2$ .

Giả sử mệnh đề đúng đến  $n = m, (m \geq 2)$ .

Khi đó ta có  $x_{m-1} = u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2, x_m = u_m^2 + 2v_m^2$ .

Đặt  $A = u_{m-1}, B = v_{m-1}$  ta có

$$u_m = A + 2B, v_m = A + B$$

$$u_{m+1} = 3A + 4B, v_{m+1} = 2A + 3B$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 6x_m - x_{m-1} &= 6(u_m^2 + 2v_m^2) - (u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2) \\
 &= 6[(A + 2B)^2 + 2(A + B)^2] - (A^2 + 2B^2) \\
 &= (3A + 4B)^2 + 2(2A + 3B)^2 = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2.
 \end{aligned}$$

Suy ra  $x_{m+1} = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2$ .

Vậy (1) cũng đúng với  $n = m + 1$ .

Theo nguyên lý quy nạp toán học (1) đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Vậy với mỗi số nguyên dương  $n$  tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho  $x_n = a^2 + 2b^2$ .

**Bài 3.** Tìm tất cả dãy số nguyên dương  $(a_n)$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

i)  $a_n \leq n\sqrt{n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

ii)  $a_p - a_q$  chia hết cho  $p - q$  với mọi cặp số nguyên dương phân biệt  $p$  và  $q$ .

**Lời giải**

Từ i) ta có  $a_1 \leq 1 \Rightarrow a_1 = 1$ ,  $a_2 \leq 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow a_2 \in \{1; 2\}$ .

+ Nếu  $a_2 = 1$ . Từ ii) ta có :  $a_n - a_1 : n-1 \Rightarrow a_n - 1 : n-1, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Và  $a_n - a_2 : n-2 \Rightarrow a_n - 1 : n-2, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Vì  $(n-1, n-2) = 1$  nên từ hai điều trên ta có  $a_n - 1 : (n-1)(n-2)$ .

Giả sử tồn tại  $n$  sao cho  $a_n \neq 1$ , khi đó  $|a_n - 1| \geq (n-1)(n-2)$ ,

kết hợp với điều kiện i) ta được :

$$n\sqrt{n} - 1 \geq (n-1)(n-2) \quad (*)$$

Dễ thấy với mọi  $n \geq 9$  thì bất đẳng thức (\*) không đúng.

Vậy điều giả sử là sai khi  $n \geq 9$ , hay nói cách khác  $a_n = 1, \forall n \geq 9$ .

Từ điều kiện ii) ta có  $a_{k+m} - a_m : k$ , chọn  $k$  lớn hơn 9 thì ta được  $1 - a_m : k, \forall k > 9$ .

Vậy  $1 - a_m = 0, \forall m = 1, 2, \dots$  hay  $a_n = 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

+ Nếu  $a_2 = 2$ . Từ ii) ta có  $a_n - a_1 : n-1 \Rightarrow a_n - 1 : n-1 \Rightarrow a_n - n : n-1, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Và  $a_n - a_2 : n-2 \Rightarrow a_n - 2 : n-2 \Rightarrow a_n - n : n-2, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Vì  $(n-1, n-2) = 1$  nên từ hai điều trên ta có  $a_n - n : (n-1)(n-2)$ .

Giả sử tồn tại  $n$  sao cho  $a_n \neq n$ , khi đó  $|a_n - n| \geq (n-1)(n-2)$ ,

kết hợp với điều kiện i) ta được :

$$n\sqrt{n} + n \geq (n-1)(n-2) \quad (**)$$

Dễ thấy bất đẳng thức (\*\*) không đúng khi  $n$  đủ lớn. Do đó với  $n$  đủ lớn thì  $a_n = n$ .

Từ điều kiện ii) ta có  $a_{k+m} - a_m : k$ , chọn  $k$  đủ lớn thì  $a_{k+m} = k + m$  và do đó  $m - a_m : k$  với mọi  $k$  đủ lớn.

Vậy  $m - a_m = 0, \forall m = 1, 2, 3, \dots$  hay  $a_n = n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Tóm lại có hai dãy số thỏa mãn yêu cầu đề bài đó là :

•  $a_n = 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

•  $a_n = n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

**Bài 4.** Cho dãy số thực  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_{n+1} = [a_n] \{a_n\}$ ,  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$  và  $a_0$  là một số thực tùy ý. Chứng minh rằng  $a_n = a_{n+2}$  với  $n$  đủ lớn.

#### Lời giải

Nếu  $a_0 \geq 0$ , khi đó  $a_i \geq 0$  với mọi  $i$  và  $[a_{i+1}] \leq a_{i+1} = [a_i] \{a_i\} < [a_i]$ , do đó với  $i$  đủ lớn thì

$$a_{i+2} = a_i = 0.$$

Nếu  $a_0 < 0$ , khi đó  $a_i \leq 0$  với mọi  $i$  nguyên dương.

Nếu tồn tại một phần tử của dãy bằng 0 thì khi đó mọi phần tử của dãy kể từ sau phần tử đó đều bằng 0.

Nếu không có phần tử nào của dãy số nhận giá trị là 0, tức là  $a_i < 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots$ ,

Khi đó ta có

$$1 + [a_{i+1}] > a_{i+1} = [a_i] \{a_i\} > [a_i] \text{ với mọi số nguyên dương } i.$$

Do đó  $([a_n])$  là một dãy nguyên không giảm và bị chặn trên bởi 0.

Vậy  $[a_i] = c$  với  $i$  đủ lớn.

Do đó ta có với  $i$  đủ lớn thì  $a_{i+1} = c \cdot \{a_i\} = c \cdot (a_i - c) \Rightarrow b_{i+1} = cb_i$  với  $b_i = a_i - \frac{c^2}{c-1}$ .

Hiển nhiên dãy  $(b_n)$  bị chặn nên hoặc  $c = -1$  hoặc  $b_i = 0$  với mọi  $i$  đủ lớn.

Trong cả 2 trường hợp ta đều suy ra được  $a_{i+2} = a_i$  với  $i$  đủ lớn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n \geq 5$  thì tồn tại một cặp số cộng nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và một cặp số nhân nguyên dương  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sao cho

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n.$$

Hãy chỉ ra một ví dụ của bài toán trên với  $n = 5$ .

**Lời giải**

Đặt  $B_k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^k = 1 + \frac{k}{m} + \frac{k(k-1)}{2!m^2} + \dots + \frac{k!}{k!m^k}$ , hiển nhiên ta có  $B_k > 1 + \frac{k}{m}$  với mọi  $k \geq 2$ .

Và với mọi  $k \leq n$ , ta có

$$\begin{aligned} B_k &\leq 1 + \frac{k}{m} + \frac{n(n-1)}{2!m^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!m^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!m^k} \\ &= 1 + \frac{k}{m} + \left[ \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{m} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{m^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{m^{k-1}} \right] \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Chọn  $m > n^2$ , khi đó theo trên ta có

$$B_k < 1 + \frac{k}{m} + \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) \cdot \frac{1}{m} < 1 + \frac{k+1}{m}.$$

$$\left( \text{Do ta có } \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} < 1 \right)$$

Đặt  $A_k = 1 + \frac{k+1}{m}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , theo các chứng minh trên ta thu được

$$B_1 < A_1 < B_2 < A_2 < \dots < B_n < A_n.$$

Xét hai dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  thỏa mãn  $a_k = m^n A_k$ ,  $b_k = m^n B_k$ ,  $\forall k: 1 \leq k \leq n$ .

Khi đó ta có  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là một cặp số cộng nguyên dương và  $b_1, b_2, \dots, b_n$  là một cặp số nhân nguyên dương và thỏa mãn  $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n$ . Vậy ta có điều phải chứng minh.

Với  $n = 5$ , ta xét cặp số cộng  $a_1, a_2, \dots, a_5$  với  $a_1 = 17$  và có công sai là 17, xét cặp số nhân

$b_1, b_2, \dots, b_5$  với  $b_1 = 16$  và có công sai là  $\frac{3}{2}$ , khi đó ta có

$$16 < 17 < 24 < 34 < 36 < 51 < 54 < 68 < 81 < 85.$$

**Bài 6.** Dãy số  $(a_n)$  được xác định như sau: 
$$\begin{cases} a_n = a_{5n} \\ a_{5n+1} = 1 \\ a_{5n+3} = 0 \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên không phải là dãy tuần hoàn.

**Lời giải**

Giả sử phản chứng rằng  $(a_n)$  là dãy tuần hoàn với chu kỳ cơ sở là  $T > 0$ .

Nếu  $T = 5k + 1$ , ta có  $a_1 = a_{2T+1} = a_{2 \cdot (5k+1)+1} = a_{5(2k)+3} = 0$ , vô lý do  $a_1 = 1$ .

Nếu  $T = 5k + 2$ , ta có  $a_1 = a_{T+1} = a_{5k+3} = 0$ , vô lý do  $a_1 = 1$ .

Nếu  $T = 5k + 3$ , ta có  $a_1 = a_{4T+1} = a_{4(5k+3)+1} = a_{5(4k+2)+3} = 0$ , vô lý do  $a_1 = 1$ .

Nếu  $T = 5k + 4$ , ta có  $a_1 = a_{3T+1} = a_{3(5k+4)+1} = a_{5(3k+2)+3} = 0$ , vô lý do  $a_1 = 1$ .

Vậy  $T = 5k$  với  $k$  là số nguyên dương nào đó, khi đó ta có với mọi số nguyên dương  $s$  thì :

$$a_m = a_{5m} \Rightarrow a_{s+k} = a_{5(s+k)} = a_{5(s+k)+4T} = a_{5(s+5k)} = a_{s+5k} = a_{s+T} = a_s,$$

do đó  $k$  là chu kỳ của dãy  $(a_n)$ , hiển nhiên  $k < 5k = T$ , điều này trái với giả thiết  $T$  là chu kỳ cơ sở của dãy  $(a_n)$ .

Vậy điều giả sử là sai, tức là  $(a_n)$  không là dãy tuần hoàn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 7.** Với  $p$  là một số nguyên tố, xét dãy số  $(a_n)$  thỏa mãn

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Xác định tất cả giá trị của  $p$  để  $-1$  là một phần tử của dãy  $(a_n)$ .

#### Lời giải

Nếu  $p = 2$ , khi đó  $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 2a_k$  với mọi  $k = 0, 1, 2, \dots$ , do đó  $a_k$  là số chẵn với mọi  $k \geq 2$  nên không thể có một phần tử nhận giá trị là  $-1$ .

Vậy  $p > 2 \Rightarrow (p, 2) = 1$ .

Giả sử tồn tại  $m \geq 2$  sao cho  $a_m = -1$ , theo đề ta có

$$a_{k+1} = 2a_k - pa_{k-1} \equiv 2a_k \pmod{p} \text{ với mọi } k = 2, 3, 4, \dots$$

Vậy

$$-1 = a_m \equiv 2^{m-1}a_1 \equiv 2^{m-1} \pmod{p}. \quad (1)$$

Lại có

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - a_{k-1} - (p-1)a_{k-1} \equiv 2a_k - a_{k-1} \pmod{p-1} \\ \Rightarrow a_{k+1} - a_k &\equiv a_k - a_{k-1} \pmod{p-1}, \text{ với mọi } k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Vậy

$$a_{k+1} \equiv (k+1)(a_1 - a_0) + a_0 \equiv k+1 \pmod{p-1}.$$

Do đó

$$-1 = a_m \equiv m \pmod{p-1} \Rightarrow m+1 \equiv 0 \pmod{p-1}. \quad (2)$$

Do  $(p, 2) = 1$  nên theo định lý Fermat, ta có  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{m+1} \equiv 1 \pmod{p}$  (Do (2))

Kết hợp với (1) ta được

$$-4 \equiv 2^{m+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 5 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 5.$$

Với  $p = 5$ , ta thấy  $a_3 = -1$ .

Vậy tất cả giá trị của  $p$  thỏa yêu cầu bài toán là  $p = 5$ .

**Bài 8.** Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số  $(a_n), n \in \mathbb{N}^*$  xác định bởi

$$a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$$

đều nguyên.

#### Lời giải

Chuyển về và bình phương công thức truy hồi, ta được

$$a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} + 4a_n^2 = 3a_n^2 - 2 \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+1} + a_n^2 + 2 = 0$$

Thay  $n$  bằng  $n-1$ , ta được

$$a_n^2 - 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 2 = 0$$

Từ đây suy ra  $a_{n-1}$  và  $a_{n+1}$  là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4a_n x + a_n^2 + 2 = 0.$$

Suy ra  $a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n$  hay  $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ .

Từ đây suy ra tất cả các số hạng trong dãy đều nguyên, vì  $a_0 = 1$  và  $a_1 = 3$  nguyên.

**Bài 9.** Cho dãy số  $(a_n), n \in \mathbb{N}^*$  xác định bởi

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi  $m$  thì  $a_m a_{m+1}$  cũng là một số hạng của dãy số.

### Lời giải

Ta có  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ .

Thay  $n$  bằng  $n-1$ , ta được  $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$

Trừ hai đẳng thức về theo về, ta được  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 3a_n - a_{n-1} = 0$

Phương trình đặc trưng  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$  có nghiệm bội 3:  $x_{1,2,3} = 1$  nên ta có nghiệm tổng

quát có dạng  $a_n = an^2 + bn + c$ .

Thay  $n = 1, 2, 3$  ta được

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

Từ đó giải ra được  $a = 1, b = -2, c = 2$ .

Vậy  $a_n = n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$ .

Do đó  $a_m a_{m+1} = ((m-1)^2 + 1)((m^2 + 1)) = (m^2 - m + 1)^2 + 1 = a_{m^2 - m + 2}$ .

**Bài 10.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1-2u_n}$ .

a) Chứng minh rằng  $u_n \neq 0$  với mọi  $n$  nguyên dương.

b) Chứng minh dãy không tuần hoàn.

### Lời giải

Gọi  $\varphi$  là góc sao cho  $\tan \varphi = 2$  thì  $u_1 = \tan \varphi, u_2 = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \tan 2\varphi, \dots, u_n = \tan n\varphi$ .

a) Từ công thức tính  $u_n$  ta suy ra  $u_{2n} = \frac{2u_n}{1-u_n^2}$ .

Từ đó suy ra nếu tồn tại  $n$  để  $u_n = 0$  thì sẽ tồn tại  $n$  lẻ để  $u_n = 0$ .

Giả sử  $u_{2k+1} = 0$ . Khi đó  $u_{2k} = -2$  và ta có

$$-2 = u_{2k} = \frac{2u_k}{1-u_k^2} \Rightarrow u_k^2 + u_k - 1 = 0.$$

Điều này mâu thuẫn vì lúc đó  $u_k$  là số vô tỷ, trong khi đó theo công thức truy hồi thì  $u_k$  luôn là số hữu tỷ.

b) Dãy tuần hoàn thì phải tồn tại  $n$  và  $k$  sao cho

$$\tan n\varphi = \tan k\varphi \Leftrightarrow (n-k)\varphi = m\pi \Leftrightarrow u_{n-k} = 0.$$

Điều này không xảy ra do kết quả câu a).

**Bài 11.** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_0 = 1, a_1 = -1$  và  $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$

với mọi  $n \geq 2$ . Chứng minh rằng  $a_{2012} - 2010$  chia hết cho 2011

(Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2011)

**Lời giải 1**

Phương trình đặc trưng của dãy  $(a_n)$  là  $\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{14}, \lambda_2 = 3 - \sqrt{14}$

Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -1 = \alpha(3 + \sqrt{14}) + \beta(3 - \sqrt{14}) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \beta = \frac{4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \end{cases} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_1^{n-1} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_2^{n-1} \\ \Rightarrow a_{2012} &= \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 + \sqrt{14})^{2011} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 - \sqrt{14})^{2011} \end{aligned}$$

Ta có

$$(3 + \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k$$

và

$$\begin{aligned} (3 - \sqrt{14})^{2011} &= \sum_{k=0}^{2011} (-1)^k C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k \\ \Rightarrow a_{2012} &= -\sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i} 3^{2011-2i} + 2\sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i+1} 3^{2010-2i}. \end{aligned}$$

Với  $p$  là số nguyên tố và  $1 \leq j \leq p-1$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) ta có  $C_p^j$  chia hết cho  $p$ .

Suy ra  $a_{2012} \equiv (-3)^{2011} + 2 \cdot 14^{1005} \pmod{2011}$ .

Ta có  $14 \equiv 2025 \pmod{2011} \Rightarrow 14^{1005} \equiv 15^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ .

Mặt khác theo định lý nhỏ Fermat ta có  $(-3)^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ .

Suy ra  $a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$

Suy ra  $a_{2012} + 2010$  chia hết cho 2011

**Lời giải 2**

Xét dãy số  $(b_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) được xác định bởi

$$b_0 = 1, b_1 = -1, b_{n+1} = 6b_n + 2016b_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$  và  $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ta cũng chứng minh được  $a_n \equiv b_n \pmod{2011}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Phương trình đặc trưng của dãy  $(b_n)$  là  $\lambda^2 - 6\lambda - 2016 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 48, \lambda_2 = -42$ .

Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho

$$b_n = \alpha 48^n + \beta (-42)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì  $b_0 = 1, b_1 = -1$  nên  $\alpha = \frac{41}{90}, \beta = \frac{49}{90}$ .

Suy ra

$$b_n = \frac{41}{90} \cdot 48^n + \frac{49}{90} (-42)^n \Rightarrow b_{2012} = \frac{1}{90} [41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012}]$$

Theo định lí nhỏ Fermat ta có  $48^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}, 42^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$

Suy ra

$$41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90 \equiv 0 \pmod{2011}$$

$$\Rightarrow 90(b_{2012} + 1) \equiv 0 \pmod{2011}$$

$$\Rightarrow b_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$$

$$\Rightarrow a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$$

Suy ra  $a_{2012} - 2010$  chia hết cho 2011.

**Bài 12.** Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định bởi  $x_1 = 1, x_2 = 2011$

và  $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh rằng  $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$  là số chính phương

(Đề thi chọn đội tuyển Việt nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2012)

### Hướng dẫn giải

Phương trình đặc trưng của dãy  $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$  là  $t^2 - 4022t + 1 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là  $t_1 = 2011 + \sqrt{2010 \cdot 2012}$

Và  $t_2 = 2011 - \sqrt{2010 \cdot 2012}$ . Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho  $x_n = \alpha t_1^{n-1} + \beta t_2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì  $x_1 = 1, x_2 = 2011$  nên  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Suy ra  $x_{2012} = \frac{1}{2}(t_1^{2011} + t_2^{2011})$ . Suy ra

$$\frac{x_{2012} + 1}{2012} = \left[ \frac{1}{2\sqrt{1006}} (\sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}) \right]^2. \text{ Ta có } \sqrt{t_1} = \sqrt{1006} + \sqrt{1005}, \sqrt{t_2} = \sqrt{1006} - \sqrt{1005}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}, \text{ ta có } a = (\sqrt{1006} + \sqrt{1005})^{2011} + (\sqrt{1006} - \sqrt{1005})^{2011}$$

$$= 2\sqrt{1006} \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} 1006^{1005-k} \cdot 1005^k. \text{ Đặt } b = \frac{1}{2\sqrt{1006}} a, \text{ ta có } b = \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} 1006^{1005-k} \cdot 1005^k$$

Suy ra  $b$  là một số nguyên. Mặt khác  $\frac{x_{2012} + 1}{2012} = b^2$ . Vậy  $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$  là số chính phương

Sau đây là một số bài toán dành để luyện tập:

**Bài 13.** Cho dãy số  $(a_n)$  được xác định bởi  $a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4, \forall n \geq 1$

Chứng minh mọi số hạng của dãy  $(a_n)$  đều là bình phương của các số nguyên

### Hướng dẫn giải

Xét dãy số  $(b_n)(n \in \mathbb{N})$  được xác định bởi  $b_n = a_n - \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Khi đó ta có  $b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Phương trình đặc trưng của dãy  $(b_n)$  là

$\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$ . Phương trình này có hai nghiệm là  $\lambda_1 = 7 + \sqrt{48}, \lambda_2 = 7 - \sqrt{48}$ . Tồn tại các hằng số  $\alpha, \beta$  sao cho

$$b_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Vì } b_1 = b_2 = \frac{2}{3} \text{ nên } \alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{6} (7 + \sqrt{48})^n + \frac{2 + \sqrt{3}}{6} (7 - \sqrt{48})^n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n = \left[ \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{6}} (2 + \sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{6}} (2 - \sqrt{3})^n \right]^2$$

$$\text{Xét dãy số } (c_n) \text{ sao cho } c_n = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{6}} (2 + \sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{6}} (2 - \sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được  $c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Mặt khác

$c_0 = c_1 = 1$ . Suy ra  $c_n$  là số nguyên với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Mặt khác  $a_n = c_n^2$ . Vậy  $a_n$  là số chính phương với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bài 14.** Chứng minh tồn tại vô số cặp số nguyên dương  $(m, n)$  sao cho  $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$  là một số nguyên dương.

....(Đề thi Olympic Toán của Anh năm 2007)

#### Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng phương trình  $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4$  (1) có vô số nghiệm nguyên dương. Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + (1-4y)x + y^2 + y = 0 \quad (2)$$

Nx :  $(x_1 = 1, y_1 = 1)$  là một nghiệm nguyên dương của (2)

Xét dãy  $(t_k), k \geq 1$  sao cho  $t_1 = t_2, t_{k+2} = 4t_{k+1} - t_k - 1, k \geq 1$

Dễ dàng chứng minh được  $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$ . Ta có  $(t_1, t_2)$  là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2). Giả sử  $(t_{k+1}, t_{k+2})$  là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2) tức là

$$t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$$

$$\text{Xét } t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} - [t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1}]$$

$$= t_{k+2}^2 - t_k^2 + (1-4t_{k+1})(t_{k+2} - t_k) = (t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} + t_k + 1 - 4t_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$$

$\Rightarrow (x, y) = (t_{k+1}, t_{k+2})$  cũng là nghiệm  $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$  nghiệm  $x_1 = 3, x_2 = 11$  nguyên dương của phương trình (2)

Vì  $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$  nên phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương  $(m, n)$  sao cho  $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$  là một số nguyên dương.

**Bài 15.** Cho dãy số  $(x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $x_{2n+1} = 4x_{2n} - x_{2n-1}$  và  $x_1 = 3, x_2 = 11, x_3 = 41$ . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho  $x_n = a^2 + 2b^2$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  $x_1 = 1 + 2 \cdot 1^2, x_2 = 3^2 + 2 \cdot 1^2, x_3 = 3^2 + 2 \cdot 4^2, x_4 = 11^2 + 2 \cdot 4^2$

Ta chứng minh  $x_{2n-1} = x_{n-1}^2 + 2\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2, x_{2n} = x_n^2 + 2\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2$

Thật vậy  $x_{2n+1} = 4x_{2n} - x_{2n-1} = 4x_n^2 + 8\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2 - x_{n-1}^2 - 2\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2$

$$= \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1}^2 = \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n(4x_n - x_{n+1}) + \frac{1}{2}(4x_n - x_{n+1})^2$$

$$= \frac{3}{2}x_n^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2$$

$$x_{2n+2} = 4x_{2n+1} - x_{2n} = 4x_n^2 + 8\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2 - x_n^2 - 2\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)^2$$

$$= 3x_n^2 + 8\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_{n+1} - 3x_n}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2$$

$$= x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 = x_{n+1}^2 + 2\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2$$

**Bài 16.** Cho dãy số  $(x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $x_1 = 1, x_2 = 3$  và  $x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$ . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho  $x_n = a^2 + 2b^2$ .

**Hướng dẫn giải**

Xét các dãy số  $(u_n)(n \in \mathbb{N}^*)$  và  $(v_n)(n \in \mathbb{N}^*)$  được xác định bởi  $u_1 = 1, v_1 = 0$ ,

$u_{n+1} = u_n + 2v_n$  và  $v_{n+1} = u_n + v_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chúng ta chứng minh

$x_n = u_n^2 + 2v_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$  (1) bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$  và  $n = 2$ . Giả sử mệnh đề đúng đến  $n = m (m \geq 2)$ . Khi đó ta có

$$x_{m-1} = u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2, x_m = u_m^2 + 2v_m^2. \text{ Đặt } A = u_{m-1}, B = v_{m-1} \text{ ta có}$$

$$u_m = A + 2B, v_m = A + B, u_{m+1} = 3A + 4B, v_{m+1} = 2A + 3B$$

$$\text{Ta có } 6x_m - x_{m-1} = 6(u_m^2 + 2v_m^2) - (u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2) = 6[(A + 2B)^2 + 2(A + B)^2] - (A^2 + 2B^2)$$

$$= (3A + 4B)^2 + 2(2A + 3B)^2 = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2. \text{ Suy ra } x_{m+1} = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2. \text{ Vậy (1) cũng đúng với}$$

$n = m + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp toán học (1) đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Vậy với mỗi số nguyên dương  $n$  tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho  $x_n = a^2 + 2b^2$ .

**Bài 17.** (Học sinh giỏi Việt Nam 1991)

Cho dãy số  $(a_n)$  xác định bởi:

$$a_1 = 1.2.3, a_2 = 2.3.4, a_n = n(n+1)(n+2)$$

Đặt  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Chứng minh rằng  $4S_n + 1$  là một số chính phương

**Hướng dẫn giải**

$$S_1 = a_1 = 1.2.3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1.2.3 + 2.3.4 = 2.3.5$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2.3.5 + 3.4.5 = 3.5.6$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{4}.1.2.3.4, \quad S_2 = \frac{1}{4}.2.3.4.5, \quad S_3 = \frac{1}{4}.3.4.5.6$$

Giả sử  $S_k = \frac{1}{4}.k.(k+1)(k+2)(k+3), k \geq 3$  (giả thiết quy nạp)

Ta sẽ chứng minh  $S_{k+1} = \frac{1}{4}.(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

Thật vậy, theo đề bài  $\Rightarrow S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)(k+3)$

Theo giả thiết quy nạp  $\Rightarrow S_{k+1} = \frac{1}{4}.k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3)$

$$\Rightarrow S_{k+1} = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

Theo nguyên tắc quy nạp suy ra  $S_n = \frac{1}{4}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$\Rightarrow 4S_n + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$$

$$\Rightarrow 4S_n + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

Và  $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$

Vậy  $4S_n + 1$  là một số chính phương

**Nhận xét:**

Trong khi giải các bài tập về dãy số nêu trên ta thấy cách biến đổi khá đa dạng, đôi khi có phép biến đổi rất khéo không tự nhiên. Nhưng việc tính toán một số phần tử đầu của dãy số sau đó dự đoán và chứng minh theo phương pháp quy nạp xem ra khá tốt.

**MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ CHÍNH PHƯƠNG CỦA DÃY TUYẾN TÍNH CẤP HAI**

**Trần Ngọc Thắng – THPT Chuyên Vĩnh Phúc**

**I. LÝ THUYẾT**

**1. Công thức tổng quát của dãy  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ .**

**Trường hợp 1:  $a + b = 1$**

Ta có  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \Leftrightarrow u_{n+2} + (1-a)u_{n+1} = u_{n+1} + (1-a)u_n + c$ .

Đặt  $v_n = u_{n+1} + (1-a)u_n$  ta được  $v_{n+1} = v_n + c$ . Từ đó ta được  $v_n = v_1 + (n-1)c, n = 1, 2, \dots$  suy ra

$$u_{n+1} = (a-1)u_n + v_1 + (n-1)c. \text{ Do đó}$$

$$u_{n+1} = (a-1)u_n + v_1 + (n-1)c$$

$$(a-1)u_n = (a-1)^2 u_{n-1} + v_1(a-1) + (a-1)(n-2)c$$

$$(a-1)^2 u_{n-1} = (a-1)^3 u_{n-2} + v_1(a-1)^2 + (a-1)^2(n-3)c$$

...

$$(a-1)^{n-1} u_2 = (a-1)^n u_1 + v_1 (a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-1} (n-1)c$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_{n+1} = (a-1)^n u_1 + v_1 \sum_{k=0}^{n-1} (a-1)^k + c \sum_{k=0}^{n-1} [(a-1)^k (n-k-1)]$$

**Trường hợp 2:**  $a+b \neq 1$

Đặt  $u_n = x_n + \alpha$ , ta sẽ chọn  $\alpha$  sao cho dãy số  $(x_n)$  là dãy tuyến tính cấp hai.

$$\text{Ta có } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \Leftrightarrow x_{n+2} + \alpha = a(x_{n+1} + \alpha) + b(x_n + \alpha) + c$$

$$\text{Để được dãy số } (x_n) \text{ tuyến tính ta sẽ chọn } \alpha \text{ sao cho } \alpha = \alpha a + \alpha b + c \Leftrightarrow \alpha = \frac{c}{1-a-b}$$

Khi đó ta được  $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ ,  $n=1,2,\dots$

Xét phương trình đặc trưng:  $t^2 - at - b = 0$  (1)

+) Nếu phương trình (1) có hai thực phân biệt  $t_1, t_2$  thì  $x_n = At_1^n + Bt_2^n$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số được tính theo các số hạng  $x_1, x_2$ .

+) Nếu phương trình (1) có nghiệm kép  $t_1 = t_2 = t_0$  thì  $x_n = (A+Bn)t_0^n$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số được tính theo các số hạng  $x_1, x_2$ .

+) Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phức  $x \pm yi$  thì  $x_n = r^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$ , trong đó  $A, B$  là các hằng số được tính theo các số hạng  $x_1, x_2$  và  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\varphi$  là một argument của  $x + yi$ .

## 2. Tính chất cơ bản dãy tuyến tính cấp hai.

Xét dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi:  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ,  $n=1,2,\dots$

$$\text{Ta có } \frac{u_{n+2} - bu_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - bu_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_n (u_{n+2} - bu_n) = u_{n+1} (u_{n+1} - bu_{n-1})$$

$$\Rightarrow u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = -b(u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2) = \dots = (-b)^{n-1} (u_1 u_3 - u_2^2).$$

$$\text{Do đó dãy } (u_n) \text{ thỏa mãn } u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-b)^{n-1} (u_1 u_3 - u_2^2).$$

Đây là tính chất rất quan trọng về dãy tuyến tính cấp hai, tính chất này thường được sử dụng khi chứng minh các đẳng thức liên quan đến các số hạng của dãy và các tính chất số học của dãy.

**3. Phương pháp thường dùng để chứng minh  $f(u_n)$  là số chính phương, trong đó  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ .**

Để chứng minh dãy số  $(b_n)$  thỏa mãn  $b_n$  là số chính phương với mọi số nguyên dương  $n$  ta thường sử dụng một số hướng sau:

**Hướng 1:** Ta chỉ ra tồn tại dãy số nguyên  $(c_n)$  thỏa mãn  $b_n = c_n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dãy số  $(c_n)$  thường dự đoán bằng cách tính một số giá trị đầu  $c_1, c_2, \dots$  và tìm ra quy luật của dãy  $(c_n)$ .

**Hướng 2:** Ta chứng minh  $b_n b_{n+2}$  là một số chính phương với mọi số tự nhiên  $n$ , sau đó chứng minh bằng quy nạp.

**Hướng 3:** Dựa vào công thức truy hồi ta tính được  $b_n = c_n^2$

## II. MỘT SỐ BÀI TẬP MINH HỌA

**Bài 18.** Cho dãy số  $(a_n)$ :  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 0$ . Chứng minh rằng:

a)  $a_n - 1$  là số chính phương với mọi  $n$  lẻ

b)  $\frac{a_n - 1}{6}$  là số chính phương với mọi  $n$  chẵn.

### Hướng dẫn giải

a) **Cách 1:** Ta dự đoán dãy số  $(c_n)$  sao cho  $a_{2n+1} - 1 = c_n^2$ , ta có  $a_1 = 2, a_3 = 26, a_5 = 362, a_7 = 5042$  suy ra  $c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 19, c_3 = 71$ . Khi đó ta thử thiết lập quan hệ truy hồi của dãy  $(c_n)$  theo dãy tuyến tính cấp 2, giả sử  $c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n$  và từ  $c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 19, c_3 = 71$  ta được

$$\begin{cases} 5a + b = 19 \\ 19a + 5b = 71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Do đó ta dự đoán dãy số } (c_n) \text{ là:}$$

$$c_0 = 1, c_1 = 5, c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp  $a_{2n+1} - 1 = c_n^2$  (1),  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ . Thật vậy (1) đúng với  $n = 0$ , giả sử (1) đúng đến  $n > 0$ , ta sẽ chứng minh (1) đúng đến  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a_{2n+3} - 1 &= 4a_{2n+2} - a_{2n+1} - 1 = 4(4a_{2n+1} - a_{2n}) - a_{2n+1} - 1 = 16a_{2n+1} - 4a_{2n} - a_{2n+1} - 1 \\ &= 15a_{2n+1} - (a_{2n+1} + a_{2n-1}) - 1 = 14a_{2n+1} - a_{2n-1} - 1 = 14(c_n^2 + 1) - c_{n-1}^2 - 1 - 1 = 12c_n^2 - c_{n-1}^2 - 12 \quad (2) \end{aligned}$$

Theo hệ thức cơ bản của dãy tuyến tính cấp 2 ta được:

$$c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 = -6 \Rightarrow (4c_n - c_{n-1})c_{n-1} - c_n^2 = -6 \Rightarrow c_n^2 + c_{n-1}^2 - 4c_nc_{n-1} - 6 = 0 \quad (3)$$

Ta có

$$\begin{aligned} c_{n+1}^2 &= (4c_n - c_{n-1})^2 = 16c_n^2 - 8c_nc_{n-1} + c_{n-1}^2 = 16c_n^2 - 2(c_n^2 + c_{n-1}^2 - 6) + c_{n-1}^2 \\ &= 14c_n^2 - c_{n-1}^2 - 12 \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$a_{2n+3} - 1 = c_{n+1}^2$$

Do đó ta chứng minh được (1) đúng đến  $n + 1$  suy ra (1) đúng.

**Cách 2:** Ta có  $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 3, \forall n \geq 0$ . Từ hệ thức này ta được:

$$(a_{n+2} - 1)(a_n - 1) = a_{n+2}a_n - a_{n+2} - a_n + 1 = a_{n+1}^2 + 3 - 4a_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - 2)^2 \quad (5).$$

Từ hệ thức (5) bằng phương pháp quy nạp suy ra  $a_n - 1$  là số chính phương với mọi số nguyên dương lẻ  $n$ .

b) Ta chứng minh theo hướng 2 như sau:

$$\text{Ta có } \frac{a_{n+2} - 1}{6} \cdot \frac{a_n - 1}{6} = \frac{a_{n+2}a_n - a_{n+2} - a_n + 1}{36} = \frac{a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} + 4}{36} = \left(\frac{a_{n+1} - 2}{6}\right)^2$$

Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp suy ra  $\frac{a_n - 1}{6}$  là số chính phương.

## I. Các định nghĩa và các định lý cơ bản

### Định nghĩa 1:

\*) Ta nói dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn  $a$  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại số tự nhiên  $N_0$  (phụ thuộc vào dãy số  $x_n$  và  $\varepsilon$ ) sao cho với mọi  $n > N_0$  ta có  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

\*) Ta nói dãy số  $(x_n)$  dần đến  $+\infty$  nếu với mọi số thực dương  $M$  lớn tùy ý, tồn tại số tự nhiên  $N_0$  (phụ thuộc vào dãy số  $x_n$  và  $M$ ) sao cho với mọi  $n > N_0$ , ta có  $x_n > M$ .

$$\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : x_n > M.$$

$$\text{Tương tự, } \lim x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall P < 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : x_n < P.$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy hội tụ. Dãy số không có giới hạn hữu hạn hoặc dần đến vô cùng ( $+\infty$  hoặc  $-\infty$ ) gọi là dãy phân kì.

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng  $\lim \frac{n-1}{n+1} = 1$ .

### Bài giải:

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , xét bất phương trình  $\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ . (\*)

$$\text{Có } \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Nếu chọn  $n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil > \frac{2}{\varepsilon} - 1$  thì (\*) luôn đúng  $\forall n > n_0, n_0 \in \mathbb{N}$ .

Tính chất của dãy có giới hạn vô cực:

$$1) \text{ Nếu } \lim |u_n| = +\infty \text{ thì } \lim \frac{1}{u_n} = 0.$$

2) Nếu  $\lim u_n = \pm\infty, \lim v_n = \pm\infty$  thì  $\lim u_n \cdot v_n = \pm\infty$ , trong đó dấu  $+$  hoặc  $-$  được chọn theo đúng quy tắc nhân dấu thông thường.

3) Nếu  $\lim u_n = \pm\infty, \lim v_n = L \neq 0$  thì  $\lim u_n \cdot v_n = \pm\infty$ , trong đó dấu  $+$  hoặc  $-$  được chọn theo đúng quy tắc nhân dấu thông thường.

4) Nếu  $\lim u_n = L \neq 0, \lim v_n = 0$  và  $(v_n)$  có dấu xác định kể từ một số hạng nào đó trở đi thì

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \pm\infty \text{ trong đó dấu } + \text{ hoặc } - \text{ được chọn theo đúng quy tắc chia dấu thông thường.}$$

$$5) \text{ Nếu } \lim u_n = \pm\infty, \lim v_n = L \text{ thì } \lim (u_n + v_n) = \pm\infty.$$

**Định lý 1.** Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

Chứng minh.

Ta thấy rằng nếu  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  và  $|a_1 - a_2| < \varepsilon$ . Khi đó với mọi  $\varepsilon$  dương nhỏ tùy ý cho trước thì

$$a_1 = a_2. \text{ Thật vậy, nếu } a_1 \neq a_2 \text{ ta chọn } \varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2} \Rightarrow |a_1 - a_2| > \varepsilon, \text{ mâu thuẫn.}$$

Giả sử  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a_1, \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = a_2$ . Khi đó  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$\exists n : \forall n > n_1 : |u_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } \exists n_2 : \forall n > n_2 : |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  có:  $|a_1 - a_2| = |a_1 - u_n + u_n - a_2| \leq |u_n - a_1| + |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Theo nhận xét trên thì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a_1 = a_2$ .

**Định nghĩa 2.** (Dãy con)

Cho dãy số thực  $(u_n)$  và dãy số nguyên dương  $(n_k)$  sao cho  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Dãy  $(u_{n_k}) = \{u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots\}$  được gọi là dãy con của dãy  $(u_n)$ .

Ta chú ý rằng  $n_1 \geq 1, n_2 > n_1 \geq 1 \Rightarrow n_2 \geq 2$ , tương tự ta có  $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Dãy  $(u_n)$  là dãy con của chính nó với  $n_k = k$ .

**Định lý 2.** Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn của dãy.

Chứng minh.

Giả sử  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a$ , theo định nghĩa ta có:  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 : |u_n - a| < \varepsilon$ .

Cho  $(u_{n_k})$  là dãy con của  $(u_n)$ . Khi đó  $\forall k > n_0$ , ta có  $n_k \geq k > n_0$  nên  $|u_{n_k} - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = a$ .

**Định lý 3.** (Tổng, hiệu, tích, thương các dãy hội tụ)

Nếu  $(x_n), (y_n)$  là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là  $a, b$  thì các dãy số  $(x_n + y_n)$ ,

$(x_n - y_n)$ ,  $(x_n \cdot y_n)$ ,  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là  $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$ . (Trong

trường hợp dãy số thương, ta giả sử  $y_n \neq 0$  và  $b \neq 0$ ).

Chứng minh:

- Trường hợp  $\lim(x_n + y_n) = a + b$

Có  $\lim x_n = a$  nên  $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_1$  sao cho  $\forall n > n_1$  thì  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  (1).

$\lim y_n = b$  nên  $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_2$  sao cho  $\forall n > n_2$  thì  $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$  (2).

Đặt  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  thì  $\forall n > n_0 \Rightarrow (1), (2)$  thỏa. Khi đó  $\forall n > n_0$ :

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim(x_n + y_n) = a + b$$

- Trường hợp  $\lim(x_n - y_n) = a - b$  ta chứng minh tương tự trường hợp  $\lim(x_n + y_n) = a + b$  được

$$|(x_n - y_n) - (a - b)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = a - b$$

- Trường hợp  $\lim(x_n \cdot y_n) = ab$

Có  $\lim x_n = a$  nên  $\forall \sqrt{\varepsilon} > 0, \exists n_1$  sao cho  $\forall n > n_1$  thì  $|x_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$  (3).

$\lim y_n = b$  nên  $\forall \sqrt{\varepsilon} > 0, \exists n_2$  sao cho  $\forall n > n_2$  thì  $|y_n - b| < \sqrt{\varepsilon}$  (4).

Đặt  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  thì  $\forall n > n_0 \Rightarrow (3), (4)$  thỏa. Khi đó  $\forall n > n_0$ :

$$|(x_n - a)(y_n - b)| = |(x_n \cdot y_n - ab - x_n b - y_n a + 2ab)| \geq |x_n \cdot y_n - ab| - |x_n b + y_n a - 2ab| \geq |x_n \cdot y_n - ab|$$

$$\Rightarrow |x_n \cdot y_n - ab| \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \text{đpcm.}$$

- Trường hợp  $\lim \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, (y_n \neq 0, b \neq 0)$ , ta chứng minh tương tự trường hợp  $\lim (x_n \cdot y_n) = ab$  được

$$\left| \left( x_n - a \right) \left( \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right) \right| = \left| \left( \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) - \frac{x_n}{b} + \frac{a}{y_n} - \frac{2a}{b} \right| \geq \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| - \left| \frac{x_n}{b} + \frac{a}{y_n} - \frac{2a}{b} \right| \geq \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Ví dụ 2.** Tìm  $\lim u_n$  với  $u_n = \frac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$

Giải.

Ta có:  $u_n = \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3}}$

Suy ra:  $\lim u_n = \frac{\lim \left( 2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{\lim \left( 1 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3} \right)} = \frac{\lim 2 - \lim \frac{4}{n} + \lim \frac{3}{n^2} + \lim \frac{3}{n^3}}{\lim 1 - \lim \frac{5}{n^2} + \lim \frac{7}{n^3}} = \frac{2}{1} = 2$

Vì với  $k \in \mathbb{Z}^+$ , ta có:  $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ .

Do nếu chọn  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$  thì bất đẳng thức  $\left| \frac{1}{n^k} \right| < \varepsilon$  đúng  $\forall n > n_0$  hay  $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ .

**Định lí 4.** Giả sử  $\lim u_n = L$ . Khi đó:

a)  $\lim |u_n| = |L|$  và  $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{L}$ .

b) Nếu  $u_n \geq 0, \forall n$  thì  $L \geq 0$  và  $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$ .

**Định lí 5.** (Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức)

Cho dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn  $\ell$ ; nếu  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $\forall n > N_0$ , ta có  $a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq \ell \leq b$ .

**Định lí 6.** (Định lí kẹp)

Cho ba dãy số  $(x_n), (y_n), (z_n)$ , trong đó  $(x_n)$  và  $(z_n)$  có cùng giới hạn hữu hạn  $L$ , và  $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0$  ta có  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . Khi đó  $(y_n)$  cũng có giới hạn là  $L$ .

Chứng minh:

Ta chứng minh kết luận của định lí cho trường hợp  $L = 0$ .

Vì  $\lim u_n = 0$  nên  $\forall \varepsilon > 0$ , tồn tại  $n_1$  sao cho  $\forall n > n_1 : |u_n| < \varepsilon$ , tức là  $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$ .

Tương tự, tồn tại  $n_2$  sao cho  $\forall n > n_2 : |w_n| < \varepsilon$ , tức là  $-\varepsilon < w_n < \varepsilon$ .

Như vậy,  $\forall n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  ta có  $-\varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \varepsilon$ .

Theo định nghĩa, ta có  $\lim v_n = 0$ .

**Hệ quả.** 1) Nếu  $u_n \leq c, \forall n$  thì  $\lim u_n \leq c$  (nếu giới hạn tồn tại).

2) Nếu  $|u_n| \leq v_n \forall n$  và  $\lim v_n = 0$  thì  $\lim u_n = 0$ .

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng nếu  $|q| < 1$  thì  $\lim q^n = 0$ .

Giải.

Đặt  $a = \frac{1}{|q|} > 1$ . Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có:  $a^n = (1 + a - 1)^n \geq 1 + n(a - 1) > 0$

$$\text{Suy ra } 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{1 + n(a - 1)} < \frac{1}{n(a - 1)}$$

Mà  $\lim 0 = 0$  và  $\lim \frac{1}{n(a - 1)} = 0$  nên theo định lí 4 có  $\lim \frac{1}{a^n} = 0$  hay  $\lim |q|^n = 0 \Rightarrow \lim q^n = 0$ .

**Định lí 7.** Mọi dãy số hội tụ thì bị chặn.

Chứng minh:

Giả sử  $(x_n)$  hội tụ và  $\lim x_n = L$ . Theo định nghĩa, với  $\varepsilon = 1, \exists N_0$  sao cho  $\forall n > N_0$  thì  $-1 < x_n - L < 1 \Rightarrow L - 1 < x_n < L + 1$ .

Đặt  $M = \max \{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}, L + 1\}, m = \min \{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}, L - 1\}$  thì ta có:  $m \leq x_n \leq M \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Suy ra  $(x_n)$  bị chặn.

**Định lí 8.** Một dãy tăng không nghiêm ngặt (knn) và bị chặn trên hay một dãy giảm knn và bị chặn dưới thì hội tụ. Ngắn gọn hơn, một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

**Định lí 9.** a) Nếu dãy  $(x_n)$  tăng knn và có giới hạn là  $L$  thì ta có  $x_n \leq L \quad \forall n$ .

b) Nếu dãy  $(x_n)$  giảm knn và có giới hạn là  $L$  thì ta có  $x_n \geq L \quad \forall n$ .

Chứng minh.

Ta chỉ cần chứng minh a), vì b) hoàn toàn tương tự.

Giả sử ngược lại, tồn tại  $k$  sao cho  $x_k > L$ . Khi đó, vì  $(x_n)$  tăng knn nên ta có  $x_n \geq x_k, \forall n > k$  suy ra  $L = \lim x_n \geq x_k > L$  (theo định lí 3)  $\Rightarrow$  mâu thuẫn. Vậy ta được đpcm.

**Định lí 10.** (Nguyên lí Cantor về dãy các đoạn thẳng lồng nhau)

Cho hai dãy số thực  $(a_n), (b_n)$  sao cho:

a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n \leq b_n$ .

b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*: [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$ .

c)  $b_n - a_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Khi đó tồn tại duy nhất số thực  $L$  sao cho  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{L\}$ .

Chứng minh.

Theo điều kiện b) thì  $a_{n+1} \geq a_n$  và  $b_{n+1} \leq b_n$  nên  $(a_n)$  là dãy tăng knn,  $(b_n)$  là dãy giảm knn kết hợp điều kiện a) ta được  $a_n \leq b_1 \quad \forall n$  và  $b_n \geq a_1 \quad \forall n$ . Suy ra  $(a_n)$  là dãy tăng knn và bị chặn trên,  $(b_n)$  là dãy giảm knn và bị chặn dưới.

$\Rightarrow$  tồn tại  $\lim a_n = A$  và  $\lim b_n = B$ . Do  $b_n - a_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow +\infty \Rightarrow A = B = L \quad (L \in \mathbb{R})$ .

Mặt khác,  $(a_n)$  và  $(b_n)$  là 2 dãy đơn điệu và có giới hạn là  $L$  nên  $a_n \leq L \leq b_n \quad \forall n$  (định lí 7), suy

ra  $\{L\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$ .  $L$  là giới hạn của 2 dãy  $(a_n), (b_n)$  nên có tính duy nhất  $\Rightarrow$  đpcm.

**Định lí 11.** (Bolzano-Weierstrass)

Từ một dãy bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.

Chứng minh.

Xét  $(a_n)$  bị chặn hay  $\exists m, M$  sao cho đoạn  $[m; M]$  chứa tất cả các số hạng của  $(a_n)$ .

Ta xây dựng dãy các đoạn thẳng  $[x_n; y_n]$  theo quy tắc sau:  $x_1 = m, y_1 = M$

Đặt  $t = \frac{x_1 + y_1}{2}$ . Vì  $[x_1; y_1]$  chứa tất cả các số hạng của  $(a_n)$  nên một trong hai đoạn  $[x_1; t], [t; y_1]$  phải chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$ . Giả sử đoạn  $[x_1; t]$  chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$  thì ta đặt  $x_2 = x_1, y_2 = t$  (trường hợp đoạn  $[t; y_1]$  chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$  ta làm tương tự). Tiếp tục thực hiện như vậy, nếu ta đã xây dựng được đoạn  $[x_k; y_k]$  chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$  thì ta sẽ xây dựng được đoạn  $[x_{k+1}; y_{k+1}]$  là 1 trong 2 nửa của  $[x_k; y_k]$  và cũng chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$ .

suy ra ta xây dựng được dãy các đoạn thẳng  $[x_k; y_k]$  lồng nhau và  $y_k - x_k = \frac{M - m}{2^{k-1}} \rightarrow 0$  và mỗi đoạn  $[x_k; y_k]$  chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$ .

Ta chọn dãy con  $(a_{i_j})$  của  $(a_n)$  như sau:

$a_{i_1} = a_1$ . Giả sử  $a_{i_1}, \dots, a_{i_j}$  đã được chọn thì ta sẽ chọn chỉ số  $i_{j+1}$  sao cho:

- 1)  $i_{j+1} > i_j$ ;
- 2)  $a_{i_{j+1}} \in [x_{j+1}; y_{j+1}]$ .

Việc chọn này luôn thực hiện được vì  $[x_{j+1}; y_{j+1}]$  chứa vô số các số hạng của  $(a_n)$ .

Từ cách chọn dãy các đoạn thẳng  $[x_n; y_n]$ , theo định lí 8  $\exists L \in \mathbb{R}$  sao cho  $\{L\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n; y_n]$  hay

$\lim x_n = \lim y_n = L$  (1). Mặt khác theo cách chọn  $(a_{i_j})$  thì  $x_j \leq a_{i_j} \leq y_j$  với mọi  $j \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i_j} = L$  (định lí kẹp). Vậy ta đã trích ra được một dãy con hội tụ từ  $(a_n)$  (đpcm).

### Định nghĩa 3.

Dãy  $(x_n)$  được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n > N_0$  ( $N_0$  phụ thuộc  $\varepsilon$ ) thì  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng nếu  $(x_n)$  là dãy Cauchy thì  $(x_n)$  bị chặn.

Chứng minh.

Ta cố định  $m = N_0 + 1 > N_0$ , khi đó  $|x_m - x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x_{N_0+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_{N_0+1} - \varepsilon < x_n < x_{N_0+1} + \varepsilon$   
 $\Rightarrow a < x_n < b$  với  $a = x_{N_0} - \varepsilon, b = x_{N_0} + \varepsilon \Rightarrow (x_n)$  bị chặn (đpcm).

### Định lí 12. (Tiêu chuẩn Cauchy)

Dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Chứng minh.

Nếu  $(x_n)$  hội tụ về giới hạn hữu hạn  $L$  thì  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $\forall m > N_0$  ta có  $|x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Khi đó  $\forall m, n > N_0$ , ta có:  $|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Suy ra  $(x_n)$  là dãy Cauchy.

Ngược lại, giả sử  $(x_n)$  là dãy Cauchy. Khi đó  $(x_n)$  bị chặn. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con  $(x_{i_k})$  của  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn  $L$ . Ta chứng minh  $L$  cũng là giới hạn của  $(x_n)$ .

$\forall \varepsilon > 0$ , tồn tại  $k$  sao cho  $\forall k > k_0$ , ta có  $|x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Mặt khác  $(x_n)$  là dãy Cauchy nên tồn tại  $N_0$  sao cho  $\forall m, n > N_0$ , ta có:  $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Do  $i_k \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists k > k_0$  sao cho  $i_k > N_0$ . Xét  $m > N_0$  bất kỳ, ta có:

$$|x_m - x_{i_k}| = |(x_m - L) - (x_{i_k} - L)| \leq |x_m - L| + |x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Suy ra  $\lim x_n = L$ .

Ví dụ 5. Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  hội tụ.

Giải.

Ta có với  $m > n$  thì:  $|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m}$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Nên  $\forall \varepsilon > 0$ , ta chọn  $N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$  thì  $\forall m, n > N_0$ , ta có:  $|x_m - x_n| < \frac{1}{\min\{m, n\}} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon$

Suy ra  $(x_n)$  là dãy Cauchy nên  $(x_n)$  hội tụ (đpcm).

#### Định nghĩa 4 (Số e)

Cho dãy  $(x_n)$  xác định:  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Theo Euler  $\lim x_n$  tồn tại và kí hiệu là  $e$ , số  $e$  là một số vô tỷ và 15 số đầu trong khai triển thập phân của nó là  $e = 2,718281828459045\dots$ . Ta chứng minh  $(x_n)$  là dãy hội tụ.

Chứng minh.

Ta xét dãy  $(y_n)$  với  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , ta chứng minh dãy  $(x_n)$  là dãy tăng và  $(y_n)$  là dãy giảm.

Ta có:

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} < \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad (*)$$

Mà  $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} < \frac{1}{n} \left(n-1 + \frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{n^2+2n-1}{n(n+2)}$  (A-G)  $\Rightarrow (*)$  đúng (do  $(n^2+2n)^2 > (n^2+2n)^2 - 1$ ), suy

ra  $(x_n)$  là dãy tăng.

$$y_n < y_{n-1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \Rightarrow \frac{n+1}{n} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} > \frac{n^2}{n^2-1} > \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

Mà  $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < \frac{1}{n} \left(n-1 + \frac{n+1}{n}\right) = \frac{n^2+1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2-1}$ , nên  $(y_n)$  là dãy giảm.

Mặt khác, ta lại có  $2 = x_1 \leq x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n \leq y_1 = 4 \Rightarrow (x_n), (y_n)$  là dãy hội tụ (đpcm).

$e$  là hằng số đặc biệt trong toán học. Hàm số  $e^x$  có những tính chất đặc biệt và người ta thường dùng làm cơ sở cho các hàm số mũ dùng trong giải tích. Hàm ngược của hàm  $e^x$  (hay  $\exp(x)$ ) là  $\log_e x$  hay  $\ln x$  (đọc là logarit tự nhiên của  $x$  hay logarit Neper của  $x$ ).

**Bài 19.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2009} u_n^2 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

a. Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

b. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

### Bài giải

a. Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Ta có  $1 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_n < \dots$ . Vậy  $u_n$  là dãy tăng. Giả sử dãy số bị chặn trên thì ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a > 1$ .

Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n^2}{2009} + u_n \right) \Rightarrow a = \frac{a^2}{2009} + a \Rightarrow a = 0$ . (không đúng)

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

b. Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

Ta có  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2009} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2009 \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} &= 2009 \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2009 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2009 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2009. \end{aligned}$$

**Bài 20.** Cho dãy số  $u_n$  xác định bởi :  $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ . Tìm công thức tính  $u_n$  theo  $n$ .

### Bài giải

Ta có:

$$u_1 = 11 = 10 + 1$$

$$u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 100 + 2$$

$$u_3 = 1003 = 1000 + 3$$

Dự đoán:  $u_n = 10^n + 1$ . Chứng minh:

Ta có:  $u_1 = 10^1 + 1$ , công thức đúng với  $n = 1$ .

Giả sử công thức đúng với  $n = k$  ta có:  $u_k = 10^k + 1$ . Ta có:

$$u_{k+1} = 10 \cdot 10^k + k + 1 - 9k = 10^{k+1} + k + 1. \text{ Công thức đúng với } n = k + 1$$

Vậy  $u_n = 10^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Bài 21.** Cho  $P_n = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n+1 \cdot n+2}\right)$ . Gọi  $U_n$  là số hạng tổng quát của  $P_n$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

**Bài giải**

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{2}{k+1 \cdot k+2} = \frac{k \cdot k+3}{k+1 \cdot k+2}$$

$$\text{Cho } k = 1, 2, 3, \dots, n \text{ ta được: } S_n = \frac{1.4.2.5.3.6 \dots n(n+3)}{2.3.3.4.4.5 \dots (n+2)(n+1)}$$

Suy ra

$$U_n = \frac{n+3}{3(n+1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{3(n+1)} = \frac{1}{3}.$$

**Bài 22.** Cho dãy  $u_n$  xác định bởi:  $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2012u_n}{2013} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ .

Thành lập dãy  $S_n$  xác định bởi:  $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1} - 1}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

**Bài giải**

Ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2012u_n}{2013} = \frac{u_n^2 + 2013u_n - u_n}{2013} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2013} + u_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

$$u_1 = 2 \Rightarrow u_1 < u_2 < \dots < u_n < u_{n+1} < \dots$$

Suy ra  $u_n$  là dãy tăng

Giả sử  $u_n$  bị chặn trên lúc đó tồn tại số  $L$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L \quad (L > 2)$ .

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(u_n - 1)}{2013} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

$$\Rightarrow L = \frac{L(L-1)}{2013} + L \Rightarrow \begin{cases} L = 1 \\ L = 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

$$\Rightarrow u_n \text{ không bị chặn trên. Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

Mặt khác:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2012u_n}{2013} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2013} + u_n$$

$$\Rightarrow u_n(u_n - 1) = 2013(u_{n+1} - u_n) = 2013[(u_{n+1} - 1) - (u_n - 1)]$$

$$\Rightarrow u_n = 2013 \left( \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} - 1 \right) \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2013 \left( \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right).$$

$$\text{Cho } n=1 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2-1} = 2013 \left( \frac{1}{u_1-1} - \frac{1}{u_2-1} \right) = 2013 \left( 1 - \frac{1}{u_2-1} \right).$$

Tương tự

$$\frac{u_2}{u_3-1} = 2013 \left( \frac{1}{u_2-1} - \frac{1}{u_3-1} \right)$$

...

$$\frac{u_n}{u_{n+1}-1} = 2013 \left( \frac{1}{u_n-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Cộng vế theo vế ta được: } S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1}-1} = 2013 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2013 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right) = 2013 \end{aligned}$$

**Bài 23.** Cho dãy số  $u_n$  xác định như sau:  $\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ . Tìm

$$\lim \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right).$$

**Bài giải**

Chúng minh được dãy tăng:  $u_{n+1} - u_n = 2012u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Giả sử có giới hạn là  $a$  thì:  $a = 2012a^2 + a \Rightarrow a = 0 > 2012$  (vô lí)  
nên  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\text{Ta có: } \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2012u_{n+1}u_n} = \frac{1}{2012} \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right).$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{1}{2012} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{2012^2}.$$

**Bài 14:** Cho dãy số  $x_k$  xác định bởi:  $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{k+1!}$ . Tính:

$$\lim \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_{2012}^n}.$$

**Bài giải**

Ta có

$$x_{k+1} - x_k = \frac{k+1}{k+2!} > 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{k+1} > x_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow x_{2012}^n < x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n < 2012 \cdot x_{2012}^n$$

$$\Rightarrow x_{2012} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} < \sqrt[n]{2012 \cdot x_{2012}^n}$$

Ta có

$$\frac{k}{k+1!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{k+1!}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow x_k = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow x_{2012} = 1 - \frac{1}{2013!}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2013!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} < \sqrt[n]{2012} \left(1 - \frac{1}{2013!}\right)$$

$$\text{Suy ra } \lim \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} = 1 - \frac{1}{2013!}.$$

**Bài 36:** Cho dãy số:  $U_n$  xác định như sau:  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} U_n = \frac{2}{2n+1}$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  Chứng minh rằng:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{2010} < \frac{1005}{1006}.$$

**Bài giải**

$$\text{Ta có: } U_k = \frac{2}{2k+1} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{2}{2k+1} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

Ta có:

$$\Rightarrow U_k < \frac{2}{2\sqrt{k}} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}, \text{ do } \sqrt{k} \sqrt{k+1} < \frac{k + k+1}{2} = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow U_k < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Do đó:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\text{Vì } 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{4k+4}} < 1 - \frac{2}{\sqrt{k^2 + 4k + 4}} = 1 - \frac{2}{k+2} = \frac{k}{k+2}.$$

$$\text{Suy ra: } U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k < \frac{k}{k+2}.$$

$$\text{Khi } k = 2010 \text{ thì } U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{2010} < \frac{1005}{1006} \text{ (đpcm)}$$

**Bài 39:** Tính tổng :  $S = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{5 \dots 55}_n$ .

**Bài giải**

Ta có

$$S = \frac{5}{9} \left( 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{9 \dots 99}_n \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \frac{5}{9} \left( \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right) = \frac{5(10^{n+1} - 10 - 9n)}{81}.$$

**Bài 41:** Cho dãy  $(x_n)$  :  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2 \alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$ . Đặt  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2x_i + 1}$ ,  
 $\forall n \geq 1$ .

Tìm  $\alpha$  để dãy số  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới.

**Bài giải**

Ta có :

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 2x_n \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{4x_n \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + 1} \Rightarrow \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{2\sin^2 \alpha}{3} + \frac{1}{3(2x_n + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x_n + 1} = \frac{1}{3^n} + \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2x_i + 1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} + \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{3^{i-1}}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \left[n - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right] \sin^2 \alpha$$

$\Rightarrow$

Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$  nên dãy  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi  $\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$ .

**Bài 44:** Cho dãy số  $(U_n)$  thỏa mãn điều kiện :  $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n(n+1) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Xác định công thức số hạng tổng quát  $U_n$  và tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n^3 + 1}$ .

**Bài giải**

Ta có :

$$U_1 = 3$$

$$U_2 = U_1 + 1 + 1^2$$

$$U_3 = U_2 + 2 + 2^2$$

...

$$U_n = U_{n-1} + (n-1) + (n-1)^2$$

$$\text{Do đó } U_n = 3 + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)$$

Bằng qui nạp chứng minh được rằng :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Suy ra

$$U_n = 3 + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n + 9}{3}$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 - n + 9}{3}}{n^3 + 1} = \frac{1}{3}$$

**Bài 45:** Cho dãy số  $(U_n)$  có 
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$$
 Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

**Bài giải**

Do  $U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}}$  nên  $U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{2^n}$  với  $\forall n \geq 1$ .

Khi đó

$$U_2^2 = U_1^2 + \frac{1}{2}$$

$$U_3^2 = U_2^2 + \frac{1}{2^2}$$

...

$$U_n^2 = U_{n-1}^2 + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Suy ra

$$U_n^2 = U_1^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)} = \sqrt{2}$ .