

VŨ HỮU BÌNH

9 CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

TRUNG HỌC CƠ SỞ

- Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6, 7, 8, 9
- Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên Toán



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

9 CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

TRUNG HỌC CƠ SỞ

- Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6, 7, 8, 9
- Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên Toán

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu _____

Cuốn sách **9 Chuyên đề Số học Trung học cơ sở** giúp các em học sinh các lớp 6, 7, 8, 9 thi học sinh giỏi và thi vào lớp 10 chuyên Toán.

Trong rất nhiều chuyên đề về Số học ở Trung học cơ sở, tác giả chọn lọc những chuyên đề thường gặp nhất trong các kì thi nói trên, hệ thống các phương pháp giải với các ví dụ minh họa và các bài luyện tập được phân chia theo từng dạng toán. Với các chuyên đề khác về Số học không được đề cập đến trong cuốn sách này, các em có thể tham khảo trong các cuốn sách **Nâng cao và phát triển Toán** các lớp 6, 7, 8, 9 ; **Phương trình nghiệm nguyên và kinh nghiệm giải** của cùng tác giả.

Các bài toán được chọn lọc trong cuốn sách này có những đặc điểm sau:

– **Là các bài toán mới**, chúng ít xuất hiện hoặc chưa xuất hiện trong các cuốn sách đã được xuất bản.

– **Có độ khó vừa đủ** phục vụ cho yêu cầu chọn học sinh giỏi và chọn học sinh vào lớp 10 chuyên Toán.

– **Có nhiều tình huống** đòi hỏi các em phải vận dụng kiến thức một cách thích hợp, sáng tạo để giải quyết.

– **Lời giải được chọn lọc** để vừa rõ ràng dễ hiểu, vừa ngắn gọn cô đọng.

Trong sách có những bài tập khó, nhưng cách giải các bài tập đó đều hợp lí với mạch tư duy sáng sủa, điều đó giúp các em rèn luyện phương pháp

và trau dồi tư duy. Với mỗi bài toán trong cuốn sách này, các em nên dành thời gian tìm hiểu vì sao đã giải được (hoặc không giải được) bài toán ấy, từ đó rút ra những kinh nghiệm về phương pháp giải quyết vấn đề, điều đó không chỉ có ích trong học Toán mà còn cần thiết trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Các bài toán trong cuốn sách này như những đỉnh cao trong học Toán. Các em hãy tập chinh phục những đỉnh cao ấy để sau này chinh phục được những đỉnh cao khác, cao hơn.

Cuốn sách cũng là một tài liệu thiết thực cho các thầy cô giáo bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán, các cán bộ chỉ đạo môn Toán và các bậc cha mẹ học sinh quan tâm đến việc bồi dưỡng năng lực toán học cho con em.

Tác giả cảm ơn bạn đọc đã sử dụng cuốn sách này và mong nhận được những góp ý của bạn đọc cho cuốn sách.

Tác giả mong muốn rằng

Chín chuyên đề Số học

Giúp tư duy trau dồi

Cung cấp cho bạn đọc

Thêm hành trang vào đời.

VŨ HỮU BÌNH

Chuyên đề 1

TÍNH CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Chia hết là một tính chất đặc trưng của tập hợp số nguyên.

Các bài toán về chia hết trong chuyên đề này bao gồm ba dạng chính:

- Dạng 1: Chứng minh sự chia hết cho một số.
- Dạng 2: Chứng minh sự không chia hết, bao gồm cả việc tìm số dư và tìm một hoặc nhiều chữ số tận cùng của một số.
- Dạng 3: Tìm điều kiện của một số để xảy ra quan hệ chia hết.

Với sự phong phú và đa dạng đó, các bài tập về chia hết thường hấp dẫn và có mặt trong các đề thi học sinh giỏi Toán.

Thử trí thông minh

TÌM ĐIỂM CỦA TỪNG NGƯỜI

Năm bạn Ánh, Bích, Cao, Dũng, Hoà chơi một trò chơi được số điểm xếp từ nhỏ đến lớn là 23, 25, 36, 37, 50.

Bạn hãy tính điểm của từng người, biết rằng:

- Tổng số điểm của Ánh, Bích, Cao gấp ba số điểm của Dũng; (1)
- Điểm của Bích là một số lẻ; (2)
- Ánh nhiều điểm hơn Cao. (3)



Giải

Do (1) nên tổng số điểm của bốn bạn Ánh, Bích, Cao, Dũng gấp bốn số điểm của Dũng nên là số chia hết cho 4.

Tổng số điểm của năm bạn là:

$$23 + 25 + 36 + 37 + 50 = 171, \text{ là số chia cho 4 dư 3.}$$

Suy ra số điểm của Hoà chia cho 4 dư 3, đó là 23.

Số điểm của Dũng là: $(171 - 23) : 4 = 37$.

Số điểm của Ánh, Bích, Cao thuộc tập hợp $\{25; 36; 50\}$.

Do (2) nên Bích được 25 điểm.

Do (3) nên Ánh được 50 điểm, Cao được 36 điểm.

Vậy Ánh được 50 điểm, Bích được 25 điểm, Cao được 36 điểm, Dũng được 37 điểm, Hoà được 23 điểm.

I. CHỨNG MINH SỰ CHIA HẾT

Cho hai số nguyên a và b , trong đó $b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số nguyên k sao cho $a = bk$.

Để chứng minh sự chia hết, cần nhớ các dấu hiệu chia hết (cho 2, 4, 8, 5, 25, 125, 3, 9, 11), các tính chất chia hết của tổng, hiệu, tích, nhất là các tính chất sau:

– Nếu tích ab chia hết cho m , trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m .

– Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố p thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho p .

– Nếu a chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau đôi một thì a chia hết cho tích của chúng.

– Nếu a, b là các số nguyên thì

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với n là số tự nhiên;

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên lẻ;

$(a + b)^n = ak + b^n$ với n là số tự nhiên, k là số nguyên.

Ví dụ 1. Cho $A = n^3 - 9n^2 + 2n$ (n là số nguyên). Chứng minh rằng A chia hết cho 6.

Giải

$$A = n^3 - 9n^2 + 2n = n^3 - 3n^2 + 2n - 6n^2.$$

$$\text{Xét } B = n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n - 1)(n - 2).$$

Trong ba số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 2, có một số chia hết cho 3. Do B chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 2 và 3 nên $B : 6$. Suy ra $A : 6$.

Lưu ý

Tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6. Tổng quát, tích của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n!.

Ví dụ 2. Cho $A = 1.2.3. \dots . 29$, $B = 30.31.32. \dots . 58$.

Chứng minh rằng $A + B$ chia hết cho 59.

Giải

$$\begin{aligned} B &= (59 - 29)(59 - 28)(59 - 27) \dots (59 - 1) \\ &= 59k - 1.2.3. \dots . 29 = 59k - A \text{ (k là số nguyên).} \end{aligned}$$

Vậy $A + B$ chia hết cho 59.

Ví dụ 3. Cho các số tự nhiên a và b thoả mãn $ab + 1$ chia hết cho 24. Chứng minh rằng $a + b$ cũng chia hết cho 24.

Giải

Ta có $ab + 1 : 24$ nên $ab + 1$ chia hết cho 3 và 8, suy ra ab chia cho 3 dư 2 và chia cho 8 dư 7.

Do ab chia cho 3 dư 2 nên trong a và b có một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2, do đó $a + b$ chia hết cho 3.

Do $ab + 1 : 24$ nên a và b là các số lẻ, do đó nếu a và b chia cho 8 dư r thì $r \in \{1; 3; 5; 7\}$. Do ab chia cho 8 dư 7 nên chỉ có hai trường hợp: một số chia cho 8 dư 1 và một số chia cho 8 dư 7 (khi đó $a + b : 8$), một số chia cho 8 dư 3 và một số chia cho 8 dư 5 (khi đó $a + b : 8$). Vậy $a + b$ chia hết cho 8.

Do $a + b$ chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $a + b$ chia hết cho 24.

II. CHỨNG MINH SỰ KHÔNG CHIA HẾT

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $n^2 + n - 16$ không chia hết cho 25 với mọi số nguyên n.

Giải

Cách 1. $A = n^2 + n - 16 = (n + 3)(n - 2) - 10.$

Ta thấy $n + 3$ và $n - 2$ có hiệu bằng 5 nên chúng cùng chia hết cho 5 hoặc cùng không chia hết cho 5.

Nếu $n + 3$ và $n - 2$ cùng chia hết cho 5 thì $(n + 3)(n - 2) \div 25$, do đó $(n + 3)(n - 2) - 10$ không chia hết cho 25, tức là A không chia hết cho 25.

Nếu $n + 3$ và $n - 2$ cùng không chia hết cho 5 thì $(n + 3)(n - 2)$ không chia hết cho 25, do đó A không chia hết cho 25.

Cách 2. Giả sử tồn tại số nguyên n mà

$$A = n^2 + n - 16 \div 25 \text{ thì } n^2 + n - 16 \div 5$$

$$\Rightarrow n^2 - 4n + 4 + 5(n - 4) \div 5 \Rightarrow (n - 2)^2 \div 5.$$

Do 5 là số nguyên tố nên $n - 2 \div 5$.

Đặt $n = 5k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $A = (5k + 2)^2 + (5k + 2) - 16 = 25k^2 + 25k - 10$, không chia hết cho 25, mâu thuẫn với điều giả sử trên.

Vậy A không chia hết cho 25 với mọi số nguyên n .

Cách 3. $A = n^2 + n - 16 \Rightarrow 4A = 4n^2 + 4n - 64 = (2n + 1)^2 - 65.$

Nếu $2n + 1 \div 5$ thì $4A$ không chia hết cho 25 $\Rightarrow A$ không chia hết cho 25.

Nếu $2n + 1$ không chia hết cho 5 thì $(2n + 1)^2$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow 4A$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow A$ không chia hết cho 25.

Cách 4. Lần lượt xét n bằng $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ rồi tính A. Bạn đọc tự giải.

III. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CHIA HẾT

Ví dụ 5. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2$ chia hết cho 10.

Giải

$$A = n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 2(2n^2 + 6n + 7).$$

$$A \div 10 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 7 \div 5 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 2 \div 5 \Leftrightarrow 2(n^2 + 3n + 1) \div 5$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 \div 5 \Leftrightarrow n(n + 3) \text{ tận cùng } 4 \text{ hoặc } 9 \Leftrightarrow n \text{ tận cùng } 1 \text{ hoặc } 6.$$

Đáp số: n tận cùng 1 hoặc 6.

Ví dụ 6. Tìm số nguyên n để $3n + 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.

Giải

$$3n + 1 : n^2 + n + 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3n^2 + n : n^2 + n + 1 \Rightarrow 3(n^2 + n + 1) - (2n + 3) : n^2 + n + 1$$

$$\Rightarrow 2n + 3 : n^2 + n + 1. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 3(2n + 3) - 2(3n + 1) : n^2 + n + 1 \Rightarrow 7 : n^2 + n + 1.$$

$$\text{Do } n^2 + n + 1 > 0 \text{ nên } n^2 + n + 1 \in \{1; 7\}.$$

Với $n^2 + n + 1 = 1$ thì $n^2 + n = 0$ nên $n \in \{0; -1\}$. Các giá trị này đều thoả mãn $3n + 1 : n^2 + n + 1$.

$$\text{Với } n^2 + n + 1 = 7 \text{ thì } n^2 + n - 6 = 0 \Leftrightarrow (n - 2)(n + 3) = 0 \Leftrightarrow n \in \{2; -3\}.$$

$$\text{Chỉ có } n = 2 \text{ thoả mãn } 3n + 1 : n^2 + n + 1.$$

$$\text{Đáp số: } n \in \{-1, 0, 2\}.$$

Ví dụ 7. Tìm số nguyên dương n để $(n + 3)(n + 4)$ chia hết cho $3n$.

Giải

$$(n + 3)(n + 4) : 3n \Rightarrow n^2 + 7n + 12 : 3n \Rightarrow n^2 + n + 12 : 3n$$

$$\Rightarrow n^2 + n + 12 \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } n.$$

$$n^2 + n + 12 : n \Rightarrow 12 : n \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}. \quad (1)$$

$$n^2 + n + 12 : 3 \Rightarrow n(n + 1) : 3 \Rightarrow n = 3k \text{ hoặc } n = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Loại các số có dạng $3k + 1$ ở (1) ta được

n	2	3	6	12
$3n$	6	9	18	36
$n^2 + n + 12$	18	24	54	168

Chỉ có các trường hợp $n = 2$ và $n = 6$ thì $n^2 + n + 12 : 3n$, do đó $(n + 3)(n + 4) : 3n$.

$$\text{Đáp số: } n = 2 \text{ và } n = 6.$$

Ví dụ 8. Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho $x + 3$ chia hết cho y và $y + 3$ chia hết cho x .

Giải

$$\text{Giả sử } 2 \leq x \leq y.$$

$$\text{a) Xét } y = 2 \text{ thì } x = 2, \text{ không thoả mãn } x + 3 : y.$$

b) Xét $y \geq 3$. Đặt $x + 3 = ky$ ($k \in \mathbb{N}$) (1)

thì $ky = x + 3 \leq y + 3 \leq y + y = 2y$ nên $k \leq 2$.

– Với $k = 1$, từ (1) có $x + 3 = y$. Thay vào $y + 3 \vdots x$ được $x + 6 \vdots x$ nên $6 \vdots x$, lại có $x > 1$ nên $x \in \{2; 3; 6\}$.

x	2	3	6
y	5	6	9

– Với $k = 2$, từ (1) có $x + 3 = 2y$. Từ $y + 3 \vdots x$ suy ra $2y + 6 \vdots x \Rightarrow x + 9 \vdots x \Rightarrow 9 \vdots x$. Do $x > 1$ nên $x \in \{3; 9\}$.

Khi $x = 3$ thì $y = 3$, thử lại đúng.

Khi $x = 9$ thì $y = 6$, loại vì trái với $x \leq y$.

Đáp số: Các cặp số (x, y) phải tìm là $(2; 5)$, $(5; 2)$, $(3; 6)$, $(6; 3)$, $(6; 9)$, $(9; 6)$, $(3; 3)$.

Ví dụ 9. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $A = n^3 + 7n^2 + 6n$ chia hết cho 125.

Giải

$$A = n^3 + 7n^2 + 6n = n(n^2 + 7n + 6) = n(n + 1)(n + 6).$$

Với $n = 5k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n, n + 1, n + 6$ chia cho 5 dư 0, 1, 1. Để $A \vdots 125$ thì $n \vdots 125$. Chọn n nhỏ nhất là 125. (1)

Với $n = 5k + 1$ thì $n, n + 1, n + 6$ chia cho 5 dư 1, 2, 2. Khi đó A không chia hết cho 5.

Với $n = 5k + 2$ thì $n, n + 1, n + 6$ chia cho 5 dư 2, 3, 3. Khi đó A không chia hết cho 5.

Với $n = 5k + 3$ thì $n, n + 1, n + 6$ chia cho 5 dư 3, 4, 4. Khi đó A không chia hết cho 5.

Với $n = 5k + 4$ thì $n, n + 1, n + 6$ chia cho 5 dư 4, 0, 0. Để $A \vdots 125$ thì $n + 1 \vdots 25$ hoặc $n + 6 \vdots 25$.

Trường hợp $n + 1 \vdots 25$, chọn n nhỏ nhất là 24. (2)

Trường hợp $n + 6 \vdots 25$, chọn n nhỏ nhất là 19. (3)

So sánh (1), (2), (3), ta chọn $n = 19$. Khi đó $A = 19 \cdot 20 \cdot 25$, chia hết cho 125.

Ví dụ 10. Tìm năm chữ số tận cùng của 5^{55} .

Giải

Tìm năm chữ số tận cùng của 5^{55} là tìm số dư của phép chia 5^{55} cho 10^5 .

Ta có $5^{55} = 5^{55} - 5^7 + 5^7 = 5^7(5^{48} - 1) + 5^7$.

Xét $5^{48} - 1 = (5^{24} + 1)(5^{12} + 1)(5^6 + 1)(5^3 + 1)(5^3 - 1)$, chia hết cho 25. Suy ra $5^7(5^{48} - 1)$ chia hết cho 10^5 .

Còn $5^7 = 78125$.

Vậy 5^{55} có năm chữ số tận cùng là 78125.

BÀI TẬP

1. Cho các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dùng ba trong các chữ số trên, lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho 3?
2. Chứng minh rằng $n^5 + 5n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 6n$ chia hết cho 120 với mọi số nguyên n .
3. Chứng minh rằng $n^2 + 3n - 3$ không chia hết cho 49 với mọi số nguyên n .
4. Tìm các số tự nhiên x và y lớn hơn 1 sao cho $4x + 1$ chia hết cho y và $4y + 1$ chia hết cho x .
5. Tìm chữ số tận cùng của:
a) $A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + 100^5$;
b) $B = 1^5 + 2^9 + 3^{13} + 4^{17} + \dots + 100^{401}$.
6. Tìm hai chữ số tận cùng của :
a) $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99}$;
b) n^{20} với n là một số tự nhiên tận cùng bằng 2.
7. Tìm 20 chữ số tận cùng của $90!$
8. Cho dãy số 10, 11, 12, 13, ..., 100.

Sau khi thay mỗi số của dãy trên bởi tổng các chữ số của nó cho đến khi được một số có một chữ số, ta được một dãy chỉ gồm các số có một chữ số. Chữ số nào xuất hiện nhiều nhất trong dãy đó?

Chuyên đề 2

SỐ NGUYÊN TỐ – HỢP SỐ

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Số nguyên tố – Hợp số là một nội dung có liên quan chặt chẽ đến tính chia hết.

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, có đúng hai ước nguyên dương (là 1 và chính nó).

Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có từ ba ước nguyên dương trở lên.

Các bài toán về số nguyên tố, hợp số cũng rất đa dạng, thường đòi hỏi vận dụng tính chia hết một cách thành thạo và hợp lý trong từng tình huống của bài toán.

Các bài toán về số nguyên tố, hợp số trong chuyên đề này bao gồm:

Bài toán về số nguyên tố:

- Chứng minh một biểu thức có giá trị là một số nguyên tố.
- Tìm các số nguyên tố thỏa mãn các điều kiện cho trước.
- Tìm các số nguyên dương để giá trị của một biểu thức là số nguyên tố.

Bài toán về hợp số:

- Chứng minh một biểu thức có giá trị là một hợp số.
- Viết một số cho trước thành tổng của nhiều hợp số nhất.
- Xác định số lượng hợp số trong một dãy số.

Số nguyên tố, hợp số là một đề tài lôi cuốn nhiều nhà toán học từ nhiều thế kỉ trước Công nguyên.

Vài nét lịch sử

Ơ-LE VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

Ơ-le (*Léonard Euler*, 1707 – 1783) là nhà toán học lỗi lạc, người Thụy Sĩ, nhưng cuộc đời ông (và cả con cháu ông) gắn bó với nước Nga.

Ông đã nghiên cứu từ những kiến thức rất sơ cấp (chẳng hạn đường tròn Ơ-le) đến những khái niệm cao siêu của những tiến bộ khoa học ở thời đại ông.

Ông nghiên cứu về cơ học, lí luận âm nhạc, lí thuyết về bản đồ địa lí, khoa học hàng hải. Ông đã đặt cơ sở cho rất nhiều ngành Toán lí thuyết.

Chúng ta kể ra ở đây một số bài toán về số nguyên tố liên quan đến Ô-le:

1. Ô-le đưa ra ví dụ một biểu thức cho giá trị là số nguyên tố với 40 giá trị liên tiếp của n từ 0 đến 39, đó là biểu thức $n^2 + n + 41$.
2. Nhà toán học Pháp *Phéc-ma* xét biểu thức $2^{2^n} + 1$ với n bằng 0, 1, 2, 3, 4 cho các số nguyên tố $2 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$, $2^4 + 1 = 17$, $2^8 + 1 = 257$, $2^{16} + 1 = 65537$.

Ông đưa ra giả thuyết $2^{2^n} + 1$ cho số nguyên tố với mọi số tự nhiên n .

Ý kiến này đứng vững rất lâu. Một thế kỉ sau, Ô-le đã bác bỏ giả thuyết trên bằng cách chỉ ra số $2^{32} + 1$ chia hết cho 641.

3. Năm 1742, nhà toán học Đức *Gôn-bách* viết thư cho Ô-le nói rằng ông đã “mạo hiểm” đưa ra dự đoán: Mọi số tự nhiên lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố (chẳng hạn $6 = 2 + 2 + 2$, $7 = 2 + 2 + 3$, $8 = 2 + 3 + 3$).

Trong thư trả lời, Ô-le đưa ra bài toán: Mọi số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố (chẳng hạn $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$).

Cho đến nay, người ta vẫn chưa chứng minh được hai bài toán trên.

Ví dụ 11. Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{n^3 - 1}{9}$ là số nguyên tố.

Giải

$n^3 - 1 : 9 \Rightarrow n^3 - 1 : 3 \Rightarrow n$ chia cho 3 dư 1 (vì nếu n chia cho 3 dư 0 hoặc 2 thì n^3 chia cho 3 dư 0 hoặc 2). Đặt $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có



Ô-le

$$\frac{n^3 - 1}{9} = \frac{(3k+1)^3 - 1}{9} = \frac{27k^3 + 27k^2 + 9k}{9} = 3k^3 + 3k^2 + k = k(3k^2 + 3k + 1).$$

Để $\frac{n^3 - 1}{9}$ là số nguyên tố, phải có $k = 1$. Khi đó $n = 4$ và $\frac{n^3 - 1}{9} = \frac{64 - 1}{9} = 7$,
là số nguyên tố.

Đáp số: $n = 4$.

Ví dụ 12. Tìm số nguyên tố p sao cho $43p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Giải

Đặt $43p + 1 = n^3$ ($n \in \mathbb{N}$) thì $43p = (n - 1)(n^2 + n + 1)$.

Số $43p$ có bốn ước nguyên dương là 1, 43, p , $43p$ nên có ba trường hợp:

- a) $\begin{cases} n - 1 = 1 \\ n^2 + n + 1 = 43p \end{cases}$ Khi đó $n = 2$ và $43p = 2^2 + 2 + 1 = 7$, loại.
- b) $\begin{cases} n - 1 = 43 \\ n^2 + n + 1 = p \end{cases}$ Khi đó $n = 44$ và $p = 44^2 + 44 + 1 = 1981 \div 7$, loại.
- c) $\begin{cases} n^2 + n + 1 = 43 \\ n - 1 = p \end{cases}$ Khi đó $n(n + 1) = 42 \Rightarrow n = 6, p = 5$ (là số nguyên tố).

Đáp số: $p = 5$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $p - 4$ không thể là lũy thừa bậc bốn của một số tự nhiên.

Giải

Giả sử $p - 4 = a^4$ ($a \in \mathbb{N}, a > 1$) thì

$$\begin{aligned} p &= a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 \\ &= (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2) = [(a - 1)^2 + 1][(a + 1)^2 + 1]. \end{aligned}$$

p là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên không là số nguyên tố.

Vậy $p - 4$ không thể là lũy thừa bậc bốn của một số tự nhiên.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng trong 30 số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 5, có ít nhất 22 hợp số.

Giải

Trong 30 số tự nhiên liên tiếp đã cho, có 15 số chẵn, chúng đều lớn hơn 5 nên là hợp số. Ta tìm được 15 hợp số.

Chia 15 số lẻ còn lại thành 5 nhóm, mỗi nhóm gồm ba số lẻ liên tiếp. Trong ba số lẻ liên tiếp, tồn tại một số chia hết cho 3, số đó lớn hơn 5 nên là hợp số. Có 5 nhóm nên ta tìm thêm được 5 hợp số.

Trong 30 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số chia cho 30 dư 5, một số chia cho 30 dư 25, giả sử $a = 30m + 5$ và $b = 30n + 25$. Các số a và b là hợp số (vì chia hết cho 5 và lớn hơn 5), đồng thời không trùng với các hợp số đã tìm được (vì a và b không chia hết cho 2, không chia hết cho 3). Ta tìm thêm được 2 hợp số.

Vậy có ít nhất $15 + 5 + 2 = 22$ (hợp số).

Ví dụ 15. Viết số 127 thành một tổng của n số hạng, các số hạng đều là hợp số. Tìm giá trị lớn nhất của n .

Giải

Để n lớn nhất thì giá trị của các hợp số được viết phải nhỏ nhất. Các hợp số chẵn nhỏ nhất là 4 và 6. Hợp số lẻ nhỏ nhất là 9.

Ta thấy 127 chia cho 4 dư 3. Phải có ít nhất một hợp số lẻ (là 9), còn $127 - 9 = 118$, chia cho 4 dư 2. Phải có ít nhất một hợp số 6, còn $118 - 6 = 112$, chia hết cho 4, ta viết thành tổng của 28 số 4.

Vậy $117 = 9 + 6 + 4 + 4 + \dots + 4$ (28 số 4).

Giá trị lớn nhất của n là 30.

BÀI TẬP

9. Chứng minh rằng:

- Nếu p và $p^2 + 8$ là các số nguyên tố thì $p^2 + 2$ là số nguyên tố.
 - Nếu p và $8p^2 + 1$ là các số nguyên tố thì $2p + 1$ là số nguyên tố.
 - Nếu p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $p^3 + 2$ là số nguyên tố.
- Tìm số nguyên tố p sao cho $7p + 1$ là bình phương của một số tự nhiên.
 - Tìm số nguyên tố p sao cho $7p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.
 - Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.
 - Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 23$ có đúng sáu ước nguyên dương.
 - a) Chứng minh rằng trong 10 số lẻ liên tiếp lớn hơn 5, tồn tại bốn hợp số.
b) Hãy chỉ ra 10 số lẻ liên tiếp lớn hơn 5, trong đó có đúng bốn hợp số.

Chuyên đề 3

SỐ TỰ NHIÊN VÀ CÁC CHỮ SỐ

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Số tự nhiên và các chữ số của nó là một dạng toán số học thường gặp, trong đó yêu cầu của bài toán thường là tìm các chữ số chưa biết.

Ngoài trường hợp có thể tìm lần lượt từng chữ số, ta thường gộp các nhóm chữ số lại thành một biến mới rồi tìm giá trị của các biến đó.

Để tìm các giá trị ấy, ta thường chú ý đến:

- Sử dụng tính chia hết: Xét xem các biến (hoặc các biểu thức chứa biến) chia hết cho số nào, hoặc là ước của số nào.

- Sử dụng bất đẳng thức: Xét xem các biến (hoặc các biểu thức chứa biến) bị chặn trong khoảng nào.

- Sử dụng phương trình: Xét xem các biến liên hệ với nhau bởi phương trình nào.

Tất cả các công việc trên đòi hỏi người làm toán phải biết quan sát, phát hiện đặc điểm của bài toán để đưa ra phương án giải quyết hợp lý.

Thử trí thông minh

BÀI TOÁN ĐIỀN CHỮ SỐ

Chi đố Hoàng tìm các chữ số trong phép cộng sau:

$$\begin{array}{r} a b c d 0 \\ + \quad a b c d \\ \hline \end{array}$$

4 7 9 1 h

Hoàng nói:

- Sẽ phải xét mười trường hợp d từ 0 đến 9.



– Không cần! Bạn hãy chú ý đến quan hệ giữa hai số hạng.

Hoàng đã tìm ra cách giải mà không cần tìm từng chữ số. Hoàng đã giải thế nào?

Giải

Số hạng thứ nhất gấp 10 lần số hạng thứ hai nên tổng gấp 11 lần số hạng thứ hai.

$$\overline{4791h} : 11 \Rightarrow 47910 + h : 11 \Rightarrow 11.4355 + (5 + h) : 11 \Rightarrow h = 6.$$

Số hạng thứ hai là: $47916 : 11 = 4356$.

$$\begin{array}{r} \text{Ta có} \quad 43560 \\ + \quad 4356 \\ \hline 47916 \end{array}$$

Ví dụ 16. Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ chia hết cho tích của $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$ (các chữ số a, b, c, d không bắt buộc khác nhau).

Giải

$$\overline{abcd} : \overline{ab} \cdot \overline{cd}.$$

Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cd} = y$, ta có $\overline{abcd} = 100x + y : xy \Rightarrow y : x$.

Đặt $y = kx$ với $k \in \mathbb{N}$ và $1 \leq k \leq 9$ thì $100x + kx : xkx$

$$\Rightarrow 100 + k : kx (1) \Rightarrow 100 : k \Rightarrow k \in \{1; 2; 4; 5\}.$$

Với $k = 1$ thì từ (1) có $101 : x \Rightarrow x = 1$, loại.

Với $k = 2$ thì từ (1) có $102 : 2x \Rightarrow 51 : x$. Ta có

x	17	51
y	34	102, loại

Với $k = 4$ thì từ (1) có $104 : 4x \Rightarrow 26 : x$. Ta có

x	26	13
y	104, loại	52

Với $k = 5$ thì từ (1) có $105 : 5x \Rightarrow 21 : x \Rightarrow x = 21$, $y = 105$, loại.

Có hai đáp số: $1734 : 17.34$ và $1352 : 13.52$.

Ví dụ 17. Tìm các chữ số a, b, c (không bắt buộc khác nhau) sao cho $\overline{aaaa} - \overline{bb} = \overline{cc}^2$.

Giải

$$\begin{aligned}\overline{aaaa} - \overline{bb} &= \overline{cc}^2 \Rightarrow 1111a - 11b = 11^2 \cdot c^2 \\ \Rightarrow 101a - b &= 11c^2 \Rightarrow 99a + (2a - b) = 11c^2.\end{aligned}\quad (1)$$

Ta có $2a - b \div 11$ nên $2a - b \in \{0; 11\}$.

a) Xét $2a - b = 0$ thì $a \leq 4$. Thay vào (1) có $9a = c^2 \Rightarrow a \in \{1; 4\}$.

Ta có $1111 - 22 = 33^2$

$$4444 - 88 = 66^2.$$

b) Xét $2a - b = 11$. Thay vào (1) có $9a + 1 = c^2 \Rightarrow 9a = (c + 1)(c - 1)$.

Ta thấy $c + 1$ và $c - 1$ có hiệu bằng 2 mà tích chia hết cho 9 nên phải có một số chia hết cho 9, đó là số $c + 1$. Ta được $c + 1 = 9$ nên $c = 8$. Từ đó $a = 7$.

Khi đó $7777 - 33 = 88^2$.

Đáp số: $1111 - 22 = 33^2$; $4444 - 88 = 66^2$; $7777 - 33 = 88^2$.

Ví dụ 18. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng bình phương của nó cũng tận cùng bởi ba chữ số ấy theo thứ tự đó.

Giải

Đặt $\overline{abcdeg} = \overline{deg}^2 = n^2$ ($1 \leq n \leq 999$).

Ta có $1000 \cdot \overline{abc} + n = n^2$ nên $n^2 - n \div 1000 \Rightarrow n(n - 1) \div 1000$.

Hai số n và $n - 1$ nguyên tố cùng nhau nhỏ hơn 1000, có tích chia hết cho 1000 nên có hai trường hợp.

$$a) \begin{cases} n \div 125 \\ n - 1 \div 8 \end{cases}$$

n là số lẻ có ba chữ số và chia hết cho 125 nên $n \in \{125; 375; 625; 875\}$. Chỉ có $n = 625$ cho $n - 1 = 624 \div 8$.

Ta được $625^2 = 390625$.

$$b) \begin{cases} n-1 \vdots 125 \\ n \vdots 8 \end{cases}$$

$n-1$ là số lẻ có ba chữ số và chia hết cho 125 nên $n-1 \in \{125; 375; 625; 875\}$. Chỉ có $n-1 = 375$ cho $n = 376 \vdots 8$.

Ta được $376^2 = 141376$.

Đáp số: 625 và 376.

Ví dụ 19. Tìm số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng nó bằng bình phương của tổng hai số tạo bởi ba chữ số đầu và tạo bởi ba chữ số cuối (không thay đổi thứ tự).

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcdeg}$, ta có $\overline{abcdeg} = (\overline{abc} + \overline{deg})^2$.

Đặt $\overline{abc} = x$, $\overline{deg} = y$. Do $(x+y)^2$ là một số có sáu chữ số nên $x+y \leq 999$.
Ta có

$$1000x + y = (x+y)^2 \Leftrightarrow 999x + (x+y) = (x+y)^2.$$

$$\text{Đặt } x+y = n \text{ thì } 999x = n(n-1). \quad (1)$$

$n(n-1) \vdots 999$. Do $n \leq 999$ nên ta xét hai trường hợp.

a) $n = 999$. Thay vào (1) được $x = 998$, do đó $y = 1$.

$$\text{Ta được } 998001 = (998 + 1)^2.$$

b) $n < 999 = 3^3 \cdot 37$. Hai số n và $n-1$ nguyên tố cùng nhau có tích chia hết cho 999 nên có hai trường hợp:

$$\begin{cases} n \vdots 37 \\ n-1 \vdots 27 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} n-1 \vdots 37 \\ n \vdots 27 \end{cases}$$

Ở trường hợp đầu, ta đặt $n = 37k$ (do $n < 999$ nên $k < 27$). Ta có $37k-1 \vdots 27 \Rightarrow 10k-1 \vdots 27 \Rightarrow 80k-8 \vdots 27 \Rightarrow 81k-(k+8) \vdots 27 \Rightarrow k+8 \vdots 27$.

Do $k < 27$ nên $k = 19$. Khi đó $n = 37 \cdot 19 = 703$. Thay vào (1) được $x = 494$, do đó $y = 703 - 494 = 209$. Ta được $494209 = (494 + 209)^2$.

Ở trường hợp sau, ta đặt $n = 37m + 1$ (do $n < 999$ nên $m < 27$).

$$\text{Ta có } 37m + 1 \div 27 \Rightarrow 10m + 1 \div 27 \Rightarrow 80m + 8 \div 27$$

$$\Rightarrow 81m - (m - 8) \div 27 \Rightarrow m - 8 \div 27, \text{ loại vì } m < 27.$$

Có hai đáp số: 998001 và 494209.

Lưu ý:

Cách đặt $n = 37k$ rồi xét $37k - 1 \div 27$ như ở lời giải trên có ưu điểm hơn so với cách đặt $n = 27k + 1$ rồi xét $27k + 1 \div 37$.

Cũng vậy, cách đặt $n = 37m + 1$ rồi xét $37m + 1 \div 27$ như ở lời giải trên có ưu điểm hơn so với cách đặt $n = 27m$ rồi xét $27m - 1 \div 37$.

Ví dụ 20. Tìm số tự nhiên $\overline{abc}$ (các chữ số a, b, c không bắt buộc khác nhau) sao cho $\overline{abc} = \overline{ab}^2 - c^2$.

Giải

Cách 1. Đặt $\overline{ab} = x$ ($10 \leq x \leq 99$). Ta có

$$10x + c = x^2 - c^2 \Leftrightarrow c(c + 1) = x(x - 10).$$

$$\text{Do } c \leq 9 \text{ nên } c(c + 1) \leq 90 \Rightarrow x(x - 10) \leq 90 \Rightarrow x \leq 15.$$

Xét $\overline{ab}$ từ 10 đến 15, ta thấy:

$\overline{ab}$	$\overline{ab}(\overline{ab} - 10)$	$c(c + 1)$	$\overline{abc} = \overline{ab}^2 - c^2$
10	10 . 0	0 = 0 . 1	100 = 10 ² - 0 ²
11	11 . 1	11, loại	
12	12 . 2	24, loại	
13	13 . 3	39, loại	
14	14 . 4	56 = 7.8	147 = 14 ² - 7 ²
15	15 . 5	75, loại	

Có hai đáp số: 100 và 147.

Cách 2. Đặt $\overline{ab} = x$. Ta có

$$10x + c = x^2 - c^2 \Leftrightarrow 40x + 4c = 4x^2 - 4c^2$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 + 4c = 4x^2 - 40x \Leftrightarrow (2c + 1)^2 + 99 = (2x - 10)^2$$

$$\Leftrightarrow (2x - 10)^2 - (2c + 1)^2 = 99$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2c - 9)(2x - 2c - 11) = 99.$$

Do $2x - 2c - 11 < 2x + 2c - 9$ nên có các trường hợp:

$2x + 2c - 9$	99	33	11
$2x - 2c - 11$	1	3	9
$x + c$	54	21	10
$x - c$	6	7	10
x	30	14	10
c	24, loại	7	0

Có hai đáp số: 147 và 100.

BÀI TẬP

15. Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = \overline{acdb}$ (các chữ số a, b, c, d không bắt buộc khác nhau).
16. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.
17. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, biết rằng nó bằng lập phương của số tạo bởi hai chữ số đầu (không thay đổi thứ tự).
18. Tìm số tự nhiên $\overline{abcdeg}$ chia hết cho tích của $\overline{abc}$ và $\overline{deg}$ (các chữ số a, b, c, d, e, g không bắt buộc khác nhau).
19. Cho năm số tự nhiên a, b, c, d, e, mỗi số có bốn chữ số và đều gồm cả bốn chữ số 1, 2, 3, 4. Chứng minh rằng không thể xảy ra $a^3 + b^3 + c^3 = d^3 + e^3$.

Chuyên đề 4

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.

Các bài toán về số chính phương trong chuyên đề này có các dạng chính sau:

- Dạng 1. Chứng minh giá trị của một biểu thức là (hoặc không là) số chính phương.
- Dạng 2. Chứng minh một số (hoặc một biểu thức) viết được hoặc không viết được dưới dạng tổng các số chính phương.
- Dạng 3. Tìm giá trị của biến để biểu thức là số chính phương.
- Dạng 4. Tìm số chính phương thỏa mãn các điều kiện cho trước.

Các bài toán về số chính phương gắn liền với:

a) Tính chia hết, chẳng hạn:

- Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
- Số chính phương chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1.
- Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4. Số chính phương lẻ chia cho 4 thì dư 1 (chia cho 8 cũng dư 1).
- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2 .

b) Bất đẳng thức, chẳng hạn

Không có số chính phương nào nằm giữa các số tự nhiên n^2 và $n^2 + 2n$.

c) Giải phương trình

Thử trí thông minh

CÓ BAO NHIÊU HÌNH VUÔNG ?

An đố Bảo tìm số hình vuông trên hình vuông 4×4 (h.1).

Bảo nói:

– Dễ quá! Có $4 \times 4 = 16$ hình vuông.

– Chưa đúng! Đó mới là các hình vuông cạnh 1. Còn có các hình vuông cạnh 2, cạnh 3, cạnh 4 nữa!

– À! Đúng, để tớ nghĩ thêm.

Bảo đã tìm ra đáp số là tổng của bốn số chính phương đầu tiên, kể từ 1, đó là:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Bạn có đồng ý với Bảo không?

Giải

Trên dòng nằm ngang (h.2):

– Có 1 cách chọn đoạn thẳng có độ dài 4 (là AE) ;

– Có 2 cách chọn đoạn thẳng có độ dài 3 (là AD, BE) ;

– Có 3 cách chọn đoạn thẳng có độ dài 2 (là AC, BD, CE) ;

– Có 4 cách chọn đoạn thẳng có độ dài 1 (là AB, BC, CD, DE).

Trên cột thẳng đứng cũng vậy.

Do đó số hình vuông có tất cả là : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$.

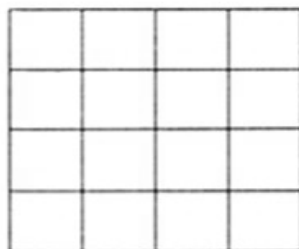
Lưu ý. Cho hình vuông $n \times n$. Số hình vuông có tất cả là $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ (hình).

Có thể chứng minh được $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

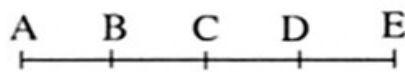
Ví dụ 21. Xét các biểu thức:

$$a_1 = 1^2 + 2^2 + 2^2$$

$$a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2$$



Hình 1



Hình 2

$$a_3 = 3^2 + 4^2 + 12^2$$

$$a_4 = 4^2 + 5^2 + 20^2.$$

a) Hãy kiểm tra a_1, a_2, a_3, a_4 là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng a_n là số chính phương.

Giải

$$a) a_1 = 3^2, \quad a_2 = 7^2, \quad a_3 = 13^2, \quad a_4 = 21^2.$$

$$\begin{aligned} b) a_n &= n^2 + (n+1)^2 + [n(n+1)]^2 \\ &= n^2 + (n+1)^2 + n^2(n^2 + 2n + 1) \\ &= n^2 + (n+1)^2 + n^4 + 2n^3 + n^2 \\ &= n^4 + (n+1)^2 + 2n^2(n+1) = (n^2 + n + 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy a_n là số chính phương.

Ví dụ 22

a) Chứng minh rằng một số tự nhiên lẻ bất kì luôn viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương liên tiếp.

b) Áp dụng nhận xét trên, hãy viết các số 21 và 23 dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Giải

a) Gọi $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) là một số lẻ bất kì.

$$\text{Ta có } 2n+1 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = (n+1)^2 - n^2.$$

Vậy một số tự nhiên lẻ bất kì luôn viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương liên tiếp.

$$b) 21 = 11^2 - 10^2; \quad 23 = 12^2 - 11^2.$$

Lưu ý. Số 21 còn viết được dưới dạng $5^2 - 2^2$.

Ví dụ 23

a) Cho số nguyên dương lẻ a . Tìm số nguyên dương b sao cho $a^2 + b^2 = (b+1)^2$.

b) Áp dụng kết quả ở câu a, hãy chứng minh rằng tồn tại bốn số nguyên dương a, b, c, d sao cho các tổng $a^2 + b^2, a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ đều là các số chính phương.

Giải

a) $a^2 + b^2 = (b + 1)^2$.

nên $a^2 = (b + 1)^2 - b^2 = 2b + 1$. Suy ra $b = \frac{a^2 - 1}{2}$.

b) Chọn $a = 3$ thì $b = \frac{3^2 - 1}{2} = 4$. Từ (1) có $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Chọn $a = 5$ thì $b = \frac{5^2 - 1}{2} = 12$. Từ (1) có $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Chọn $a = 13$ thì $b = \frac{13^2 - 1}{2} = 84$. Từ (1) có $13^2 + 84^2 = 85^2$.

Các tổng $3^2 + 4^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2$ đều là các số chính phương.

Ví dụ 24. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n + 1$, $2n + 1$, $5n + 1$ đều là các số chính phương.

Giải

Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n + 1 = 3k + 2$, không là số chính phương. Nếu $n = 3k + 2$ thì $2n + 1 = 6k + 5$, chia cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n \vdots 3$.

$2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n + 1$ lẻ. Do $n + 1$ là số chính phương lẻ nên $n + 1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \vdots 8$.

n chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $n \vdots 24$. Với $n = 24$ thì $n + 1 = 25 = 5^2$, $2n + 1 = 49 = 7^2$, $5n + 1 = 121 = 11^2$.

Giá trị nhỏ nhất của n phải tìm là 24.

Ví dụ 25. Tìm số chính phương có năm chữ số, trong đó chỉ có một chữ số 5, chỉ có một chữ số 7, còn lại ba chữ số kia giống nhau.

Giải

Gọi ba chữ số còn lại là a ($a \neq 5$, $a \neq 7$).

Gọi n^2 là số chính phương phải tìm. Tổng các chữ số của n^2 bằng $12 + 3a \vdots 3$ nên $n^2 \vdots 3$, do đó $n^2 \vdots 9$ (vì n^2 là số chính phương).

Ta có $12 + 3a : 9 \Rightarrow 3(a + 1) : 9 \Rightarrow a + 1 : 3$.

$\Rightarrow a \in \{2; 8\}$ (chú ý rằng $a \neq 5$).

Xét $a = 2$. Các chữ số của n^2 là 5, 7, 2, 2, 2.

Do n^2 không tận cùng bằng 2, bằng 7, nên phải tận cùng bằng 5, do đó tận cùng 25. Thử với các số 72225, 27225, 22725, chỉ có $27225 = 165^2$ là số chính phương.

Xét $a = 8$. Các chữ số của n^2 là 5, 7, 8, 8, 8. Do n^2 không tận cùng bằng 7, bằng 8, nên phải tận cùng bằng 5, do đó tận cùng 25, không có số nào.

Đáp số: 27225.

Ví dụ 26. Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng cộng chữ số hàng nghìn với 3, trừ chữ số hàng đơn vị đi 3, ta vẫn được một số chính phương.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd} = x^2$.

Cộng chữ số hàng nghìn với 3, trừ chữ số hàng đơn vị đi 3, ta được số y^2 .
Ta có

$$y^2 - x^2 = 3000 - 3 = 2997 = 3^4 \cdot 37$$

nên $(y - x)(y + x) : 37$. Tồn tại một thừa số chia hết cho số nguyên tố 37.
Xét hai trường hợp:

a) $y - x : 37$. Do $y - x < y + x < 198$ nên chỉ có

$$\begin{cases} y - x = 37 \\ y + x = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 59 \end{cases}$$

Khi đó $x^2 = 22^2 = 484$, chỉ có ba chữ số, loại.

b) $y + x : 37$. Do $y - x < y + x < 198$ nên chỉ có

$$\begin{cases} y + x = 111 \\ y - x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 69 \end{cases}$$

Khi đó $x^2 = 42^2 = 1764$

$$y^2 = 69^2 = 4761, \text{ thoả mãn.}$$

Đáp số: 1764.

Ví dụ 27. Tìm số chính phương có bốn chữ số, chữ số hàng đơn vị khác 0, biết rằng số tạo bởi hai chữ số đầu (không đổi thứ tự) và số tạo bởi hai chữ số cuối (không đổi thứ tự) đều là các số chính phương.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd} = n^2$.

Đặt $\overline{ab} = x^2$ ($4 \leq x \leq 9$). Đặt $\overline{cd} = y^2$, do $d \neq 0$ nên $1 \leq y \leq 9$.

Ta có $n^2 = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100x^2 + y^2 > 100x^2$

$\Rightarrow n > 10x \Rightarrow n \geq 10x + 1$.

Do $x \geq 4$ nên $n \geq 41$. (1)

Do $n \geq 10x + 1$ nên $y^2 = n^2 - 100x^2 \geq (10x + 1)^2 - 100x^2 = 20x + 1$.

Kết hợp với $y \leq 9$ ta có $20x + 1 \leq 81 \Rightarrow x \leq 4$.

Ta lại có $x \geq 4$ nên $x = 4$. Do $y \leq 9$

nên $n^2 = 100x^2 + y^2 \leq 100 \cdot 4^2 + 9^2 = 1681 = 41^2 \Rightarrow n \leq 41$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n = 41$. Khi đó $n^2 = 1681$.

Ví dụ 28. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ sao cho các số $\overline{bcd}$ và $\overline{cd}$ cũng là các số chính phương (các chữ số a, b, c, d khác 0 và không bắt buộc khác nhau).

Giải

Trước hết ta tìm $\overline{cd}$. Đặt $\overline{bcd} = x^2$ ($1 \leq x \leq 31$), $\overline{cd} = y^2$ ($1 \leq y \leq 9$).

Ta có $x^2 - y^2 = \overline{bcd} - \overline{cd} = 100b \Rightarrow (x+y)(x-y) : 100$.

Các thừa số $x+y$ và $x-y$ cùng tính chẵn lẻ (vì hiệu của chúng chia hết cho 2), lại có tích là số chẵn nên chúng cùng chẵn. (1)

Các thừa số $x+y$ và $x-y$ có tích chia hết cho 100 nên phải có một thừa số chia hết cho 5. Không thể chỉ có một thừa số chia hết cho 5, vì nếu chỉ có một thừa số chia hết cho 5 thì thừa số đó phải chia hết cho 25, thừa số đó lại chẵn nên chia hết cho 50, trái với $1 \leq x-y < x+y \leq 40$. Vậy $x+y$ và $x-y$ cùng chia hết cho 5. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x+y$ và $x-y$ cùng chia hết cho 10 $\Rightarrow (x+y) - (x-y) : 10 \Rightarrow 2y : 10 \Rightarrow y : 5$.

Do $1 \leq y \leq 9$ nên $y = 5$, do đó $\overline{cd} = y^2 = 25$.

Bây giờ ta tìm $\overline{ab}$. Do $\overline{ab25}$ là số chính phương nên $\overline{ab25} = (10n + 5)^2$ với $3 \leq n \leq 9$.

Suy ra $100 \cdot \overline{ab} + 25 = 100n^2 + 100n + 25$ nên $\overline{ab} = n(n+1)$.

Do $b \neq 0$ nên $\overline{ab}$ bằng 3.4, 6.7, 7.8, 8.9 tức là $\overline{ab} \in \{12; 42; 56; 72\}$.

Có bốn số thỏa mãn bài toán là 1225, 4225, 5625, 7225.

Ví dụ 29

a) Có bảy số chính phương liên tiếp, trong đó tổng của bốn số chính phương đầu bằng tổng của ba số chính phương cuối. Tìm số chính phương đứng giữa.

b) Có $2k + 1$ số chính phương liên tiếp ($k \in \mathbb{N}^*$), trong đó tổng của $k + 1$ số chính phương đầu bằng tổng của k số chính phương cuối. Tìm số chính phương đứng giữa.

Giải

a) Gọi số chính phương đứng giữa là x^2 ($x \geq 3$). Ta có

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 &= (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2. \\ \Leftrightarrow x^2 &= (x+1)^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 - (x-2)^2 + (x+3)^2 - (x-3)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2x \cdot 2 + 2x \cdot 4 + 2x \cdot 6 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4x(1+2+3).\end{aligned}$$

Do $x \neq 0$ nên $x = 4 \cdot 6 = 24$.

Số chính phương đứng giữa là 24^2 . Ta có

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

b) Gọi số chính phương đứng giữa là x^2 ($x \geq k$). Ta có

$$\begin{aligned}(x-k)^2 + (x-k+1)^2 + \dots + (x-1)^2 + x^2 &= (x+1)^2 + \dots + (x+k)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= (x+1)^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 - (x-2)^2 + \dots + (x+k)^2 - (x-k)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2x \cdot 2 + 2x \cdot 4 + \dots + 2x \cdot 2k \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4x(1+2+\dots+k)\end{aligned}$$

Do $x \neq 0$ nên $x = 4(1+2+\dots+k) = 4 \cdot \frac{k(k+1)}{2} = 2k(k+1)$.

Số chính phương đứng giữa là $[2k(k+1)]^2$.

Lưu ý. Với $k=1$ ta có $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Với $k=2$ ta có $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Ví dụ 30. Chứng minh rằng số $(n + 1)^4 + n^4 + 1$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (n + 1)^4 + n^4 + 1 &= 2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2 \\ &= 2(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1) = 2(n^2 + n + 1)^2. \end{aligned}$$

Do $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ là số lẻ nên $(n^2 + n + 1)^2$ là số lẻ. Số $(n + 1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

BÀI TẬP

20. Chứng minh rằng:

- a) Tổng của bốn số chính phương lẻ có thể là số chính phương.
- b) Tổng của năm số chính phương lẻ không thể là số chính phương.

21. Cho sáu số chính phương $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, g^2$ thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = g^2$. Chứng minh rằng trong sáu số đó, tồn tại hai số chẵn.

22. a) Chứng minh rằng nếu một số chẵn viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương thì số chẵn đó phải là một bội của 4.

b) Chứng minh rằng một bội của 4 bao giờ cũng viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương lẻ liên tiếp hoặc hiệu của hai số chính phương chẵn liên tiếp.

c) Áp dụng nhận xét ở câu b, hãy viết các số 20, 24, 28 dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

d) Từ 1 đến 100, có bao nhiêu số tự nhiên không viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương?

23. Chứng minh rằng nếu n là tổng của ba số chính phương thì $3n$ viết được dưới dạng tổng của bốn số chính phương.

24. a) Viết mỗi số $4^3, 5^3$ dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

b) Chứng minh rằng lập phương của một số tự nhiên bao giờ cũng viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

25. Cho các số nguyên a, b, c, d thoả mãn $a + b = c + d$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.

26. a) Chứng minh rằng tổng của năm số chính phương liên tiếp thì chia hết cho 5.
b) Mệnh đề sau đúng hay sai: “Nếu n là số lẻ lớn hơn 3 thì tổng của n số chính phương liên tiếp chia hết cho n ”.
27. Cho $\frac{n^2 - 1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng:
a) $2n - 1$ là số chính phương;
b) n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.
28. Chứng minh rằng:
a) Tồn tại một số chính phương là hiệu các lập phương của hai số tự nhiên liên tiếp.
b) Nếu số chính phương n^2 là hiệu các lập phương của hai số tự nhiên liên tiếp thì $2n - 1$ là số chính phương và n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.
29. Chứng minh rằng các số $2n - 1, 2n, 2n + 1$ đều không là số chính phương nếu n là số tự nhiên lẻ chia hết cho 3.
30. Chứng minh rằng $n^3 + 1$ không là số chính phương nếu n là số tự nhiên lẻ.
31. Tìm hai số chính phương khác nhau $\overline{abcd}$ và $\overline{dcba}$ sao cho $\overline{dcba}$ chia hết cho $\overline{abcd}$.
32. Tìm hai số chính phương liên tiếp m^2 và n^2 ($m < n$) sao cho $m^2 = \overline{abc}$ và $n^2 = \overline{acb}$.
33. Tìm các số nguyên dương x và y , sao cho $x^2 + 3y$ và $y^2 + 3x$ đều là các số chính phương.
34. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, sao cho các số $n + 1, 6n + 1, 20n + 1$ đều là các số chính phương.
35. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\frac{(n+1)(4n+3)}{3}$ là số chính phương.
36. Chứng minh rằng tồn tại bốn số tự nhiên a, b, c, d khác nhau mà $a^2 + 2cd + b^2$ và $c^2 + 2ab + d^2$ đều là các số chính phương.

Chuyên đề 5

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Phương trình nghiệm nguyên là một đề tài lí thú về Số học và Đại số, được nghiên cứu từ nhiều thế kỉ trước Công nguyên.

Trong các chuyên đề trước, đã có nhiều bài toán dẫn đến giải phương trình nghiệm nguyên, chẳng hạn các ví dụ 16, 17, 18, 19, 20, 26, các bài tập 31, 32, 33. Chuyên đề này sẽ trình bày rõ hơn các phương pháp thường dùng để tìm nghiệm nguyên của phương trình. Đó là:

- Phương pháp xét tính chia hết, như đưa về phương trình ước số, xét số dư của từng vế, phương pháp lùi vô hạn.

- Phương pháp dùng bất đẳng thức, như sắp thứ tự các ẩn, xét từng khoảng giá trị của ẩn, sử dụng $\Delta \geq 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm, xét các tích kẹp giữa các tích cùng dạng.

- Phương pháp dùng số chính phương, như xét các số chính phương gần nhau, sử dụng điều kiện Δ là số chính phương ở phương trình bậc hai, dùng tính chất của số chính phương.

Ở nước ta, sách *Đại thành toán pháp* của Lương Thế Vinh thế kỉ XV cũng có bài toán tìm nghiệm nguyên *Trăm trâu trăm cỏ*.

Thử trí thông minh

NGƯỜI CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ PHÉC-MA CUỐI CÙNG

Vào năm 1637, nhà toán học kiêm luật gia người Pháp Phéc-ma (*Pierre de Fermat*, 1601 – 1665), nêu mệnh đề sau (được gọi là định lí lớn Phéc-ma, cũng gọi là định lí cuối cùng của Phéc-ma):

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ với n là số nguyên lớn hơn 2 không có nghiệm nguyên dương.

Người ta đã tìm thấy chứng minh của Phéc-ma với $n = 3$ và $n = 4$. Một trăm năm sau, người ta chứng minh được mệnh đề trên với $n = 5$, $n = 7$. Năm 1992, với máy tính điện tử, đã chứng minh được bài toán với mọi $n \leq 4000000$. Đến năm 1993, bài toán vẫn treo lơ lửng như một sự thách đố khả năng của con người. Ít người tin rằng bài toán sẽ được giải quyết ngay trong thế kỉ XX.

Người đã làm được công việc tuyệt vời này là nhà toán học Anh Oai-lơ (Andrew Wiles, sinh năm 1953). Ông đã tự nguyện gắn bó đời mình với “bài toán thế kỉ” này từ năm 23 tuổi. Ông kể lại:

“Tôi nghĩ về bài toán suốt ngày, cả trong lúc ngủ. Khi bế tắc, tôi đi dạo gần hồ. Tôi có sẵn bút chì và giấy. Lúc có một ý tưởng, tôi ngồi xuống một băng ghế và viết vội ra, suốt 7 – 8 năm trời như vậy. Một buổi sáng cuối tháng 5 – 1993, tôi ngó lướt qua bài nghiên cứu của mình, có một câu làm tôi chú ý, câu đó nhắc tới một



Andrew Wiles chứng minh định lí Fermat

công trình vào thế kỉ XIX, và tôi bỗng nhận ra là tôi có thể dùng nó để hoàn tất chứng minh. Tôi tiếp tục tới chiều và quên cả ăn trưa. Khoảng 3 – 4 giờ chiều, tôi tin tưởng đã giải quyết được bài toán. Tôi xuống nhà nói với vợ tôi là tôi đã giải được định lí Phéc-ma cuối cùng”.

Oai-lơ công bố phát minh của mình trong một hội nghị toán học quốc tế ở Cambridge, Anh. Đó là ngày thứ tư 23-6-1993, ngày báo cáo cuối cùng của ông. Ông đã chứng minh được một giả thuyết, mà định lí Phéc-ma là một hệ quả của giả thuyết này. Ông kết luận bản báo cáo: “Và điều này chứng minh định lí Phéc-ma”.

Phòng họp lặng đi, rồi cả hội trường vỗ tay dồn dập. Ngày hôm sau, báo chí cả thế giới thông tin về một trong những thành tựu toán học vĩ đại nhất.

Công trình dày 200 trang của ông được gửi đến các nhà lý thuyết số hàng đầu thế giới. Sáu tháng sau, họ phát hiện ra một lỗ hổng trong chứng minh, một lỗ hổng chứ không phải một sai lầm, và mọi người tin rằng Oai-lơ sẽ khắc phục được.

Sự miệt mài cần mẫn của Oai-lơ đã được trả giá. Tháng 9 – 1994, ông tìm ra chỗ sai của mình và tháng 10 – 1994, ông cùng với một học trò của mình công bố một bài báo 25 trang để “lấp lỗ hổng” của bản báo cáo trước. Lần này, người ta không tìm thấy một sai sót nào. Định lý cuối cùng của Phéc-ma đã được chứng minh sau trên 350 năm.

Việc Oai-lơ chứng minh được định lý Phéc-ma, cũng như việc GS. Ngô Bảo Châu chứng minh được bổ đề cơ bản của *Chương trình Langlands* cho thấy bộ óc con người thật diệu kỳ: Bất cứ đỉnh cao trí tuệ nào, con người cũng có thể vươn tới. Không có bài toán nào mà con người không giải được, chỉ có sớm hay muộn mà thôi !

VÀI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN CHƯA GIẢI ĐƯỢC

Bài toán 1. Xét biểu thức $x! + 1$. Với x bằng 4, 5, 7 thì biểu thức cho các số chính phương $5^2, 11^2, 71^2$. Còn số nguyên dương x nào khác để $x! + 1$ là số chính phương không?

Bài toán 2. Phương trình sau có nghiệm nguyên không?

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 148.$$

Bài toán 3. Tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d khác nhau sao cho $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, chẳng hạn $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

Có tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d khác nhau sao cho $a^5 + b^5 = c^5 + d^5$ không?

Bài toán 4. Phương trình $x^m - y^n = 1$ với $m > 1, n > 1, x < y$ chỉ có nghiệm nguyên dương khi $m = 2$ và $n = 3$.

Bài toán 5. Có luôn tồn tại số nguyên tố nằm giữa n^2 và $(n + 1)^2$ với mọi số tự nhiên n không?

Bài toán 6. Xét biểu thức $n^n + 1$. Với n bằng 1, 2, 4 thì biểu thức cho các số nguyên tố 2, 5, 257. Còn số tự nhiên n nào khác để $n^n + 1$ là số nguyên tố không?

I. PHƯƠNG PHÁP XÉT TÍNH CHIA HẾT

1. Đưa về phương trình ước số

Ta gọi *phương trình ước số* là phương trình có vế trái là một tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là một hằng số nguyên.

Bằng cách tìm các ước của hằng số đó, ta tìm được nghiệm nguyên của phương trình.

Ví dụ 31. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5xy + x - 10y = 14$.

Giải

$$5xy + x - 10y = 14$$

$$\Leftrightarrow x(5y + 1) - 2(5y + 1) = 12 \Leftrightarrow (x - 2)(5y + 1) = 12.$$

$5y + 1$ là ước của 12 và chia cho 5 dư 1 nên

$5y + 1$	1	6	-4
y	0	1	-1
x	14	4	-1

Các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(14; 0)$, $(4; 1)$, $(-1; -1)$.

Ví dụ 32. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 = 3(xy + y + 1)$.

Giải

$x^3 = 3(xy + y + 1) \Leftrightarrow x^3 - 3 = 3y(x + 1)$. Suy ra $x \div 3$ và $x^3 + 1 - 4 \div x + 1$
 $\Rightarrow 4 \div x + 1$. Do đó $x + 1$ là ước của 4 và chia cho 3 dư 1.

$x + 1$	1	-2	4
x	0	-3	3
y	-1	5	2

Các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(0; -1)$, $(-3; 5)$, $(3; 2)$.

2. Xét số dư của từng vế

Ví dụ 33. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 7y = 51$ (1) không có nghiệm nguyên.

Giải

Xét $x = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $x^3 \div 7$.

Xét $x = 7k \pm 1$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x = 7k \pm 2$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x = 7k \pm 3$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Do đó vế trái của (1) chia cho 7 dư 0, 1, 6, còn vế phải của (1) chia cho 7 dư 2. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

3. Chia liên tiếp các ẩn cho cùng một số (phương pháp lùi vô hạn)

Ví dụ 34. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0. \quad (1)$$

Giải

Ta thấy $x \div 2$. Đặt $x = 2x_1$ ($x_1 \in \mathbb{Z}$), thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 được

$$4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 0. \quad (2)$$

Suy ra $y \div 2$. Đặt $y = 2y_1$ ($y_1 \in \mathbb{Z}$), thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 được

$$2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 = 0. \quad (3)$$

Suy ra $z \div 2$. Đặt $z = 2z_1$ ($z_1 \in \mathbb{Z}$), thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2 được

$$x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 = 0.$$

Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của (1) thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1), trong đó $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta đi đến x, y, z đều chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(0; 0; 0)$.

Lưu ý. Ta gọi phương pháp trên là *phương pháp lùi vô hạn*. Phương pháp này thường được dùng để chứng minh một phương trình chỉ có nghiệm nguyên khi các ẩn bằng 0.

II. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Sắp thứ tự các ẩn

Ví dụ 35. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $2xyz = x + y + z$. (1)

Giải

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Ta có $2xyz = x + y + z \leq 3z$.

Chia hai vế cho số dương z được $2xy \leq 3 \Rightarrow xy \leq 1 \Rightarrow xy = 1$.

Do đó $x = y = 1$. Thay vào (1) được $2z = 2 + z$ nên $z = 2$.

Nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ là $(1; 1; 2), (1; 2; 1), (2; 1; 1)$.

2. Xét từng khoảng giá trị của ẩn

Ví dụ 36. Tìm số tự nhiên x sao cho $x^6 + 2x^4 - 125$ là lập phương của một số nguyên.

Giải

Đặt $x^6 + 2x^4 - 125 = y^3$ ($y \in \mathbb{Z}$)

Ta thấy $y^3 < (x^2 + 1)^3$, vì

$$(x^2 + 1)^3 - y^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - (x^6 + 2x^4 - 125) = x^4 + 3x^2 + 126 > 0.$$

$$\text{Suy ra } y < x^2 + 1. \quad (1)$$

Ta xét khi nào thì xảy ra $y > x^2$.

$$\text{Ta thấy } y > x^2 \Leftrightarrow y^3 > x^6 \Leftrightarrow x^6 + 2x^4 - 125 > x^6 \Leftrightarrow 2x^4 > 125 \Leftrightarrow x^4 \geq 63. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra với $x^4 \geq 63$ thì $x^2 < y < x^2 + 1$, điều này không xảy ra. (3)

Xét $x = 0$ thì $y^3 = -125$ nên $y = -5$.

Xét $x = 1$ thì $y^3 = 1 + 2 - 125 = -122$, loại.

Xét $x = 2$ thì $y^3 = 64 + 32 - 125 = -29$, loại.

Xét $x \geq 3$ thì $x^4 \geq 81 > 63$, loại do (3).

Đáp số: $x = 0$.

3. Sử dụng bất đẳng thức $\Delta \geq 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm

Ví dụ 37. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 - 2x + y = 9$.

Giải

Viết phương trình đã cho thành phương trình bậc hai đối với x , khi đó y là tham số.

$$x^2 - 2x + (y^2 + y - 9) = 0.$$

Điều kiện để tồn tại x là $\Delta' \geq 0$.

$$\text{Ta có } \Delta' = 1 - y^2 - y + 9 = -y^2 - y + 10.$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 10 \leq 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 40 \leq 0 \Leftrightarrow (2y + 1)^2 \leq 41.$$

Do đó $(2y + 1)^2 \in \{1; 9; 25\}$. Ta có

$2y + 1$	1	-1	3	-3	5	-5
$2y$	0	-2	2	-4	4	-6
y	0	-1	1	-2	2	-3
x	loại	loại	loại	loại	3 và -1	3 và -1

Nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(3; 2)$, $(-1; 2)$, $(3; -3)$, $(-1; -3)$.

4. Xét các tích kẹp giữa các tích cùng dạng

Nếu các số nguyên x, y, k thỏa mãn $x(x + k) < y(y + k) < (x + 2)(x + 2 + k)$ thì $y(y + k) = (x + 1)(x + 1 + k)$.

Ví dụ 38. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4 + x^2 + 2 = y^2 - y$. (1)

Giải

$$\text{Từ đề bài suy ra } (y - 1)y = x^4 + x^2 + 2. \quad (2)$$

Ta lại có $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 2 < x^4 + x^2 + 2 + (4x^2 + 4)$, kết hợp với (2) được $x^2(x^2 + 1) < (y - 1)y < (x^2 + 2)(x^2 + 3) \Rightarrow (y - 1)y = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$.

Kết hợp với (2) được

$$x^4 + x^2 + 2 = x^4 + 3x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Thay vào (1) được } y^2 - y = 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; -1)$, $(0; 2)$.

III. PHƯƠNG PHÁP DÙNG SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1. Xét các số chính phương gần nhau

Ví dụ 39. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^4 + 2x^2 + 6 = y^2 - y. \quad (1)$$

Giải

Nhân hai vế của phương trình (1) với 4 rồi cộng 1 được

$$4x^4 + 8x^2 + 25 = 4y^2 - 4y + 1.$$

Đặt $4x^4 + 8x^2 + 25 = A$, thì $A = (2y - 1)^2$.

Do $4x^4 + 4x^2 + 1 < 4x^4 + 8x^2 + 25 \leq 4x^4 + 20x^2 + 25$

nên $(2x^2 + 1)^2 < A \leq (2x^2 + 5)^2$. (2)

Do A là số chính phương lẻ nên từ (2) suy ra

$$A = (2x^2 + 3)^2 \text{ hoặc } A = (2x^2 + 5)^2.$$

$$\text{a) } A = (2x^2 + 3)^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 8x^2 + 25 = 4x^4 + 12x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 = 4.$$

Thay vào (1) được $y^2 - y - 30 = 0$ nên $y = 6, y = -5$.

$$\text{b) } A = (2x^2 + 5)^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 8x^2 + 25 = 4x^4 + 20x^2 + 25 \Leftrightarrow x = 0.$$

Thay vào (1) được $y^2 - y - 6 = 0$ nên $y = 3, y = -2$.

Nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(2; 6), (-2; 6), (2; -5), (-2; -5), (0; 3), (0; -2)$.

Ví dụ 40. Tìm số tự nhiên x sao cho $x^4 + x^3 + 1$ là số chính phương.

Giải

Cách 1. Đặt $x^4 + x^3 + 1 = y^2 \quad (y \in \mathbb{N})$.

Xét $x = 0$ thì $y^2 = 1$, thoả mãn.

Xét $x = 1$ thì $y^2 = 3$, loại.

Xét $x = 2$ thì $y^2 = 25$, thoả mãn.

Xét $x \geq 3$. Ta có $4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4 = (2x^2 + x)^2 + 4 - x^2 < (2x^2 + x)^2$.

Mặt khác $4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4 > (2x^2 + x - 1)^2$ vì

$$(4x^4 + 4x^3 + 4) - (2x^2 + x - 1)^2 = 3x^2 + 2x + 3 > 0.$$

Suy ra $(2x^2 + x - 1)^2 < (2y)^2 < (2x^2 + x)^2$, loại.

Đáp số: $x = 0, x = 2$.

Cách 2. Ta có $x^4 + x^3 + 1 > (x^2)^2$ nên

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 1 &= (x^2 + k)^2 \text{ với } k \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow x^4 + x^3 + 1 &= x^4 + 2kx^2 + k^2 \Rightarrow x^2(x - 2k) = k^2 - 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Xét $k = 1$ thì $x^2(x - 2) = 0$ nên $x \in \{0; 2\}$. Khi đó $x^4 + x^3 + 1 \in \{1; 25\}$, thỏa mãn.

Xét $k \geq 2$ thì $k^2 - 1 > 0$. Từ (1) có $k^2 - 1 : x^2$ nên $k^2 - 1 \geq x^2 \Rightarrow k^2 > x^2 \Rightarrow k > x$. Mặt khác, từ (1) còn suy ra $x - 2k > 0 \Rightarrow x > 2k \Rightarrow x > k$. Mâu thuẫn.

Vậy chỉ có $x = 0$ và $x = 2$.

2. Sử dụng điều kiện Δ là số chính phương

Ở những phương trình $f(x, y) = 0$ với hệ số nguyên có thể viết được dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, chẳng hạn đối với x , ngoài điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình ẩn x có nghiệm, muốn phương trình có nghiệm nguyên còn cần Δ là số chính phương, vì nếu Δ không là số chính phương thì x là số vô tỉ.

Chú ý rằng Δ là số chính phương là điều kiện cần nhưng chưa đủ để phương trình có nghiệm nguyên. Do đó phải thử giá trị tìm được vào phương trình đã cho, hoặc tìm ra cụ thể nghiệm nguyên của phương trình.

Ví dụ 41. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - xy = x^2 + 2y^2$. (1)

Giải

Viết phương trình (1) dưới dạng $(x^2 - 2)y^2 - xy - x^2 = 0$. (2)

Do x nguyên nên $x^2 - 2 \neq 0$, do đó (2) là phương trình bậc hai với ẩn y , có $\Delta = x^2 + 4x^2(x^2 - 2) = x^2(4x^2 - 7)$.

Điều kiện cần để (2) có nghiệm nguyên là Δ phải là số chính phương.

a) Xét $x = 0$ thì từ (1) suy ra $y = 0$.

b) Xét $x \neq 0$ thì $4x^2 - 7$ phải là số chính phương. Đặt $4x^2 - 7 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) ta có $(2x - m)(2x + m) = 7$. Ta tìm được $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Với $x = -2$ thì (2) là $y^2 + y - 2 = 0$ nên $y \in \{1; -2\}$.

Với $x = 2$ thì (2) là $y^2 - y - 2 = 0$ nên $y \in \{-1; 2\}$.

Nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(-2; 1)$, $(-2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 2)$.

Lưu ý. Nếu viết phương trình (1) dưới dạng phương trình bậc hai với ẩn x , việc giải điều kiện Δ là số chính phương sẽ gặp khó khăn. Bạn đọc tự kiểm tra.

3. Dùng tính chất của số chính phương

Ngoài tính chất về chia hết của số chính phương (xem Chuyên đề 4), cần nhớ các tính chất sau.

Cho $ab = c^2$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

a) Nếu a và b là hai số nguyên liên tiếp thì $a = 0$ hoặc $b = 0$.

b) Nếu a và b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì $a = m^2$ và $b = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

c) Nếu $a = m^2 \neq 0$ thì $b = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Ví dụ 42. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2xy = 5y + 6$. (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = y^2 + 5y + 6 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (y + 2)(y + 3).$$

$(x + y)^2$ bằng tích của hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số bằng 0.

Nếu $y + 2 = 0$ thì $y = -2$, $x = 2$.

Nếu $y + 3 = 0$ thì $y = -3$, $x = 3$.

Nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(2; -2)$, $(3; -3)$.

Ví dụ 43. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + x^2 + x = 4y(y - 1)$. (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = 4y^2 - 4y + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x + 1) = (2y - 1)^2.$$

Vế phải là số lẻ nên $x^2 + 1$ và $x + 1$ cùng lẻ, đồng thời cùng là số dương. Ta lại thấy hai số $x^2 + 1$ và $x + 1$ nguyên tố cùng nhau. Thật vậy nếu chúng cùng chia hết cho d thì $x^2 - 1 \vdots d$ nên $(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d = 1$ (vì d là ước của số lẻ).

Hai số $x^2 + 1$ và $x + 1$ nguyên tố cùng nhau, có tích là số chính phương nên cả hai đều là số chính phương.

Ta có $x^2 + 1$ là số chính phương, mà x^2 và $x^2 + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên $x = 0$.

Thay vào (1) được $y = 0$ hoặc $y = 1$.

Nghiệm nguyên là $(0; 0)$, $(0; 1)$.

Ví dụ 44. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $(x + y)^2 = 18x + 81$. (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (x + y)^2 - 18(x + y) + 81 = 162 - 18y \Leftrightarrow (x + y - 9)^2 = 9(18 - 2y). \quad (2)$$

Do đó $18 - 2y$ là số chính phương. Do $y \geq 0$ nên $18 - 2y \leq 18$. Các số chính phương chẵn không quá 18 là 0; 4; 16.

$18 - 2y$	0	4	16
y	9	7	1
x	0	8	20

Nghiệm tự nhiên $(x; y)$ là $(0; 9)$, $(8; 7)$, $(20; 1)$.

Lưu ý. Cũng có thể viết phương trình (1) dưới dạng phương trình bậc hai với ẩn x , ta tìm được $\Delta' = 162 - 18y$, rồi giải điều kiện Δ' là số chính phương.

Ví dụ 45. Tìm số tự nhiên x , biết rằng:

- $2^x + 5$ là số chính phương;
- $2^x + 9$ là số là số chính phương.

Giải

a) Xét $x = 0$ thì $2^x + 5 = 2^0 + 5 = 6$, không là số chính phương.

Xét $x = 1$ thì $2^x + 5 = 2 + 5 = 7$, không là số chính phương.

Xét $x = 2$ thì $2^x + 5 = 2^2 + 5 = 9 = 3^2$.

Xét $x \geq 3$ thì $2^x \div 8$ nên $2^x + 5$ chia cho 8 dư 5, không là số chính phương.

Đáp số: $x = 2$.

b) Xét hai trường hợp: x lẻ và x chẵn.

- Xét x lẻ. Khi đó $2^x + 1 \div 3$ nên $2^x + 9$ chia cho 3 dư 2, không là số chính phương.

- Xét x chẵn. Đặt $x = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$). Giả sử $2^{2n} + 9 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$).

$$\text{Ta có } y^2 - 2^{2n} = 9 \Leftrightarrow (y + 2^n)(y - 2^n) = 9.$$

Ta thấy $y + 2^n > 0$ nên $y - 2^n > 0$ và $y + 2^n > y - 2^n$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} y + 2^n = 9 \\ y - 2^n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ta được $n = 2$ và $x = 4$.

Đáp số: $x = 4$.

BÀI TẬP

37. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x^2 - y^2 - 3x + 3y = 2$;

b) $2xy - x - y = 10$;

c) $x^2 - 4y^2 - 4y = 45$;

d) $x^3 - 3xy = 6y - 1$;

e) $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$.

38. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x^2 - x + y^2 - y = xy$;

b) $x^2 - 5x + 2 = y^4 + y^2$;

c) $x^6 - x^2 + 6 = y^3 - y$.

39. Tìm nghiệm tự nhiên của các phương trình:

a) $x^3 + x^2y^2 + y^2 - 2y = 24$;

b) $3^y = x^2 - 5x + 7$.

40. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

a) $xyz = 2(x + y + z)$;

b) $xyz = x + y + 2z$.

41. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 8y + 7 = 0.$$

42. Tìm số tự nhiên x để mỗi biểu thức sau là số chính phương:

a) $x^2 + 3x + 1$;

b) $x^4 - x^2 + 2x + 2$;

c) $3^x + 80$;

d) $3^x + 91$.

43. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x + y = xy - y^2.$$

44. Tìm các số nguyên tố x và y sao cho:

a) $x^2 + 3xy + y^2$ là số chính phương ;

b) $x^2 + 3xy + y^2$ là lũy thừa tự nhiên của 5.

45. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = y$;

b) $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y$.

46. Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho

$$a^2 = 2(b+c) \text{ và } a^3 - b^3 - c^3 = 3abc.$$

47. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để phương trình $2xy - x - 3y = k$ có một số lẻ nghiệm nguyên dương và tìm các nghiệm đó.

48. a) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số, sao cho nhân nó với 31 rồi chia cho 23 thì dư 16.

b) Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có tận cùng là 84 và chia hết cho 83.

49. a) Một bài thi gồm 20 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm, mỗi câu bỏ qua không trả lời được 0 điểm. Tính số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai, số câu bỏ qua không trả lời của bạn Tùng, biết rằng số điểm của bạn là 58 điểm.

b) Cũng hỏi như câu a), nhưng mỗi câu trả lời sai bị trừ 2 điểm và điểm nhận được là: 51 điểm; 42 điểm.

50. Một số khách du lịch đến một cửa hàng mua lọ hoa làm kỉ niệm. Nếu mỗi khách hàng mua một lọ hoa thì cửa hàng còn lại y lọ hoa. Nếu mỗi khách hàng mua y lọ hoa thì có y khách hàng không mua được lọ hoa nào. Biết y là một số chẵn, tính số khách hàng và số lọ hoa mà cửa hàng có.

Chuyên đề 6

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Quan hệ lớn hơn, nhỏ hơn đã được biết từ các lớp dưới. Trong chuyên đề này, chưa đòi hỏi các kiến thức phức tạp về bất đẳng thức, chỉ yêu cầu biết vận dụng những kiến thức đơn giản về bất đẳng thức.

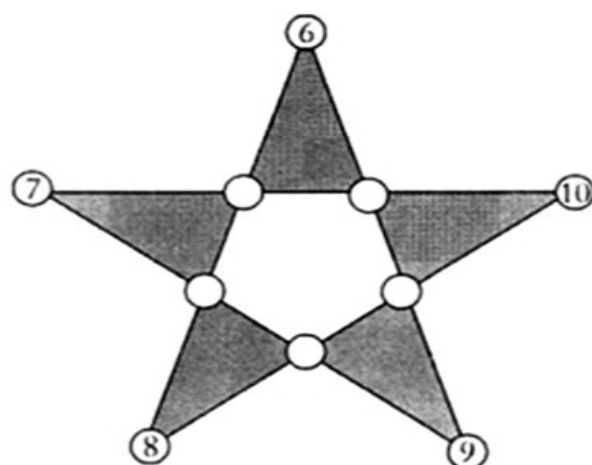
Chuyên đề này bao gồm các dạng sau:

- Dạng 1. Tìm số tự nhiên thoả mãn một bất đẳng thức.
- Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các biểu thức đơn giản.
- Dạng 3. Viết một biểu thức với điều kiện cho trước sao cho giá trị của nó nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Thử trí thông minh

ĐIỀN SỐ VÀO NGÔI SAO

Hình 3 có năm cánh sao là các hình tam giác được tô đậm. Hãy điền năm số 1, 2, 3, 4, 5 vào năm vòng tròn bên trong sao cho tổng của ba số ở ba đỉnh mỗi hình tam giác bằng nhau.

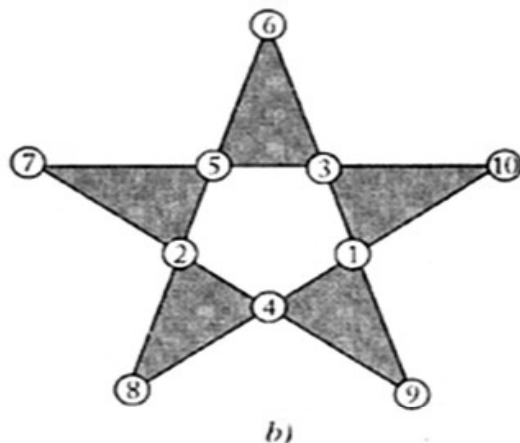
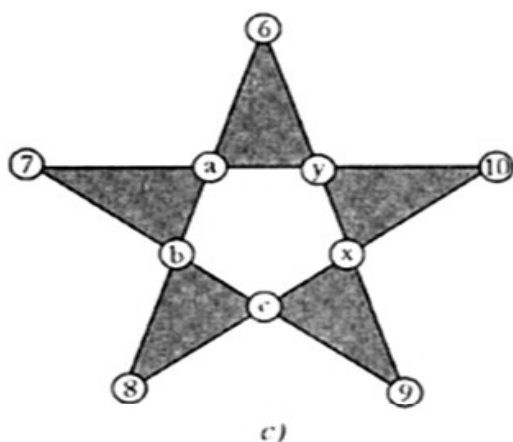


Hình 3

Giải (h.4)

Gọi a, b, c, x, y là các số phải điền (h.4a).

Ta có $6 + a + y = 7 + a + b = 8 + b + c = 9 + c + x = 10 + x + y$.



Hình 4

Suy ra $a + y > a + b > b + c > c + x > x + y$

$\Rightarrow y > b, a > c, b > x, c > y \Rightarrow a > c > y > b > x$

$\Rightarrow a = 5, c = 4, y = 3, b = 2, x = 1$.

Ta được hình 4b.

Ví dụ 46. Hai số nguyên dương x và y có tổng bằng 45.

a) Tìm giá trị lớn nhất của tích xy .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích xy .

Giải

Do $x + y = 45$ ($x, y \in \mathbb{N}^*$) nên $x \neq y$, giả sử $x > y$.

Ta có $4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2 = 45^2$.

a) xy lớn nhất $\Leftrightarrow x - y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x - y = 1$.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = 22 \end{cases}$$

$\max(xy) = 23 \cdot 22 = 506$.

b) xy nhỏ nhất $\Leftrightarrow x - y$ lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 44 \\ y = 1 \end{cases}$

$\min(xy) = 44 \cdot 1 = 44$.

Ví dụ 47. Dùng tất cả sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 hãy viết thành ba số tự nhiên có hai chữ số sao cho tích của chúng có giá trị lớn nhất.

Giải

Để tích của ba số cần tìm có giá trị lớn nhất, các chữ số hàng chục của chúng phải có giá trị lớn nhất, ta chọn các chữ số 4, 5, 6.

Tích lớn nhất cần tìm có dạng $\overline{4a.5b.6c}$ (1) trong đó $a, b, c \in \{1; 2; 3\}$. Ta sẽ chứng minh $a > b > c$.

Trước hết ta chứng minh $a > b$. Thật vậy, giả sử $a < b$. Xét

$$\begin{aligned}\overline{4a.5b} - \overline{4b.5a} &= (40 + a)(50 + b) - (40 + b)(50 + a) \\ &= 40b + 50a - 40a - 50b = 10(a - b) < 0\end{aligned}$$

nên $\overline{4a.5b} < \overline{4b.5a}$, trái với tích (1) có giá trị lớn nhất.

Chứng minh tương tự như trên, ta được $b > c$.

Vậy $a = 3, b = 2, c = 1$. Tích lớn nhất cần tìm là 43.52.61.

Ví dụ 48. Dùng tất cả chín chữ số từ 1 đến 9, hãy viết thành ba số tự nhiên có ba chữ số sao cho tích của chúng có giá trị lớn nhất.

Giải

Để tích của ba số cần tìm có giá trị lớn nhất, các chữ số hàng trăm của chúng phải có giá trị lớn nhất, ta chọn các chữ số 7, 8, 9.

Để tích của ba số cần tìm có giá trị lớn nhất, các chữ số hàng chục của chúng phải có giá trị lớn nhất, ta chọn các chữ số 4, 5, 6.

Tích lớn nhất cần tìm có dạng $\overline{7a^*.8b^*.9c^*}$ (1) trong đó $a, b, c \in \{4; 5; 6\}$. Ta sẽ chứng minh $a > b > c$.

Trước hết ta chứng minh $a > b$. Thật vậy, giả sử $a < b$. Đặt $\overline{a^*} = x, \overline{b^*} = y$ thì $x < y$.

$$\begin{aligned}\text{Xét } \overline{7a^*.8b^*} - \overline{7b^*.8a^*} &= (700 + x)(800 + y) - (700 + y)(800 + x) \\ &= 700y + 800x - 700x - 800y = 100(x - y) < 0 \\ \Rightarrow \overline{7a^*.8b^*} &< \overline{7b^*.8a^*}, \text{ trái với tích (1) có giá trị lớn nhất.}\end{aligned}$$

Vậy $a > b$. Chứng minh tương tự, ta được $b > c$. Suy ra $a = 6, b = 5, c = 4$.
 Tích lớn nhất cần tìm có dạng $\overline{76m.85n.94p}$ (2) trong đó $m, n, p \in \{1; 2; 3\}$.
 Ta sẽ chứng minh $m > n > p$.

Trước hết ta chứng minh $m > n$. Thật vậy, giả sử $m < n$.

Xét $\overline{76m.85n} - \overline{76n.85m}$

$$= (760 + m)(850 + n) - (760 + n)(850 + m)$$

$$= 760n + 850m - 760m - 850n$$

$$= 90(m - n) < 0$$

$$\Rightarrow \overline{76m.85n} < \overline{76n.85m}, \text{ trái với tích (2) có giá trị lớn nhất.}$$

Vậy $m > n$. Chứng minh tương tự ta được $n > p$.

Tích lớn nhất cần tìm là $763.852.941$.

Ví dụ 49. Tìm số nguyên dương a sao cho có đúng 11 số nguyên dương x mà

$$2 \leq \frac{a}{x} \leq 3.$$

Giải

$$2 \leq \frac{a}{x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{x}{a} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

Đặt $a = 6k + r$ với $a, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 5$.

$$\text{Ta có } \frac{6k+r}{3} \leq x \leq \frac{6k+r}{2} \Leftrightarrow 2k + \frac{r}{3} \leq x \leq 3k + \frac{r}{2}. \quad (1)$$

a) Xét $r = 0$ thì (1) là $2k \leq x \leq 3k$.

Có $3k - 2k + 1 = k + 1$ giá trị của x .

Từ $k + 1 = 11$ ta được $k = 10$ nên $a = 60$.

b) Xét $r = 1$ thì (1) là $2k + 1 \leq x \leq 3k$.

Có $3k - (2k + 1) + 1 = k$ giá trị của x .

Từ $k = 11$ được $a = 6.11 + 1 = 67$.

c) Xét $r \in \{2; 3\}$ thì (1) là $2k + 1 \leq x \leq 3k + 1$.

Có $(3k + 1) - (2k + 1) + 1 = k + 1$ giá trị của x .

Từ $k + 1 = 11$ được $k = 10$. Với $r = 2$ thì $a = 62$. Với $r = 3$ thì $a = 63$.

d) Xét $r \in \{4; 5\}$ thì (1) là $2k + 2 \leq x \leq 3k + 2$.

Có $(3k + 2) - (2k + 2) + 1 = k + 1$ giá trị của x .

Từ $k + 1 = 11$ được $k = 10$. Với $r = 4$ thì $a = 64$. Với $r = 5$ thì $a = 65$.

Đáp số: $a \in \{60; 62; 63; 64; 65; 67\}$.

Ví dụ 50. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $A = |a - b| + |c - d|$ trong đó a, b, c, d là bốn số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 4.

Giải

Do $|a - b| = |b - a|$ và $a \neq b$ nên có thể giả sử $a > b$. Cũng vậy, ta giả sử $c > d$.

Khi đó

$$A = |a - b| + |c - d| = (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

$$\text{Xảy ra được } \begin{cases} a + c \text{ lớn nhất} \\ b + d \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 7 \\ b + d = 3 \end{cases}$$

$\max A = 7 - 3 = 4$ khi chẳng hạn $a = 4, c = 3, b = 2, d = 1$.

Ví dụ 51. Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$A = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + |a_4 - a_5| + |a_5 - a_1|$$

trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là năm số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 5.

Giải

Do $|x - y| = |y - x|$ nên khi $x \neq y$ ta có thể giả sử $x > y$. Do đó trong mỗi giá trị tuyệt đối ở biểu thức A , ta có thể giả sử một số lớn hơn số còn lại (với điều kiện giả sử đó không dẫn đến mâu thuẫn).

Ta giả sử số lớn hơn trong năm giá trị tuyệt đối ở biểu thức A lần lượt là a_1, a_3, a_3, a_5, a_1 . Khi đó

$$A = a_1 - a_2 + a_3 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_4 + a_1 - a_5 = 2[(a_1 + a_3) - (a_2 + a_4)].$$

$$\text{Xảy ra được } \begin{cases} a_1 + a_3 \text{ lớn nhất} \\ a_2 + a_4 \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 9 \\ a_2 + a_4 = 3 \end{cases}$$

$\max A = 2(9 - 3) = 12$ khi chẳng hạn $a_1 > a_3 > a_5 > a_4 > a_2$ tức là

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
5	1	4	2	3

Khi đó $A = |5 - 1| + |1 - 4| + |4 - 2| + |2 - 3| + |3 - 5| = 12$.

Ví dụ 52. Tuổi của An cộng với tuổi của bố và mẹ bằng 95. Biết rằng tuổi mẹ gấp bốn lần tuổi An, tuổi bố lớn hơn tuổi mẹ nhưng nhỏ hơn tổng số tuổi của mẹ và An. Tính tuổi của mỗi người (tuổi của mỗi người là một số nguyên).

Giải

Gọi số tuổi của An, của bố, của mẹ theo thứ tự là A, B, M. Ta có

$$\begin{cases} A + B + M = 95 & (1) \\ M = 4A & (2) \\ M < B < M + A & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $5A + B = 95$. (4)

Từ (2) và (3) suy ra $4A < B < 5A$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $95 = 5A + B < 5A + 5A = 10A$ nên $A > 9\frac{1}{2}$.

Từ (4) và (5) suy ra $95 = 5A + B > 5A + 4A = 9A$ nên $A < 10\frac{5}{9}$.

Do A là số nguyên nên $A = 10$. Từ đó $M = 40$, $B = 45$.

Đáp số: An 10 tuổi, mẹ 40 tuổi, bố 45 tuổi.

Ví dụ 53. Trong một trò chơi dự đoán số bi trong hộp, bốn bạn A, B, C, D dự đoán số bi theo thứ tự là 125 viên, 140 viên, 142 viên, 121 viên. Kết quả là A đạt giải nhất, B đạt giải nhì, C đạt giải ba, D đạt giải tư. Hỏi chính xác trong hộp có bao nhiêu viên bi ?

Giải

Số bi dự đoán của mỗi bạn A, B, C, D biểu thị bởi các điểm A, B, C, D trên tia số như hình 5.



Hình 5

Gọi số bị chính xác là a .

Nếu $a < 125$ thì D đoán chính xác hơn B, trái với đề bài.

Nếu $a > 140$ thì B đoán chính xác hơn A, trái với đề bài.

Vậy $125 \leq a \leq 140$.

Do A đoán chính xác hơn B nên $a - 125 < 140 - a \Rightarrow 2a < 265$. (1)

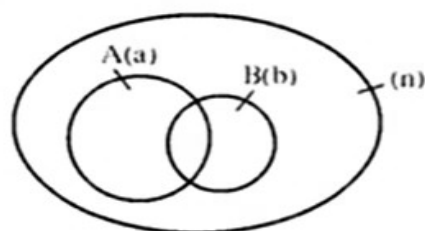
Do C đoán chính xác hơn D nên $142 - a < a - 121 \Rightarrow 2a > 263$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a = 264$ nên $a = 132$. Số bị chính xác trong hộp là 132 viên.

Ví dụ 54. Có 100 học sinh tham gia cuộc thi giải bốn bài toán. Không có ai giải được cả bốn bài. Số người giải được các bài 1, 2, 3, 4 theo thứ tự là 90 người, 80 người, 70 người, 60 người. Ban tổ chức có giải thưởng cho học sinh nào giải được cả hai bài 3 và 4. Có bao nhiêu học sinh được giải thưởng đó?

Giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Nếu tập hợp A có a phần tử, tập hợp B có b phần tử, A và B đều là tập hợp con của một tập hợp có n phần tử, gọi số phần tử của $A \cap B$ là d thì $d \geq a + b - n$.



Hình 6

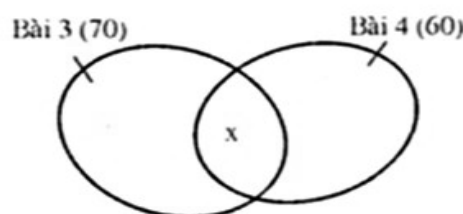
Chứng minh bổ đề (h.6)

Nếu $d < a + b - n$ thì $m = b - d > b - (a + b - n)$

$\Rightarrow m > n - a \Rightarrow a + m > n$, vô lí.

Bổ đề được chứng minh.

- Gọi x là số học sinh giải được cả hai bài 3 và 4 (h.7). Theo bổ đề $x \geq 70 + 60 - 100$
 $\Rightarrow x \geq 30$. (1)



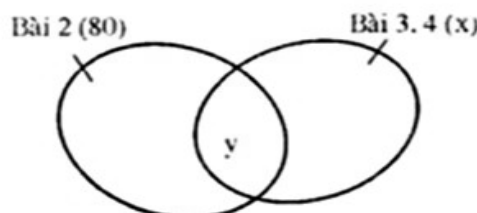
Hình 7

- Gọi y là số học sinh giải được cả ba bài 2, 3, 4 (h.8).

Theo bổ đề

$$y \geq 80 + x - 100$$

$$\Rightarrow y \geq x - 20. \quad (2)$$



Hình 8

- Gọi z là số học sinh giải được cả bốn bài (h.9).

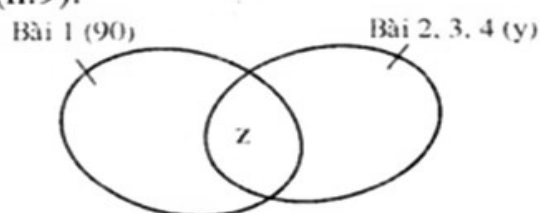
Theo bổ đề

$$z \geq 90 + y - 100 \Rightarrow z \geq y - 10.$$

- Do $z = 0$ nên $y \leq 10$. Thay vào (2) được $x - 20 \leq 10$ nên $x \leq 30$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $x = 30$.

Vậy có 30 học sinh được nhận giải thưởng.



Hình 9

BÀI TẬP

51. Cho biểu thức

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 30.$$

Tính giá trị tự nhiên nhỏ nhất của biểu thức mới nếu thay một số dấu cộng bởi dấu trừ.

52. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng nhân nó với 2 thì được một số chính phương, nhân nó với 3 thì được lập phương của một số tự nhiên.
53. Hai số nguyên dương x và y có tổng bằng 51.

- Tìm giá trị lớn nhất của tích xy .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của tích xy , biết rằng x và y đều lớn hơn 1.

54. Cho $A = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 99^{99} + 100^{100}$.

Chứng minh rằng khi tính giá trị của A , ta được một số có 201 chữ số, trong đó hai chữ số đầu tiên bên trái là 10.

55. a) Dùng tất cả sáu chữ số từ 1 đến 6, hãy viết thành ba số tự nhiên có hai chữ số sao cho tích của chúng có giá trị nhỏ nhất.
- b) Dùng tất cả chín chữ số từ 1 đến 9, hãy viết thành ba số tự nhiên có ba chữ số sao cho tích của chúng có giá trị nhỏ nhất.
- c) Cho tích $a.\overline{bc}.\overline{deg}$. Dựa vào kết quả của câu b, hãy thay các chữ số trên bởi các chữ số từ 1 đến 6 để tích có giá trị nhỏ nhất (chỉ viết, không cần giải thích).

56. Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$A = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + |a_4 - a_5| + |a_5 - a_6| + |a_6 - a_1|$ trong đó $a_1, a_2, \dots, a_6$ là sáu số tự nhiên khác nhau từ 1 đến 6.

57. Cho năm số nguyên dương a, b, c, d, m trên vòng tròn. Tính theo chiều kim đồng hồ thì tổng của hai số liền nhau bằng bình phương của số tiếp theo. Tìm năm số ấy.

58. Tìm số tự nhiên có hai chữ số có thể viết được dưới dạng tổng của sáu lũy thừa bậc khác nhau của 2.

59. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất bằng hai lần bình phương của một số tự nhiên và bằng ba lần lập phương của một số tự nhiên.

Chuyên đề 7

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ PHÂN SỐ VÀ CĂN BẬC HAI

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Các bài toán trong chuyên đề này có các dạng chính sau:

- Dạng 1. Chứng minh một biểu thức lớn hơn hoặc nhỏ hơn một số cho trước.
- Dạng 2. Tìm giá trị của biến để một hoặc nhiều bất đẳng thức được thoả mãn.
- Dạng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức.

Để chứng minh giá trị của biểu thức A nhỏ hơn hằng số m, ta thường làm trội biểu thức A thành biểu thức B thoả mãn hai điều kiện: biểu thức B dễ tính toán và $B \leq m$.

Để chứng minh giá trị của biểu thức A lớn hơn hằng số n, ta thường làm giảm biểu thức A thành biểu thức C thoả mãn hai điều kiện: biểu thức C dễ tính toán và $C \geq n$.

Thử trí thông minh

AI ĐOÁN ĐÚNG ?

Một nhóm bạn thảo luận với nhau về biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2}.$$

Mai đoán rằng A là tổng của 98 phân số nên chắc sẽ lớn hơn $\frac{1}{2}$.



Tùng nói rằng: “Vì mỗi phân số đều nhỏ nên $A < \frac{1}{2}$.”

Còn Tâm cho rằng $A = \frac{1}{2}$.

Bạn nào đoán đúng?

Giải

Bạn Tùng đoán đúng, nhưng lí do không phải vì mỗi phân số đều nhỏ, mà phải lập luận như sau:

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

I. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ PHÂN SỐ

Khi chứng minh bất đẳng thức về phân số, nhiều khi ta phải tính tổng các phân số viết theo quy luật. Khi đó, ta thường tìm cách viết mỗi phân số thành hiệu của hai phân số để xuất hiện trong biểu thức những phân số đối nhau.

Ví dụ 55. Cho $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{20.22}$.

Chứng minh rằng $A < \frac{3}{4}$.

Giải

$$\begin{aligned} 2A &= \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{19.21} \right) + \left(\frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \dots + \frac{2}{20.22} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20} - \frac{1}{22} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{21} + \frac{1}{2} - \frac{1}{22} < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $A < \frac{3}{4}$.

Ví dụ 56. Cho $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{99^3}$.

Chứng minh rằng:

a) $A < \frac{1}{12}$; b) $A > \frac{1}{27}$.

Giải

a) Với $n > 1$ ta có $n^3 > n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$

$$\text{nên } \frac{1}{n^3} < \frac{1}{(n-1)n(n+1)}. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)n(n+1)} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{n^3} < \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}$. Do đó

$$\begin{aligned} 2A &= \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{2}{99^3} < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} \\ \Rightarrow 2A &< \frac{1}{6} - \frac{1}{9900} \Rightarrow 2A < \frac{1}{6} \Rightarrow A < \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } n > 1 \text{ ta có } n^3 < n(n+1)(n+2) \text{ nên } \frac{1}{n^3} > \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{2}{n^3} > \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Do đó

$$\begin{aligned} 2A &= \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{2}{99^3} > \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} - \frac{1}{100.101} \\ \Rightarrow 2A &> \frac{1}{12} - \frac{1}{10100} > \frac{1}{12} - \frac{1}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40} \\ \Rightarrow A &> \frac{3}{80} > \frac{3}{81} = \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Ví dụ 57. Cho $A = \frac{1}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{2n-1}{3^n}$.

Chứng minh rằng $A < 1$.

Giải

Ta có $\frac{2n-1}{3^n} = \frac{3n-(n+1)}{3^n} = \frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n}$. Do đó

$$A = \frac{1}{3^0} - \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^1} - \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{1}{3^0} - \frac{n+1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n} < 1.$$

II. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CĂN BẬC HAI

Khi chứng minh bất đẳng thức về căn bậc hai, ta cũng gặp những trường hợp cần tính tổng của những số hạng viết theo quy luật. Ta cũng tìm cách viết mỗi số hạng thành một hiệu để xuất hiện trong biểu thức những số hạng đối nhau.

Ví dụ 58. Cho $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}$.

Chứng minh rằng $A > 4,5$.

Giải

Ta có $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}$

$$A > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Cộng vế với vế ta được $2A > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$$\Rightarrow 2A > \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} \Rightarrow 2A > \frac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1} = 9.$$

Vậy $A > 4,5$.

Ví dụ 59. Cho $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})} + \frac{1}{3(\sqrt{5}+\sqrt{7})} + \dots + \frac{1}{40(\sqrt{79}+\sqrt{81})}$.

Chứng minh rằng $A < \frac{8}{9}$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1})} &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2n} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2}} < \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2 - 1}} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &< \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}} - \frac{1}{\sqrt{81}} \\ \Rightarrow A &< 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Ví dụ 60a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì

$$\frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})^3} < \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right). \quad (1)$$

b) Áp dụng kết quả trên, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{3})^3} + \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{623} + \sqrt{625})^3} < \frac{3}{25}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) (1)} \quad &\Leftrightarrow (\sqrt{n} + \sqrt{n+2})^3 (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) > 8\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{n} + \sqrt{n+2})^2 (n+2-n) > 8\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{n} + \sqrt{n+2})^2 > 4\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+2} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})^2 > 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên (1) được chứng minh.

b) Đặt $A = \frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{3})^3} + \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{623} + \sqrt{625})^3}$.

Theo câu a, ta có

$$A < \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{623}} - \frac{1}{\sqrt{625}} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{25} \right) = \frac{3}{25}.$$

BÀI TẬP

60. Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{95}{96}$. Chứng minh rằng:

a) $A < \frac{1}{9}$; b) $A < \frac{1}{12}$.

61. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

a) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$;

b) $\frac{1}{1^2 + 2^2} + \frac{1}{2^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{1^4 + 1^2 + 1} + \frac{1}{2^4 + 2^2 + 1} + \frac{3}{3^4 + 3^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} < \frac{1}{2}$.

62. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} < 2.$$

63. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2}{5+1} + \frac{4}{5^2+1} + \frac{8}{5^4+1} + \frac{16}{5^8+1} + \frac{32}{5^{16}+1} + \frac{64}{5^{32}+1} < \frac{1}{2}.$$

64. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thoả mãn $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 100$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

65. Chứng minh rằng số 2^{300} có 91 chữ số khi viết dưới dạng thập phân.

66. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{77} + \sqrt{79}} > 2.$$

67. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3} + \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{8})^3} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{95} + \sqrt{98})^3} < \frac{1}{19}.$$

Chuyên đề 8

NGUYÊN LÝ Đİ-RÍCH-LÊ

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Khi chứng minh tồn tại một quan hệ nào đó, có trường hợp ta không thể chỉ ra được một ví dụ cụ thể về quan hệ đó, nhưng vẫn chứng minh được sự tồn tại của quan hệ ấy bằng cách sử dụng nguyên lý Đİ-rích-lê.

Nguyên lý Đİ-rích-lê còn gọi là *nguyên lý nhốt thỏ*: Nếu nhốt n con thỏ vào k lồng mà phép chia n cho k được m và còn dư thì tồn tại một lồng chứa ít nhất $m + 1$ con thỏ.

Các bài toán về nguyên lý Đİ-rích-lê trong chuyên đề này bao gồm:

– *Dạng 1*. Chứng minh tồn tại một số (hoặc một hiệu, một tổng...) chia hết cho một số nào đó.

– *Dạng 2*. Chứng minh tồn tại một tập hợp có một tính chất nào đó (chẳng hạn: có tích là số chính phương, có tổng chia hết cho một số nào đó, có hiệu là một số nào đó...)

Vài nét lịch sử

Đİ-RÍCH-LÊ

Đİ-rích-lê (*Peter Lejeune Dirichlet*, 1805 – 1859) là một nhà toán học người Đức gốc Pháp. Ông kế tục sự nghiệp của “ông vua toán học” Gau-xơ ở trường đại học Göttingen (Đức) và được đánh giá là “Gau-xơ thứ hai”.

Lĩnh vực nghiên cứu của ông rất rộng: từ lý thuyết số, chuỗi số đến giải tích toán học.

Một ví dụ về hàm số mà Đİ-rích-lê đưa ra có nhiều ứng dụng, đó là hàm số Đİ-rích-lê:



Đİ-rich-lê

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

(Nếu có ai yêu cầu bạn cho ví dụ một hàm số không biểu diễn được bằng đồ thị, bạn có thể đưa ra hàm số trên).

I. SỰ CHIA HẾT CỦA MỘT SỐ, MỘT HIỆU, MỘT TỔNG

Ví dụ 61. Chứng minh rằng trong bảy số nguyên tố bất kì, tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 12.

Giải

Trong bảy số nguyên tố, nếu có hai số bằng nhau thì hiệu của chúng bằng 0, chia hết cho 12.

Xét bảy số nguyên tố khác nhau đôi một, tồn tại năm số nguyên tố lớn hơn 3.

Một số nguyên tố lớn hơn 3 khi chia cho 12 dư r thì r không chia hết cho 2, không chia hết cho 3 nên $r \in \{1; 5; 7; 11\}$.

Có năm số nguyên tố lớn hơn 3, chỉ có bốn số dư như trên, theo nguyên lý Đê-rích-lê tồn tại hai số có số dư bằng nhau, hiệu của chúng chia hết cho 12.

Ví dụ 62. Chứng minh rằng trong sáu số tự nhiên bất kì, tồn tại hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 9.

Giải

Trong sáu số tự nhiên, nếu có hai số bằng nhau thì hiệu của chúng bằng 0, chia hết cho 9.

Xét sáu số tự nhiên khác nhau đôi một. Các số dư khi chia cho 9 được ghép thành 5 nhóm (0), (1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5).

Có 6 số, chỉ có 5 nhóm, theo nguyên lý Đê-rích-lê tồn tại hai số thuộc cùng một nhóm.

Hai số thuộc cùng một nhóm đó có tổng chia hết cho 9 (nếu hai số dư khác nhau) hoặc có hiệu chia hết cho 9 (nếu hai số dư bằng nhau).

Ví dụ 63. Chứng minh rằng trong năm số nguyên dương bất kì, tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc một vài số có tổng chia hết cho 5.

Giải

Xét 5 biểu thức

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Nếu một trong các biểu thức trên chia hết cho 5 thì bài toán được chứng minh.

Giả sử năm biểu thức trên đều không chia hết cho 5.

Có 5 biểu thức, có 4 số dư khác 0 khi chia cho 5, theo nguyên lí Đê-rích-lê tồn tại hai biểu thức khi chia cho 5 có cùng số dư, hiệu của chúng chia hết cho 5, hiệu của chúng là một số hoặc tổng của một vài số trong năm số đã cho.

Ví dụ 64. Cho 17 số nguyên dương bất kì. Chứng minh rằng trong 17 số đó:

- Tồn tại năm bộ ba số mà ba số trong mỗi bộ đó có tổng chia hết cho 3.
- Tồn tại chín số có tổng chia hết cho 9.

Giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Trong năm số tự nhiên, tồn tại ba số có tổng chia hết cho 3.

Thật vậy, có ba số dư khi chia cho 3 là 0, 1, 2. Nếu có ba số có cùng số dư thì tổng của chúng chia hết cho 3. Nếu trong năm số đã cho, không có đến ba số nào có cùng số dư thì tồn tại ba số có số dư khác nhau, tổng của chúng chia hết cho 3.

a) Lấy 15 số bất kì trong 17 số đã cho, chia thành ba nhóm, mỗi nhóm có năm số. Theo bổ đề trên, trong mỗi nhóm tồn tại ba số có tổng chia hết cho 3, ta được *ba bộ ba số* có tổng chia hết cho 3.

Còn lại: $17 - 9 = 8$ (số). Lấy năm số bất kì trong tám số đó. Theo bổ đề trên, ta được thêm *một bộ ba số* có tổng chia hết cho 3.

Còn lại: $8 - 3 = 5$ (số). Theo bổ đề trên, ta được thêm *một bộ ba số* nữa có tổng chia hết cho 3.

Vậy có $3 + 1 + 1 = 5$ bộ ba số mà các số trong mỗi bộ có tổng chia hết cho 3.

b) Gọi 15 số trong năm bộ ba số được chọn ở câu a là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{15}$. Giả sử

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3k_1$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 3k_2$$

$$a_7 + a_8 + a_9 = 3k_3$$

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} = 3k_4$$

$$a_{13} + a_{14} + a_{15} = 3k_5$$

Xét năm số k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 . Theo bổ đề trên, tồn tại ba số có tổng chia hết cho 3, chẳng hạn $k_1 + k_2 + k_3 \div 3$. Thế thì

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 3(k_1 + k_2 + k_3) \div 9.$$

Ví dụ 65

a) Hãy chỉ ra 18 số tự nhiên liên tiếp mà không có số nào có tổng các chữ số chia hết cho 10.

b) Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì, tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Giải

a) Trong 18 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 18 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18), tổng các chữ số của chúng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 không có số nào có tổng các chữ số chia hết cho 10.

b) Xét 10 số đầu tiên của dãy 19 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số tận cùng bằng 0, gọi số đó là $\overline{A0}$. Xét $\overline{A0}$ và chín số tiếp theo (chín số này vẫn thuộc dãy nói trên):

$$\overline{A0}, \overline{A1}, \overline{A2}, \dots, \overline{A9}. \quad (1)$$

Gọi tổng các chữ số của $\overline{A0}$ là k thì tổng các chữ số của 10 số trên là

$$k, k+1, k+2, \dots, k+9. \quad (2)$$

Dãy (2) là 10 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số chia hết cho 10, do đó tồn tại một số của dãy (1) có tổng các chữ số chia hết cho 10.

II. TỒN TẠI MỘT TẬP HỢP CÓ MỘT TÍNH CHẤT NÀO ĐÓ

Ví dụ 66. Cho ba số nguyên dương khác nhau, mỗi số có dạng 7^k với $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại hai số có tích là số chính phương.

Giải

Gọi ba số đã cho là $a = 7^x, b = 7^y, c = 7^z$.

Trong ba số tự nhiên x, y, z , tồn tại hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ, chẳng hạn x và y . Khi đó $x+y$ là số chẵn.

Đặt $x + y = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$). Ta có

$$ab = 7^x \cdot 7^y = 7^{x+y} = 7^{2n} = (7^n)^2, \text{ là số chính phương.}$$

Ví dụ 67. Trong 25 số nguyên dương từ 1 đến 25, chọn ra 12 số trong đó không có hai số nào có tổng bằng 25. Chứng minh rằng trong 12 số đó, tồn tại một số chính phương.

Giải

Ta thấy $25 = 5^2 = 3^2 + 4^2$. Trong 25 số đã cho, xếp ba số vào tập hợp $A = \{3^2; 4^2; 5^2\}$, còn lại 22 số chia thành 11 cặp, mỗi cặp có tổng bằng 25, là $(1; 24), (2; 23), \dots, (12; 13)$, trong đó không có cặp $(9; 16)$.

Xét 12 số được chọn. Không có hai số được chọn nào là hai số của một trong 11 cặp nói trên (vì nếu có hai số rơi vào một cặp thì tổng của chúng bằng 25, trái với giả thiết).

Mỗi cặp (trong 11 cặp) chỉ chứa nhiều nhất là một số đã chọn. Do có 12 số được chọn nên tồn tại một số thuộc $A = \{3^2; 4^2; 5^2\}$.

Ví dụ 68. Cho 21 số nguyên dương khác nhau bất kì không vượt quá 40. Chứng minh rằng tồn tại hai số có tổng bằng 41.

Giải

Gọi A là tập hợp của 21 số nguyên dương đã cho $A = \{a_1; a_2; \dots; a_{21}\}$.

Xét tập hợp $B = \{41 - a_1; 41 - a_2; \dots; 41 - a_{21}\}$.

Hai tập hợp A và B có tất cả 42 phần tử, lấy giá trị trong tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 40\}$ có 41 phần tử nên tồn tại hai phần tử bằng nhau. Hai phần tử bằng nhau này không cùng thuộc A , không cùng thuộc B , nên một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc B , chẳng hạn $a_k \in A$ và $41 - a_i \in B$. Khi đó $a_k = 41 - a_i$ nên $a_i + a_k = 41$.

Các số a_i và a_k không bằng nhau (vì tổng của chúng là số lẻ). Đó là hai số phải tìm.

Ví dụ 69. Có hai nhóm: nhóm I có 55 người, nhóm II có 45 người. Trong mỗi nhóm, không có hai người nào bằng tuổi nhau, tuổi mỗi người là một số nguyên dương nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng có thể chọn ra một người ở nhóm I, một người ở nhóm II mà tổng số tuổi của hai người này bằng 100.

Giải

Gọi A và B theo thứ tự là tập hợp số tuổi của những người ở nhóm I và nhóm II. Ta có

$$A = \{a_1; a_2; \dots; a_{55}\}$$

$$B = \{b_1; b_2; \dots; b_{45}\}.$$

Xét tập hợp $C = \{100 - a_1; 100 - a_2; \dots; 100 - a_{55}\}.$

Hai tập hợp B và C có tất cả $45 + 55 = 100$ (phần tử), lấy giá trị trong tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 99\}$ có 99 phần tử nên tồn tại hai phần tử bằng nhau. Hai phần tử bằng nhau này không cùng thuộc B, không cùng thuộc C nên một phần tử thuộc B và một phần tử thuộc C, chẳng hạn $b_k \in B$ và $100 - a_i \in C$. Khi đó $b_k = 100 - a_i$ nên $a_i + b_k = 100$.

Ví dụ 70. a) Cho 51 số nguyên dương khác nhau bất kì không vượt quá 99. Chứng minh rằng tồn tại hai số có hiệu bằng 2.

b) Như câu a, nhưng thay 99 bởi 100.

Giải

a) Gọi A là tập hợp của 51 số đã cho $A = \{a_1; a_2; \dots; a_{51}\}$ với $1 \leq a_i \leq 99$, $i = 1, 2, \dots, 51$

Xét tập hợp $B = \{a_1 + 2; a_2 + 2; \dots; a_{51} + 2\}$ với $3 \leq a_k + 2 \leq 101$, $k = 1, \dots, 51$.

Hai tập hợp A và B có tất cả 102 phần tử, nhận các giá trị trong tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 101\}$ có 101 phần tử nên tồn tại hai phần tử bằng nhau. Hai phần tử bằng nhau này không cùng thuộc A, không cùng thuộc B, nên một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc B, chẳng hạn $a_i \in A$ và $a_k + 2 \in B$. Khi đó $a_i = a_k + 2$ nên $a_i - a_k = 2$.

b) Xếp 51 số đã cho vào hai nhóm chẵn và lẻ. Tồn tại 26 số thuộc cùng một nhóm. Hai số bất kì thuộc nhóm này có hiệu chia hết cho 2. (1)

Trong 26 số nói trên, tồn tại hai số có hiệu bằng $d < 4$, vì nếu mọi cặp hai số trong nhóm đều có hiệu lớn hơn hoặc bằng 4 thì số lớn nhất của nhóm lớn hơn hoặc bằng $1 + 4.25 = 101 > 100$, trái với đề bài.

Do (1) nên $d = 2$.

Ví dụ 71. Cho 101 số nguyên dương khác nhau không vượt quá 300. Chứng minh rằng trong 101 số đó:

a) Tồn tại hai số có hiệu nhỏ hơn 3.

b) Tồn tại hai số mà tổng của chúng chia hết cho hiệu của chúng.

Giải

a) Gọi 101 số đã cho sắp xếp tăng dần là $a_1, a_2, \dots, a_{101}$.

Ta có $a_{101} - a_1 = (a_{101} - a_{100}) + (a_{100} - a_{99}) + \dots + (a_2 - a_1) \leq 300 - 1 = 299$.

Trong 100 hiệu (ở trong ngoặc) nói trên, tồn tại một hiệu nhỏ hơn 3, vì nếu chúng đều lớn hơn hoặc bằng 3 thì $a_{101} - a_1 \geq 3 \cdot 100 = 300$, mâu thuẫn.

Vậy tồn tại hai số có hiệu nhỏ hơn 3.

b) Gọi hai số có hiệu nhỏ hơn 3 nói trên là a_m và a_n , giả sử $a_m - a_n < 3$.

– Nếu $a_m - a_n = 1$ thì $a_m + a_n \vdots a_m - a_n$.

– Nếu $a_m - a_n = 2$ thì $a_m + a_n$ chẵn nên $a_m + a_n \vdots a_m - a_n$.

Ví dụ 72. Cho 50 số tự nhiên lẻ 1, 3, 5, ..., 99.

a) Chứng minh rằng có thể chọn được 34 số trong các số trên sao cho trong 34 số đó, tồn tại hai số mà một số chia hết cho số còn lại.

b) Chứng minh rằng nếu chọn 33 số trong các số trên thì có thể không có hai số nào mà một số chia hết cho số còn lại.

Giải

a) Mỗi số đã cho đều viết được dưới dạng

$a = 3^k \cdot b$ với $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, b là số lẻ không chia hết cho 3.

Trong 50 số lẻ 1, 3, 5, ..., 99 có 17 số lẻ chia hết cho 3 (là 3, 9, 15, ..., 99, gồm $\frac{99-3}{6} + 1 = 17$ số) nên b nhận $50 - 17 = 33$ giá trị.

Có 34 số dạng $a = 3^k \cdot b$, chỉ có 33 giá trị của b nên tồn tại hai số có giá trị của b bằng nhau, chẳng hạn $a_m = 3^m \cdot b$ và $a_n = 3^n \cdot b$ với $m \geq n$. Khi đó $\frac{3^m \cdot b}{3^n \cdot b} = 3^{m-n}$, tức là $a_m \vdots a_n$.

b) Nếu ta chọn 33 số lớn nhất trong 50 số lẻ đã cho là 35, 37, ..., 99 (có $\frac{99-35}{2} + 1 = 33$ số) thì không tồn tại hai số mà một số chia hết cho số còn lại.

Thật vậy, giả sử trong 33 số đó có hai số x và y khác nhau mà $x \vdots y$ thì $x \geq 3y$. Khi đó $99 \geq x \geq 3y \geq 3 \cdot 35 = 105$, mâu thuẫn.

BÀI TẬP

68. Một siêu thị có 128 thùng táo. Số táo của mỗi thùng trong khoảng từ 120 đến 144 quả. Tìm giá trị lớn nhất của n để tồn tại n thùng có số táo như nhau.
69. Chứng minh rằng tồn tại một bội của 19:
- a) Gồm toàn chữ số 1 và 0;
 - b) Gồm toàn chữ số 1.
70. Chứng minh rằng có vô số bội của 7^{10} mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 0, 1, 2.
71. Chứng minh rằng trong sáu số tự nhiên lẻ bất kì, tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 10.
72. Chứng minh rằng trong chín số nguyên tố lớn hơn 5 bất kì, tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 30.
73. Chứng minh rằng trong sáu số tự nhiên bất kì, tồn tại hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.
74. a) Chứng minh rằng tồn tại bốn số nguyên dương khác nhau mà tổng của ba số bất kì trong chúng là một số nguyên tố.
b) Chứng minh rằng không tồn tại năm số nguyên dương khác nhau mà tổng của ba số bất kì trong chúng là một số nguyên tố.
75. Chứng minh rằng trong bảy số nguyên dương bất kì, tồn tại bốn số có tổng chia hết cho 4.
76. Chứng minh rằng trong 59 số tự nhiên liên tiếp bất kì, tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 12.
77. Cho năm số nguyên dương khác nhau không có ước nguyên tố khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó, tồn tại hai số có tích là số chính phương.
78. Cho 625 số nguyên dương từ 1 đến 625. Người ta chọn ra trong các số đó 311 số, trong đó không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số đó, tồn tại một số chính phương.
79. Chứng minh rằng trong 31 số nguyên dương khác nhau bất kì không vượt quá 60, tồn tại hai số có tổng bằng 61.

80. Có 35 nam, có tuổi là các số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 80. Có 45 nữ, có tuổi là các số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 80. Chứng minh rằng có thể chọn ra một nam và một nữ có tổng số tuổi bằng 80.
81. Cho 25 số nguyên dương khác nhau bất kì có tổng không vượt quá 410. Chứng minh rằng có thể chọn ra tám số chia thành bốn cặp, mỗi cặp có tổng bằng 25.
82. Cho tập hợp A có bốn phần tử là các số nguyên dương không quá 5. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp B và C khác nhau, mỗi tập hợp có từ 1 đến 3 phần tử, các phần tử đều thuộc A sao cho tổng các phần tử của B bằng tổng các phần tử của C.
83. Cho 101 số nguyên dương khác nhau bất kì không vượt quá 300. Chứng minh rằng trong 101 số trên, tồn tại hai số có hiệu bằng 4 hoặc 8.
84. Cho 1050 số $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{1050}$. Chọn ra 33 số trong các số trên. Chứng minh rằng trong các số được chọn, tồn tại hai số có hiệu nhỏ hơn 1.

Chuyên đề 9

CÁC BÀI TOÁN SUY LUẬN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Các bài toán trong chuyên đề này có nhiều dạng:

– Dạng 1. Các bài toán liên quan đến sự tương hỗ, có quan hệ hai chiều (chẳng hạn: nếu A quen B thì B quen A, nếu A đã thi đấu với B thì B đã thi đấu với A,...).

– Dạng 2. Các bài toán liên quan đến sự thay đổi trạng thái, thay đổi giá trị nhưng lại có tính chất không đổi (gọi là *bất biến*).

– Dạng 3. Các bài toán đòi hỏi lập luận (chứ không phải kiến thức) là chủ yếu, như biết xét đủ các trường hợp có thể xảy ra, biết đưa ra phương án giải quyết hợp lý có sức thuyết phục.

Trong các bài toán suy luận, ta cũng sử dụng phương pháp phản chứng, nguyên lý Đê-rích-lê.

Thử trí thông minh

THỬ LÀM “BAO CÔNG XỬ ÁN”

Một nhà giàu bị kẻ gian lén vào lấy trộm thóc ở ba cốt, chỉ còn lại ở cốt thứ nhất: ba đấu thóc và một cái nôi, ở cốt thứ hai: một đấu thóc và một cái vung nôi, ở cốt thứ ba: hai đấu thóc và một cái rá.

Ba tên trộm Giáp, Ất, Bính bị bắt giải lên quan. Tên Giáp khai đã lấy thóc bằng nôi, tên Ất khai



lấy thóc bằng vung nổi, tên Bính khai lấy thóc bằng rá, mỗi lần chúng đều đóng đầy thóc bởi các dụng cụ trên. Khi cho đóng lại thì nổi chứa đúng 7 đấu thóc, vung nổi chứa đúng 3 đấu thóc, còn rá chứa đúng 5 đấu thóc.

Biết số thóc ở mỗi cút bằng nhau, nhiều hơn 200 đấu và ít hơn 300 đấu. Em hãy thử làm “Bao công xử án” xác định mỗi tên trộm đã lấy bao nhiêu đấu thóc để chúng phải “tâm khẩu, khẩu phục”.

Giải

Trước hết ta tìm số đấu thóc ở mỗi cút thóc. Số đấu thóc đó là một số trong khoảng từ 201 đến 299 thỏa mãn ba điều kiện: chia cho 7 dư 3, chia cho 3 dư 1, chia cho 5 dư 2.

Xét điều kiện chia cho 7 dư 3. Ta thấy $201 : 7 = 28$ (dư 5) nên 203 chia hết cho 7. Số đấu thóc chia cho 7 dư 3 nên thuộc dãy số sau: 206, 213, 220, 227, 234, 241, 248, 255, 262, 269, 276, 283, 290, 297.

Xét điều kiện chia cho 5 dư 2. Trong các số trên ta chọn số chia cho 5 dư 2, tức là số tận cùng bằng 2 hoặc 7, đó là các số 227, 262, 297.

Xét điều kiện chia cho 3 dư 1. Trong các số trên chỉ có 262 chia cho 3 dư 1.

Vậy số đấu thóc ở mỗi cút thóc là 262 đấu.

Giáp lấy: $262 - 3 = 259$ (đấu).

Ất lấy: $262 - 1 = 261$ (đấu).

Bính lấy: $262 - 2 = 260$ (đấu).

Lưu ý. Bài toán được giải nhanh hơn nếu đề bài thay đổi ở hai dữ kiện như sau:

Đề bài cũ	Đề bài sửa lại
ba đấu thóc và một cái nổi	bốn đấu thóc và một cái nổi
một đấu thóc và một cái vung nổi	chỉ có một cái vung nổi

Khi đó, số đấu thóc cộng với 3 phải chia hết cho 7, cho 3, cho 5 nên chia hết cho $7.3.5 = 105$, do đó là 210. Số đấu thóc ở mỗi cút thóc là $210 - 3 = 207$ (đấu).

Giáp lấy: $207 - 4 = 203$ (đấu).

Ất lấy: 207 (đấu).

Bính lấy: $207 - 2 = 205$ (đấu).

I. SỰ TƯƠNG HỒ

Ví dụ 73. Có 16 đấu thủ thi đấu bóng bàn theo thể thức đấu vòng tròn, mỗi người đấu với mỗi người khác một trận (không có trận hoà). Chứng minh rằng khi kết thúc giải đấu, có thể xếp năm người vào một danh sách sao cho mỗi người đứng trước thắng tất cả những người đứng sau.

Giải

Có $\frac{16.15}{2} = 120$ trận đấu, nên có 120 trận thắng. Do 120 chia 16 được 7 và còn dư nên tồn tại một đấu thủ thắng 8 trận, gọi người đó là A.

Xét 8 người thua A, những người này đấu với nhau $\frac{8.7}{2} = 28$ trận, nên có 28 trận thắng. Do 28 chia 8 được 3 và còn dư nên tồn tại một đấu thủ thắng 4 trận, gọi người đó là B.

Xét 4 người thua B, những người này đấu với nhau $\frac{4.3}{2} = 6$ trận, nên có 6 trận thắng. Do 6 chia cho 4 được 1 và còn dư nên tồn tại một đấu thủ thắng 2 trận, gọi người đó là C.

Xét hai người thua C đó, gọi người thắng trong trận đấu giữa hai người này là D, người còn lại là E.

Ta có đấu thủ A thắng B, C, D, E; đấu thủ B thắng C, D, E; đấu thủ C thắng D và E; đấu thủ D thắng E.

Ví dụ 74. Chứng minh rằng trong số 9 người, tồn tại một người quen ít nhất 4 người hoặc không quen ít nhất 6 người.

Giải

Trước hết ta thấy không thể có mỗi người quen đúng 3 người khác. Thật vậy, nếu mỗi người quen đúng 3 người khác thì số cặp quen nhau là $\frac{3.9}{2}$, không là số tự nhiên, vô lí.

Gọi một trong 9 người là A, giả sử A quen x người. Theo nhận xét trên thì $x \neq 3$.

Nếu $x \geq 4$ thì bài toán được chứng minh.

Nếu $x \leq 2$ thì số người mà A không quen lớn hơn hay bằng 6, bài toán được chứng minh.

II. SỰ THAY ĐỔI TRẠNG THÁI, THAY ĐỔI GIÁ TRỊ

Ví dụ 75. Ba bạn A, B, C có tất cả 30 viên bi: A có 9 viên, B có 10 viên, C có 11 viên. Mỗi lượt, một bạn tùy ý nhận của mỗi người kia một viên bi. Sau một số lượt, có thể xảy ra ba người có số bi bằng nhau được không?

Giải

Số bị của ba bạn A, B, C lúc đầu có số dư khi chia cho 3 là 0, 1, 2.

Nếu A nhận được bi của hai bạn kia thì số bi của A, B, C là 11, 9, 10 có số dư khi chia cho 3 là 2, 0, 1.

Nếu B nhận được bi của hai bạn kia thì số bi của A, B, C là 8, 12, 10 có số dư khi chia cho 3 là 2, 0, 1.

Nếu C nhận được bi của hai bạn kia thì số bi của A, B, C là 8, 9, 13 có số dư khi chia cho 3 là 2, 0, 1.

Như vậy, sau lượt đầu tiên, số bị của ba bạn đều có số dư khi chia cho 3 là ba số khác nhau trong tập hợp $\{0; 1; 2\}$.

Sau mỗi lượt tiếp theo cũng như vậy, không bao giờ xảy ra số dư là 1, 1, 1, tức là không bao giờ xảy ra mỗi ban đều có 10 viên bi.

Lưu ý. Trong bài toán trên, có một tính chất không thay đổi (gọi là *bất biến*) ở mỗi lượt, đó là số bị chia của ba người khi chia cho 3 đều có đủ ba số dư là 0, 1, 2.

Ví dụ 76. Có n bóng đèn đang ở trạng thái tắt. Mỗi lượt, người ta thay đổi trạng thái bật – tắt của bốn bóng đèn (tắt thành bật, bật thành tắt). Có thể xảy ra tắt cả n bóng đèn đều bật không nếu n bằng:

- a) 50 ; b) 31 ?

Giải

- a) Có thể xảy ra.

Trong 12 lượt, mỗi lượt ta bật bốn bóng đèn, được 48 bóng sáng, còn lại hai bóng 49 và 50.

Lượt thứ 13, ta bắt bóng 49 và tắt ba bóng 1, 2, 3.

Lượt thứ 14, ta bắt bóng 50 và bắt ba bóng 1, 2, 3.

Tất cả 50 bóng đèn đều ở trạng thái bật.

- b) Không thể xảy ra.

Lúc đầu, số bóng đèn bật là 0. Sau lượt thứ nhất, số bóng đèn bật là 4.

Ở mỗi lượt, nếu có thêm x bóng đèn bật ($0 \leq x \leq 4$) thì có thêm $4 - x$ bóng đèn tắt, nên số bóng đèn bật thay đổi là $x - (4 - x) = 2x - 4$, là một số chẵn.

Lúc đầu, số bóng đèn bật bằng 0 (là một số chẵn), mỗi lượt thay đổi một số chẵn (là $2x - 4$), nên số bóng đèn bật luôn là một số chẵn, không thể bằng 31.

Lưu ý. Bất biến trong ví dụ trên là: Số bóng đèn ở một trạng thái (chẳng hạn bật) trong hai lượt liên tiếp luôn chênh lệch một số chẵn.

Ví dụ 77. Cho 48 số $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{49}$.

Người ta xoá hai số x, y bất kì trong các số trên rồi thay bằng số mới $xy + x + y$. Lại xoá số mới và một số cũ rồi thay bằng số mới khác theo quy luật trên. Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi được số mới cuối cùng. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

Giải

Gọi 48 số đã cho lần lượt bị xoá là $a_1, a_2, \dots, a_{48}$. Gọi số mới lần lượt thêm vào là $b_1, b_2, b_3, \dots$

Ta xoá a_1 và a_2 rồi thay bằng b_1 , xoá b_1 và a_3 rồi thay bằng b_2 , xoá b_2 và a_4 rồi thay bằng $b_3, \dots$, xoá b_{46} và a_{48} rồi thay bằng b_{47} . Giá trị phải tìm là b_{47} .

Ta có hằng đẳng thức $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$ nên

$$xy + x + y = (x + 1)(y + 1) - 1.$$

$$\text{Do đó } b_1 = a_1 a_2 + a_1 + a_2 = (a_1 + 1)(a_2 + 1) - 1$$

$$b_2 = (b_1 + 1)(a_3 + 1) - 1 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) - 1$$

$$b_3 = (b_2 + 1)(a_4 + 1) - 1 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)(a_4 + 1) - 1.$$

Cứ như vậy ta có

$$b_{47} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_{47} + 1)(a_{48} + 1) - 1$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{48} + 1\right) \left(\frac{1}{49} + 1\right) - 1$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{50}{49} - 1 = 25 - 1 = 24.$$

Vậy số còn lại sau cùng là 24.

Ví dụ 78. Cho ba số khác nhau trên bảng. Mỗi lượt, ta xoá hai số bất kì trong ba số đang có, giả sử xoá a và b , rồi thay bằng hai số mới là $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ và $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, giữ nguyên số còn lại. Cứ làm như vậy nhiều lần, ta được ba số là $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$ và 0 . Ba số lúc đầu có thể là 1 , $\sqrt{2}$, 2 hay không?

Giải

Ta có hằng đẳng thức
$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Do đó tổng các bình phương của hai số vừa xoá bằng tổng các bình phương của hai số vừa thêm vào, suy ra tổng các bình phương của ba số lúc đầu bằng tổng các bình phương của ba số lúc cuối.

Giả sử ba số lúc đầu là 1 , $\sqrt{2}$, 2 thì tổng các bình phương của chúng bằng $1^2 + (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 7$.

Tổng các bình phương của ba số lúc cuối bằng

$$(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2 + 0^2 = 12 \neq 7.$$

Vậy ba số lúc đầu không thể là 1 , $\sqrt{2}$, 2 .

Lưu ý. Bất biến trong ví dụ trên là tổng các bình phương của ba số trên bảng không thay đổi.

BÀI TẬP

85. Ba bạn A, B, C tham gia một cuộc thi. Kết quả đa số thành viên trong Ban giám khảo cho điểm của A cao hơn điểm của B, cho điểm của B cao hơn điểm của C. Có thể khẳng định rằng đa số thành viên trong Ban giám khảo cho điểm của A cao hơn điểm của C hay không?
86. Trong một cuộc thi đấu bóng bàn, mỗi đấu thủ thi với mỗi đấu thủ khác một trận, không có trận hoà. Chứng minh rằng tồn tại ba đấu thủ A, B, C mà A thắng B, B thắng C, C thắng A nếu xảy ra một trong các điều kiện sau:
 - a) Không có đấu thủ nào thắng tất cả các trận.
 - b) Có hai đấu thủ có số trận thắng bằng nhau.

87. Trong một giải bóng đá, có 9 đội đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng sau khi kết thúc ba vòng đấu (tức là mỗi đội đã đấu đúng 3 trận), tồn tại ba đội đôi một chưa đấu với nhau.
88. Viết 20 số $1, 2, 3, 4, \dots, 20$ theo thứ tự tăng dần. Mỗi lượt, ta đổi chỗ hai số cách nhau một số (chẳng hạn đổi chỗ 1 và 3, đổi chỗ 8 và 10...). Cứ làm như vậy, ta có thể được dãy số theo thứ tự ngược lại là $20, 19, \dots, 2, 1$ hay không?
89. Có 51 quân bài đang đặt sấp. Mỗi lượt, người ta thay đổi vị trí sấp – ngửa của 6 quân bài. Có thể xảy ra tất cả 51 quân bài đều đặt ngửa hay không?
90. Có 75 bóng đèn gồm 30 bóng xanh, 25 bóng đỏ, 20 bóng vàng. Mỗi lượt người ta đổi màu của hai bóng khác màu sang màu thứ ba (chẳng hạn đổi màu một bóng xanh và một bóng đỏ thành hai bóng vàng). Có thể xảy ra được toàn bộ 75 bóng đèn đều cùng một màu hay không?
91. Cho một dãy gồm n số tự nhiên ($n \geq 4$) là $1, 2, 3, \dots, n$. Mỗi lượt, người ta xoá hai số x, y bất kì rồi thay bằng số $xy + x + y$. Lại xoá số mới và một số cũ rồi thay bằng số mới khác theo quy luật trên. Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi chỉ còn lại số mới cuối cùng. Số đó có thể là 362882 được không?
92. Cho 100 số nguyên dương khác nhau không quá 150. Chứng minh rằng tồn tại 49 cặp số nguyên dương liên tiếp trong các số trên.
93. Hai bạn A và B cùng làm một bài thi. A trả lời sai $\frac{1}{3}$ số câu hỏi, B trả lời sai 7 câu hỏi. Có $\frac{1}{5}$ số câu hỏi cả hai bạn đều trả lời sai. Có nhiều nhất bao nhiêu câu hỏi mà cả hai bạn đều trả lời đúng?

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN, ĐÁP SỐ

Chuyên đề 1

TÍNH CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

1. Các số được lập bao gồm:

- Các số có tổng các chữ số bằng 6, có một nhóm (1, 2, 3).
- Các số có tổng các chữ số bằng 9, có ba nhóm là (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4).
- Các số có tổng các chữ số bằng 12, có ba nhóm là (1, 5, 6), (2, 4, 6), (3, 4, 5).
- Các số có tổng các chữ số bằng 15, có một nhóm (4, 5, 6).

Tất cả có $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ (nhóm), mỗi nhóm gồm 6 số. Vậy có $6 \cdot 8 = 48$ (số lập được).

2. Ta có $A = n^5 + 5n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 6n = n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6)$.

$$= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Bạn đọc hãy tự chứng minh tích của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 120.

3. Có thể giải bằng nhiều cách như ở Ví dụ 4. Sau đây là một cách giải.

$$\text{Đặt } A = n^2 + 3n - 3 \text{ thì } 4A = 4n^2 + 12n - 12 = (2n + 3)^2 - 21.$$

Nếu $2n + 3 \vdots 7$ thì $(2n + 3)^2 \vdots 49 \Rightarrow 4A$ không chia hết cho 49 $\Rightarrow A$ không chia hết cho 49.

Nếu $2n + 3$ không chia hết cho 7 thì $(2n + 3)^2$ không chia hết cho 7 $\Rightarrow 4A$ không chia hết cho 7 $\Rightarrow A$ không chia hết cho 49.

4. Đặt $4x + 1 = ky$. Giả sử $2 \leq x \leq y$, ta có $ky = 4x + 1 < 4y + y = 5y \Rightarrow k < 5$.

Do k là số lẻ (vì ky là số lẻ) nên $k \in \{1; 3\}$.

- Với $k = 1$ thì $y = 4x + 1$.

$$\text{Từ } 4y + 1 \vdots x \text{ có } 4(4x + 1) + 1 \vdots x \Rightarrow 5 \vdots x \Rightarrow x = 5, y = 21.$$

- Với $k = 3$ thì $3y = 4x + 1$.

$$\text{Từ } 4y + 1 \vdots x \text{ suy ra } 12y + 3 \vdots x \Rightarrow 4(4x + 1) + 3 \vdots x$$

$$\Rightarrow 7 : x \Rightarrow x = 7, y = \frac{29}{3}, \text{ loại.}$$

Đáp số: (5; 21) và (21; 5).

5. a) Ta có nhận xét $a^5 - a : 10$. Thật vậy

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5) \\ &= a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2) + 5a(a - 1)(a + 1), \text{ chia hết cho } 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= [(1^5 - 1) + (2^5 - 2) + \dots + (100^5 - 100)] + (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= 10m + 5050, \text{ tận cùng bằng } 0. \end{aligned}$$

- b) Ta có nhận xét $a^{4n+1} - a : 10$. Thật vậy

$a^{4n+1} - a = a(a^{4n} - 1)$, chia hết cho $a(a^4 - 1)$, nên chia hết cho 10 (theo nhận xét ở câu a).

$$\begin{aligned} B &= [(1^5 - 1) + (2^9 - 2) + \dots + (100^{401} - 100)] + (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= 10n + 5050, \text{ tận cùng bằng } 0. \end{aligned}$$

6. a) $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$

$$2A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$$

$$\text{nên } 2A - A = 2^{100} - 2, \text{ do đó } A = 2^{100} - 2.$$

$$\text{Ta thấy } 2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5 = (\dots 76)^5 = \dots 76.$$

Vậy A tận cùng bằng 74.

- b) n có dạng $5k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow n^2 = 5m - 1$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow n^{20} = (5m - 1)^{10} = (5m)^{10} - 10(5m)^9 + \dots - 10 \cdot 5m + 1, \text{ chia cho } 25 \text{ dư } 1, \text{ nên tận cùng } 01, 26, 51, 76.$$

Chú ý rằng $n^{20} : 4$ nên n^{20} tận cùng bằng 76.

7. Số thừa số 5 có trong tích $90!$ là $\frac{90}{5} + \left[\frac{90}{25} \right] = 18 + 3 = 21$. Số thừa số 2 có

trong tích $90!$ nhiều hơn 21. Do đó 20 chữ số tận cùng (và cả 21 chữ số tận cùng) của $90!$ là các chữ số 0.

8. Ta biết rằng mỗi số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư khi chia cho 9, do đó các số của dãy cuối cùng là số dư khi chia cho 9 của các số trong dãy 10, 11, 12, ..., 98, 99, 100. (1)

Số đầu tiên (là 10) và số cuối cùng (là 100) của dãy (1) đều chia cho 9 dư 1. Do đó trong dãy cuối cùng, chữ số 1 xuất hiện nhiều nhất.

(Chữ số 1 xuất hiện 11 lần trong dãy cuối cùng từ các số 10, 19, 28, ..., 82, 91, 100 của dãy (1), còn mỗi chữ số từ 2 đến 9 đều xuất hiện 10 lần trong dãy cuối cùng).

Chuyên đề 2

SỐ NGUYÊN TỐ – HỢP SỐ

9. a) Xét $p = 3k + 1$ (k nguyên) thì $p^2 + 8 \div 3$, là hợp số.

Xét $p = 3k + 2$ thì $p^2 + 8 \div 3$, là hợp số.

Vậy $p = 3k$, mà p là số nguyên tố nên $p = 3$.

Khi đó $p^2 + 2 = 11$, là số nguyên tố.

b) Tìm được $p = 3$.

c) Tìm được $p = 3$.

10. Đặt $7p + 1 = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) thì $7p = (n + 1)(n - 1)$.

Số $7p$ có bốn ước nguyên dương là 1, 7, p , $7p$ nên có các trường hợp:

$n - 1$	1	7	p
$n + 1$	$7p$	p	7
n	2	8	6
$n^2 = 7p + 1$	4	64	36
p	loại	9, loại	5

Đáp số: $p = 5$.

11. Đặt $7p + 1 = n^3$ ($n \in \mathbb{N}$) thì $7p = (n - 1)(n^2 + n + 1)$.

Có ba trường hợp:

$$\begin{cases} n - 1 = 1 \\ n^2 + n + 1 = 7p \end{cases} \quad \begin{cases} n - 1 = 7 \\ n^2 + n + 1 = p \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 + n + 1 = 7 \\ n - 1 = p \end{cases}$$

Đáp số: $p = 73$.

12. Ta có $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.
Do $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố và $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 > 1$ nên $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 + y^2 = 1$.
Do x và y nguyên dương nên $x = y = 1$. Khi đó $x^4 + 4y^4 = 5$, là số nguyên tố.
13. Xét $p = 2$ thì $p^2 + 23 = 27 = 3^3$ có đúng bốn ước nguyên dương.
Xét $p = 3$ thì $p^2 + 23 = 32 = 2^5$ có đúng sáu ước nguyên dương.
Xét $p > 3$ thì p là số lẻ và không chia hết cho 3. Ta có $p^2 + 23 = p^2 - 1 + 24$.
Do p lẻ nên $p^2 - 1 \vdots 8$. Do p không chia hết cho 3 nên $p^2 - 1 \vdots 3$. Suy ra $p^2 - 1 \vdots 24$, do đó $p^2 + 23 \vdots 24$. Do 24 có nhiều hơn sáu ước nguyên dương nên $p^2 + 23$ có nhiều hơn sáu ước nguyên dương.
Đáp số: $p = 3$.
14. a) Trong 10 số lẻ liên tiếp đã cho, tồn tại ba số là bội của 3, chúng lớn hơn 5 nên là hợp số.
Trong 10 số lẻ liên tiếp đã cho, có đúng hai số là bội của 5, chúng lớn hơn 5 nên là hợp số. Trong hai số đó, tồn tại một số không chia hết cho 3 (vì nếu cả hai bội của 5 đều chia hết cho 3 thì hai số đó chia hết cho 15, mà trong 10 số lẻ liên tiếp chỉ có đúng một bội của 15).
Vậy trong 10 số lẻ liên tiếp lớn hơn 5, tồn tại bốn hợp số.
b) Chẳng hạn dãy 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 có đúng bốn hợp số (là 9, 15, 21, 25).

Chuyên đề 3

SỐ TỰ NHIÊN VÀ CÁC CHỮ SỐ

15. Do $\overline{ab}^2$ có bốn chữ số nên $a > 2$. Ta thấy a khác 3, 4, 5, 6, 7, 8 vì $3b^2 < 3000$, $4b^2 < 4000$, $5b^2 < 5000$, $6b^2 < 6000$, $7b^2 < 7000$, $8b^2 < 8000$.
Xét $\overline{9b}^2 = \overline{9cdb}$, do b^2 tận cùng bằng b nên $b \in \{0; 1; 5; 6\}$. Xét các số 90^2 , 91^2 , 95^2 , 96^2 ta được hai đáp số: $95^2 = 9025$ và $96^2 = 9216$.

16. Đặt $n = \overline{ab}^2 = (a + b)^3$.

Do n bằng bình phương của một số tự nhiên và bằng lập phương của một số tự nhiên nên $n = x^6$ ($x \in \mathbb{N}$). Ta có

$$x^6 = \overline{ab}^2 = (a + b)^3 \text{ nên } \begin{cases} x^3 = \overline{ab} \\ x^2 = a + b \end{cases} \quad (1)$$

Do $x^3 = \overline{ab} \geq 10$ nên $x \geq 3$.

Do $x^2 = a + b \leq 18$ nên $x \leq 4$.

Xét $x = 3$, từ (1) có $\overline{ab} = 27$ và $a + b = 9$, thỏa mãn.

Xét $x = 4$, từ (1) có $\overline{ab} = 64$ và $a + b = 16$, loại.

Đáp số: 27.

17. Xét $\overline{abcde} = \overline{ab}^3$. Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cde} = y$ với $10 \leq x \leq 99$ và $0 \leq y \leq 999$.

Ta có $1000x + y = x^3$ nên $y = x(x^2 - 1000)$.

Do $y \geq 0$ nên $x^2 \geq 1000 \Rightarrow x \geq 32$. (1)

$$\text{Ta có } x^2 - 1000 = \frac{y}{x} \leq \frac{999}{32} = 31\frac{7}{32}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1000 \leq 31 \Rightarrow x^2 \leq 1031 \Rightarrow x \leq 32. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = 32$. Ta có $32^3 = 32768$.

Vậy số phải tìm là : 32768.

18. Xét $\overline{abcdeg} : \overline{abc} \cdot \overline{deg}$.

Đặt $\overline{abc} = x$, $\overline{deg} = y$, ta có $1000x + y : xy \Rightarrow y : x$.

Đặt $y = kx$ với $k \in \mathbb{N}$ và $1 \leq k \leq 9$ thì $1000x + kx : xkx \Rightarrow 1000 + k : kx$ (1)

$$\Rightarrow 1000 : k \Rightarrow k \in \{1; 2; 4; 5; 8\}.$$

Với $k = 1$, thay vào (1) có $1001 : x \Rightarrow x = 143, y = 143$.

Với $k = 2$, thay vào (1) có $1002 : 2x \Rightarrow 501 : x$. Ta có

x	167	501
y	334	1002, loại

Với $k = 4$, thay vào (1) có $1004 : 4x \Rightarrow 251 : x \Rightarrow x = 251, y = 1004$ loại.

Với $k = 5$, thay vào (1) có $1005 : 5x \Rightarrow 201 : x \Rightarrow x = 201, y = 1005$ loại.

Với $k = 8$, thay vào (1) có $1008 : 8x \Rightarrow 126 : x \Rightarrow x = 126, y = 1008$ loại.

Có hai đáp số: $143143 : 143.143$ và $167334 : 167.334$.

19. Giả sử $a^3 + b^3 + c^3 = d^3 + e^3$. (1)

Mỗi số a, b, c, d, e có tổng các chữ số bằng $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ nên chia cho 9 dư 1. Khi $a = 9k + 1$ thì $a^3 = 9m + 1$. Không thể xảy ra (1) vì vế trái chia cho 9 dư 3, còn vế phải chia cho 9 dư 2.

Chuyên đề 4

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

20. a) Chẳng hạn $1^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 = 36 = 6^2$.

b) Mỗi số chính phương lẻ chia cho 8 dư 1 nên tổng của năm số chính phương lẻ chia cho 8 dư 5, không là số chính phương.

21. Xét $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = g^2$. (1)

Trường hợp trong a, b, c, d, e , chỉ có một số chẵn thì vế trái của (1) là số chẵn nên g là số chẵn. Tồn tại hai số chẵn.

Trường hợp a, b, c, d, e đều lẻ không xảy ra (xem Bài tập 20b).

22. a) Giả sử số chẵn m viết được dưới dạng $m = a^2 - b^2$ (a và b nguyên) thì $m = (a + b)(a - b)$. Hiệu $(a + b) - (a - b)$ là số chẵn nên $a + b$ và $a - b$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do m là số chẵn nên $a + b$ và $a - b$ cùng chẵn. Suy ra $(a + b)(a - b) : 4$ tức là $m : 4$.

b) Gọi m là một bội của 4. Xét hai trường hợp:

– Trường hợp m chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8.

$$\text{Ta có } m = 8n + 4 = (4n^2 + 8n + 4) - 4n^2 = (2n + 2)^2 - (2n)^2.$$

– Trường hợp $m : 8$. Ta có

$$m = 8n = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = (2n + 1)^2 - (2n - 1)^2.$$

c) $20 = 6^2 - 4^2, 24 = 7^2 - 5^2, 28 = 8^2 - 6^2$.

d) Từ các nhận xét ở các câu a và b, ta suy ra: Các số không thể viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương là các số chẵn không chia hết cho 4.

Đó là các số 2, 6, 10, 14, ..., 98, tất cả có $\frac{98-2}{4} + 1 = 25$ (số).

23. Giả sử $n = a^2 + b^2 + c^2$ thì

$$3n = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$= (a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2.$$

24. a) $4^3 = 10^2 - 6^2$; $5^3 = 15^2 - 10^2$.

b) Gọi a là số tự nhiên bất kì. Xét hai trường hợp:

– Nếu a chẵn, đặt $a = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$a^3 = (2n)^3 = n^2 \cdot 8n = n^2 [(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2]$$

$$= [n(2n + 1)]^2 - [n(2n - 1)]^2.$$

– Nếu a lẻ, đặt $a = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$a^3 = (2n + 1)^3 = (2n + 1)^2 (2n + 1) = (2n + 1)^2 [(n + 1)^2 - n^2]$$

$$= [(2n + 1)(n + 1)]^2 - [n(2n + 1)]^2.$$

25. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a(a + b - c - d)$

$$= 3a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad$$

$$= (a + b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2.$$

26. a) Trong năm số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 5, một số chia cho 5 dư 1, một số chia cho 5 dư 2, một số chia cho 5 dư 3, một số chia cho 5 dư 4. Tổng các bình phương của chúng chia cho 5 dư 0, 1, 4, 4, 1. Do đó tổng của năm số chính phương liên tiếp chia hết cho 5.

b) Mệnh đề sai, chẳng hạn tổng của chín số chính phương liên tiếp sau không chia hết cho 9, đó là $(-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 60$, chia cho 9 dư 6.

Lưu ý. Nếu thêm điều kiện n là số nguyên tố thì mệnh đề ở câu b là đúng.

27. a) $\frac{n^2 - 1}{3} = a(a + 1) \Rightarrow n^2 - 1 = 3(a^2 + a)$

$$\Rightarrow 4n^2 - 4 = 3(4a^2 + 4a) \Rightarrow 4n^2 - 1 = 3(4a^2 + 4a + 1)$$

$$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2.$$

Do $2n-1$ và $2n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên

$$\begin{cases} 2n+1 = x^2 \\ 2n-1 = 3y^2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 2n-1 = m^2 \\ 2n+1 = 3p^2 \end{cases}$$

Loại trường hợp đầu vì khi đó $x^2 - 3y^2 = 2$, tức là x^2 chia cho 3 dư 2.

$$\text{Vậy } 2n-1 = m^2.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2n-1 \text{ là số chính phương lẻ nên } 2n-1 &= (2k+1)^2 \Rightarrow 2n = 4k^2 + 4k + 2 \\ \Rightarrow n &= 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2. \end{aligned}$$

$$28. \text{ a) Chẳng hạn } 8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2.$$

$$\text{b) } n^2 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow \frac{n^2-1}{3} = x(x+1).$$

Giải tiếp như Bài tập 27.

$$29. \text{ Theo đề bài, } n \text{ có dạng } 6k+3 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}. \text{ Khi đó } 2n = 2(6k+3) = 12k+6, \\ \text{không là số chính phương vì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4.}$$

$$2n+1 = 12k+7, \text{ chia cho 4 dư 3 nên không là số chính phương.}$$

$$2n-1 = 12k+5, \text{ chia cho 3 dư 2 nên không là số chính phương.}$$

$$30. \text{ Giả sử } n^3 + 1 = k^2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}.$$

$$n^3 = k^2 - 1 = (k+1)(k-1).$$

Do n lẻ nên $k+1, k-1$ là hai số lẻ liên tiếp, chúng nguyên tố cùng nhau nên

$$\begin{cases} k+1 = a^3 \\ k-1 = b^3 \end{cases} \quad (a, b \text{ lẻ và } a > b)$$

$$\text{Khi đó } 2 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq 6 \text{ (vì } a-b \geq 2, \text{ còn } a^2 + ab + b^2 \geq 3), \\ \text{vô lí.}$$

$$31. \text{ Đặt } \overline{abcd} = x^2, \overline{dcba} = y^2 \text{ và } y^2 = kx^2 \text{ (} 2 \leq k \leq 9 \text{)}.$$

Suy ra k là số chính phương nên $k \in \{4; 9\}$.

Do a là tận cùng của số chính phương y^2 và $a \neq 0$ nên $a \in \{1; 4; 5; 6; 9\}$.

$$\overline{abcd} \cdot k = \overline{dcba}.$$

Do $k \geq 4$ nên a khác 4, 5, 6, 9 để tích $\overline{abcd} \cdot k$ có bốn chữ số. Vậy $a = 1$.

$d \cdot k$ tận cùng bằng 1 nên k lẻ, vậy $k = 9$.

Ta có $\overline{1bc9} \cdot 9 = \overline{9cb1}$

$$\Rightarrow (1009 + 100b + 10c) \cdot 9 = 9001 + 100c + 10b$$

$$\Rightarrow 9081 + 900b + 90c = 9001 + 100c + 10b$$

$$\Rightarrow 80 + 890b = 10c$$

$$\Rightarrow 89b + 8 = c \Rightarrow b = 0 \text{ và } c = 8.$$

Đáp số: 1089 và 9801.

32. $n = m + 1 \Rightarrow n^2 = m^2 + 2m + 1$

$$\Rightarrow \overline{acb} = \overline{abc} + 2m + 1$$

$$\Rightarrow 10c + b = 10b + c + 2m + 1$$

$$\Rightarrow 9(c - b) = 2m + 1. \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) suy ra } c - b \text{ lẻ.} \quad (2)$$

$$\text{Do } n^2 = \overline{acb} \text{ nên } n \leq 31 \Rightarrow n - 1 \leq 30 \Rightarrow m \leq 30.$$

$$\text{Ta có } 10 \leq m \leq 30 \text{ nên } 21 \leq 2m + 1 \leq 61.$$

$$\text{Do (1) nên } 21 \leq 9(c - b) \leq 61$$

$$\Rightarrow \frac{21}{9} \leq c - b \leq \frac{61}{9} \Rightarrow 3 \leq c - b \leq 6.$$

$$\text{Do (2) nên } c - b \in \{3; 5\}.$$

$$\text{Xét } c - b = 3, \text{ thay vào (1) được } m = 13, n = 14, \text{ thỏa mãn vì } m^2 = 169 \text{ và } n^2 = 196.$$

$$\text{Xét } c - b = 5, \text{ thay vào (1) được } m = 22, n = 23, \text{ loại vì } m^2 = 484, \text{ còn } n^2 = 529.$$

Đáp số: 169 và 196.

33. Giả sử $x \geq y$. Ta có $x^2 < x^2 + 3y < (x + 2)^2$.

$$\text{Do } x^2 + 3y \text{ là số chính phương nên } x^2 + 3y = (x + 1)^2 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow y \text{ lẻ.}$$

$$\text{Đặt } y = 2k + 1 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) thì } 2x = 3y - 1 = 6k + 2 \text{ nên } x = 3k + 1.$$

$$\text{Nếu } k = 0 \text{ thì } x = 1, y = 1. \text{ Ta có } x^2 + 3y = y^2 + 3x = 2^2.$$

$$\text{Xét } k > 0. \text{ Ta có } y^2 + 3x = (2k + 1)^2 + 3(3k + 1) = 4k^2 + 13k + 4.$$

Do $(2k+2)^2 < 4k^2 + 13k + 4 < (2k+4)^2$ nên $4k^2 + 13k + 4 = (2k+3)^2$.

Ta được $k = 5, x = 16, y = 11$.

Đáp số: Các cặp số $(x; y)$ là $(1; 1), (16; 11), (11; 16)$.

34. Trước hết, ta chứng minh $n \vdots 24$ (xem Ví dụ 24).

Xét $n = 24$ thì $20n + 1 = 481$, không là số chính phương.

Xét $n = 48$, đúng.

Đáp số: $n = 48$.

35. Đặt $(n+1)(4n+3) = 3k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Các số $n+1$ và $4n+3$ nguyên tố cùng nhau, trong đó $4n+3$ không là số

chính phương nên
$$\begin{cases} n+1 = a^2 \\ 4n+3 = 3b^2 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 3b^2 = 4n + 4 - 4n - 3 \Rightarrow 4a^2 - 1 = 3b^2$$

$$\Rightarrow (2a-1)(2a+1) = 3b^2.$$

Do $2a-1$ và $2a+1$ nguyên tố cùng nhau nên xét hai trường hợp:

$$\text{a) } \begin{cases} 2a-1 = 3x^2 \\ 2a+1 = y^2 \end{cases}$$

Khi đó $y^2 - 3x^2 = 2 \Rightarrow y^2$ chia cho 3 dư 2, loại.

$$\text{b) } \begin{cases} 2a-1 = x^2 \\ 2a+1 = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 - x^2 = 2. \quad (1)$$

– Nếu x chẵn thì từ (1) suy ra y chẵn. Khi đó, vế trái của (1) chia hết cho 4, vế phải không chia hết cho 4, loại.

– Vậy x lẻ. Từ (1) ta suy ra x không chia hết cho 3.

Do $n+1 = a^2$ và $2a-1 = x^2$ nên n nhỏ nhất $\Leftrightarrow a$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x$ nhỏ nhất.

Do x lẻ, không chia hết cho 3, nên để x nhỏ nhất ta chọn $x = 5$. Khi đó $2a-1 = 25 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow n+1 = 13^2 \Rightarrow n = 168$.

$$\text{Ta có } \frac{(n+1)(4n+3)}{3} = \frac{169 \cdot 675}{3} = (13 \cdot 15)^2.$$

36. Chỉ cần chọn các số tự nhiên a, b, c, d khác nhau sao cho $ab = cd$ thì $a^2 + 2cd + b^2$ và $c^2 + 2ab + d^2$ đều là các số chính phương. Bạn đọc tự tìm một ví dụ.

Chuyên đề 5

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

37. a) Đưa về $(x - y)(x + y - 3) = 2$.

Đáp số: $(3; 2), (0; 1), (3; 1), (0; 2)$.

- b) Đưa về $(2x - 1)(2y - 1) = 21$.

Đáp số: $(11; 1), (4; 2), (-1; -3), (0; -10)$ và các hoán vị.

- c) $x^2 - 4y^2 - 4y = 45 \Leftrightarrow x^2 - 4y(y + 1) = 45$.

Ta thấy x lẻ nên x^2 chia cho 8 dư 1.

Phương trình không có nghiệm nguyên (vế trái chia cho 8 dư 1, vế phải chia cho 8 dư 5).

- d) $x^3 - 3xy = 6y - 1 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 3y(x + 2)$.

Ta có $x^3 + 1 : x + 2 \Rightarrow (x^3 + 8) - 7 : x + 2 \Rightarrow 7 : x + 2$.

Đáp số: $(-1; 0), (5; 6)$.

- e) $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ nên $x^2 + y^2 : 3$. Hãy chứng minh x và y đều chia hết cho 3.

Giải tương tự Ví dụ 34, dùng phương pháp lùi vô hạn.

Đáp số: $(0; 0; 0; 0)$.

38. a) Đưa về phương trình bậc hai với ẩn x : $x^2 - (1 + y)x + (y^2 - y) = 0$.

Từ $\Delta \geq 0$ được $3y^2 - 6y \leq 1 \Rightarrow 3(y - 1)^2 \leq 4 \Rightarrow (y - 1)^2 \in \{0; 1\} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2\}$.

Đáp số: $(0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2)$.

- b) $x^2 - 5x + 2 = y^4 + y^2 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = y^4 + y^2 + 4$. (1)

Ta thấy $y^4 + y^2 + 4 > y^4 + y^2 = y^2(y^2 + 1)$. (2)

Bất đẳng thức $y^4 + y^2 + 4 < (y^2 + 2)(y^2 + 3)$ là đúng. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $y^2(y^2 + 1) < (x - 3)(x - 2) < (y^2 + 2)(y^2 + 3)$
 nên $(x - 3)(x - 2) = (y^2 + 1)(y^2 + 2)$ tức là $y^4 + y^2 + 4 = y^4 + 3y^2 + 2 \Leftrightarrow y^2 = 1$.

Đáp số: (0 ; 1), (0 ; -1), (5 ; 1), (5 ; -1).

$$c) x^6 - x^2 + 6 = y^3 - y \Leftrightarrow x^6 - x^2 + 6 = (y - 1)y(y + 1). \quad (1)$$

$$\text{Ta thấy } x^6 - x^2 + 6 > x^6 - x^2 = (x^2 - 1)x^2(x^2 + 1). \quad (2)$$

Bất đẳng thức $x^6 - x^2 + 6 \leq (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$ là đúng (bạn đọc tự kiểm tra). (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$(x^2 - 1)x^2(x^2 + 1) < (y - 1)y(y + 1) \leq (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$$

$$\text{nên } (y - 1)y(y + 1) = x^2(x^2 + 1)(x^2 + 2) \quad (4)$$

$$\text{hoặc } (y - 1)y(y + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3). \quad (5)$$

Từ (4) và (1) có $x^6 - x^2 + 6 = x^2(x^2 + 1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^2 = 1$. Từ đó $y = 2$.

Từ (5) và (1) có $x^6 - x^2 + 6 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3) \Leftrightarrow x^2 = 0$. Từ đó $y = 2$.

Đáp số: (1 ; 2), (-1 ; 2); (0 ; 2).

39. a) $x^3 + x^2y^2 + y^2 - 2y = 24 \Leftrightarrow x^3 + x^2y^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Suy ra $x^3 \leq 25$ nên $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Đáp số: (0 ; 6), (2 ; 2).

b) Trước hết, ta chứng minh $x^2 - 5x + 7$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên x (xét các trường hợp $x = 3k$, $x = 3k + 1$, $x = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$).

Suy ra 3^y không chia hết cho 9. Xét $y = 0$, $y = 1$.

Đáp số: (2 ; 0), (3 ; 0), (1 ; 1), (4 ; 1).

40. a) $xyz = 2x + 2y + 2z$.

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$ thì $xyz \leq 6z \Rightarrow xy \leq 6 \Rightarrow x^2 \leq 6 \Rightarrow x \in \{1 ; 2\}$.

- Xét $x = 1$. Lần lượt cho y bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, ta được z nguyên và $y \leq z$ trong hai trường hợp: $y = 3$, $y = 4$ cho ta nghiệm (1 ; 3; 8), (1 ; 4; 5).

- Xét $x = 2$. Lần lượt cho y bằng 2 và 3 ta được nghiệm (2 ; 2; 4).

Đáp số: (1 ; 3; 8), (1 ; 4; 5), (2 ; 2; 4) và các hoán vị.

b) $xyz = x + y + 2z$.

Cách 1. Đặt $2z = a$ ta có $x + y = 2(x + y + a)$ với a chẵn.

Giải như câu a) và chú ý rằng a chẵn ta được $(x; y; a)$ bằng $(1; 3; 8), (3; 1; 8), (1; 5; 4), (5; 1; 4), (2; 2; 4), (4; 2; 2), (2; 4; 2)$.

Từ đó $(x; y; z)$ bằng $(1; 3; 4), (3; 1; 4), (1; 5; 2), (5; 1; 2), (2; 2; 2), (4; 2; 1), (2; 4; 1)$.

Cách 2. • Xét $z = 1$ thì $xy = x + y + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 3$.

Giả sử $x \leq y$, ta được $(x; y; z)$ bằng $(2; 4; 1)$.

• Xét $z \geq 2$ thì $x + y = xyz - 2z = z(xy - 2) \geq 2(xy - 2)$

$$\Rightarrow 2xy - 4 \leq x + y \Rightarrow 2xy - x - y \leq 4 \Rightarrow (2x - 1)(2y - 1) \leq 9.$$

Giả sử $x \leq y$ thì $(2x - 1)^2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 2$ (chú ý rằng $x \geq 1$).

– Với $x = 1$ thì $yz = 1 + y + 2z \Leftrightarrow (y - 2)(z - 1) = 3$.

Giả sử $y \leq z$, ta được $(x; y; z)$ bằng $(1; 3; 4)$ và $(1; 5; 2)$.

– Với $x = 2$ thì $2yz = 2 + y + 2z \Leftrightarrow (2z - 1)(y - 1) = 3$.

Do $z \geq 2$ nên $2z - 1 = 3$. Ta được $(x; y; z)$ bằng $(2; 2; 2)$.

Có bảy đáp số như trên.

41. Ta có $x^2 + 7 = 8y \Rightarrow x^2 + 7 \vdots 8$, điều này đúng với mọi x lẻ.

Nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(2k + 1; \frac{k(k+1)}{2} + 1)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

42. a) Cách 1 Đặt $x^2 + 3x + 1 = y^2$ ($y \in \mathbb{N}$).

Hãy chứng minh $(x + 1)^2 \leq x^2 + 3x + 1 < (x + 2)^2$, từ đó $(x + 1)^2 \leq y^2 < (x + 2)^2$ nên $(x + 1)^2 = y^2$, tức là $(x + 1)^2 = x^2 + 3x + 1$.

Đáp số: $x = 0$.

Cách 2. Biến đổi $x^2 + 3x + 1 = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 4 = 4y^2$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 - (2y)^2 = 5. \text{ Đưa về phương trình ước số.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^4 - x^2 + 2x + 2 &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 2x + 2 \\ &= x^2(x^2 - 2x + 2) + 2x(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) \\ &= (x + 1)^2(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên $(x + 1)^2 \neq 0$, suy ra $x^2 - 2x + 2$ phải là số chính phương, tức là $(x - 1)^2 + 1$ là số chính phương.

Ta có $(x-1)^2$ và $(x-1)^2 + 1$ là số chính phương nên $(x-1)^2 = 0$.

Đáp số: $x = 1$.

c) Lần lượt xét $x = 0, x \geq 1$. Đáp số: $x = 0$.

d) Lần lượt xét x lẻ, x chẵn. Giải tương tự Ví dụ 45b. Đáp số: $x = 2$.

43. Viết thành phương trình bậc hai với ẩn y , được

$$y^2 + (1-x)y + x = 0.$$

$$\Delta = x^2 - 6x + 1.$$

Phải có $x^2 - 6x + 1 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow (x-3+m)(x-3-m) = 8$.

$x-3+m$	8	4
$x-3-m$	1	2
m	3,5	1
x	loại	6

Đáp số: $(6; 2), (6; 3)$.

44. a) Đặt $x^2 + 3xy + y^2 = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Trong hai số x và y , phải có một số chia hết cho 3 vì nếu cả hai số đều không chia hết cho 3 thì $x^2 + y^2$ chia 3 dư 2 nên n^2 chia 3 dư 2, vô lí.

Giả sử $y \vdots 3$, do y là số nguyên tố nên $y = 3$.

$$\text{Ta có } x^2 + 9x + 9 = n^2 \Leftrightarrow (2x+9)^2 - 4n^2 = 45$$

$$\Leftrightarrow (2x+9+2n)(2x+9-2n) = 45.$$

Do $x \geq 2$ nên $n \geq 6$, suy ra $2x+9+2n \geq 25$. Do đó

$$\begin{cases} 2x+9+2n = 45 \\ 2x+9-2n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ n = 11 \end{cases}$$

Đáp số: $(7; 3), (3; 7)$.

b) Đặt $x^2 + 3xy + y^2 = 5^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Do $x \geq 2, y \geq 2$ nên $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } x^2 + 3xy + y^2 \vdots 25 &\Rightarrow (x-y)^2 + 5xy \vdots 25 \Rightarrow (x-y)^2 \vdots 5 \Rightarrow x-y \vdots 5 \\ &\Rightarrow (x-y)^2 \vdots 25 \Rightarrow 5xy \vdots 25 \Rightarrow xy \vdots 5. \end{aligned}$$

Trong x và y phải có một số chia hết cho 5, lại có $x - y : 5$ nên x và y đều chia hết cho 5.

Do x, y là các số nguyên tố nên $x = y = 5$.

Khi đó $n = 3$.

45. a) Với $y \geq 0$ ta có $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = y$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 + 2\sqrt{x(x+5)} = y^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+5)} = y^2 - 2x - 5.$$

Đặt $y^2 - 2x - 5 = n \in \mathbb{N}$, ta có

$$4x(x+5) = n^2 \Leftrightarrow (2x+5)^2 - n^2 = 25 \Leftrightarrow (2x+5+n)(2x+5-n) = 25.$$

Đáp số: (4 ; 5).

$$\text{b) Đặt } \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a \geq 0 \text{ thì } x = a^2 - \frac{1}{4}. \quad (1)$$

$$\text{Phương trình trở thành } y = a^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{a^2 + a + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = a^2 - \frac{1}{4} + \left(a + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (2)$$

$$\text{Do } a \geq 0 \text{ nên } y \geq \frac{1}{4}. \text{ Từ (2) suy ra } \sqrt{y} = a + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Kết hợp với (1) được } x = \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y - \sqrt{y}.$$

Do x và y là số nguyên nên y phải là số chính phương.

$$\text{Ta lại có } y \geq \frac{1}{4} \text{ nên } y = k^2 \text{ (} k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \text{), khi đó } x = k^2 - k.$$

Đáp số: $(k^2 - k ; k^2)$ với $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

46. Từ $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ suy ra $a > b$ và $a > c$. Do đó $2a > b + c$.

$$\text{Kết hợp với } 2(b+c) = a^2 \text{ suy ra } 4a > a^2 \text{ nên } a < 4.$$

$$\text{Từ } a^2 = 2(b+c) \text{ suy ra } a : 2 \text{ nên } a = 2.$$

Đáp số: $a = 2, b = c = 1$.

47. Ta có $2xy - x - 3y = k \Leftrightarrow 4xy - 2x - 6y = 2k \Leftrightarrow (2x - 3)(2y - 1) = 2k + 3$.

Số nghiệm nguyên dương của phương trình là số ước nguyên dương của $2k + 3$.

Để số nghiệm nguyên dương là số lẻ thì $2k + 3$ phải là số chính phương. Để k nhỏ nhất, ta lần lượt cho k bằng 1, 2, 3, ... đến $k = 3$ ta được $2k + 3 = 9$ là số chính phương.

Phương trình $(2x - 3)(2y - 1) = 9$.

Ta tìm được các nghiệm nguyên dương là $(6; 1), (3; 2), (2; 5)$.

48. a) Gọi số tự nhiên phải tìm là x . Trước hết ta tìm nghiệm nguyên của phương trình $31x = 23y + 16$.

Biểu thị y theo x được $y = \frac{31x - 16}{23} = x - 1 + \frac{8x + 7}{23}$. (1)

Đặt $\frac{8x + 7}{23} = k \in \mathbb{Z}$ thì $8x + 7 = 23k$.

Biểu thị x theo k được $x = \frac{23k - 7}{8} = 3k - 1 - \frac{k - 1}{8}$. (2)

Đặt $\frac{k - 1}{8} = m \in \mathbb{Z}$ thì $k - 1 = 8m$ nên $k = 8m + 1$.

Thay vào (2) được $x = 3(8m + 1) - 1 - m = 23m + 2$.

Cần chọn số nguyên m nhỏ nhất sao cho $23m + 2 \geq 100$. Ta chọn $m = 5$ và được $x = 23 \cdot 5 + 2 = 117$.

Thay vào (1) được $y = 117 - 1 + \frac{8 \cdot 117 + 7}{23} = 157$.

Khi đó $117 \cdot 31 = 23 \cdot 157 + 16$.

b) Gọi số tự nhiên phải tìm là $100x + 84$. Trước hết ta tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $100x + 84 = 83y$.

$y = \frac{100x + 84}{83} = x + 1 + \frac{17x + 1}{83}$.

Đặt $17x + 1 = 83k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì $x = \frac{83k - 1}{17} = 5k - \frac{2k + 1}{17}$.

Đặt $2k + 1 = 17m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) thì $\frac{17m - 1}{2} = 8m + \frac{m - 1}{2}$.

Chọn số nguyên dương m nhỏ nhất là 1, ta được $k = 8, x = 39$.

Số nhỏ nhất phải tìm là 3984.

49. a) Gọi số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai, số câu bỏ qua lần lượt là x, y, z .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y + z = 20 & (1) \\ 5x - y = 58 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 6x + z = 78, \text{ nên } z \geq 6. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) suy ra } x \geq 12 \text{ nên } 6x \geq 72, \text{ do đó } z \leq 6. \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } z = 6. \text{ Từ đó } x = 12, y = 2.$$

Đáp số: Tùng trả lời đúng 12 câu, trả lời sai 2 câu, bỏ qua không trả lời 6 câu.

- b) Gọi số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai, số câu bỏ qua lần lượt là x, y, z .

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 5x - 2y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 40 \\ 5x - 2y = 51 \end{cases}$$

Hãy chứng minh $z \geq 7$ và $z \leq 7$.

$$\text{Từ đó } z = 7, x = 11, y = 2.$$

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 5x - 2y = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 40 & (1) \\ 5x - 2y = 42 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 7x + 2z = 82. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) suy ra } x \geq 9 \text{ và } x \text{ chẵn.}$$

$$\text{Từ (3) suy ra } x \leq 11. \text{ Vậy } x = 10, y = 4, z = 6.$$

50. Gọi số khách hàng là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Theo trường hợp thứ nhất, số lọ hoa là $x + y$.

Theo trường hợp thứ hai, có $x - y$ người mua được lọ hoa nên số lọ hoa là $y(x - y)$.

$$\text{Ta có phương trình } x + y = y(x - y).$$

Giải phương trình trên với nghiệm nguyên, ta được $x = 6$ (xem Bài tập 43), còn $y = 2$ hoặc $y = 3$.

$$\text{Do } y \text{ là số chẵn (theo đề bài) nên } y = 2.$$

Đáp số: Có 6 khách hàng, có 8 lọ hoa.

Chuyên đề 6

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

51. Ta có $A = \frac{31.30}{2}$, là một số lẻ.

Mỗi lần thay dấu cộng trước số hạng a bởi dấu trừ thì tổng giảm đi $2a$, là một số chẵn, do đó giá trị của biểu thức mới luôn là một số lẻ.

Số tự nhiên lẻ nhỏ nhất là 1.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức mới là 1, khi chẳng hạn biểu thức gồm bảy cặp có giá trị -1 , tám cặp có giá trị 1 như sau:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 13 - 14 - 15 + 16 - 17 + 18 - \dots - 29 + 30.$$

52. Số n phải chia hết cho 2 và cho 3. Để n là số nguyên dương nhỏ nhất ta chọn $n = 2^x \cdot 3^y$. Khi đó:

$$2n = 2^{x+1} \cdot 3^y = a^2 \Rightarrow x+1 : 2 ; y : 2.$$

$$3n = 2^x \cdot 3^{y+1} = b^3 \Rightarrow x : 3 ; y+1 : 3.$$

Để x chia hết cho 3 và nhỏ nhất sao cho $x+1 : 2$, ta chọn $x = 3$. Để y chia hết cho 2 và nhỏ nhất sao cho $y+1 : 3$, ta chọn $y = 2$.

$$\text{Khi đó } n = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

53. Giải tương tự Ví dụ 46.

$$\text{a) } \max(xy) = 26.25 = 650.$$

$$\text{b) } \min(xy) = 49.2 = 98.$$

54. Ta sẽ chứng minh rằng $B < A < C$, trong đó B và C đều là các số có 201 chữ số và hai chữ số đầu tiên bên trái đều là 10.

$$\text{Chọn } B = 10^{200} = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{200 \text{ chữ số}}, \text{ có 201 chữ số.}$$

$$\text{Chọn } C = 10^2 + 10^4 + 10^6 + \dots + 10^{200} = \underbrace{101 \ 01 \ \dots \ 01 \ 00}_{99 \text{ cặp } 01}, \text{ có 201 chữ số.}$$

$$\text{Ta thấy } B = 10^{200} = 100^{100} < A,$$

$$C = 100^1 + 100^2 + 100^3 + \dots + 100^{100} > A.$$

Vậy A có 201 chữ số, hai chữ số đầu tiên bên trái là 10.

55. a) Đáp số: $14 \cdot 25 \cdot 36 = 12600$.

Tham khảo ở lời giải của câu b.

b) Để tích của ba số cần tìm có giá trị nhỏ nhất, các chữ số hàng trăm của chúng phải có giá trị nhỏ nhất, ta chọn các chữ số 1, 2, 3.

Để tích của ba số cần tìm có giá trị nhỏ nhất, các chữ số hàng chục của chúng phải có giá trị nhỏ nhất, ta chọn các chữ số 4, 5, 6.

Tích nhỏ nhất cần tìm có dạng $\overline{1a^*} \cdot \overline{2b^*} \cdot \overline{3c^*}$ trong đó $a, b, c \in \{4; 5; 6\}$.

Hãy chứng minh $a < b < c$. Khi đó tích nhỏ nhất cần tìm có dạng $\overline{14m} \cdot \overline{25n} \cdot \overline{36p}$.

Hãy chứng minh $m < n < p$.

Tích nhỏ nhất cần tìm là $147 \cdot 258 \cdot 369$.

c) Từ kết quả của câu b (tích nhỏ nhất là $147 \cdot 258 \cdot 369$), ta rút ra nhận xét:

– Các chữ số hàng trăm phải nhỏ nhất (là 1, 2, 3).

– Các chữ số hàng chục phải nhỏ nhất trong các chữ số còn lại, trong đó chữ số hàng chục nhỏ ứng với chữ số hàng trăm nhỏ.

Xét $A = a \cdot \overline{bc} \cdot \overline{deg}$ thì $1000A = \overline{a00} \cdot \overline{bc0} \cdot \overline{deg}$.

Theo nhận xét trên, ta có:

– Các chữ số $a, b, d \in \{1; 2; 3\}$, $c, e \in \{4; 5\}$.

– Do chữ số hàng chục của $\overline{a00}$ nhỏ hơn chữ số hàng chục của hai số kia nên a nhỏ hơn b và d , do đó $a = 1$.

– Xét $\overline{bc0}$ và $\overline{deg}$, do $0 < g$ nên $c < e$ và $b < d$, suy ra $c = 4, e = 5, b = 2, d = 3$.

Khi đó, $\min 1000A = 100 \cdot 240 \cdot 356$, $\min A = 1 \cdot 24 \cdot 356$.

56. Giải tương tự Ví dụ 51.

Ta có thể giả sử số lớn hơn trong sáu giá trị tuyệt đối ở biểu thức A lần lượt là $a_1, a_3, a_5, a_5, a_5, a_1$.

Ta tính được $A = 2[(a_1 + a_3 + a_5) - (a_2 + a_4 + a_6)]$

$$\text{Xảy ra được } \begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 \text{ lớn nhất} \\ a_2 + a_4 + a_6 \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 15 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 6 \end{cases}$$

$\max A = 2(15 - 6) = 18$ khi chẳng hạn $a_1 > a_3 > a_5 > a_6 > a_4 > a_2$ tức là

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
6	1	5	2	4	3

57. (h.10) Ta có

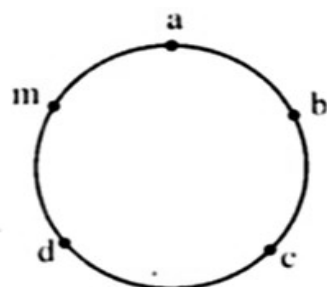
$$\begin{cases} a + b = c^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = d^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + d = m^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + m = a^2 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + a = b^2 & (5) \end{cases}$$



Hình 10

Giả sử m là số lớn nhất.

Ta có $m + m \geq c + d = m^2 \Rightarrow 2m \geq m^2 \Rightarrow 2 \geq m$.

Nếu $m = 1$ thì $c + d = 1$, vô lí. Vậy $m = 2$.

Từ (3) suy ra $c = d = 2$.

Từ (1) suy ra $a = b = 2$.

58. Số nhỏ nhất viết được dưới dạng tổng của sáu lũy thừa bậc khác nhau của 2 là

$$A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

Ta có $2A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$ nên

$$2A - A = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63. \text{ Vậy } A = 63.$$

Số lớn hơn A tiếp theo cũng viết được dưới dạng tổng của sáu lũy thừa bậc khác nhau của 2 là

$$B = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

Ta có $2B = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$

$$\text{nên } 2B - B = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$$

Vậy $B = 127$, có nhiều hơn hai chữ số.

Do đó, số phải tìm là 63.

59. Gọi số phải tìm là $n = 2x^2 = 3y^3$ (x, y nguyên dương).

$$\text{Ta có } 2x^2 : 3 \Rightarrow x^2 : 3 \Rightarrow x : 3 \Rightarrow x^2 : 9.$$

$$\text{Ta có } 3y^3 : 3 \Rightarrow y^3 : 2 \Rightarrow y : 2. \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } 3y^3 : x^2 \Rightarrow 3y^3 : 9 \Rightarrow y^3 : 3 \Rightarrow y : 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $y : 6$. Do y nguyên dương và nhỏ nhất, ta xét $y = 6$. Khi

$$\text{đó } 2x^2 = 3.6^3 \Rightarrow x^2 = \frac{3.2^3.3^3}{2} = (2.3^2)^2 = 18^2 \Rightarrow x = 18.$$

Số n nhỏ nhất phải tìm là $2.18^2 = 3.6^3 = 648$.

Chuyên đề 7

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ PHÂN SỐ VÀ CĂN BẬC HAI

60. a) $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{95}{96}$

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{96}{97}$$

$$\text{nên } A^2 < \frac{1.3 \cdot \dots \cdot 95}{2.4 \cdot \dots \cdot 96} \cdot \frac{2.4 \cdot \dots \cdot 96}{3.5 \cdot \dots \cdot 97} = \frac{1}{97} < \frac{1}{81}.$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{9}.$$

b) Trước hết ta chứng minh với $n > 1$ thì $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{3n-2}{3n+1}$

(bạn đọc tự chứng minh). Do đó

$$A^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{95}{96}\right)^2 < \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \dots \cdot \frac{142}{145} = \frac{1}{145} < \frac{1}{144}.$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{12}.$$

61. a) Sử dụng nhận xét sau:

$$\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2 + 4n + 1} < \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

b) Sử dụng nhận xét sau:

$$\frac{1}{n^2 + (n+1)^2} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

c) Sử dụng nhận xét sau:

$$\begin{aligned} \frac{2n}{n^4 + n^2 + 1} &= \frac{2n}{(n^2 + 1)^2 - n^2} = \frac{2n}{(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)} \\ &= \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)} = \frac{1}{n(n-1)+1} - \frac{1}{n(n+1)+1}. \end{aligned}$$

62. Cách 1. Đặt $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$. Ta có

$$\frac{n}{2^n} = \frac{(2n+2) - (n+2)}{2^n} = \frac{2(n+1)}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2}{2^0} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2.$$

$$\text{Cách 2. Ta có } A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

$$\text{nên } 2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\text{Suy ra } 2A - A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{n}{2^n}.$$

$$\text{Do đó } A < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

63. Đặt $A = \frac{2}{5+1} + \frac{4}{5^2+1} + \frac{8}{5^4+1} + \dots + \frac{64}{5^{32}+1}$

Ta có $\frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{k^2-1} = \frac{k+1-2}{k^2-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{2}{k^2-1}$.

Suy ra $\frac{n}{k+1} = \frac{n}{k-1} - \frac{2n}{k^2-1}$. Do đó

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{5-1} - \frac{4}{5^2-1} \right) + \left(\frac{4}{5^2-1} - \frac{8}{5^4-1} \right) + \dots + \left(\frac{64}{5^{32}-1} - \frac{128}{5^{64}-1} \right) \\ &= \frac{2}{5-1} - \frac{128}{5^{64}-1} = \frac{1}{2} - \frac{128}{5^{64}-1} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

64. Do $1 \leq a \leq b \leq c$ nên $\frac{a}{b} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$. (1)

Xảy ra dấu bằng khi $a = 1, b = c$.

Do $d \leq 100$ nên $\frac{c}{d} \geq \frac{c}{100}$. (2)

Xảy ra dấu bằng khi $d = 100$.

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{1}{c} + \frac{c}{100} = \frac{c^2 + 100}{100c} = \frac{c^2 - 20c + 100 + 20c}{100c} = \frac{(c-10)^2}{100c} + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}.$$

$$\min \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = \frac{1}{5} \text{ tại } a = 1, b = c = 10, d = 100.$$

65. Để chứng minh số 2^{300} có 91 chữ số khi viết dưới dạng thập phân, ta sẽ chứng minh $10^{90} < 2^{300} < 10^{91}$ (10^{90} là số nhỏ nhất có 91 chữ số, 10^{91} là số nhỏ nhất có 92 chữ số khi viết dưới dạng thập phân).

Ta có $2^{10} = 1024 > 10^3 \Rightarrow (2^{10})^{30} > (10^3)^{30} \Rightarrow 2^{300} > 10^{90}$. (1)

Ta sẽ chứng minh $2^{300} < 10^{91} \Leftrightarrow \frac{2^{300}}{10^{90}} < \frac{10^{91}}{10^{90}} \Leftrightarrow \left(\frac{2^{10}}{10^3} \right)^{30} < 10$.

Thật vậy, xét $\frac{2^{10}}{10^3} = \frac{1024}{1000} < \frac{1025}{1000} = \frac{41}{40}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^{30} < \left(\frac{41}{40}\right)^{30} < \underbrace{\frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdots \frac{13}{12} \cdot \frac{12}{11}}_{30 \text{ phân số}} = \frac{41}{11} < 10$$

$$\Rightarrow 2^{300} < 10^{91}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $10^{90} < 2^{300} < 10^{91}$. Vậy 2^{300} có 91 chữ số khi viết dưới dạng thập phân.

Lưu ý. Bài tập trên được giải dễ dàng nếu có kiến thức về lũy thừa và lôgarit học ở Trung học phổ thông, được giới thiệu vắn tắt để bạn đọc tham khảo.

1. Ta đã biết lũy thừa với số mũ tự nhiên, chẳng hạn $2^3 = 8$. Người ta còn mở rộng cho số mũ hữu tỉ, chẳng hạn $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$, tổng quát $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, a > 0$. Người ta cũng mở rộng cho số mũ là số thực.
2. Để tìm số mũ khi biết cơ số và biết lũy thừa, với trường hợp số mũ tự nhiên như $10^x = 1000$ ta có ngay $x = 3$. Trong trường hợp x là số thực như $10^x = 2$ ta phải dùng phép tính lôgarit, được định nghĩa như sau:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (1) \text{ với } a, b \text{ dương và } a \neq 1.$$

3. Ta chứng minh được công thức $n \log_a b = \log_a b^n$. (2)

$$\text{Thật vậy, đặt } \log_a b = x \text{ thì } a^x = b \Rightarrow (a^x)^n = b^n$$

$$\Rightarrow a^{nx} = b^n \Rightarrow nx = \log_a b^n \Rightarrow n \log_a b = \log_a b^n.$$

4. Sử dụng các kiến thức trên và bảng lôgarit cho $\log_{10} 2 \approx 0,30103$, ta giải Bài tập 65 như sau:

$$\text{Cần tìm } x \text{ để } 10^x = 2^{300}.$$

$$\text{Với định nghĩa (1) ta có } x = \log_{10} 2^{300}.$$

$$\text{Sử dụng (2) ta có } x = 300 \log_{10} 2 \approx 300 \cdot 0,30103 \approx 90,309.$$

Vậy 2^{300} có 91 chữ số khi viết dưới dạng thập phân.

$$66. \text{ Ta có } A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{77} + \sqrt{79}}$$

$$A > \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{81}}$$

$$\begin{aligned}
\text{nên } 2A &> \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}} \\
\Rightarrow 2A &> \frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{-2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2} + \dots + \frac{\sqrt{79}-\sqrt{81}}{-2} \\
\Rightarrow 2A &> \frac{\sqrt{81}-1}{2} = 4. \text{ Suy ra } A > 2.
\end{aligned}$$

67. Áp dụng $(x+y)^2 > 4xy$ với $x \neq y$, ta có

$$\begin{aligned}
(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})^3 &= (\sqrt{n} + \sqrt{n+3})(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})^2 > (\sqrt{n} + \sqrt{n+3}) \cdot 4\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3} \\
\Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})^3} &< \frac{1}{4\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})} = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{4\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3}(n+3-n)} \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3}} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
A &< \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{95}} - \frac{1}{\sqrt{98}} \right) \\
\Rightarrow A &< \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{7\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{14\sqrt{2}} < \frac{1}{14 \cdot 1,4} < \frac{1}{19}.
\end{aligned}$$

Chuyên đề 8

NGUYỄN LÍ ĐI-RÍCH-LÊ

68. Số táo ở mỗi thùng nhận 25 giá trị (vì $144 - 120 + 1 = 25$). Do 128 chia 25 được 5 còn dư nên tồn tại 6 thùng có số táo như nhau.

Có thể xảy ra không tồn tại 7 thùng có số táo như nhau, chẳng hạn mỗi loại thùng chứa 120 quả, 121 quả, 122 quả, ..., 140 quả đều có 6 thùng (như vậy có $6 \cdot 21 = 126$ thùng), còn hai thùng nữa chứa 141 quả, không tồn tại 7 thùng có số táo như nhau.

Vậy giá trị lớn nhất của n là 6.

69. a) Xét 20 số: 1, 11, 111, $\underbrace{11\dots1}_{20 \text{ chữ số}}$

Có 20 số, mà phép chia cho 19 chỉ gồm 19 số dư (0, 1, 2, ..., 18) nên tồn tại hai số có cùng số dư. Gọi hai số đó là $\underbrace{11\dots1}_m$ và $\underbrace{11\dots1}_n$ ($m > n$). Hiệu của chúng bằng $\underbrace{11\dots1}_{m-n} \underbrace{00\dots0}_n$ chia hết cho 19.

b) Theo câu a tồn tại số $\underbrace{11\dots1}_{m-n} \cdot 10^n : 19$ mà $(10^n, 19) = 1$ nên $\underbrace{11\dots1}_{m-n} : 19$.

70. Gọi a là số mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 0, 1, 2. Có vô số số a như vậy.

Xét $7^{10} + 1$ số: a, aa, aaa, ..., $\underbrace{aa\dots a}_{7^{10}+1 \text{ số}}$

Tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 7^{10} , giả sử

$$\underbrace{aa\dots a}_{m \text{ số}} - \underbrace{aa\dots a}_{n \text{ số}} : 7^{10} \quad (m > n).$$

Giả sử a có k chữ số thì

$$\underbrace{aa\dots a}_{m-n \text{ số}} \underbrace{00\dots0}_{nk \text{ chữ số}} : 7^{10} \Rightarrow \underbrace{aa\dots a}_{m-n \text{ số}} \cdot 10^{nk} : 7^{10} \Rightarrow \underbrace{aa\dots a}_{m-n \text{ số}} : 7^{10}.$$

71. Có 6 số lẻ, chỉ có 5 giá trị của chữ số tận cùng (là 1, 3, 5, 7, 9). Tồn tại hai số có chữ số tận cùng như nhau, hiệu của chúng chia hết cho 10.

72. Giải tương tự Ví dụ 61. Một số nguyên tố lớn hơn 5 khi chia cho 30 dư r thì $r \in \{1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$. Tồn tại hai số nguyên tố có phần dư r bằng nhau, hiệu của chúng chia hết cho 30.

73. Giải tương tự Ví dụ 62. Ghép các số dư khi chia cho 8 thành năm nhóm (0), (1; 7), (2; 6), (3; 5), (4).

74. a) Chẳng hạn bốn số 1, 5, 7, 11 có

$$1 + 5 + 7 = 13, \quad 1 + 5 + 11 = 17,$$

$$1 + 7 + 11 = 19, \quad 5 + 7 + 11 = 23.$$

b) Sử dụng bổ đề ở Ví dụ 64.

75. Xét bảy số $a_1, a_2, \dots, a_7$. Trong ba số a_1, a_2, a_3 tồn tại hai số có tổng chia hết cho 2, giả sử $a_1 + a_2 \div 2$.

Xét ba số a_3, a_4, a_5 tồn tại hai số có tổng chia hết cho 2, giả sử $a_3 + a_4 \div 2$.

Xét ba số a_5, a_6, a_7 tồn tại hai số có tổng chia hết cho 2, giả sử $a_5 + a_6 \div 2$.

Đặt $a_1 + a_2 = 2x$

$a_3 + a_4 = 2y$

$a_5 + a_6 = 2z$

thì $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2(x + y + z)$.

Xét ba số x, y, z tồn tại hai số có tổng chia hết cho 2, giả sử $x + y \div 2$. Thế thì $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(x + y) \div 4$.

76. Xét 10 số đầu tiên của dãy 59 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số tận cùng bằng 0, gọi số đó là a . Xét hai trường hợp:

a) Nếu a tận cùng là 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 thì ta chọn dãy gồm 12 số.

$a, a + 1, a + 2, \dots, a + 9, a + 19, a + 29.$ (1)

Gọi tổng các chữ số của a là k thì tổng các chữ số của 12 số trên là

$k, k + 1, k + 2, \dots, k + 9, k + 10, k + 11.$ (2)

Dãy (2) là dãy 12 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số chia hết cho 12, do đó tồn tại một số của dãy (1) có tổng các chữ số chia hết cho 12.

b) Nếu a tận cùng là 80, 90, 00 thì ta xét dãy có tận cùng là 00, 01, 02, ..., 09, 19, 29 (3) (các số này vẫn thuộc 59 số nguyên dương đã cho).

Tổng các chữ số của các số trong dãy (3) là 12 số tự nhiên liên tiếp, tồn tại một số chia hết cho 12, do đó tồn tại một số của dãy (3) có tổng các chữ số chia hết cho 12.

Lưu ý về phương pháp giải:

Điểm mấu chốt của cách giải là tạo ra 12 số có tổng các chữ số là 12 số tự nhiên liên tiếp.

Khi a là số có tận cùng bằng 0, ta có ngay 10 số $a, a + 1, \dots, a + 9$ có tổng các chữ số là 10 số tự nhiên liên tiếp. Gọi tổng các chữ số của a là k thì 10 số tự nhiên liên tiếp đó là $k, k + 1, \dots, k + 9$.

Cần chọn thêm hai số nữa có tổng các chữ số bằng $k + 10$ và $k + 11$. Hai số này là hai số $a + 19$ và $a + 29$ với điều kiện hai số $a + 10$ và $a + 20$ không tận cùng là 00.

77. Gọi năm số đã cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 trong đó $a_i = 2^{x_i} \cdot 3^{y_i}$ ($x_i, y_i \in \mathbb{N}$).

Xét năm cặp $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_5; y_5)$ thuộc bốn trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, lẻ), (lẻ, chẵn), tồn tại hai cặp thuộc một trường hợp, chẳng hạn cặp $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thuộc trường hợp (chẵn, lẻ), thế thì $x_1 + x_2$ chẵn và $y_1 + y_2$ chẵn. Khi đó $a_1 a_2 = 2^{2m} \cdot 3^{2n}$ là số chính phương.

78. Giải tương tự Ví dụ 67.

Ta thấy $625 = 25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$. Trong 625 số đã cho, xếp năm số vào tập hợp $A = \{7^2; 15^2; 20^2; 24^2; 25^2\}$, còn lại 620 số chia thành 310 cặp, mỗi cặp có tổng bằng 625, là $(1; 624), (2; 623), \dots, (312; 313)$.

Hãy chứng minh rằng trong 311 số được chọn, tồn tại một số thuộc A .

79. Giải tương tự Ví dụ 68.

80. Giải tương tự Ví dụ 69.

81. Gọi 25 số đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ có $a_1 + a_2 + \dots + a_{25} \leq 410$.

Giả sử $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{25}$.

Ta thấy $a_{16} < 25$, vì nếu $a_{16} \geq 25$ thì

$$a_{16} + a_{17} + \dots + a_{25} \geq 25 + 26 + \dots + 34 = 295. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \geq 1 + 2 + \dots + 15 = 120. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{25} \geq 120 + 295 = 415$, trái với đề bài. Vậy tồn tại 16 số nhỏ hơn 25.

Xét 12 cặp $(1; 24), (2; 23), \dots, (12; 13)$, gồm 24 số nhỏ hơn 25. Do có 16 số đã cho nhỏ hơn 25 nên tồn tại bốn cặp $(16 - 12 = 4)$ gồm cả hai số đã cho. Bốn cặp đó đều có tổng hai số trong mỗi cặp bằng 25.

82. Tập hợp A có bốn phần tử nên có $2^4 = 16$ tập con, trong đó có một tập hợp gồm bốn phần tử (là A) và một tập hợp rỗng, do đó số tập hợp có từ một đến ba phần tử là $16 - 2 = 14$.

Gọi tổng các phần tử của mỗi tập hợp trong 14 tập con đó là x . Do các phần tử của mỗi tập hợp này có giá trị nhỏ nhất là 1, có giá trị lớn nhất là 5 nên

$$1 \leq x \leq 3 + 4 + 5, \text{ tức là } 1 \leq x \leq 12.$$

Có 14 tập hợp, mà x chỉ nhận giá trị từ 1 đến 12 nên tồn tại hai tập hợp có x bằng nhau, đó là hai tập hợp B và C phải tìm.

83. Xếp 101 số đã cho vào bốn nhóm có số dư trong phép chia cho 4 là 0, 1, 2, 3. Do 101 chia 4 được 25 dư 1 nên tồn tại 26 số thuộc cùng một nhóm. Hai số bất kì trong nhóm này có hiệu chia hết cho 4.

Ta sẽ chứng minh trong nhóm 26 số nói trên, tồn tại hai số có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi cặp số trong nhóm đó đều có hiệu $d \geq 12$ thì số lớn nhất n của nhóm có giá trị $n \geq 1 + 12 \cdot 25 = 301 > 300$, trái với đề bài. Hai số nói trên (có hiệu nhỏ hơn 12) khác nhau và có hiệu chia hết cho 4 nên hiệu bằng 4 hoặc 8.

84. Gọi 33 số được chọn xếp tăng dần là $a_1, a_2, \dots, a_{33}$.

Ta có $a_1 \geq 1, a_{33} \leq \sqrt{1050}$ nên $a_{33} - a_1 \leq \sqrt{1050} - 1 < 33 - 1 = 32$.

Suy ra $(a_{33} - a_{32}) + (a_{32} - a_{31}) + \dots + (a_2 - a_1) < 32$. (1)

Trong 32 hiệu trên, tồn tại một hiệu nhỏ hơn 1, vì nếu cả 32 hiệu đều lớn hơn hay bằng 1 thì tổng của chúng lớn hơn hay bằng 32, trái với (1).

Vậy tồn tại hai số được chọn có hiệu nhỏ hơn 1.

Chuyên đề 9

CÁC BÀI TOÁN SUY LUẬN

85. Không thể khẳng định rằng đa số thành viên trong Ban giám khảo cho điểm của A cao hơn điểm của C.

Chẳng hạn Ban giám khảo có ba người và cho điểm như sau:

Người thứ nhất cho $A > B > C$, người thứ hai cho $B > C > A$, người thứ ba cho $C > A > B$.

Với cách cho điểm như trên, có hai người cho điểm của A cao hơn điểm của B, có hai người cho điểm của B cao hơn điểm của C, nhưng chỉ có một người cho điểm của A cao hơn điểm của C.

86. a) Gọi A là người có số trận thắng nhiều nhất. Do A không thắng tất cả các trận, nên tồn tại đấu thủ C thắng A. Trong số những người thua A, tồn tại một người thắng C (vì nếu tất cả những người thua A đều thua C thì C có số trận thắng nhiều hơn A), gọi người đó là B.

Ta có A thắng B, B thắng C, C thắng A.

b) Gọi A và B là hai người có số trận thắng bằng nhau và giả sử A thắng B. Trong số những người thua B, tồn tại một người thắng A (vì nếu tất cả những người thua B đều thua A thì A có số trận thắng nhiều hơn B, trái với A và B có số trận thắng bằng nhau), gọi người đó là C.

Ta có A thắng B, B thắng C, C thắng A.

87. Vì mỗi đội mới đấu 3 trận nên tồn tại hai đội chưa đấu với nhau, gọi hai đội đó là A và B. Còn lại 7 đội.

Do A mới đấu 3 trận, B mới đấu 3 trận nên trong 7 đội trên, tồn tại một đội chưa đấu với A và B, gọi đội đó là C.

Ta có ba đội A, B, C đôi một chưa đấu với nhau.

88. Theo cách đổi chỗ của bài toán, số chẵn luôn ở vị trí chẵn, số lẻ luôn ở vị trí lẻ của dãy. Do đó không thể xảy ra số 20 ở vị trí thứ nhất.

Vậy không thể đổi chỗ để dãy số viết theo thứ tự ngược lại.

89. Giải tương tự Ví dụ 76.

Số quân bài đặt ngựa luôn luôn là một số chẵn, không thể xảy ra 51 quân bài đặt ngựa.

90. Ta có nhận xét: Khi chuyển từ lượt trước sang lượt sau, số bóng đèn của một màu bất kì hoặc tăng 2, hoặc giảm 1, do đó hiệu của số bóng đèn của hai màu bất kì hoặc thay đổi 3 (nếu một màu tăng 2, một màu giảm 1) hoặc thay đổi 0 (nếu cả hai màu đều tăng 2 hoặc đều giảm 1), tức là thay đổi một bội của 3.

Lúc đầu, hiệu của số bóng đèn xanh và đỏ bằng $30 - 25 = 5$, là số chia cho 3 dư 2. Theo nhận xét trên, hiệu của số bóng đèn xanh và đỏ luôn là một số chia cho 3 dư 2, không thể xảy ra số bóng đèn xanh và số bóng đèn đỏ đều bằng 0, tức là không thể xảy ra tất cả 75 bóng đèn đều màu vàng.

Lúc đầu, hiệu của số bóng đèn đỏ và vàng bằng $25 - 20 = 5$, là số chia cho 3 dư 2. Do đó hiệu của số bóng đèn đỏ và vàng luôn là một số chia cho 3 dư 2, không thể xảy ra số bóng đèn đỏ và vàng đều bằng 0, tức là không thể xảy ra tất cả 75 bóng đèn đều màu xanh.

Lúc đầu, hiệu của số bóng đèn xanh và vàng bằng $30 - 20 = 10$, là số chia cho 3 dư 1. Do đó hiệu của số bóng đèn xanh và vàng luôn là một số chia cho 3 dư 1, không thể xảy ra số bóng đèn xanh và vàng đều bằng 0, tức là không thể xảy ra tất cả 75 bóng đèn đều màu đỏ.

Lưu ý. Bất biến trong bài toán trên là: Hiệu của số bóng đèn của hai màu bất kì luôn thay đổi một bội của 3.

91. Giải tương tự Ví dụ 77.

Gọi n số đã cho lần lượt bị xoá là $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Gọi số mới lần lượt thêm vào là $b_1, b_2, b_3, \dots$

Ta xoá a_1 và a_2 rồi thay bằng b_1 , xoá b_1 và a_3 rồi thay bằng b_2 , xoá b_2 và a_4 rồi thay bằng $b_3, \dots$, xoá b_{n-2} và a_n rồi thay bằng b_{n-1} .

Số mới cuối cùng là b_{n-1} .

Xét hằng đẳng thức $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$, ta sẽ tìm được

$$b_{n-1} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1) - 1 = 2.3. \dots (n + 1) - 1 = (n + 1)! - 1.$$

Do $n \geq 4$ nên $(n + 1)!$ tận cùng bằng 0, suy ra b_{n-1} tận cùng bằng 9, không thể bằng 362882 được.

92. Gọi 100 số đã cho xếp tăng dần là $a_1, a_2, \dots, a_{100}$.

$$\text{Đặt } A = (a_{100} - a_{99}) + (a_{99} - a_{98}) + \dots + (a_2 - a_1).$$

Nếu chỉ có nhiều nhất là 48 cặp số nguyên dương liên tiếp thì trong 99 hiệu của biểu thức A , chỉ có nhiều nhất là 48 hiệu có giá trị bằng 1, do đó có ít nhất là 51 hiệu có giá trị từ 2 trở lên.

$$\text{Khi đó } A \geq 48 + 51.2 = 150. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } A = a_{100} - a_1 \leq 150 - 1 = 149. \quad (2)$$

Ta thấy (1) và (2) mâu thuẫn. Vậy số cặp số nguyên dương liên tiếp phải lớn hơn hoặc bằng 49.

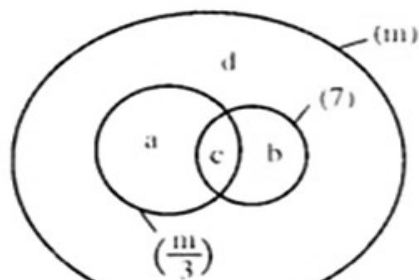
93. Kí hiệu như trên hình 11, trong đó m là số câu hỏi của bài thi, d là số câu hỏi cả A và B đều trả lời đúng, c là số câu hỏi cả A và B đều trả lời sai, a là số câu hỏi chỉ A trả lời sai, b là số câu hỏi chỉ B trả lời sai.

Theo đề bài

$$a + c = \frac{m}{3} \quad (1)$$

$$b + c = 7 \quad (2)$$

$$c = \frac{m}{5} \quad (3)$$



Hình 11

$$\text{Ta có } d = m - a - (b + c) = m - a - 7. \quad (4)$$

Cần tìm giá trị lớn nhất của d .

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra } a = \frac{m}{3} - \frac{m}{5} = \frac{2m}{15} \Rightarrow m - a = m - \frac{2m}{15} = \frac{13m}{15}. \quad (5)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } c \leq 7 \Rightarrow \frac{m}{5} \leq 7 \Rightarrow m \leq 35.$$

$$\text{Do (5) nên } m \leq 15, \text{ do đó } m \leq 30. \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } m - a \leq \frac{13.30}{15} = 26.$$

$$\text{Kết hợp với (4) có } d \leq 26 - 7 = 19.$$

Vậy có nhiều nhất 19 câu hỏi cả A và B đều trả lời đúng.

MỤC LỤC

		Trang	
	Đề bài	Hướng dẫn giải	
<i>Lời nói đầu</i>		3	
<i>Chuyên đề 1.</i>	TÍNH CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN	5	76
<i>Chuyên đề 2.</i>	SỐ NGUYÊN TỐ – HỢP SỐ	12	78
<i>Chuyên đề 3.</i>	SỐ TỰ NHIÊN VÀ CÁC CHỮ SỐ	16	79
<i>Chuyên đề 4.</i>	SỐ CHÍNH PHƯƠNG	22	81
<i>Chuyên đề 5.</i>	PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN	31	86
<i>Chuyên đề 6.</i>	BẤT ĐẲNG THỨC VỀ SỐ TỰ NHIÊN	44	93
<i>Chuyên đề 7.</i>	BẤT ĐẲNG THỨC VỀ PHÂN SỐ VÀ CĂN BẬC HAI	53	96
<i>Chuyên đề 8.</i>	NGUYÊN LÝ ĐI-RÍCH-LÊ	60	100
<i>Chuyên đề 9.</i>	CÁC BÀI TOÁN SUY LUẬN	69	104

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Tổng Giám đốc CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập nội dung :
ĐẶNG MINH THU

Trình bày bìa :
ĐINH THÙY LINH

Chế bản :
THÁI MỸ DUNG

Sửa bản in :
ĐẶNG MINH THU

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

9 CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC TRUNG HỌC CƠ SỞ

- *Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6, 7, 8, 9*
 - *Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên toán.*
-

Mã số : C2T09A4- ĐTH

Số ĐKKH xuất bản: 518-2014/CXB/10-337/GD

In 3.000 cuốn (QĐ TK68), khổ 17x24 cm.
In tại Công ty TNHH MTV In và Thương mại TTXVN.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2014.