Nguyễn Phúc Tăng - Lê Việt Hưng

TÀI LIỆU TỰ HỌC
NÂNG CAO KIẾN THỨC

BẤT ĐẲNG THỨC

VÀ CÁC ỨNG DỤNG

Tủ sách luyện thi

Chuyên đề:

Bất đẳng thức và các ứng dụng

Biên soạn: Lê Việt Hưng – 9B Trường THCS Thị Trấn Hải Lăng (Quảng Trị)
Nguyễn Phúc Tăng – 9A10 Trường THCS Kim Đồng (Đồng Tháp)

I) Khái niệm bất đẳng thức cơ bản :

1.1 Số thực dương, số thực âm

- Nếu a là số thực dương, ta ký hiệu $a>0$
- Nếu a là số thực âm, ta ký hiệu $a<0$
- Nếu a là số thực dương hoặc $a=0$, ta nói a là số thực không âm, ký hiệu $a\geq 0$
- Nếu a là số thực âm hoặc $a=0$, ta nói a là số thực không dương, ký hiệu $a\leq 0$

Chú ý:

- Với hai số thực a,b chỉ có một trong ba khả năng sau xảy ra:
$a>b$ hoặc $a<b$ hoặc $a=b$
- Phủ định của mệnh đề "a > 0" là mệnh đề "$a\leq 0$"
- Phủ định của mệnh đề "a < 0" là mệnh đề "$a\geq 0$"

Tính chất quan trọng

i) $\forall x\in R: x^2\geq 0$ (đẳng thức xảy ra khi $x=0$)

ii) $x^{2k}\geq 0,\ k\in N,\ x\in R$ (đẳng thức xảy ra khi $x=0$)

iii) $x_1^{2k}+x_2^{2k}+...+x_n^{2k}\geq 0,\ k\in N,\ x_i\in R$ (đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n=0$)

1.2 Định nghĩa 1

Số thực a gọi là lớn hơn số thực b, ký hiệu a > b nếu $a-b$ là một số dương, tức là $a-b>0$.

Khi đó ta cũng ký hiệu b < a

Ta có: $a>b\Leftrightarrow a-b>0$

- Nếu $a>b$ hoặc $a=b$, ta viết $a\geq b$. Ta có:
$a\geq b\Leftrightarrow a-b\geq 0$

1.3 Định nghĩa 2

Giả sử A, B là hai biểu thức (bằng số hoặc chứa biến)

Mệnh đề : " A lớn hơn B ", ký hiệu $A > B$

" A nhỏ hơn B ", ký hiệu $A < B$

" A lớn hơn hay bằng B " ký hiệu $A \geq B$

" A nhỏ hơn hay bằng B " ký hiệu $A \leq B$

được gọi là một bất đẳng thức

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

1.4 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1.4.1 Tính chất 1. $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$ (*Bắc cầu*)

1.4.2 Tính chất 2. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ (*Cộng hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 1. $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$ (*Trừ hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 2. $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$ (*Chuyển vế*)

1.4.3 Tính chất 3. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$ (*Cộng hai vế hai bđt cùng chiều*)

1.4.4 Tính chất 4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{khi } c > 0 \\ ac < bc & \text{khi } c < 0 \end{cases}$ (*Nhân hai vế với cùng một số*)

Hệ quả 3. $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ (*Đổi dấu hai vế*)

Hệ quả 4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} & \text{khi } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} & \text{khi } c < 0 \end{cases}$ (*Chia hai vế với cùng một số*)

1.4.5 Tính chất 5. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ (*Nhân hai vế hai bđt cùng chiều*)

1.4.6 Tính chất 6. $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (*Nghịch đảo hai vế*)

1.4.7 Tính chất 7. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow a^n > b^n$ (*Nâng lũy thừa bậc n*)

1.4.8 Tính chất 8. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (*Khai căn bậc n*)

Hệ quả 5. Nếu a và b là hai số dương thì :

$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ (*Bình phương hai vế*)

Nếu a và b là hai số không âm thì :

$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ (*Bình phương hai vế*)

2. Bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối

Tính chất. $|x| \geq 0$, $|x|^2 = x^2$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

Với mọi $a, b \in R$ ta có :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \leq |a| + |b|$
- $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$

3. Bất đẳng thức trong tam giác

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- $a > 0, b > 0, c > 0$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

II) Một số Bất Đẳng Thức Phụ cơ bản :

TT	Điều kiện	Bất đẳng thức	Điểm rơi

1	$a,b\in R$	$ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$	a = b
2	$a,b\in R$	$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$	a = b
3	$a,b\ge 0$	$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$	a = b
4	$a,b\in R$	$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$	$a=b$
5	$a,b,c\in R$	$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$	$a=b=c$
6	$a,b,c\in R$	$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$	$a=b=c$
7	$a,b,c\in R$	$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$	$a=b=c$
8	$a,b\in R$ và $ab\ge 1$	$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ {}^{3}\ \dfrac{2}{1+ab}$	$a=b$ hoặc $ab=1$
9	$a,b>0$	$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$	$a=b$
10	$a,b,c>0$	$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$	$a=b=c$
11	$a,b>0$	$(a+b)^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\ge 8$ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\ {}^{3}\ \dfrac{8}{(a+b)^2}$	$a=b$
12	$a,b,c\in R$, $x,y,z\in R$	$(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ (Hệ quả bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)	$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$
13	$a,b,c\in R$, $x,y,z\in R$	$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ (Hệ quả bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức)	$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$
14	a, b, c, x, y, z, m, n, p > 0	$(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(m^3+n^3+p^3)\ge(axm+byn+czp)^3$ (Hệ quả bất đẳng thức Holder)	Các dãy tương ứng tỉ lệ

*** Các bất đẳng thức quan trọng và mở rộng :**

- Bất đẳng thức AM - GM

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

- Bất đẳng thức AM - GM suy rộng

Cho các số dương $w_1, w_2, ..., w_n$ thoả mãn $w_1 + w_2 + ... + w_n = 1$.

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thì

$$w_1 a_1 + w_2 a_2 + ... + w_n a_n \ge a_1^{w_1} a_2^{w_2} ... a_n^{w_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

- Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Ta có:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

- Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Ta có:

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + ... + \frac{{a_n}^2}{b_n} \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

- Bất đẳng thức Holder

Với m dãy số dương $\left(a_{1,1}, a_{1,2}, ... a_{1,n}\right), \left(a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,n}\right) ... \left(a_{m,1}, a_{m,2}, ..., a_{m,n}\right)$ ta có:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \ge \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^m$$

Đẳng thức xảy ra khi m dãy tương ứng đó tỉ lệ.

+Bất đẳng thức Cauchy - Chwarz là một hệ quả của bất đẳng thức Holder khi m = 2.

- Bất đẳng thức Minkowski

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Ta có:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \ge \sqrt{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2 + \left(b_1 + b_2 + ... + b_n\right)^2}$$

- Bất đẳng thức Minkowski dạng mở rộng

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Ta có:

$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$

Dấu ‘‘=’’ của bất đẳng thức Minkowski giống với Cauchy - Schwarz.

- Bất đẳng thức Vonicur Schur

Cho các số thực không âm a, b, c. Nếu r ≥ 0, thì

$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c, hoặc a = 0, b = c và các hoán vị.

Với bất đẳng thức này ta có các hệ quả sau:

- Trong trường hợp r = 1, ta có các dạng tương đương sau:

a. $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

b. $4(a^3+b^3+c^3)+15abc\ge(a+b+c)^3$

c. $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c}\ge 2(ab+bc+ca)$

d. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$

- Trong trường hợp r = 2, ta có các dạng tương đương:

a. $\sum a^4+abc(a+b+c)\ge\sum ab(a^2+b^2)$

b. $6abc(a+b+c)\ge(2\sum ab-\sum a^2)(\sum a^2+\sum ab)$

- Bất đẳng thức Bernolli

Với mọi số nguyên r ≥ 0 và x > -1

$(1+x)^r\ge 1+rx$

III) Một số kỹ thuật cơ bản trong bất đẳng thức :

1)Kỹ thuật chọn điểm rơi:

Ví Dụ 1:Cho $x\ge 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=x+\frac{1}{x}$$

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thứ AM-GM dạng $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ta có:

$$A=x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2$$

Ta thấy lời giải trên sai vì trong đánh giá trên , dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{x}$, vì vậy x=1, tuy nhiên x=1 lại không nằm trong khoảng giá trị $x\ge 3$ mà bài toán đã quy định. Vì vậy với lời giải trên thì ta đã tìm sai điểm rơi cho bài toán.

Giải: Để đảm bảo đc dấu “=” xảy ra thì ta có lời giải như sau:

$$A=\frac{8x}{9}+\left(\frac{x}{9}+\frac{1}{x}\right)\geq\frac{8.3}{9}+2\sqrt{\frac{x}{9}.\frac{1}{x}}=\frac{24}{9}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

Ra thêm:

Ví Dụ 2:Cho $x\geq 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=3x+\frac{1}{2x}$$

Ví Dụ 3:Cho x>2 . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C=4x+3+\frac{1}{x-4}$$

Ví Dụ 4:Cho a,b >0 và a+2b = 3 . Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$D=ab^2$$

Ví Dụ 5:Cho a,b,c >0 thỏa mãn a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq\sqrt{6}$$

2) Kỹ thuật đổi biến :

Ví Dụ 1: Cho x,y,z > 0 , xyz=1. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{z+\frac{1}{x}}\geq\frac{3}{2}$$

(Lê Việt Hưng)

Lời giải : Từ xyz=1 ta có thể đặt : $x=\frac{a}{b};y=\frac{b}{c};c=\frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}+\frac{1}{\frac{b}{c}+\frac{a}{c}}+\frac{1}{\frac{c}{a}+\frac{b}{a}}=\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$$

(Bất đẳng thức Nesbit)

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: x=y=z=1

Ví Dụ 2:Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

(NguyenDungTN)

Lời giải :Từ đây ta đặt: $\frac{bc}{a}=x;\frac{ca}{b}=y;\frac{ab}{c}=z$

Từ đó ta cần chứng minh: $\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}\leq\frac{x+y+z}{3}$

<=> $3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(x+y+z\right)^2$ (Đây là 1 dạng bất đẳng thức phụ quen thuộc)

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 3: Cho x,y,z > 0 , abc=1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a\left(b+1\right)}+\frac{1}{b\left(c+1\right)}+\frac{1}{c\left(a+1\right)}\ge\frac{3}{2}$$

(Sưu tầm)

Lời giải : Từ abc=1 ta có thể đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$, khi đó :

VT $=\frac{1}{\frac{x}{y}(\frac{y}{z}+1)}+\frac{1}{\frac{y}{z}(\frac{z}{x}+1)}+\frac{1}{\frac{z}{x}(\frac{x}{y}+1)}=\frac{yz}{xy+zx}+\frac{zx}{yz+xy}+\frac{xy}{zx+yz}\ge\frac{3}{2}$ (Nesbit)

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : a=b=c=1

Ví Dụ 4: Cho a,b,c>0 , abc = 1.Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

(IMO 2000)

Lời giải :Từ abc=1 ta có thể đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$

Ta có: $VT=\frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz}\le 1$

⇨ $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz$ (Một dạng Bất Đẳng Thức quen thuộc)

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 5: Cho a,c>0 và $b\ge 0$.Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a+b}{2a}$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Lời giải : $T=\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a+b}{2a}=\frac{1}{1+\frac{c^2}{a^2}}+\frac{1}{1+\frac{b^2}{c^2}}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a}\right)$

Đặt : $x=\frac{c}{a};y=\frac{b}{c}$

Ta được: $T=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1+xy}{2}$

Từ đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1+xy}{2}\ge\frac{2}{1+xy}+\frac{1+xy}{2}\ge 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 2 tại x=y=1

Ví Dụ 6:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: abc=1. Chưng minh rằng:

$$\sum\frac{1}{1+a+b^2}\le 1$$

Lời giải: Đặt: $a=x^3;b=y^3;c=z^3$, ta được:

$$\sum\frac{1}{1+x^3+y^6}\le 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum\frac{1}{1+x^3+y^6}=\sum\frac{z^4+x+\frac{1}{y^2}}{\left(1+x^3+y^6\right)\left(z^4+x+\frac{1}{y^2}\right)}\le\sum\frac{z^4+x+\frac{1}{y^2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=\frac{\sum\left(x^4+x^2yz+z^2x^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge\sum x^4+\sum y^2z^2+xyz\left(x+y+z\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz\left(x+y+z\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(xy-yz\right)^2+\frac{1}{2}\left(yz-zx\right)^2+\frac{1}{2}\left(zx-xy\right)^2\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 7:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1$$

(Võ Quốc Bá Cẩn – Vasile Cirtoage)

Lời giải: Vì a,b,c nên ta có thể đặt: $a=\frac{xy}{z^2};b=\frac{yz}{x^2};z=\frac{zx}{y^2}$

Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\frac{x^4}{y^2z^2+x^2yz+x^4}+\frac{y^4}{z^2x^2+xy^2z+y^4}+\frac{z^4}{x^2y^2+xyz^2+z^4}\ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{x^4}{y^2z^2+x^2yz+x^4}+\frac{y^4}{z^2x^2+xy^2z+y^4}+\frac{z^4}{x^2y^2+xyz^2+z^4}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\sum x^4+\sum y^2z^2+xyz\left(x+y+z\right)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge\sum x^4+\sum y^2z^2+xyz\left(x+y+z\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz\left(x+y+z\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(xy-yz\right)^2+\frac{1}{2}\left(yz-zx\right)^2+\frac{1}{2}\left(zx-xy\right)^2\ge 0$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 8: Cho a,b,c >0 thỏa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+c^2+bc^2}+\frac{1}{1+a^2+ca^2}+\frac{1}{1+b^2+ab^2}\ge 1$$

(Lê Việt Hưng)

Lời giải: Vì abc=1 nên ta có thể đặt: $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$

Bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\frac{x^2}{x^2+z^2+yz}+\frac{y^2}{y^2+x^2+zx}+\frac{z^2}{z^2+y^2+xy}\ge 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^4+x^2z^2+x^2yz}+\frac{y^4}{y^4+x^2y^2+xy^2z}+\frac{z^4}{z^4+y^2z^2+xyz^2}\ge 1$$

Chứng minh bất đẳng thức trên tương tự như ví dụ 7.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

3) Sử dụng Cauchy- Schwarz để chứng minh bất đẳng thức :

Ví Dụ 1: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3.\sum\frac{1}{a+2b}$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Ngoại ngữ, ĐHNN Hà Nội 2007-2008)

Lời giải : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{a+2b};\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{b+2c};\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge\frac{9}{c+2a}$ (Cauchy-Swcharz)

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$$

⇨ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : a=b=c

Ví Dụ 2: Cho a,b,c > 0 thõa mãn $\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}+\frac{1}{a+b+1}\le 1$.Chứng minh rằng :

$a+b+c\ge ab+bc+ca$

(Romania IBMO Team Selection Test 2007)

Lời giải : Ta có: $\frac{1}{b+c+1}=1-\frac{b+c}{b+c+1}$

⇨ $2\ge \sum \frac{b+c}{b+c+1}$

Từ đây sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VP\ge \frac{\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]^2}{\sum (b+c)(b+c+1)}$$

⇨ $1\ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum a^2+\sum ab+\sum a}$

Từ đây ta suy ra được: $a+b+c\ge ab+bc+ca$

Ví Dụ 3: Cho a,b,c >0 thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le \frac{3}{4}$$

(Iranian IMO Team Selection Test 2009)

Lời giải:Ta có: $\frac{1}{a^2+b^2+2}=\frac{1}{2}-\frac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2+2)}$

Viết lại thành: $\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}\ge \frac{3}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$VT\ge \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{(a^2+b^2+2)+(b^2+c^2+2)+(c^2+a^2+2)}=\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6}$$

Ta lại có:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2=2(a^2+b^2+c^2)+2\sum\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}$$

$$\ge 2(a^2+b^2+c^2)+2\sum(a^2+bc)=3(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)+9$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)+9}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+6} = \frac{3}{2}$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 4: Cho a,b,c > 0 thõa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2} \geq \frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}$$

Lời giải: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\sum \frac{1}{a^2+2} = \sum \frac{1+b^2+c^2}{\left(a^2+1+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)} \leq \sum \frac{1+b^2+c^2}{\left(a+b+c\right)^2}$$

:

$$= \frac{3+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a+b+c\right)^2} = \frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: a=b=c=1

Ví Dụ 5:Cho $a,b,c>0$ thõa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$$

Lời giải :

Sử dụng BĐT Bunhia-copsxki cho 3 cặp số ta được :

$$\sum \frac{1}{a^2+b+c} \leq \sum \frac{1+b+c}{\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)} \leq \sum \frac{1+b+c}{\left(a+b+c\right)^2} = \frac{2\left(a+b+c\right)+3}{\left(a+b+c\right)^2} = \frac{2.3+3}{9} = 1$$

Bất đẳng thức đã được đã được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi : a=b=c=1

Ví Dụ 6: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

(Belarusian MO 1998)

Lời giải: Có thể viết lại bất đẳng thức trên thành:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{c}-\frac{b}{b+c}\right)+\left(\frac{c}{a}-\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{b}{a+b}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ca}{b\left(b+c\right)}+\frac{b^2}{c\left(b+c\right)}+\frac{bc}{a\left(a+b\right)} \geq \frac{a+2b}{a+b}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{ca}{b(b+c)}+\frac{b^2}{c(b+c)}=\frac{a}{c(b+c)}\left(\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)\ge\frac{a}{c(b+c)}\cdot\frac{(b+c)^2}{b+a}=\frac{a(b+c)}{c(a+b)}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{a(b+c)}{c(a+b)}+\frac{bc}{a(a+b)}\ge\frac{a+2b}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a(b+c)}{c}+\frac{bc}{a}\ge a+2b$$

$$\Leftrightarrow\frac{b(c-a)^2}{ca}\ge 0$$

Từ đây , bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 7:Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{c+a}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le 3$$

(Chinese Western MO 2004)

Lời giải:Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(\sum\sqrt{\frac{2a}{b+c}}\right)^2\le\left[\sum(a+c)\right]\left[\sum\frac{2a}{(a+b)(a+c)}\right]=\frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta cần chứng minh:

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca)\le 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Đây là 1 dạng bất đẳng thức quen thuộc

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 8: Cho a,b,c >0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a^2+1}{b^2+ca}\ge 6$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Lời giải: Ta có: $1=a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\sum\frac{a^2+1}{b^2+ca}\ge\frac{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}=\frac{a^2+b^2+c^2+3+2\sum\left(\sqrt{a^2+1}\right)\left(\sqrt{b^2+1}\right)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Ta lại có: $\sum\left(\sqrt{a^2+1}\right)\left(\sqrt{b^2+1}\right)\ge\sum(ab+1)$

$$\Rightarrow \sum \frac{a^2+1}{b^2+ca} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+3+2ab+2bc+2ca+6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$= \frac{\left(a^2+b^2+c^2+5\right)+\left(2ab+2bc+2ca+4\right)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)+6\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} = 6$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) Sử dụng AM-GM để chứng minh bất đẳng thức :

Ví Dụ 1: Cho x,y > 0 và x + y = 2 . Chứng minh rằng :

$$x^3y^3\left(x^3+y^3\right) \leq 2$$

(Sưu tầm)

Lời giải : Ta được : $x^3+y^3 = \left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right) = 2\left(x^2-xy+y^2\right)$

Quy về bài toán chứng minh: $x^3y^3\left(x^2-xy+y^2\right) \leq 1$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 4 số ta có:

$$x^3y^3\left(x^2-xy+y^2\right) = \left(xy\right)\left(xy\right)\left(xy\right)\left(x^2-xy+y^2\right) \leq \left(\frac{xy+xy+xy+x^2-xy+y^2}{4}\right)^4 = \left[\frac{\left(x+y\right)^2}{4}\right]^4 = 1$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy khi và chỉ khi: x=y=1

Ví Dụ 2: Cho a,b,c >0 .Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a}{a^2+b^2+2} \leq \frac{3}{4}$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Lời giải:Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sum \frac{a}{a^2+b^2+2} \leq \sum \frac{a}{2\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}} = \frac{1}{2}\sum \sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}.\frac{1}{b^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum \frac{a^2+1}{a^2+1}\right) = \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 3: Cho a,b,c>0 thoả mãn: a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

(Russian MO 2002)

Lời giải : Sử dụng bất đẳng thức Holder:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^3=27$$

Theo AM-GM, Ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2\le\left[\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{3}\right]^3=27$$

$$\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 4: Cho a,b,c > 0 .Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a^2+b^2+3ab}+\sqrt{b^2+c^2+3bc}+\sqrt{c^2+a^2+3ca}\le\sqrt{5}\left(a+b+c\right)$$

(Trần Hữu Thiên)

Lời giải:

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau: $\sqrt{a^2+b^2+3ab}\le\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$ (*)

Ta có: $(*) <=> 4(a^2+b^2+3ab)\le5(a+b)^2$

$<=> (a-b)^2\ge0$

Tương tự ta có: $\sqrt{b^2+c^2+3bc}\le\frac{\sqrt{5}}{2}(b+c);\sqrt{c^2+a^2+3ca}\le\frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta sẽ được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 5:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn x+y+z=xyz

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$$

(Korea MO 1998)

Lời giải:

Ta thấy rằng: $1+x^2=1+x^2.\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}{yz}$

Vì vậy ta cần chứng minh: $\sum\sqrt{\frac{yz}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}\le\frac{3}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$VT^2\le\left(xy+yz+zx\right)\left[\sum\frac{1}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}\right]\le\frac{2\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Từ đây ta có thể sử dụng 1 dạng bất đẳng thức quen thuộc:

$8\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\le 9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

Từ đây , bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=\sqrt{3}$

Ví Dụ 6: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le \frac{4}{3}\left(a+b+c\right)$$

Lời giải:Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le a+\frac{1}{2}\sqrt{a.4b}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{a.4b.16c}$$

$$\le a+\frac{1}{2}.\frac{a+4b}{2}+\frac{1}{4}\frac{a+4b+16c}{3}=\frac{4}{3}\left(a+b+c\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:a=4b=16c

Ví Dụ 7: Cho x,y,z >0 và $x^2+y^2+z^2=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{x}{x^2+yz}\le \frac{1}{2}$$

(Diễn đàn toán học VMF)

Lời giải:Ta thấy:

$$x^2+y^2+z^2=xyz\Rightarrow 1=\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sum\frac{x}{x^2+yz}=\sum\frac{1}{x+\frac{yz}{x}}\le \sum\frac{1}{2\sqrt{yz}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: x=y=z=3

Ví Dụ 8:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\left(ab+a+1\right)^2}+\frac{b}{\left(bc+c+1\right)^2}+\frac{c}{\left(ca+c+1\right)^2}\ge \frac{1}{a+b+c}$$

(Diễn đàn toán học VMF)

Lời giải: Ta thấy rằng:

$$\frac{a}{\left(ab+a+1\right)^2}+\frac{b}{\left(bc+c+1\right)^2}+\frac{c}{\left(ca+c+1\right)^2}$$

$$=\frac{ac^2}{\left(ca+c+1\right)^2}+\frac{a^2bc^2}{\left(ca+c+1\right)^2}+\frac{c}{\left(ca+c+1\right)^2}=\frac{ac^2+a^2bc^2+c}{\left(ca+c+1\right)^2}=\frac{ac^2+ac+c}{\left(ca+c+1\right)^2}$$

Sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(ac^2+ac+c\right)\left(a+b+c\right)\ge\left(ca+c+1\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{ac^2+ac+c}{\left(ca+c+1\right)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\left(ab+a+1\right)^2}+\frac{b}{\left(bc+c+1\right)^2}+\frac{c}{\left(ca+c+1\right)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

5) Kỹ thuật thêm bớt :

Ví Dụ 1: Cho a,b,c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

(Junior Banlkan 2000)

Lời giải:

$$\frac{a^3}{b^2}+b=\frac{a^3+b^3}{b^2}\ge\frac{ab(a+b)}{b^2}=\frac{a^2}{b}+a$$

$$\Rightarrow\sum\frac{a^3}{b^2}+a+b+c\ge\sum\frac{a^2}{b}+a+b+c$$

$$\Rightarrow\sum\frac{a^3}{b^2}\ge\sum\frac{a^2}{b}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 2: Cho a,b,c,d là 4 cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+d-a}+\frac{b}{a-b+c+d}+\frac{c}{a+b-c+d}+\frac{d}{a+b+c-d}\ge 2$$

(Lê Việt Hưng)

Lời giải:

$$\sum\frac{a}{b+c+d-a}\ge\sum\left(\frac{a}{b+c+d-a}+\frac{1}{2}\right)-2$$

$$=\sum\frac{a+b+c+d}{2(b+c+d-a)}-2=\frac{a+b+c+d}{2}\sum\frac{1}{b+c+d-a}-2$$

$$\ge\frac{a+b+c+d}{2}\cdot\frac{16}{2(a+b+c+d)}-2=2$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=d

Ví Dụ 3:Cho a,b,c >0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

Lời giải:Đầu tiên, ta có thể chuyển vế trái qua vế phải và viết lại thành:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}\geq 0$$

Để triệt tiêu dấu trừ ta có thể làm như sau:

$$\left(\frac{a-b}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b-c}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c-a}{a+b}+1\right)\geq 3$$

Đưa về bài toán chứng minh : $\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\geq 3$

Ta có: $\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c+a}.\frac{c+a}{b+c}.\frac{b+c}{a+b}}=3$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 4:Cho a,b,c,d>0.Chứng minh rằng:

$$\frac{a-d}{b+d}+\frac{d-b}{c+b}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{d+a}\geq 0$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải: Để triệt tiêu dấu trừ, ta có thể làm theo cách của ví dụ 3 như sau:

$$\left(\frac{a-d}{b+d}+1\right)+\left(\frac{d-b}{c+b}+1\right)+\left(\frac{b-c}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c-a}{d+a}+1\right)\geq 4$$

Từ đây , ta đưa về dạng toán chứng minh:

$$\frac{a+b}{b+d}+\frac{c+d}{c+b}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+d}{d+a}\geq 4$$

Ta có:

$$\frac{a+b}{b+d}+\frac{c+d}{c+b}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+d}{d+a}=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+a}\right)+\left(c+d\right)\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{d+a}\right)$$

$$VT\geq\left(a+b\right)\frac{4}{a+b+c+d}+\left(c+d\right)\frac{4}{a+b+c+d}=\left(a+b+c+d\right)\frac{4}{a+b+c+d}=4$$

Từ đây bất đẳn thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=d

Ví Dụ 5: Cho a,b,c là độ dài của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leq\frac{5}{2}$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le\left(1-\frac{a}{b+c}\right)+\left(1-\frac{b}{c+a}\right)+\left(1-\frac{c}{a+b}\right)$$

$$<=>\frac{b+c-a}{b+c}+\frac{c+a-b}{c+a}+\frac{a+b-c}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Ta thấy a,b,c là các cạnh của 1 tam giác, vì vậy:
b+c – a > 0 ; a+b – c > 0 ; c+a – b > 0
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\sum\frac{a+b-c}{a+b}\ge\frac{\left[\sum(a+b-c)\right]^2}{\sum(a+b)(a+b-c)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c
Ví Dụ 6: Cho a,b,c là các số thực thực dương sao cho a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$$

(Japanese MO 2004)

Lời giải:Ta thấy : $\frac{1+a}{1-a}=\frac{2a}{b+c}+1$

Vì vậy , bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}$$

$$<=>\left(\frac{b}{a}-\frac{b}{c+a}\right)+\left(\frac{c}{b}-\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{c}-\frac{a}{b+c}\right)\ge\frac{3}{2}$$

$$<=>\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức cauchy – Schwarz ta có:

$$\sum\frac{ab}{c(b+c)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum abc(b+c)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}}=\frac{3}{2}$$

Từ đây , bất đẳng thức đã được chứng minh
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c
Ví Dụ 7:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

(IMO Shortlist 1998)
Lời giải: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq\frac{3a}{4}$$

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\geq\frac{3b}{4}$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq\frac{3c}{4}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{3}{4}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)\geq\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 8: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a\left(a-2b+c\right)}{ab+1}\geq 0$$

Lời giải: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sum\left[\frac{a\left(a-2b+c\right)}{ab+1}+3\right]\geq 9\Leftrightarrow\sum\frac{a+1}{ab+1}\geq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sum\frac{a+1}{ab+1}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+1}{ab+1}.\frac{b+1}{bc+1}.\frac{c+1}{ca+1}}$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\geq\left(ab+1\right)\left(bc+1\right)\left(ca+1\right)$$

$$\Leftrightarrow abc+ab+bc+ca+1+a+b+c\geq a^2b^2c^2+abc\left(a+b+c\right)+ab+bc+ca+1$$

$$\Leftrightarrow\left(1-abc\right)\left(abc+a+b+c\right)\geq 0$$

Theo AM – GM ta lại có: $3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow 1\geq abc$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

6) Kỹ Thuật AM-GM ngược dấu:

Ví Dụ 1: Cho a,b,c >0 thỏa mãn ab+bc+ca=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải: Ta thấy : $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq 1-\frac{ab^2}{2b}=1-\frac{ab}{2}$

⇨ $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq 3-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 2: Cho a,b,c,d >0 thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 2$$

(Vasile Cirtoaje)

Giải : Ta nhận thấy rằng: $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\geq 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$

Tương tự ta có : $\frac{1}{b^2+1}\geq 1-\frac{b}{2}$

$$\frac{1}{c^2+1}\geq 1-\frac{c}{2}$$

$$\frac{1}{d^2+1}\geq 1-\frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 4-\frac{a+b+c+d}{2}=4-\frac{4}{2}=2$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=d=1

Ví Dụ 3:Cho a,b,c >0 và a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq 3$$

Lời giải: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{b^2\left(a+1\right)}{b^2+1}\geq a+1-\frac{b^2\left(a+1\right)}{2b}=a+1-\frac{b+ab}{2}$$

Vì vậy ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq \frac{a+b+c}{2}-\frac{ab+bc+ca}{2}+3=3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 4:Cho a,b,c >0 và abc=1 . Chứng minh rằng:

$$a+b+c\geq \frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải:Ta thấy: $\frac{1+a}{1+b}=\left(1+a\right)-\frac{b\left(1+a\right)}{1+b}$

Vì vậy ,bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{b\left(1+a\right)}{1+b}+\frac{c\left(1+b\right)}{1+c}+\frac{a\left(1+c\right)}{1+a}\geq 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Dễ dàng chứng minh được bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số:

$$\frac{b\left(1+a\right)}{1+b}+\frac{c\left(1+b\right)}{1+c}+\frac{a\left(1+c\right)}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b\left(1+a\right)}{1+b}.\frac{c\left(1+b\right)}{1+c}.\frac{a\left(1+c\right)}{1+a}}=3$$

Ví Dụ 5:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$$

Vì vậy, ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge a+b+c-\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 6: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn xyz=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4y}{x^2+1}+\frac{y^4z}{y^2+1}+\frac{z^4x}{z^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

(Trần Quốc Anh)

Lời giải: Ta thấy rằng: $\frac{x^4y}{x^2+1}=x^2y-\frac{x^2y}{x^2+1}\ge x^2y-\frac{x^2y}{2x}=x^2y-\frac{xy}{2}$

Tương tự:

$$\frac{y^4z}{y^2+1}\ge y^2z-\frac{yz}{2};\frac{z^4x}{z^2+1}\ge z^2x-\frac{zx}{2}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$x^2y+y^2z+z^2x\ge\frac{3}{2}+\frac{xy+yz+zx}{2}$$

Theo AM – GM ta dễ thấy: $\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{2}\ge\frac{3xyz}{2}=\frac{3}{2}$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$x^2y+y^2z+z^2x\ge xy+yz+zx$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM kết hợp với điều kiện xyz=1 ta có:

$$x^2y+x^2y+z^2x\ge 3\sqrt[3]{x^2y.x^2y.y^2z}=3xy$$

Chứng minh tương tự:

$$y^2z+y^2z+z^2x\ge 3yz$$

$$z^2x+z^2x+x^2y\ge 3zx$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên , ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: x=y=z=1

7)Kỹ thuật ghép đối xứng:

Ví Dụ 1:Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c$$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hồ Chí Minh 2008-2009)

Lời giải: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b$$

Tương tự: $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 2c$; $\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\ge 2a$

Cộng 3 vế lại ta được điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 2: Cho x,y,z >0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 3$$

(Prance MO 2005)

*Lời giải:*Bình phương 2 vế bất đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\ge 3$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\ge 2\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}.\frac{y^2z^2}{x^2}}=2y^2$$

Tương tự ta có: $\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\ge 2x^2$; $\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\ge 2z^2$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: x=y=z=1

Ví Dụ 3:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải:Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}.\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}.\frac{b^2+3}{8}}=\frac{3}{2}a^2$$

Tương tự ta có: $\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^2+3}{8}\ge\frac{3}{2}b^2$

$$\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{a^2+3}{8}\geq\frac{3}{2}c^2$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\sum\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)+9}{8}\geq\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}\geq\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 4:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a^2}{b+c}+\frac{1+b^2}{c+a}+\frac{1+c^2}{a+b}\geq 3$$

Lời giải:Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số ta có:

$$\frac{1+a^2}{b+c}+\frac{1+b^2}{c+a}+\frac{1+c^2}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1+a^2}{b+c}.\frac{1+b^2}{c+a}.\frac{1+c^2}{a+b}}$$

Ta cần chứng minh: $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\geq\left(a+b\right)^2$

$$\Rightarrow\left(1+a^2\right)^2\left(1+b^2\right)^2\left(1+c^2\right)^2\geq\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\geq\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1+a^2}{b+c}+\frac{1+b^2}{c+a}+\frac{1+c^2}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1+a^2}{b+c}.\frac{1+b^2}{c+a}.\frac{1+c^2}{a+b}}\geq 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 5:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{\sqrt{b+c}}{a}\geq\frac{4\left(a+b+c\right)}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}$$

Lời giải: Đưa bất đẳng thức đã cho về dạng:

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\sqrt{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}\geq 4\left(a+b+c\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhia-copxki ta có:

$$\left(a+b\right)\left(a+c\right)\geq\left(a+\sqrt{bc}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\geq a+\sqrt{bc}$$

Tương tự ta có: $\sqrt{\left(b+a\right)\left(b+c\right)}\geq b+\sqrt{ca}$

$$\sqrt{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}\geq c+\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\sqrt{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}\geq\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\left(a+\sqrt{bc}\right)=\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\sqrt{bc}+2\left(a+b+c\right)$$

Ta cần chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\sqrt{bc}\ge 2\left(a+b+c\right)$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\sqrt{bc}\ge 2\sum_{cyc}\frac{bc}{a}\ge\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\right)\ge 2\left(a+b+c\right)$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 6:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}\ge 3$$

(Nguyễn Việt Hùng)

Lời giải:Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}\ge 3\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}.\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}.\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(b^2+c^2\right)\left(a^2+c^2\right)\ge\left(ab+c^2\right)^2$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+b^2\right)\ge\left(ac+b^2\right)^2$$

$$\left(c^2+a^2\right)\left(b^2+a^2\right)\ge\left(bc+a^2\right)^2$$

Nhân 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 7:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{\sqrt[3]{abc}}$$

Lời giải: Ta chuẩn hóa abc=1

Ta cần chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Bình phương 2 vế ta được:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\frac{b}{a}+2\frac{a}{c}+2\frac{c}{b}\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Bằng kỹ thuật ghép đối xứng kết hợp với bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}}=3\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}=3a^2$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^2}{c^2}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\ge 3b^2;\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\ge 3c^2$

Cộng 3 vế bất đẳng thức trên theo vế ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 8:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{\frac{a+b}{c}}\ge\sqrt{\frac{6(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}}$$

Lời giải: Đầu tiên, ta chuẩn hóa abc=1.

Ta cần chứng minh:

$$\sum\sqrt{\frac{a+b}{c}}\ge\sqrt{6(a+b+c)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Minkowxki ta có:

$$\sum\sqrt{\frac{a+b}{c}}\ge\sum\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức ở ví dụ 7 ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2\ge\left(\frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}}}\right)^2=3(a+b+c)$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2\ge\left(\frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}}}\right)^2=3(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\sum\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2}\ge\sqrt{6(a+b+c)}$$

Từ đây, bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy khi và chỉ khi:a=b=c

8)Kỹ thuật biến đổi tương đương:

Ví Dụ 1:Cho a,b,c là các số thực dương. Chưng minh rằng:

$$\sum\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\ge 1$$

Lời giải:

$$\sum \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sum \left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} - \frac{1}{3} \right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{2\left(a-b\right)^2}{a^2+ab+b^2} \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

Ví Dụ 2: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \ge 3\left(a+b+c\right)^2$$

(APMO 2004)

Lời giải: Ta có đẳng thức sau:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)-3\left(a+b+c\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(c^2+2\right)\left[\left(a-b\right)^2+2\left(ab-1\right)^2\right]+\frac{3}{2}\left(ac+bc-2\right)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \ge 3\left(a+b+c\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví Dụ 3: Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$3\prod\left(x^2+xy+y^2\right) \ge \left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)^2$$

Lời giải: Ta có đẳng thức:

$$x^2+xy+y^2 = \frac{3}{4}\left(x+y\right)^2+\frac{1}{4}\left(x-y\right)^2 \Rightarrow x^2+xy+y^2 \ge \frac{3}{4}\left(x+y\right)^2$$

Tương tự ta có: $y^2+yz+z^2 \ge \frac{3}{4}\left(y+z\right)^2; z^2+zx+x^2 \ge \frac{3}{4}\left(z+x\right)^2$

Nhân 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\prod\left(x^2+xy+y^2\right)^2 \ge \frac{27}{64}\left(x+y\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)^2$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(x+y\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)^2 \ge \frac{64}{81}\left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right) \ge \frac{8}{9}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(y-z\right)^2+y\left(z-x\right)^2+z\left(x-y\right)^2 \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: x=y=z

Ví Dụ 4:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x \ge y \ge z$

Chứng minh rằng:

$$\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{x+y}+\frac{y\left(z^2+x^2\right)}{y+z}+\frac{z\left(y^2+z^2\right)}{z+x}\ge x^2+y^2+z^2$$

Lời giải: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$xy\left(y-x\right)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{z+x}\right)+yz\left(y-z\right)\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{z+x}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy\left(x-y\right)\left(y-z\right)}{\left(x+y\right)\left(z+x\right)}+\frac{yz\left(y-z\right)\left(x-y\right)}{\left(y+z\right)\left(z+x\right)}\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: x=y=z

Ví Dụ 5:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\ge \sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{b+c}\ge ab+bc+ca$$

(Lê Việt Hưng)

Lời giải: Đầu tiên ta đi chứng minh: $a^2+b^2+c^2\ge \sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{b+c}$

$$\sum\frac{ab\left(a-b\right)+ac\left(a-c\right)}{b+c}\ge 0\Leftrightarrow \sum\left[\frac{ab\left(a-b\right)}{b+c}+\frac{ac\left(a-c\right)}{b+c}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum\left[\frac{ab\left(a-b\right)}{b+c}+\frac{ba\left(b-a\right)}{c+a}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{ab\left(a-b\right)^2}{\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\ge 0$$

Ta cần chứng minh tiếp: $\sum\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{b+c}\ge ab+bc+ca$

Ví Dụ 6: Cho a,b,c>0 và ab+bc+ca=3. Chứng minh rằng:

$a^3+b^3+c^3+6abc\ge 9$

(Diễn đàn toán học VMF)

Lời giải:Áp dụng hệ quả bất đẳng thức schur bậc 1 ta có:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b\left(b-c\right)\left(b-a\right)+c\left(c-a\right)\left(c-b\right)\ge 0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử:

$$a\ge b\ge c$$

$$\Rightarrow c\left(c-a\right)\left(c-b\right)\ge 0$$

Ta có:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)=(a-b)\left[a(a-c)-b(b-c)\right]$$
$$=(a-b)\left[a^2-b^2+c(b-a)\right]=(a-b)^2(a+b-c)\geq 0$$
$$\Rightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq (a+b+c)(ab+bc+ca)\geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}.(ab+bc+ca)=9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c=1

Ví dụ 7:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}+6\geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(Lê Việt Hưng)

Lời giải:Quy đồng vế trái ta được :

$$VT=\frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{abc}$$

Quy đồng vế phải ta được

$$VP=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}=\frac{\sum ab(a+b)+3abc}{abc}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq \sum ab(a+b)+3abc$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử:

$$a\geq b\geq c$$
$$\Rightarrow c(c-a)(c-b)\geq 0$$

Ta có:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)=(a-b)\left[a(a-c)-b(b-c)\right]$$
$$=(a-b)\left[a^2-b^2+c(b-a)\right]=(a-b)^2(a+b-c)\geq 0$$
$$\Rightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a=b=c

IV) Bài tập ứng dụng:

Bài 1: Cho a,b,c >0 . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\left(1+a\right)^3}+\frac{1}{\left(1+b\right)^3}+\frac{1}{\left(1+c\right)^3}+\frac{3}{32}\left(ab+bc+ca\right)\geq\frac{21}{32}$$

(Thái Nguyên TST 2016)

Bài 2:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq 3$$

Bài 3:Cho a,b,c>0 thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ca}+\frac{c}{c+2ab}\geq 1$$

Bài 4:Cho x,y,z>1 thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

(Iranian MO 1998)

Bài 5:Cho x,y,z>2 và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.Chứng minh rằng:

$$(x-2)(y-2)(z-2)\leq 1$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa 2005-2006)

Bài 6:Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 12$$

Bài 7:Chứng minh rằng với mọi a, b, c > 0 ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$$

Bài 8:Cho a, b, c $\geq$ 0 trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng :

$$\sum\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}\geq 2$$

(Darij Grinberg)

Bài 9: Cho $x\geq y\geq z>0$ Chứng minh rằng :

$$\sum\left(\frac{x^2y}{z}\right)\geq x^2+y^2+z^2$$

(Việt Nam MO 1991)

Bài 10:Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Bài 11:Cho a,b,c >0 thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$$

(Romania TST 2006)

Bài 12:Cho a,b,c >0 thõa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\ge 1$$

(Lê Hữu Điền Khuê THPT Quốc Học, Thành phố Huế)

Bài 13:Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\sum\frac{ab}{a^2+ab+bc}$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 14:Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\sum\frac{ab}{a^2+bc+b^2}$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 15 :Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\sum\frac{ab}{b^2+bc+c^2}$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 16:Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\sum\frac{a^2}{a^2+ab+bc}$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 17: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\ge 5$$

(Nguyễn Thúc Vũ Hoàng)

Bài 18: Cho a,b,c >0 thỏa mãn ab+bc+ca = 1. Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{a^3+a}\ge 2\sqrt{a+b+c}$$

(Iranian TST 2008)

Bài 19:Cho a,b > 0 thõa mãn $\left(a+b\right)ab=a^2-ab+b^2$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\le 16$$

(Đề thi HSG Thành Phố Đông Hà 2016)

Bài 20:Cho a,b,c >0 .Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a}{a^2+b^2+2} \le \frac{3}{4}$$

Bài 21:Cho x,y,z >0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x\left(y+z\right)^2} \ge \frac{3}{4}$$

(Nguyễn Việt Hùng)

Bài 22: Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b+c}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(Romania 2005)

Bài 23: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\sum \frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \le 8$$

(USA MO 2003)

Bài 24: Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn (x - y)(x - z) = 1; y $\neq$ z. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(x-y)^2} \ge 4$$

(ĐTTS lớp 10 Chuyên Toán, Nam Định 2016-2017)

Bài 25: Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(xy+yz+xz)\left[\sum \frac{1}{\left(x+y\right)^2}\right] \ge \frac{9}{4}$$

(Iranian Mathematical Olumpiad 1996)

Bài 26 : Cho a, b, c > 0 thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2}{a+b^2} \ge a+b+c$$

(Đề thi vào 10 chuyên toán, Hà Nội 2016-2017)

Bài 27: Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d > 0 ta luôn có :

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \ge \frac{a+b+c+d}{abcd}$$

(Đề thi Austrian MO 2005)

Bài 28 :Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng:

$$a+b+c+d \le \frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{abcd}$$

(Collection)

Bài 29:Cho a,b,c>0. Chứng minh rằng:

$$\frac{8\sqrt{2}}{3}\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right) \le 8+(a+b)(b+c)(c+a)$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 30:Cho a,b,c > 0 thỏa mãn x+y+z = 1 . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4xyz} \ge \sum_{cyc}\frac{1}{x+yz}$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 31:Cho a,b,c>0 thỏa mãn a+b+c=3 . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \ge \sum_{cyc}\frac{1}{x+y+1}$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 32: Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng :

$$\sum \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} \ge 2$$

(Darij Grinberg)

Bài 33: Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{4b^2+1} \ge \sum_{a,b,c}\left(a\sqrt{a}\right)^2$$

(Đề thi Greece MO 2002)

Bài 34:Cho a, b, c > 0 thoả mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a(a+c)} \ge \frac{3}{2}$$

(Đề thi Zhaukovty 2008)

Bài 35: Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\sum\left(\sqrt{1-\frac{x}{y+z}}\right) \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(Tạp chí toán học và tuổi trẻ, bài T4, Số 42, Tháng 7/2012)

Bài 36: Cho x, y, z là các số thực dương có tích bằng 1.Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geq \frac{3}{4}$$

(IMO Shortlist 1998)

Bài 37:Cho x,y,z >0 thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$(xy+yz+zx)\left[\sum \frac{1}{(x-y)^2}\right] \geq 4$$

(Trần Nam Dũng, VMO 2008)

Bài 38:Cho a,b,c là các số thực dương . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(British MO 2005)

Bài 39:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

(Sưu tầm)

Bài 40:Cho a,b,c >0 thỏa mãn ab+bc+ca=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Phạm Hữu Đức)

Bài 41:Cho x,y,z >0 thỏa mãn x+y+z = xyz. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

(Korean MO 1998)

Bài 42:Cho a,b,c >0 thỏa mãn a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}$$

(Sưu tầm)

Bài 43:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

(Sưu tầm)

Bài 44:Cho a,b,c >0 thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a+b}+\frac{b^2c}{2b+c}+\frac{c^2a}{2c+a}\le 1$$

(Sưu tầm)

Bài 45:Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn abcd=1. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a+b}{a+ab}\ge 4$$

(Nguyễn Việt Hùng)

Bài 46:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\ge 4$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 47: Cho a,b,c >0 thỏa mãn $a+b+c\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\ge\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$$

(Peru TST 2007)

Bài 48:Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2\right)^2\ge(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

(British National MO 2007)

Bài 49:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}$$

(Macedonia TST 2007)

Bài 50:Cho a,b,c,d là các số thực dương và a+b+c+d=1. Chứng minh rằng:

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

(France TST 2007)

Bài 51:Cho x,y,z là các số thực dương và a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(China TST 2006)

Bài 52:Cho a,b,c là các số thực dương và abc=1. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a^3+1}{b+c} \ge a+b+c$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Bài 53:Cho a,b,c là các số thực không âm và ab+bc+ca=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{5}{2}$$

(MOSP 2000)

Bài 54:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a^6+b^4+c^2}{3bc} \ge ab+bc+ca$$

(Trần Hữu Thiên)

Bài 55: Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b+c} \ge \sum \sqrt{a+b}$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 56:Cho x, y, z > 0 thoả mãn $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=12$.

Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1}{2x+3y+3z} \le 3$$

(Đề chuyên toán Hà Nam 2016-2017)

Bài 57: Cho x, y, z > 0 và $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+xy} \ge \frac{3}{2}$$

(ĐTTS lớp 10 chuyên Toán – Tin, ĐH Sư phạm Vinh 2002 - 2003)

Bài 58: Cho a, b, c > 0 và a + b +c =3. Chứng minh rằng :

$$\sum_{cyc} \frac{a}{1+b^2} \ge \frac{3}{2}$$

(Bulgarian TST 2003)

Bài 59: Cho x, y, z >0. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le 1$$

(Đề thi 10 chuyên toán Hà Nội 2014-2015 / Tạp chí Crux math)

Bài 60: Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng :

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

(Đề thi 10 vào 10 THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hoá năm 2014-2015)

Bài 61: Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn x + y + z = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}{xy+yz+zx} \ge \frac{4}{3}$$

(Tạp chí toán học và tuổi trẻ, bài T4, Số 425, Tháng 12 năm 2012)

Bài 62: Cho a, b, c >0 .Chứng minh rằng :

$$\sum \frac{1}{a^3+b^3+abc} \le \frac{1}{abc}$$

(Đề thi USA MO 1997)

Bài 63: Cho a,b,c > 0. Chứng minh rằng :

$$\sum \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \le 1$$

(ĐTTS vào 10 Nguyễn Trãi, Hải Dương 2016-2017)

Bài 64:Cho a,b,c là các số thực dương và ab+bc+ca=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+abc \ge 4$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 65:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz \ge xy+yz+xz$

Chứng minh rằng:

$$xyz \ge 3\left(x+y+z\right)$$

(India 2001)

Bài 66:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+b} \le \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

(Mathlinks Contests)

Bài 67:Cho a,b,c,d >0 và $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng:

$$a^3bc+b^3cd+c^3da+d^3ab \le 4$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 68:Cho a,b,c >0 và abc=1. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1}{2a} \ge \sum \frac{a}{a+1}$$

(Trần Hữu Thiên)

Bài 69: Cho x,y,z>0 và a,b$\in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)}+\frac{y^2}{(ax+bz)(az+bx)}+\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq \frac{3}{(a+b)^2}$$

(Olympiad 30-4)

Bài 70:Cho a,b,c >0. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{\sqrt{b+c}}{a}\geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

(Darij Grinberg)

Bài 71:Cho a,b,c$\geq$0 và a+b+c=2. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{1+c^2}+\frac{bc}{1+a^2}+\frac{ca}{1+b^2}\leq 1$$

(Phạm Kim Hùng)

Bài 72: Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\geq 1$$

(IMO 2008)

Bài 73:Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng :

$$\sum \frac{a}{(b+c)^2}\geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

(Darij Grinberg)

Bài 74: Cho a,b,c > 0 thõa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\left(a-bc\right)\left(b-ca\right)\left(c-ab\right)\leq 8a^2b^2c^2$$

(Nguyễn Việt Hùng)

Bài 75:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 3\left(a+b+c\right)^2$$

(APMO 2004)

Bài 76: Cho a,b,c là có số thực không âm thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16}\geq \frac{1}{6}$$

(Trần Quốc Anh)

Bài 77: Cho a,b,c là các số thực dương và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+abc\geq 4$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Bài 78:Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 2$$

Bài 79: Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sum a\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Bài 80: Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta luôn có:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+2b}}\ge\sqrt{a+b+c}$$

Bài 81: Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta luôn có:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b^2+3c^2}}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 82: Cho a, b, c $\ge$ 0; a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}\ge\sqrt{3}$$

Bài 83: Cho a, b, c $\ge$ 0. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$$

Bài 84: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a}{\sqrt[3]{6a^3+b^3+c^3}}\le\frac{3}{2}$$

Bài 85: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{7+b^3+c^3}}\ge 1$$

Bài 86:Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}\ge\frac{4}{a+b+c}$$

Bài 87:Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Bài 88:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}+6\ge a+b+c$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 89:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$$

(Việt Nam MO 2005)

Bài 90:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn x+y+z=3. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{y^3+8} \geq \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$$

(Iranian National Olympiad 3rd Round 2008)

Bài 91:Cho x,y,z >0 thỏa mãn xyz=1.Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sum_{cyc}\frac{1}{x^2+2y^2+3}$$

(Lạng Sơn TST)

Bài 92:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Bài 93:Cho a,b là 2 số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a+ab}+\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)ab+\frac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)ab} \geq 3$$

(Báo toán học và tuổi trẻ)

Bài 94:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn ab+bc+ca=3abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 tỉnh Quảng Bình)

Bài 95:Cho a,b,c >0 thỏa mãn abc=8.Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}} \geq \frac{4}{3}$$

(APMO 2005)

Bài 96:Cho a,b,c là các số thực khác 0.Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}} \geq 3\sqrt{2}$$

(Azerbaijan Junior MO)

Bài 97:Cho x,y, là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2}\ge 1$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài 98:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge \frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

Bài 99:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\ge \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Bài 100:Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}\ge 1+\sqrt{1+\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)}}$$

Bài 101:Cho a,b,c >0 và a+b+c=1 . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\ge 2$$

Bài 102:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a^2}{b^2+c^2}\ge\sum\frac{a}{b+c}$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài 103:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

(IMO 1995)

Bài 104:Cho a,b,c >0 và a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{1+c}+\frac{bc}{1+a}+\frac{ca}{1+b}\le\frac{1}{4}$$

Bài 105:Cho a,b,c là các số thực dương. Chưng minh rằng:

$$\sum\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge 1$$

Bài 106:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$$

(Canada TST 2002)

Bài 107:Cho a,b,c >0 thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

(Belarus TST 1999)

Bài 108: Cho x,y,z >0 thỏa mãn điều kiện x+y+z=1. Chứng minh rằng:

$$x^2y+y^2z+z^2x\leq\frac{4}{27}$$

(Canada TST 1999)

Bài 109:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a^2}{b}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)}{ab+bc+ca}$$

Bài 110:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn ab+bc+ca=abc.
Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+bc}}\leq\frac{3}{2}$$

(Lê Việt Hưng)

Bài 111:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)}\geq\left(a+b+c\right)^2$$

Bài 112:Cho a,b,c >0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a^2+1}{b^2+ca}\geq 6$$

(Nguyễn Phúc Tăng)

Bài 113: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\leq 1$$

Bài 114:Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn a+b=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}$$

(Hungary 1996)

Bài 115:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq 1$$

(IMO 2001)

Bài 116: Cho x,y,z >0 thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\sqrt{xyz}$. Chứng minh rằng:

$$xy+yz+zx \ge 9(x+y+z)$$

(Belarus 1996)

Bài 117:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca)$$

Bài 118:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn a+b+c=1.
Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge 3(a^2+b^2+c^2)$$

(Junior Balkan TST 2006)

Bài 119:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

(APMO 1998)

Bài 120:Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}$$

(Japan 1997)

*** Các kí hiệu viết tắt thường dùng :**

- $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+...+a_n$.
- $\sum_{cyc} a^2b = a^2b+b^2c+c^2a$ (Sigma cyclic: Tổng hoá vị).
- $\sum_{sym} a^2b = a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$ (Sigma Symmetric: Tổng đối xứng).
- $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1a_2...a_n$.
- R -Tập số thực.
- R^+ -Tập số thực dương.
- N* - Tập số tự nhiên bỏ qua phần tử 0.
- Q - Tập số hữu tỉ.
- [a, b] - Đoạn (khoảng đóng) của hai đầu mút a, b.
- (a, b) - Đoạn mở của hai đầu mút a, b.

Chú thích:

- MO - National Mathematical Olympiad.
- IMO - International Mathematical Olympiad.
- TST - Selection Test for International Mathematical Olympiad.
- VMEO - Viet Nam Mathematical EOlympiad.
- VMO - Viet Nam Mathematical Olympiad.
- S.O.S - Sum of Square.
- MV - Mixing Variables hay dồn biến.
- SMV - Stronger Mixing Variables hay dồn biến mạnh.
- THTT - Mathematical and Youth Magazine hay tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ.
- APMO - Asian Pacific Mathematical Olympiad.
- R.M.M - Rumanian Mathematical Magazine.

V)Các tài liệu tham khảo:

[1] Inequality III Group/ Facebook
[2] Solving Inequality*****/ Facebook
[3] Mathematical Inequality Group/ Facebook
[4] Imad Zak Group/ Facebook
[5] Diendantoanhoc.net
[6] http://www.ssmrmh.ro/
[7] mathlinks.ro
[8] http://math.stackexchange.com/
[9] Crux Mathematicorum
[10] Mathematical and Youth Magazine
[11] Romanian Magazine
[12] Kalva.demon.co.uk
[13] Mathnfriend.net.
[14] k2pi.com.
[15] Mathlinks Inequality Forum
[16] Vaslie Cirtoaje.
[17] Daniel Sitaru.
[18] Leonard Giugiuc
[19] Mathematical Reflections.
[20] Hojoo Lee - Topics in Inequalities.
[21] Kavant Magazine.
[22] IMO Shortlist.
[23] Ha Noi Mathematical Open Compertion.
[24] Blog Solving Inequality*****