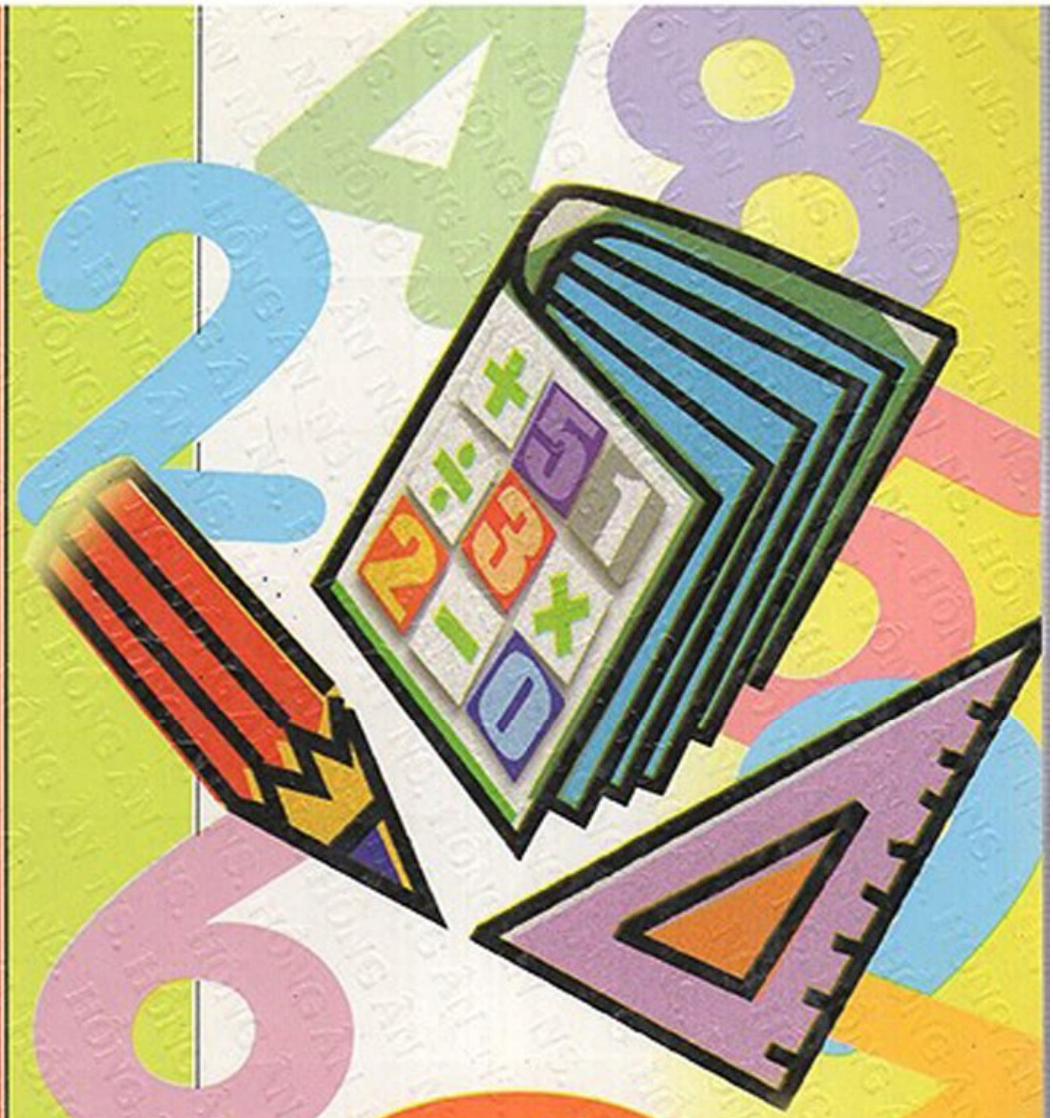
LÊ HẢI CHÂU
(Nhà giáo Nhân dân)

# TÌM CHÌA KHOÁ VÀNG



## GIẢI BÀI TOÁN HAY

Dùng cho lớp 8-9

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

**LÊ HẢI CHÂU**
*Nhà giáo Nhân dân*

# TÌM CHÌA KHÓA VÀNG GIẢI BÀI TOÁN HAY

*Dành cho các bạn có trình độ lớp 8 – 9*

*(Tái bản lần thứ nhất)*

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

# Vài dòng mở đầu

Các bạn trẻ yêu toán thân mến.

Vườn hoa toán học rất đa dạng và phong phú, có nhiều bông hoa rực rỡ đầy hương sắc. Đó là những bài toán hay, đòi hỏi phát huy trí thông minh và óc sáng tạo khi giải.

*Muốn giải một bài toán,* sau khi đọc kĩ đề bài, điều đầu tiên và quan trọng là cách suy nghĩ tìm ra đường lối giải, đó chính là :

**"Tìm chìa khóa vàng giải bài toán hay"**

Cuốn sách này gồm 2 tập :

– Tập 1 dành cho các bạn có trình độ lớp 6 và lớp 7.

– Tập 2 dành cho các bạn có trình độ lớp 8 và lớp 9.

Nội dung được trình bày theo từng xoắn (§). Ở mỗi xoắn đều gồm các mục :

A. *Những kiến thức cần nắm vững*, phục vụ chủ yếu cho việc giải các đề toán sau đó.

B. *Các bài toán điển hình*, gồm những bài toán hay và thông minh.

C. *Cách giải và lời bình*, đặc biệt phần *lời bình* nhằm khai thác đề bài đã ra và được trình bày với những bài toán tương tự khó hơn, hoặc những bài toán mở rộng, những bài toán liên quan ra dưới dạng khác.

D. *Bạn có biết ?* gồm những mẩu chuyện toán học vừa nâng cao hiểu biết, mở rộng tầm mắt, vừa có tính chất giải trí.

Mong rằng cuốn sách này giúp các bạn trẻ yêu toán gặt hái được nhiều thành công trong việc học giỏi môn Toán, "môn thể dục của trí tuệ".

*Hà Nội, mùa xuân 2010*

**LÊ HẢI CHÂU**

# §1. THỬ TRÍ THÔNG MINH

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Đây là những *câu hỏi, câu đố ngắn gọn, hấp dẫn và thông minh*, đòi hỏi lập luận, phân tích có lí, hợp lôgic vì nội dung tương đối thiết thực, phản ánh những sự kiện trong đời sống muôn màu muôn vẻ.

Để giải đáp cần đọc kĩ từng câu hỏi, câu đố, suy ngẫm xem nội dung cho cái gì, tìm cái gì và cách giải có khi độc đáo, thông minh. Hãy *tìm ra chìa khóa vàng* nhằm giúp cho việc giải toán được ngắn gọn, nhanh chóng.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Ngựa ăn hết một xe cỏ khô trong một tháng, dê ăn hết trong hai tháng, cừu ăn hết trong ba tháng. Hỏi ngựa, dê và cừu cùng ăn xe cỏ khô đó thì phải trong bao lâu sẽ hết cỏ ?

**2.** Con gái hỏi bố bao nhiêu tuổi. Bố trả lời : tuổi con bằng $\frac{2}{5}$ tuổi bố bây giờ, cách đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{3}$ tuổi bố hiện nay. Hỏi bố bao nhiêu tuổi, con gái bao nhiêu tuổi ?

**3.** Ngày xưa có một người tù bị tội chết chém. Nghe đồn người tù này rất thông minh, tên chúa ngục cho gọi người tù lên bảo : "Ngục giam nhà ngươi có hai cửa ra, một là cửa sống và một là cửa chết. Mỗi cửa có một lính gác, một người nói thật, một người nói dối. Ta cho phép ngươi hỏi một trong hai lính gác đó và chỉ được hỏi một câu để chọn cửa đi ra. Nếu qua cửa sống ta thả, nếu qua cửa chết ta chém đầu ngay. Nhớ rằng cả hai lính đều biết họ gác cửa nào và họ chỉ trả lời bằng gật đầu hoặc lắc đầu".

Người tử tù thông minh đã hỏi một câu và đi qua cửa sống. Bạn hãy nghĩ xem câu hỏi đó là câu gì mà đã cứu mạng người tù thông minh này.

**4.** Có hay không một dãy số gồm 5 số liên tiếp mà tổng các bình phương của ba số đầu bằng tổng các bình phương của hai số sau ?

**5.** Có năm thẻ viết các số lẻ 1; 3; 5; 7; 9. Hãy sắp xếp các thẻ này thành số có năm chữ số sao cho tích hai chữ số đầu với hai chữ số cuối, trừ đi chữ số giữa, luôn bằng 2222 (hai đáp số).

**6.** Ta biết rằng $25 = 5^2$ (ở cả hai vế đều có hai chữ số 2 và 5). Hãy viết các số 36; 64 và 81 sao cho ở cả hai vế đều có hai chữ số giống hai chữ số đã cho.

**7.** Tại sao tổng hai số lẻ liên tiếp luôn chia hết cho 4, nhưng tổng hai số chẵn liên tiếp lại không chia hết cho 4 ?

**8.** Có hay không số tự nhiên n để đa thức $5n^3 + 4n^2 + 3n + 2$ là một số lẻ ?

**9.** Tổng $11^6 + 14^6 + 16^6$ tận cùng bằng chữ số nào ?

**10.** Tổng hai số lẻ chia hết cho 5, tổng các lập phương của hai số đó tận cùng bằng chữ số nào ?

**11.** Một chủ trang trại để lại di chúc cho hai con và ba em như sau :

Người con cả được 100 con gà và $\frac{1}{6}$ số gà còn lại, người con thứ hai được 200 con gà và $\frac{1}{6}$ số gà còn lại. Sau đó đến người em thứ nhất được 300 con gà và $\frac{1}{6}$ số gà còn lại, người em thứ hai được 400 con gà và $\frac{1}{6}$ số gà còn lại, người em thứ ba được số gà còn lại sau khi bốn người đầu đã lấy. Cuối cùng tất cả 5 người đều được hưởng số gà như nhau. Hỏi số gà mà mỗi người được hưởng là bao nhiêu ?

**12.** Có hai chữ số 2, hãy dùng dấu $\sqrt{\ }$ để viết được các số :

a) lớn hơn 0 nhưng nhỏ hơn 1.

b) lớn hơn 1 nhưng nhỏ hơn 2.

c) lớn hơn 2 nhưng nhỏ hơn 3.

**13.** Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 99999 trên một tờ giấy, ta được một số khổng lồ sau đây : 123456789101112...999979999899999.

Tổng các chữ số của số này bằng bao nhiêu ?

**14.** Tìm chữ số cuối cùng của các lũy thừa sau : $1^{2013}$; $5^{2013}$; $6^{2013}$; $9^{2013}$.

**15.** Viết các số sau đây dưới dạng lũy thừa của 10 : 66 669 999 và $\overline{abcde}$.

**16.** Các số 10! và 100! tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

(*Lưu ý* : kí hiệu 5! đọc là 5 giai thừa bằng 1.2.3.4.5).

**17.** Cho số ((3!)!)!

a) Chứng tỏ rằng số này có trên 1000 chữ số.

b) Số này tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

**18.** Chứng tỏ rằng hiệu $t^9 - t^5$ chia hết cho 10. Hiệu này có chia hết cho 30 không ?

**19.** Biết rằng tổng $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = M^2$. Hãy tính M.

**20.** Bình phương của một số nguyên có thể tận cùng bằng ba chữ số giống nhau không ?

**21.** Chứng tỏ rằng có vô số số tự nhiên không thể biểu diễn dưới dạng tổng các lập phương của ba số nguyên không âm.

**22.** Chứng tỏ rằng số $A = -\left\{-[-(-2)]^2\right\}^3 . \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^3\right\}^2$ bằng 1.

## C. GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** Vì ngựa ăn hết 1 xe cỏ khô trong một tháng, nên trong một năm ngựa ăn hết 12 xe cỏ. Vì dê ăn trong hai tháng mới hết 1 xe cỏ khô nên trong một năm dê chỉ ăn hết 6 xe cỏ. Còn cừu trong ba tháng mới ăn hết 1 xe cỏ khô nên trong một năm cừu chỉ ăn hết 4 xe cỏ.

Như vậy trong một năm cả ba con vật ăn hết 12 + 6 + 4 = 22 (xe cỏ). Do đó muốn ăn hết 1 xe cỏ thì cả ba phải ăn trong :

$$12 : 22 = \frac{6}{11} \text{ (tháng).}$$

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Mười hai người đi du lịch mang theo 12 bánh mì : mỗi đàn ông mang 2 bánh mì, mỗi đàn bà mang $\frac{1}{2}$ bánh mì, mỗi trẻ em mang $\frac{1}{4}$ bánh mì. Hỏi có bao nhiêu đàn ông, đàn bà, trẻ em ?"*

Cách giải như sau :

Vấn đề ở đây là phân phối 12 bánh mì như thế nào cho số đàn ông, đàn bà và trẻ em.

Trước hết chia cho mỗi người $\frac{1}{2}$ bánh, do đó 12 người nên chia hết 6 bánh mì, còn lại 6 bánh. Theo bài ra thì mỗi đàn bà mang $\frac{1}{2}$ bánh mì, thế là đàn bà đã mang đủ bánh mì, còn trẻ em thì mang thừa mỗi em $\frac{1}{4}$ bánh (vì mỗi em chỉ mang $\frac{1}{4}$ bánh), vì thế 6 bánh còn lại sẽ chia cho đàn ông. Do mỗi đàn ông mang 2 bánh mì mới được $\frac{1}{2}$ bánh nên mỗi đàn ông còn thiếu 1 bánh rưỡi.

Với 6 bánh còn lại thì đủ chia cho 4 đàn ông, khi đó 4 đàn ông này mang đủ mỗi người 2 bánh. Suy ra số đàn ông phải ít hơn 5 người, nếu không thì bánh thừa của trẻ em không biết chia cho ai, vô lí ! Nhưng số đàn ông không thể lớn hơn hoặc bằng 6, vì nếu là 6 đàn ông thì phải mang 12 bánh, thế là đàn bà và trẻ em không phải mang gì cả, trái với bài ra ! Vậy *số đàn ông phải là 5.*

Còn lại 7 người vừa đàn bà vừa trẻ em để mang 2 bánh. Từ đó ta thấy ngay rằng *số trẻ em phải là 6* và mang 1 bánh rưỡi (mỗi em mang $\frac{1}{4}$

bánh). Suy ra *số đàn bà là 1* (mỗi đàn bà mang $\frac{1}{2}$ bánh).

**2.** Do tuổi con gái hiện nay bằng $\frac{2}{5}$ tuổi của bố và trước đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{3}$ tuổi của bố hiện nay nên số 4 tuổi này bằng $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ tuổi của bố.

Vậy tuổi của bố là $4 : \frac{1}{15} = 60$ (tuổi), do đó tuổi của con gái là :

$$60.\frac{2}{5} = 24 \text{ (tuổi)}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự có bài toán về đoán tuổi sau đây :

*"Để đoán được tuổi của bạn Xuân, bạn Hạ đề nghị bạn Xuân hãy làm như sau : Lấy tuổi của mình nhân với 2, thêm 4 vào tích rồi nhân tổng tìm được với 5, cộng thêm 12 vào tích mới này, cuối cùng nhân tổng với 10 và cho bạn Hạ biết kết quả. Bạn Hạ sẽ đoán được ngay tuổi của bạn Xuân. Bạn Hạ đã làm như thế nào ?"*

Cách giải như sau :

Để đoán được tuổi của bạn Xuân, bạn Hạ đã lấy số ban đầu trừ đi 320 rồi chia kết quả tìm được cho 100.

Giả sử bạn Xuân 37 tuổi. Nhân với 2 rồi cộng thêm 4 được 78. Nhân 78 với 5 được 390, cộng thêm 12 được 402, rồi nhân với 10 được 4020.

Lấy 4020 trừ đi 320 được 3700. Chia số này cho 100 sẽ được 37 là số tuổi của bạn Xuân.

**3.** Người tù hỏi người lính gác 1 trong bốn câu hỏi sau thì biết được cửa người lính đang gác là cửa gì :

Câu 1. Người nói thật gác cửa sống phải không ?

Câu 2. Người nói dối gác cửa chết phải không ?

Câu 3. Người nói thật gác cửa chết phải không ?

Câu 4. Người nói dối gác cửa sống phải không ?

(Câu 1 và câu 2 tương đương với nhau, câu 3 và câu 4 tương đương với nhau).

Để trả lời câu hỏi 1 (hoặc câu hỏi 2) người lính gác cửa sống bao giờ cũng gật, người lính gác cửa chết bao giờ cũng lắc. Vì thế nếu thấy người lính gật đầu thì người tù yên tâm ra lối cửa đó (vì chính là cửa sống); nếu thấy người lính lắc đầu thì người tù phải đi ra lối cửa kia (vì cửa mà người lính lắc đầu chính là cửa chết !).

Đối với câu hỏi 3 (hoặc câu hỏi 4) thì ngược lại.

- ***Lời bình :*** Sau đây là một câu chuyện trong thần thoại Hi Lạp :

*"Trong một ngôi đền có 3 vị thần giống nhau như hệt : thần Thật thà luôn nói thật, thần Dối trá luôn nói dối, thần Khôn ngoan lúc nói thật lúc nối dối.*

*Một nhà hiền triết đến thăm ngôi đền và gặp 3 vị thần. Ông hỏi thần ngồi bên trái :*

*– Ai ngồi cạnh ngài ?*

*– Thần Thật thà.*

*Ông hỏi tiếp thần ngồi giữa :*

*– Ngài là ai ?*

*– Thần Khôn ngoan.*

*Ông quay sang hỏi thần ngồi bên phải :*

*– Ai ngồi cạnh ngài ?*

*– Thần Dối trá.*

*Nhà hiền triết đã suy luận và tìm ra được ai là thần Thật thà, ai là thần Dối trá, ai là thần Khôn ngoan."*

Hỏi nhà hiền triết đã suy luận như thế nào ?

Cách suy luận như sau :

Gọi thần ngồi bên trái là A, thần ở giữa là B, thần bên phải là C.

Khi hỏi A thì B là thần Thật thà (1).

Khi hỏi B thì B là thần Khôn ngoan (2).

Khi hỏi C thì B là thần Dối trá (3).

Theo (1) thì A không phải là thần Thật thà vì nếu A là thần Thật thà thì (1) là đúng và B phải là thần Thật thà, mâu thuẫn với (1).

Theo (2) thì B không phải là thần Thật thà, vì nếu B là thần Thật thà thì mâu thuẫn với (2).

Vậy *C chính là thần Thật thà.* Từ đó suy ra *A là thần Dối trá* và *B là thần Khôn ngoan.*

**4.** Gọi số thứ nhất trong dãy số là a thì bốn số tiếp theo sẽ là a + 1, a + 2, a + 3 và a + 4. Nếu tồn tại dãy số này thì ta phải có :

$$a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 = (a + 3)^2 + (a + 4)^2.$$

Nếu ta gọi a không phải là số nhỏ nhất mà là số thứ hai thì ta sẽ được một phương trình dạng đơn giản hơn là :

$$(a - 1)^2 + a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2 + (a + 3)^2.$$

Sau khi thực hiện các phép tính ta sẽ được phương trình $a^2 - 10a - 11 = 0$, hay $(a - 11)(a + 1) = 0$ mà nghiệm là $a_1 = 11$ và $a_2 = -1$.

Như vậy, tồn tại hai dãy số sau đây :

a) 10; 11; 12; 13; 14

b) –2; –1; 0; 1; 2.

Với dãy số thứ nhất ta có *"bài toán nhẩm nổi tiếng"* của một bức tranh đầu đề *"Bài toán khó"* của một họa sĩ Liên Xô sau đây :

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

mà đáp số là 2, vì :

$10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 = 100 + 121 + 144 + 169 + 196 = 730 = 2.365.$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tìm ba số liên tiếp có tính chất là : bình phương số giữa bằng tích hai số đầu và cuối cộng thêm 1".*

Cách giải như sau :

Gọi ba số là n, n + 1 và n + 2. Ta có : $(n + 1)^2 = n(n + 2) + 1$,

hay sau khi bỏ dấu ngoặc được : $n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$.

Đây là một hằng đẳng thức luôn đúng với mọi giá trị của n. Vì thế đáp số có thể là ba số liên tiếp bất kì, chẳng hạn :

– ba số 9; 10; 11 vì $10^2 - 9.11 = 100 - 99 = 1$, hoặc

– ba số 15; 16; 17 vì $16^2 - 15.17 = 256 - 255 = 1$.

**5.** Cách sắp xếp như sau :

Cách 1 : $39 \times 57 - 1 = 2222$, số có năm chữ số là 39157;

Cách 2 : $57 \times 39 - 1 = 2222$, số có năm chữ số là 57139.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Với năm số lẻ 1; 3; 5; 7; 9 và dấu các phép tính cùng với dấu ngoặc ( ), [ ] ta có thể viết số 0 như sau :*

$$0 = 1 + 3.5 - (7 + 9)$$

*Hãy viết các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 và 10 theo cách trên."*

Cách giải như sau :

$1 = (1 + 3.5) : (7 + 9)$

$2 = 1 - 3.5 + 7 + 9$

$3 = [(1 + 3).5 + 7] : 9$

$4 = (1 + 3).5 - (7 + 9)$

$5 = 1 + [3.(5 + 7)] : 9$

$6 = 1.3 + 5 + 7 - 9$

$7 = 1 + 3 + 5 + 7 - 9$

$8 = (1 + 3.5) : (-7 + 9)$

$9 = (1.3 + 5 - 7).9$

$10 = 1.3 + 5 - 7 + 9.$

**6.** Ta có : $36 = 6 \times 3!$ (lưu ý : $3! = 1.2.3 = 6$, đọc là 3 giai thừa)

$64 = \sqrt{4^6}$ (vì bằng $\sqrt{4^3}.\sqrt{4^3} = \sqrt{64}.\sqrt{64} = 64$), hoặc

$64 = (\sqrt{4})^6$ (vì bằng $2^6 = 2^3.2^3 = 8.8 = 64$).

Riêng số 81 có thêm số mũ 2 hoặc hai lần chữ số 8 và chữ số 1, tức là :

$81 = (1 + 8)^2 = (1 + 8).(1 + 8)$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Số 660 = 6! – 60, hãy viết các số dưới đây sao cho ở hai vế đều có các chữ số giống nhau : 1395; 145; 144; 387420489."*

Cách giải như sau :

$1395 = 15.93$

$145 = 1! + 4! + 5!$

$144 = (1 + 4)! + 4!$

$387420489 = 3^{87 + 420.489}$.

**7.** a) Gọi hai số lẻ liền nhau là $2n + 1$ và $2n + 3$. Tổng của chúng bằng :

$(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4$.

Mỗi số hạng của tổng này chia hết cho 4, vậy tổng chia hết cho 4.

b) Giả sử số chẵn nhỏ nhất là $2n$. Ta có tổng hai số chẵn liên tiếp bằng :

$2n + (2n + 2) = 4n + 2$.

Số hạng thứ nhất $4n$ chia hết cho 4, số hạng thứ hai 2 không chia hết cho 4. Vậy tổng không chia hết cho 4.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tìm bộ ba số tự nhiên mà tích bằng 30 và tổng chia hết cho 4."*

Cách giải như sau :

Ba số tự nhiên a, b, c mà tích bằng 30 có thể là :

(1; 1; 30), hoặc (1; 2; 15), hoặc (1; 3; 10), hoặc (1; 5; 6), hoặc (2; 3; 5).

Ta phải có tích $a.b.c = 30$ với $a \le b \le c$ và tổng $a + b + c$ chia hết cho 4. Do đó bộ ba số đó chỉ có thể là : (1; 1; 30) hoặc (1; 5; 6).

**8.** Nếu n là số chẵn thì tất cả số hạng là số chẵn. Nếu n là số lẻ thì $5n^3 + 3n$ là tổng của hai số lẻ nên là một số chẵn, còn lại $4n^2 + 2$ là tổng của hai số chẵn.

Suy ra không có số tự nhiên n nào để đa thức đã cho là số lẻ.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Có hay không một số chẵn mà bình phương của nó là một số có năm chữ số 1; 4; 5; 9; 9 ?"*

Cách giải như sau :

Chữ số cuối cùng của bình phương một số chẵn chỉ có thể là 4. Do đó chữ số liền trước đó (áp chót) sẽ là 1; 5 hoặc 9. Các số 14; 54 và 94 đều không chia hết cho 4, giữa chúng là bình phương một số chẵn luôn chia hết cho 4.

**9.** Ta biết rằng $14^{2n}$ tận cùng bằng chữ số 6, còn 11 và 16 nâng lên bất cứ lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 1 và 6.

Suy ra tổng đã cho tận cùng bằng chữ số 3.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tổng sau đây tận cùng bằng chữ số gì :*

$$1! + 2! + 3! + ... + 8! + 9! \text{ ?"}$$

Cách giải như sau :

Ta biết rằng số 5! = 1.2.3.4.5 tận cùng bằng chữ số 0,

số 6! = 1.2.3.4.5.6 tận cùng bằng chữ số 0, v.v...

Còn tổng 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33.

Vậy tổng 1! + 2! + 3! + ... + 8! + 9! tận cùng bằng chữ số 3.

**10.** Nếu a và b là hai số lẻ thì tổng a + b là số chẵn.

Nếu một số chẵn chia hết cho 5 thì nó phải tận cùng bằng 0.

Nhưng $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ mà a + b tận cùng bằng 0 thì $a^3 + b^3$ cũng tận cùng bằng 0.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải thích tại sao tổng 1 + 2 + 3 + ... + 2015 không thể tận cùng bằng các chữ số 2; 4; 7; 9."*

Cách giải như sau :

Ta nhận xét rằng : nếu số tự nhiên a tận cùng bằng x và số tự nhiên b tận cùng bằng y thì tích ab có dạng :

$$a.b = (10m_1 + x)10m_2 + y) = 10(10m_1m_2 + m_1y + m_2x) + xy.$$

Suy ra chữ số cuối cùng của tích ab trùng với chữ số cuối cùng của tích xy.

Ta chứng minh cho từng trường hợp tổng quát.

Ta biết rằng : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, cho nên :

a) Nếu n tận cùng bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thì n + 1 tận cùng bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 và tích n(n + 1) sẽ tận cùng bằng 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0.

b) Nếu số $\frac{n(n+1)}{2}$ tận cùng bằng 2, 4, 7, 9 thì chữ số cuối cùng của số $2.\frac{n(n+1)}{2} = n(n + 1)$ phải là 4, 8, 4, 8 như đã chứng minh ở a), vô lí !

Bài toán đã được chứng minh, chỉ còn thay n = 2015.

**11.** Gọi G là số gà mỗi người được chia. Vì người con cả được 100 gà và $\frac{1}{6}$ phần còn lại sau khi trừ đi 100 gà nên tổng số gà bằng :

$$100 + 6(G - 100) = 6G - 500 \text{ (gà).}$$

Người con thứ hai được 200 gà và $\frac{1}{6}$ phần còn lại, tức là được :

$$200 + \frac{1}{6}(6G - 500 - G - 200) = \frac{5G + 500}{6} \text{ (gà).}$$

Vì mỗi người được nhận số gà như nhau nên $G = \frac{5G + 500}{6}$, từ đó tìm được G = 500 và tổng số gà bằng 500 × 6 – 500 = 2500 (gà). Để xác định số gà được chia ta thấy ngay rằng 2500 : 500 = 5 (người). Vậy số gà mỗi người được chia là :

Người con cả : $100 + \frac{1}{6}(2500 - 100) = 500$ (gà)

Người con thứ hai : $200 + \frac{1}{6}(2000 - 200) = 500$ (gà)

Người em thứ nhất : $300 + \frac{1}{6}(1500 - 300) = 500$ (gà)

Người em thứ tư : $400 + \frac{1}{6}(1000 - 400) = 500$ (gà)

Người em thứ ba : số gà còn lại là 500 gà.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Một cửa hàng bán bánh kẹo có hộp I chứa 310 gói kẹo, hộp II chứa 200 gói, hộp III chứa 190 gói, hộp IV chứa 180 gói, hộp V chứa 160 gói, hộp VI chứa 150 gói.*

  *Trong ngày đầu có hai bà A và B đến mua : bà A mua 2 hộp, bà B mua 3 hộp và như vậy mua gấp đôi số gói kẹo mà bà A mua. Hỏi còn lại hộp nguyên nào chưa bán ?"*

  Cách giải như sau :

  Do bà B mua nhiều gấp đôi bà A nên số gói kẹo cả hai bà mua phải chia hết cho 3.

  Tổng số gói kẹo của cả 6 hộp là :

  310 + 200 + 190 + 180 + 160 + 150 = 1190 (gói kẹo)

– Nếu còn lại hộp I thì phải bán 1190 – 310 = 880 gói, không thể được vì 880 không chia hết cho 3.

– Nếu còn lại hộp III thì phải bán 1190 – 190 = 1000 gói, cũng không thể được vì 1000 không chia hết cho 3.

– Nếu còn lại hộp IV thì phải bán 1190 – 180 = 1010 gói, cũng không thể được vì 1010 không chia hết cho 3.

Tương tự nếu còn lại hộp V hoặc hộp VI thì vẫn không thể được vì 1190 – 160 = 1030 hoặc 1190 – 150 = 1040 đều không chia hết cho 3.

Cuối cùng chỉ còn lại trường hợp hộp II, khi đó phải bán 1190 – 200 = 990 chia hết cho 3.

Tóm lại cửa hàng phải bán 5 hộp là I, III, IV, V và VI và còn lại hộp II nguyên chưa bán.

**12.** a) Ta có : $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$; $0 < 2 - \sqrt{2} < 1$; v.v...

b) $1 < \frac{2}{\sqrt{2}} < 2$; $0 < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$; v.v...

c) $2 < 2\sqrt{2} < 3$; $0 < \sqrt{\sqrt{22}} < 3$; v.v...

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Chứng minh rằng với mọi a, b dương ta đều có : $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$."*

Ta có cách giải sau đây :

Xét hiệu $M = 4(a^3 + b^3) - (a + b)^3$. Hiệu này có thể biến đổi như sau :

$$\begin{aligned} M &= 4a^3 + 4b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \\ &= 3a^3 + 3b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = 3[(a^3 - a^2b) + (b^3 - b^2a)] \\ &= 3[a^2(a - b) + b^2(b - a)] = 3[a^2(a - b) - b^2(a - b)] \\ &= 3(a - b)(a^2 - b^2) = 3(a - b)^2(a + b). \end{aligned}$$

Do $(a - b)^2 \geq 0$ và $a + b > 0$ nên $4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 \geq 0$ hay $M \geq 0$.

Vậy : $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

**13.** Ta hãy xếp tất cả các số từ 1 đến 99 998 thành cặp rồi xét mỗi số a với số 99 999 – a.

Tổng các chữ số của hai số trong mỗi cặp bằng 9.5 = 45, tổng tất cả chữ số của số đã cho rất lớn (trừ số 99 999 không có cặp) bằng 225 000.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Lấy số 777 nhân với 143 được tích bằng 111111 (với 6 chữ số 1). Nếu lấy số 777 nhân lần lượt với những số nào sẽ được tích gồm sáu chữ số 2, sáu chữ số 3, sáu chữ số 4,..., sáu chữ số 9 ?"*

Cách giải như sau :

$777 \times 286 = 222\,222$ (vì $143 \times 2 = 286$)

$777 \times 429 = 333\,333$ (vì $143 \times 3 = 429$)

$777 \times 572 = 444\,444$ (vì $143 \times 4 = 572$)

$777 \times 715 = 555\,555$ (vì $143 \times 5 = 715$)

$777 \times 858 = 666\,666$ (vì $143 \times 6 = 858$)

$777 \times 1001 = 777\,777$ (vì $143 \times 7 = 1001$)

$777 \times 1144 = 888\,888$ (vì $143 \times 8 = 1144$)

$777 \times 1287 = 999\,999$ (vì $143 \times 9 = 1287$).

**14.** Các số tận cùng bằng 1 khi nâng lên bất cứ lũy thừa nào (khác 0) cũng có tận cùng bằng 1 nên $1^{2013} = 1$.

Với số tận cùng bằng 5, ta có $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, ..., suy ra $5^{2013}$ tận cùng bằng 5.

Với số tận cùng bằng 6, ta có $6^2 = 36$, $6^3 = 216$, $6^4 = 1296$, ..., suy ra $6^{2013}$ tận cùng bằng 6.

Riêng đối với số $9^{2013}$ ta biến đổi nó để đưa về dạng $(...1)^n$ như sau :

$$9^{2013} = (9^2)^{1006}.9 = (81)^{1006}.9 \text{ tận cùng bằng } 1.9 = 9.$$

- ***Lời bình :*** Qua các ví dụ trên ta có mấy nhận xét sau đây :

a) *Tất cả những số tận cùng bằng 1, 5, 6 khi nâng lên bất cứ lũy thừa nào (khác 0) đều tận cùng bằng chính các chữ số đó.*

Chẳng hạn : $2015^{2018}$ tận cùng bằng 5; $3346^{3117}$ tận cùng bằng 6.

b) *Tất cả những số tận cùng bằng 9 sẽ tận cùng bằng 9 nếu số mũ lẻ* (như $9^{2013}$ tận cùng bằng 9 ở trên) *và sẽ tận cùng bằng 1 nếu số mũ chẵn*, chẳng hạn $9^{2014}$ hoặc $2029^{2018}$ tận cùng bằng 1.

c) Đối với những số tận cùng bằng 4, ta có :

$$4^2 = 16; \quad 4^3 = 64; \quad 4^4 = 256; \quad 4^5 = 1024; ...$$

Suy ra : *lũy thừa của các số tận cùng bằng 4 sẽ tận cùng bằng 6 nếu số mũ chẵn và tận cùng bằng 4 nếu số mũ lẻ.*

Chẳng hạn : $2014^{2022}$ tận cùng bằng 6; $5554^{5551}$ tận cùng bằng 4.

**15.** Ta có thể viết :

a) $66\,669\,999 = 6.10^7 + 6.10^6 + 6.10^5 + 6.10^4 + 9.10^3 + 9.10^2 + 9.10^1 + 9.10^0$.

b) $\overline{abcdef} = a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + d.10^2 + e.10^1 + f.10^0$.

- ***Lời bình :*** *Nếu cho số* $P = \overline{\underbrace{44...4}_{n \text{ c/s } 4}, \underbrace{55...5}_{n-1 \text{ c/s } 5}\,1}$ *thì có thể viết P dưới dạng lũy thừa của 10 như thế nào ?*

Ta có thể viết như sau bắt đầu từ chữ số 1 hàng đơn vị :

$$P = 1.10^0 + 5.10 + 5.10^2 + ... + 5.10^{n-1} + 4.10^n + 4.10^{n+1} + ... + 4.10^{2n-1}.$$

**16.** Ta nhận thấy rằng : $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$

có hai thừa số 5 là 5 và $5.2 = 10$ nên tận cùng bằng số thừa số 5 tức là $10 : 5 = 2$ chữ số 0 hay $10! = 1200$.

Số $100! = 1.2.3...99.100$ có $100 : 5 = 20$ (thừa số 5) và $100 : 25 = 4$ (thừa số 5) nên 100! tận cùng bằng 24 chữ số 0 (lưu ý là tích của một số chẵn với một số là bội của 5 thì có tận cùng bằng 0).

- ***Lời bình :*** *Số 500! có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?*

Ta nhận thấy rằng số chữ số 0 tận cùng của 500! bằng số thừa số 5 trong $500! = 1.2.3...449.500$. Do đó có tất cả :

$$500 : 5 + 500 : 25 + 500 : 125 = 100 + 20 + 4 = 124 \text{ (chữ số 0)}.$$

**17.** a) Ta lần lượt có : $3! = 6$; $(3!)! = 6! = 720$; $((3!)!)! = 720!$

Vì $720! > 100.101...720 > 100^{621} > 10^{1242}$. Suy ra số đã cho có không ít hơn 1243 chữ số, tức là có trên 1000 chữ số.

b) Trong 720 số có : 144 số $\vdots$ 5

28 số $\vdots$ 25

5 số $\vdots$ 125

1 số $\vdots$ 625.

Mà số 720! phân tích ra thừa số cho 178 chữ số 5, suy ra số chữ số 0 tận cùng của 720! bằng số thừa số 5 trong 720! tức là tận cùng bằng 178 chữ số 0.

- ***Lời bình :***

Ta biết rằng 10! = 1200 tận cùng bằng hai chữ số 0, tức là số chữ số 0 này bằng $\left[\frac{10}{5}\right] = 2$, kí hiệu [a] chỉ phần nguyên của a, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Số thừa số 5 trong 720! bằng :

$$\left[\frac{720}{5}\right] + \left[\frac{720}{25}\right] + \left[\frac{720}{125}\right] + \left[\frac{720}{625}\right] = 144 + 28 + 5 + 1 = 178,$$

do đó số đã cho tận cùng bằng 178 chữ số 0.

**18.** Trước tiên ta phân tích hiệu đã cho thành một tích nhiều thừa số như sau : $t^9 - t^5 = t^5(t^4 - 1) = (t - 1).t.(t + 1).t^4.(t^2 + 1)$.

Ba thừa số đầu là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn chia hết cho 3 và hiệu đã cho là một số chẵn chia hết cho 3.

Nếu $t = 5k \pm 1$ thì $t - 1$ và $t + 1$ chia hết cho 5.

Nếu $t = 5k \pm 2$ thì $t^2 + 1 = 25t^2 \pm 20t + 4 + 1 = 5(5t^2 \pm 4t + 1)$ nên chia hết cho 5.

Suy ra hiệu $(t^9 - t^5)$ chia hết cho $2.5 = 10$.

Hiệu này cũng chia hết cho $3.10 = 30$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau liên quan đến chia hết cho 10 :

*"Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai số tự nhiên N và $N^5$ là như nhau."*

Ta thấy rằng : nếu hai số có chữ số tận cùng như nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 10. Do đó ta chứng minh hiệu $(N^5 - N)$ chia hết cho 10.

Thật vậy ta có : $N^5 - N = N(N^4 - 1) = N.(N + 1).(N - 1).(N^2 + 1)$

mà tích $N(N + 1)(N - 1)$ chia hết cho 2 nên chỉ cần chứng minh hiệu $N^5 - N$ chia hết cho 5.

Nếu N chia hết cho 5 thì điều đó hiển nhiên.

Nếu N không chia hết cho 5 thì $N = 5k \pm 1$ hoặc $N = 5k \pm 2$.

Với $N = 5k \pm 1$ thì $N^2 - 1 = (5k \pm 1)^2 - 1 = 25k^2 \pm 10k + 1 - 1$

$= 5(5k^2 \pm 2k)$ chia hết cho 5.

Với $N = 5k \pm 2$ thì $N^2 + 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 1)$ cũng luôn chia hết cho 5.

**19.** Ta có :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343$$
$$= 784 = 28^2.$$

Vậy : $M = 28$.

- ***Lời bình :*** Lưu ý thêm :

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 100 + 125 = 225 = 15^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 225 + 216 = 441 = 21^2$$

. . . . . .

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ví dụ : $1^3 + 2^3 + \ldots + 2011^3 = \left(\frac{2011.2012}{2}\right)^2 = (2\,023\,066)^2.$

**20.** Trước hết ta nhận xét rằng bình phương của mọi số nguyên đều tận cùng bằng một trong các chữ số 0, 1, 4, 5, 6 hoặc 9.

Ngoài ra, bình phương của mọi số nguyên hoặc là bội của 4 (nếu là số chẵn), hoặc bằng bội của 4 cộng thêm 1 (nếu là số lẻ). Nhưng các số tận cùng bằng 11, 55, 66 hoặc 99 không là bội của 4 khi chia cho 4 có số dư tương ứng bằng 3, 3, 2 và 4, do đó chúng không thể là số chính phương.

Như vậy ta chỉ còn xét trường hợp các số tận cùng bằng 44 hoặc 444. Mặc dù 444 không là số chính phương, nhưng ta lại có số $1444 = 38^2$.

Do đó tồn tại số nguyên mà bình phương của nó tận cùng bằng ba chữ số giống nhau.

- ***Lời bình :***

Ta biết rằng hiệu $\underbrace{1111}_{4c/s} - \underbrace{22}_{2c/s} = 1089 = 33^2$, nếu bây giờ là "có một số chẵn các chữ số 1 trừ đi một nửa số chữ số chẵn các chữ số 2 (tức là số chữ số 1 gấp đôi số chữ số 2) thì có được kết quả là một số chính phương không ?"

Hiệu $\underbrace{11....1}_{2n \text{ lần}} - \underbrace{22....2}_{n \text{ lần}}$ = số chính phương không ?

Ta hãy viết hiệu trên như sau :

$$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{11...1}_{n} - 2(\underbrace{11...1}_{n}) = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n} - \underbrace{11...1}_{n}$$

$$= \underbrace{11...1}_{n}(1\underbrace{00...0}_{n} - 1) = \underbrace{11...1}_{n}(\underbrace{99...9}_{n})$$

$$= \underbrace{11...1}_{n}.9.(\underbrace{11...1}_{n}) = 3^2(\underbrace{11...1}_{n})^2 = (\underbrace{33...3}_{n})^2, \text{ là số chính phương.}$$

Ví dụ : $11 - 2 = 9 = 3^2$; $111\,111 - 222 = 110\,889 = 333^2$.

**21.** Ta biết rằng mỗi số nguyên hoặc có dạng 3k, hoặc 3k + 1, hoặc 3k – 1. Do đó lập phương của mỗi số nguyên có dạng tương ứng là hoặc $27k^3$, hoặc : $27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9(3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1$, tức là có dạng hoặc 9m, hoặc 9m ± 1.

Ngoài ra tổng các lập phương của ba số nguyên có thể biểu diễn dưới một trong các dạng sau : 9n; 9n ± 1; 9n ± 2; 9n ± 3

nhưng không thể có dạng 9n + 4, với n là số tự nhiên. Vì thế tồn tại vô số số tự nhiên không thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba lập phương.

- ***Lời bình :*** Năm 1909 nhà toán học Varinh đã nêu lên giả thuyết : *"Mỗi số tự nhiên có thể biểu diễn dưới dạng của tổng không quá 9 lập phương của các số tự nhiên."*

  Ta cũng có thể chứng minh rằng : mỗi số tự nhiên n có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 5 lập phương các số nguyên như sau :

  Vì $n - n^3$ chia hết cho 6 với mọi n, nên $n = n^3 + 6t$, trong đó t nguyên.
  Từ đó : $n = n^3 + (t + 1)^3 + (t - 1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3$.

**22.** Ta lần lượt có : $\{-[-(-2)]^2\}^3 = \{-[2]\}^3 = \{-4\}^3 = -64$;

$$\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^3\right\}^2 = \left\{-\left[\frac{1}{2}\right]^3\right\}^2 = \left\{-\frac{1}{8}\right\}^2 = \frac{1}{64}.$$

Vậy : $A = -(-64).\dfrac{1}{64} = 1$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

  *"Với hai số 2 và 47, khi nhân với nhau được 2 × 47 = 94, khi cộng với nhau được 2 + 47 = 49. Hai số 94 và 49 đều có hai chữ số giống nhau.*

  *Hãy tìm thêm hai số mà một trong hai số đó là 2 để :*

  *a) Khi nhân và khi cộng với nhau được kết quả là số có ba chữ số giống nhau (2 đáp số).*

  *b) Khi nhân và khi cộng với nhau được kết quả là số có bốn chữ số giống nhau (2 đáp số)."*

Cách giải như sau :

a) Ta có hai số 263 và 497 cùng với số 2 có tính chất :

$263 \times 2 = 526$ và $263 + 2 = 265$ (ba chữ số giống nhau)

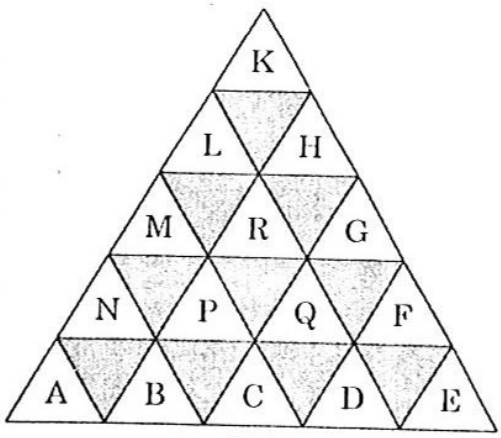
$497 \times 2 = 994$ và $497 + 2 = 499$ (ba chữ số giống nhau).

b) Ta có hai số 4997 và 2936 cùng với số 2 có tính chất :

$4997 \times 2 = 9994$ và $4997 + 2 = 4999$ (bốn chữ số giống nhau)

$2963 \times 2 = 5926$ và $2963 + 2 = 2956$ (bốn chữ số giống nhau).

## D. BẠN CÓ BIẾT ?



H.1

***Thay chữ bằng số***

Hình 1 là một tam giác lớn gồm 15 tam giác nhỏ trong đó có ghi các chữ A, B, C, ... Hãy thay các chữ bằng những chữ số sao cho ta được các hệ thức sau :

a) $A + B + C + D + E = E + F + G + H + K$
$= K + L + M + N + A$

b) $N + P + Q + F = D + Q + R + L$
$= H + R + P + B.$

*Lưu ý* : Mỗi chữ là một số từ 1 đến 15 và khác nhau. Bài toán có nhiều đáp số.

**Giải đáp**

Bài toán này có nhiều đáp số, chẳng hạn :

a) • $A + B + C + D + E = 15 + 3 + 13 + 1 + 8 = 40$

hoặc $= 13 + 1 + 15 + 3 + 8 = 40$;

• $E + F + G + H + K = 8 + 6 + 11 + 5 + 10 = 40$

hoặc $= 8 + 4 + 11 + 5 + 12 = 40$;

• $K + L + M + N + A = 10 + 2 + 9 + 4 + 15 = 40$

hoặc $= 12 + 2 + 7 + 6 + 13 = 40$.

Rõ ràng : $A + B + C + D + E = E + F + G + H + K$
$= K + L + M + N + A = 40.$

b) • $N + P + Q + F = 4 + 7 + 12 + 6 = 29$

hoặc $= 6 + 9 + 10 + 4 = 29$;

• $D + Q + R + L = 1 + 12 + 14 + 2 = 29$

hoặc $= 3 + 10 + 14 + 2 = 29$;

• $H + R + P + B = 5 + 14 + 7 + 3 = 29$

hoặc $= 5 + 14 + 9 + 1 = 29$.

Vậy : $N + P + Q + F = D + Q + R + L = H + R + P + B = 29.$

# §2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC HẤP DẪN VÀ ĐÁNG NHỚ

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Nhân đa thức***

a) Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

b) Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

***2. Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ***

a) Bình phương của một tổng : $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) Bình phương của một hiệu : $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

c) Hiệu hai bình phương : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

d) Lập phương của một tổng : $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

e) Lập phương của một hiệu : $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

f) Tổng hai lập phương : $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.

g) Hiệu hai lập phương : $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Thực hiện phép nhân đơn thức :

a) $5xy.(-2x^2yb)$ b) $\left(-\frac{4}{5}ab^2c\right)(-20a^4bx)$ c) $(2ab)\left(\frac{4}{3}a^2b^4\right)(7abc)$.

**2.** Nhân các đơn thức sau :

a) $(5a^2b^3)^4$ b) $\left(\frac{1}{2}cb^2a^5\right)^3$ c) $3.(ab^2)^2.(p^3q^2)^4$.

**3.** Bỏ dấu ngoặc :

a) $a + [2b + c(-2 + 3)] - [a - (a - 2b) - 3c] + 2(a + c - b)$

b) $-[(2x - y) - 3y - 1] + \{[1 - (2x - y) + (x + y) - 2] - x + (y - 3x)\}$

c) $[m - (mn - 2m)] - 3mn + 2m - \{1 - [2 - (3 - mn - m)]\}$.

**4.** Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa tăng dần rồi làm tính nhân :

a) $(3x + 4x^2 - 2 - 5x^3)(-x^2 + 1 + 2x)$

b) $(y^2 + 1 - y)(y^2 + 1 + y)$

c) $(z + 2)(4z^2 - 2z^3 - 8z + z^4 + 16)$.

**5.** Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của x, y, z :

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

**6.** Thay dấu * bằng số hoặc biểu thức thích hợp để có đẳng thức đúng :

a) $(* - *)^2 = m^2 - 8mn + *$ b) $(* + *)^2 = * + \frac{2}{3}p + \frac{1}{9}$.

**7.** Tìm giá trị của ẩn t biết :

a) $(5t + 1)^2 - (5t + 3)(5t - 3) = 30$

b) $3(t + 2)^2 + (2t - 1)^2 - 7(t + 3)(t - 3) = 36$.

**8.** a) Tính tổng và hiệu $(A + B)^2 \pm (A - B)^2$. Cho ví dụ.

b) Tính bình phương của đa thức $(A + B + C)^2$. Cho ví dụ.

**9.** Tính :

a) $(x - 3)^3 - (x + 3)^3$ b) $(a - b - c)^2 - (a - b + c)^2$

c) $(m - y - z)^3 - (m + y - z)^3$.

**10.** Chứng minh rằng :

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17 b) $69^2 - 69.5$ chia hết cho 32

c) $79^2 + 79.11$ chia hết cho 30.

**11.** Tính :

a) $\frac{84,5^2 - 59,5^2}{61^2 - 11^2}$ b) $\frac{87^2 - 15^2}{97^2 - 56^2 + 153.31}$

c) $\frac{67^3 + 52^3}{119} - 67.52$.

**12.** Chứng minh rằng các biểu thức sau là dương hoặc không âm với mọi giá trị của các chữ :

a) $m^2p^2 - mp + 1$ b) $y^2 - 4xy + 4x^2 + 4x - 2y + 7$

c) $t^2 - 2t + 2v^2 + 8v + 9$.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) $5xy.(-2x^2yb) = -10x^3y^2b$

b) $\left(-\frac{4}{5}ab^2c\right)(-20a^4bx) = 16a^5b^3cx$

c) $(2ab)\left(\frac{4}{3}a^2b^4\right)(7abc) = \frac{56}{3}a^4b^6c$.

- ***Lời bình :*** *"Thực hiện phép nhân sau :*

*d)* $2x.(-4xy).(8x^2y^3)$

*e)* $5x^{n-5}(x^{n+5} + y^{n+5}) - y^{n+5}(5x^{n-5} + y^{n-5})$

*f)* $4^{10}.2^{10} - 8^3(8^7 - 1)$."

Cách làm như sau :

d) $2.(-4).8.x.x.x^2y.y^3 = -64x^4y^4$

e) $5x^{n-5}.x^{n+5} + 5x^{n-5}.y^{n+5} - y^{n+5}.5x^{n-5} - y^{n+5}.y^{n-5} =$

$= 5x^{n-5+n+5} + 5x^{n-5}y^{n+5} - 5x^{n-5}y^{n+5} - y^{n+5+n-5} = 5x^{2n} - y^{2n}$

f) $(4.2)^{10} - 8^{10} + 8^3 = 8^{10} - 8^{10} + 8^3 = 8^3$.

**2.** a) $(5a^2b^3)^4 = 5^4.a^{2.4}.b^{3.4} = 625a^8b^{12}$

b) $\left(\frac{1}{2}cb^2a^5\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3.c^3.b^{2.3}.a^{5.3} = \frac{1}{8}c^3b^6a^{15}$

c) $3.(ab^2)^2.(p^3q^2)^4 = 3.a^{1.2}.b^{2.2}.p^{3.4}.q^{2.4} = 3a^2b^4p^{12}q^8$.

- ***Lời bình :*** *Tính thêm lũy thừa của một đơn thức :*

*d)* $(2a^2b^3c^4)^k$ *e)* $[(ca.a^2)^2abc]^2$ *f)* $[(0,1ab^2c)^2.a^3]^3$.

Ta có cách giải sau :

d) $2^k.a^{2k}.b^{3k}.c^{4k}$

e) $(c^2.c.a^6.a.b)^2 = c^6.b^2.a^{14}$

f) $\left(\frac{1}{10^2}a^2b^4c^2a^3\right)^3 = \frac{1}{10^6}a^{15}b^{12}c^6$.

**3.** Bỏ dấu ( ) trước, sau đó đến bỏ dấu [ ], rồi dấu { }, ta có :

a) $a + [2b + c] - [a - a + 2b - 3c] + 2a + 2c - 2b$

$= a + 2b + c - 2b + 3c + 2a + 2c - 2b = 3a - 2b + 6c$

b) $-[2x - y - 3y - 1] + \{[1 - 2x + y + x + y - 2] - x + y - 3x\}$

$= -2x + 4y + 1 + \{-1 - x + 2y - 4x + y\}$

$= -2x + 4y + 1 - 1 - 5x + 3y = -7x + 7y = 7(y - x)$

c) $[m - mn + 2m] - 3mn + 2m - \{1 - [2 - 3 + mn + m]\}$

$= 3m - mn - 3mn + 2m - \{1 + 1 - mn - m\}$

$= 5m - 4mn - 2 + mn + m = 6m - 3mn - 2$.

- ***Lời bình :*** *Bỏ thêm các dấu ngoặc :*

*d)* $2a - [(2b - 3c) - d] + a - [2b - (c - d)] + a + [2b - (c + 2d)]$

*e)* $1 - [(m - 1) - (m + 2)] - 3m + \{5m - [2m - (3m - 4)]\}$.

Ta có :

d) $2a - [2b - 3c - d] + a - [2b - c + d] + a + [2b - c - 2d]$

$= 2a - 2b + 3c + d + a - 2b + c - d + a + 2b - c - 2d$

$= 4a - 2b + 3c - 2d$

e) $1 - [m - 1 - m - 2] - 3m + \{5m - [2m - 3m + 4]\}$

$= 1 + 3 - 3m + \{5m + m - 4\}$

$= 4 - 3m + 6m - 4 = 3m$.

**4.** Sau khi sắp xếp theo lũy thừa tăng dần ta có :

a)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & -2 & +\ 3x & +\ 4x^2 & -\ 5x^3 & \\
\times & 1 & +\ 2x & -\ x^2 & & \\
\hline
 & -2 & +\ 3x & +\ 4x^2 & -\ 5x^3 & \\
 & & -\ 4x & +\ 6x^2 & +\ 8x^3 & -\ 10x^4 \\
 & & & +\ 2x^2 & -\ 3x^3 & -\ 4x^4 + 5x^5 \\
\hline
 & -2 & -\ x & +\ 12x^2 & & -\ 14x^4 + 5x^5
\end{array}$$

b) $(1 - y + y^2)(1 + y + y^2)$. Đặt tính :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & -\ y & +\ y^2 & & \\
\times & 1 & +\ y & +\ y^2 & & \\
\hline
 & & & y^2 & -\ y^3 & +\ y^4 \\
 & & y & -\ y^2 & +\ y^3 & \\
 & 1 & -\ y & +\ y^2 & & \\
\hline
 & 1 & & +\ y^2 & & +\ y^4
\end{array}$$

c) $(2 + z)(16 - 8z + 4z^2 - 2z^3 + z^4)$. Đặt tính :

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 16 & -\ 8z & +\ 4z^2 & -\ 2z^3 & +\ z^4 & \\
\times & 2 & +\ z & & & & \\
\hline
 & 32 & -\ 16z & +\ 8z^2 & -\ 4z^3 & +\ 2z^4 & \\
 & & 16z & -\ 8z^2 & +\ 4z^3 & -\ 2z^4 & +\ z^5 \\
\hline
 & 32 & & & & & +\ z^5
\end{array}$$

- ***Lời bình :***

1. Ta cũng có thể *sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần*, chẳng hạn với câu a), ta có :

$$(-5x^3 + 4x^2 + 3x - 2)(-x^2 + 2x + 1).$$

Thực hiện phép nhân ta cũng được kết quả là :

$$5x^5 - 14x^4 + 12x^2 - x - 2.$$

Đối với câu b) và c) cũng vậy.

2. Ta làm thêm bài tập sau là một dạng khác về tính nhân đa thức :

*"Sắp xếp đa thức theo biến chính rồi làm tính nhân :*

*a)* $(x^3 - 2y^3 - xy^2)(y^3 - 2x^2y + 3x^3)$

*b)* $(z - t)(t^4 + z^2t^2 + z^3t + z^4 + zt^3)$*."*

Trước hết ta có thể chọn x làm biến chính trong câu a và chọn z làm biến chính trong câu b, ta có :

a) Ta sắp xếp hai đa thức theo lũy thừa giảm dần của x :

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\times & x^3 & -\ xy^2 & & -\ 2y^3 & & \\
 & 3x^3 & -\ 2x^2y & & +\ y^3 & & \\
\hline
3x^6 & & -\ 3x^4y^2 & & -\ 6x^3y^3 & & \\
 & -\ 2x^5y & & & +\ 2x^3y^3 & +\ 4x^2y^4 & \\
 & & & & x^3y^3 & & -\ xy^5 - 2y^6 \\
\hline
3x^6 & -\ 2x^5y & -\ 3x^4y^2 & & -\ 3x^3y^3 & +\ 4x^2y^4 & -\ xy^5 - 2y^6.
\end{array}$$

b) Ta sắp xếp hai đa thức theo lũy thừa giảm dần của z :

$$\begin{array}{rrrrrr}
\times & z^4 & +\ z^3t & +\ z^2t^2 & +\ zt^3 & +\ t^4 \\
 & & & & z & -\ t \\
\hline
z^5 & +\ z^4t & +\ z^3t^2 & +\ z^2t^3 & +\ zt^4 & \\
 & -\ z^4t & -\ z^3t^2 & -\ z^2t^3 & -\ zt^4 & -\ t^5 \\
\hline
z^5 & & & & & -\ t^5
\end{array}$$

Như vậy tích là $z^5 - t^5$.

**5.** Ta bắt đầu biến đổi vế trái nếu có kết quả giống như ở vế phải thì đẳng thức đã cho đúng với mọi giá trị của x, y, z.

Vế trái bằng : $x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 -$

$- y^2z - xyz + x^2z + zy^2 + z^3 - xyz - yz^2 - z^2x$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

Vế trái đúng bằng vế phải, vậy đẳng thức đã cho đúng với mọi giá trị của x, y, z.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *"chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của a, b :* $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) = a^5 + b^5$."

Thực hiện phép nhân ta có ở vế trái :

$a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5$

$= a^5 + b^5$, đúng bằng vế phải.

**6.** a) Xét vế phải của đẳng thức đã cho :

$$m^2 - 8mn + * = (m)^2 - 2(m).(4n) + *$$

có dạng $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$. Từ đó suy ra A = m, B = 4n, tức là ta có : $(m - 4n)^2 = m^2 - 8mn + 16n^2$.

b) Xét vế phải : $* + \frac{2}{3}p + \frac{1}{9} = * + 2.p.\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$

có dạng $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$. Từ đó suy ra A = p, B = $\frac{1}{3}$, tức là ta

có : $\left(p + \frac{1}{3}\right)^2 = p^2 + \frac{2}{3}p + \frac{1}{9}$.

• ***Lời bình :***

1. Tương tự, *hãy điền vào dấu* * :

*c)* $* - 81t^4 = (t + *)(t - *)$ *d)* $36k^2 - * = \left(* + \frac{1}{2}p\right)\left(* - \frac{1}{2}p\right)$."

Dựa vào hằng đẳng thức $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ ta suy ra :

c) $A = t$, $B^2 = 81t^4 = (9t^2)^2$ nên $B = 9t^2$. Vậy ta có :

$$t^2 - 81t^4 = t^2 - (9t^2)^2 = (t + 9t^2)(t - 9t^2).$$

d) $A^2 = 36k^2 = (6k)^2$ nên $A = 6k$, $B = \frac{1}{2}p$. Vậy ta có :

$$36k^2 - \frac{1}{4}p^2 = (6k)^2 - \left(\frac{1}{2}p\right)^2 = \left(6k + \frac{1}{2}p\right)\left(6k - \frac{1}{2}p\right).$$

2. *Tính biểu thức sau bằng cách nhanh nhất :*

*a)* $(10^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2) - (9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2)$

*b)* $2012^2 - 2011(2012 + 1)$.

Cách giải như sau :

a) Biểu thức đã cho có thể viết :

$$(10^2 - 9^2) + (8^2 - 7^2) + (6^2 - 5^2) + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2)$$

hay $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

(vì $10^2 - 9^2 = (10 + 9)(10 - 9) = (10 + 9).1$, v.v...)

$= (10 + 1) + (9 + 2) + (8 + 3) + (7 + 4) + (6 + 5)$

$= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 11.5 = 55.$

b) Thay $2011 = 2012 - 1$ để xuất hiện $(2012 - 1)(2012 + 1)$ :

$$2012^2 - (2012 - 1)(2012 + 1) = 2012^2 - (2012^2 - 1^2)$$
$$= 2012^2 - 2012^2 + 1 = 1.$$

**7.** Áp dụng các hằng đẳng thức $(A \pm B)^2$ để cuối cùng được dạng $at + b = 0$, từ đó có được giá trị của t. Ta có :

a) $25t^2 + 10t + 1 - (25t^2 - 9) = 30$, hay $25t^2 + 10t + 1 - 25t^2 + 9 = 30$.

Từ đó $10t + 10 = 30$.

Vậy $10t = 20$ và $t = 2$.

b) $3(t^2 + 4t + 4) + (4t^2 - 4t + 1) - 7(t^2 - 9) = 36$, hay

$3t^2 + 12t + 12 + 4t^2 - 4t + 1 - 7t^2 + 63 = 36$; $8t + 76 = 36$.

Vậy $8t = 36 - 76 = -40$ và $t = -5$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Khi nào thì các biểu thức sau bằng 0 :*

*c)* $27 + (m - 3)(m^2 + 3m + 9)$

*d)* $(m - 1)^3 - (m + 2)(m^2 - 2m + 4) + 3(m + 4)(m - 4)$ ?

Trước hết ta rút gọn các biểu thức đã cho. Ta có :

c) $27 + (m^3 - 3^3) = 27 + m^3 - 27 = m^3$.

Giá trị $m^3 = 0$ khi $m = 0$.

d) $m^3 - 3m^2 + 3m - 1 - (m^3 + 8) + 3(m^2 - 16)$

$= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 - m^3 - 8 + 3m^2 - 48 = 3m - 57$.

Giá trị $3m - 57 = 0$ khi $m = \frac{57}{3} = 19$.

**8.** 1. Ta có :

a) $(A + B)^2 + (A - B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 + (A^2 - 2AB + B^2)$

$= 2(A^2 + B^2)$ (1)

Ví dụ : $(4mn^2 + 3p)^2 + (4mn^2 - 3p)^2 = 2(16m^2n^4 + 9p^2)$.

b) $(A + B)^2 - (A - B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 - (A^2 - 2AB + B^2) = 4AB$ (2)

Ví dụ : $(5c^2 + 7d)^2 - (5c^2 - 7d)^2 = 4.5c^2.7d = 140c^2d$.

*Lưu ý* : Hai hằng đẳng thức (1) và (2) giúp ta tính nhanh kết quả các phép tính.

2. Ta viết $(A + B + C)^2 = (M + C)^2$ với $M = A + B$, ta có :

$(M + C)^2 = M^2 + 2MC + C^2 = (A + B)^2 + 2(A + B)C + C^2$

$= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$.

Vậy ta có thêm công thức cho bình phương của một đa thức sau :

$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$.

Ví dụ :

a) $(2b + 3c + 4d)^2 = 4b^2 + 9c^2 + 16d^2 + 2.2b.3c + 2.2b.4d + 2.3c.4d$

$= 4b^2 + 9c^2 + 16d^2 + 12bc + 16bd + 24cd$.

b) $(5m - 6n - p)^2 = 25m^2 + 36n^2 + p^2 - 2.5m.6n - 2.5mp + 2.6np$

$= 25m^2 + 36n^2 + p^2 - 60mn - 10mp + 12np$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm hai ví dụ sau :

1. *Tính hiệu* $(a + 2b - c)^2 - (a - 2b + c)^2$.

2. *Tìm các số a, b, c, d biết rằng :*

$$(z^2 + az + b)^2 = z^4 + cz^3 + dz^2 - 8z + 4.$$

Cách giải như sau :

1. Hiệu đã cho có thể viết :

$a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab - 2ac - 4bc - (a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab + 2ac - 4bc)$

$= 8ab - 4ac = 4a(2b - c)$.

2. Vế trái có thể viết :

$(z^2 + az + b)^2 = z^4 + 2az^3 + (a^2 + 2b)z^2 + 2abz + b^2$.

Do vế trái bằng vế phải nên các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của z phải bằng nhau, tức là :

$$\begin{cases} 2a = c \\ a^2 + 2b = d \\ 2ab = -8 \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Từ đẳng thức cuối trở lên ta có ngay :

– Nếu b = 2 thì a = –2, d = 8, c = –4.

– Nếu b = –2 thì a = 2, d = 0, c = 4.

**9.** Áp dụng các hằng đẳng thức $(A^2 - B^2)$, $(A^3 - B^3)$ ta có :

a) $(x - 3)^3 - (x + 3)^3 = [x - 3 - (x + 3)][(x - 3)^2 + (x - 3)(x + 3) + (x + 3)^2]$

$= (-6).[x^2 - 6x + 9 + x^2 - 9 + x^2 + 6x + 9]$

$= (-6).[3x^2 + 9] = -18x^2 - 54.$

b) $[(a - b - c) + (a - b + c)][(a - b - c) - (a - b + c)]$

$= (2a - 2b)(-2c) = 4bc - 4ac = 4c(b - a).$

c) $[m - y - z - (m + y - z)][(m - y - z)^2 + (m - y - z)(m + y - z) + (m + y - z)^2]$

$= (-2y)[m^2 + y^2 + z^2 - 2my - 2mz + 2yz + m^2 + my - mz -$

$- my - y^2 + yz - mz - yz + z^2 + m^2 + y^2 + z^2 + 2my - 2mz - 2yz]$

$= 12myz - 6m^2y - 6yz^2 - 2y^3.$

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Tính thêm :*

*d)* $(1 + x + x^2)(1 - x)(1 + x)(1 - x + x^2)$

*e)* $(2m - p)(4m^2 + p^2)(2m + p) + p^4$*."*

Ta có thể viết :

a) $(1 + x)(1 - x + x^2)(1 - x)(1 + x + x^2) = (1 + x^3)(1 - x^3) = 1 - x^6$

b) $(2m - p)(2m + p)(4m^2 + p^2) + p^4 = (4m^2 - p^2)(4m^2 + p^2) + p^4$

$= 16m^4 - p^4 + p^4 = 16m^4.$

**10.** Ta lần lượt có :

a) $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11}$

$= 2^{11}(2^4 + 1) = 2^{11}.17$, luôn chia hết cho 17.

b) $69^2 - 69.5 = 69(69 - 5) = 69.64$, chia hết cho 32.

c) $79^2 + 79.11 = 79(79 + 11) = 79.90$, chia hết cho 30.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Chứng minh tiếp :*

*d)* $8^7 - 2^{18}$ *chia hết cho 14.*

*e)* $41^3 + 19^3$ *chia hết cho 20."*

Ta có thể viết :

d) $8^7 - 2^{18} = (2^3)^7 - 2^{18} = 2^{21} - 2^{18}$

$= 2^{17}(2^4 - 2) = 2^{17}(16 - 2)$, chia hết cho 14.

e) $41^3 + 19^3 = (41 + 19)(41^2 - 41.19 + 19^2)$

$= 60.(41^2 - 41.19 + 19^2)$, chia hết cho 20.

**11.** a) $\dfrac{84,5^2 - 59,5^2}{61^2 - 11^2} = \dfrac{(84,5 + 59,5)(84,5 - 59,5)}{(61 + 11)(61 - 11)} = \dfrac{144.25}{72.50} = \dfrac{2}{2} = 1.$

b) $\dfrac{87^2 - 15^2}{97^2 - 56^2 + 153.31} = \dfrac{(87 + 15)(87 - 15)}{(97 + 56)(97 - 56) + 153.31}$

$= \dfrac{102.72}{153.41 + 153.31} = \dfrac{102.72}{153.(41 + 31)} = \dfrac{102}{153} = \dfrac{2}{3}.$

c) $\dfrac{67^3 + 52^3}{119} - 67.52 = \dfrac{(67 + 52)(67^2 - 67.52 + 52^2)}{119} - 67.52$

$= \dfrac{119}{119}(67^2 - 2.67.52 + 52^2) = (67 - 52)^2 = 15^2 = 225.$

• ***Lời bình :*** Tương tự, "*Tính tiếp* :

*d)* $\dfrac{43^2 - 11^2}{(36,5)^2 - (27,5)^2}$ *c)* $\dfrac{97^3 + 83^3}{180} - 97.83$

*f) 2115.2008 – 2116.2007.*

Ta có thể viết :

d) $\dfrac{(43 - 11)(43 + 11)}{(36,5 - 27,5)(36,5 + 27,5)} = \dfrac{32.54}{9.64} = 3$

e) $\dfrac{(97 + 83)(97^2 - 97.83 + 83^2)}{180} - 97.83 = \dfrac{180.(97^2 - 97.83 + 83^2)}{180} - 97.83$

$= 97^2 - 2.97.83 + 83^2$

$= (97 - 83)^2 = 14^2 = 196$

f) $2115(2007 + 1) - (2115 + 1).2007$

$= 2115.2007 + 2115 - 2115.2007 - 2007 = 2115 - 2007 = 108.$

**12.** Trước hết phải vận dụng các hằng đẳng thức để viết biểu thức dưới dạng hằng đẳng thức cộng thêm một số. Ta có :

a) $m^2p^2 - mp + 1 = (mp)^2 - 2.\dfrac{1}{2}.mp + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$

$= \left(mp - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ với mọi m, p.

b) $y^2 - 4xy + 4x^2 + 4x - 2y + 7 = (2x - y)^2 + 2.(2x - y) + 1 + 6$

$= (2x - y + 1)^2 + 6 > 0$ với mọi x, y.

c) $t^2 - 2t + 2v^2 + 8v + 9 = t^2 - 2t + 1 + 2(v^2 + 4v + 4)$

$= (t - 1)^2 + 2(v + 2)^2 \geq 0$ với mọi t, v

(đẳng thức chỉ xảy ra khi t = 1, v = –2).

- ***Lời bình :*** *"Chứng minh tương tự rằng hai biểu thức sau là không âm với mọi giá trị của các chữ :*

*d)* $(a^2 - ab + b^2)^3 + (a^2 + ab + b^2)^3$

*e)* $x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz$*."*

Ta có thể viết :

d) $[(a^2 - ab + b^2) + (a^2 + ab + b^2)][(a^2 - ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2) \times$

$\times (a^2 + ab + b^2) + (a^2 + ab + b^2)^2]$

$= 2(a^2 + b^2)[(a^2 + b^2)^2 - 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2 + a^2b^2 +$

$+ (a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2]$

$= 2(a^2 + b^2)[(a^2 + b^2)^2 + 3a^2b^2] \geq 0$ với mọi a, b

(đẳng thức chỉ xảy ra khi a = 0, b = 0).

e) $x^2 - 2(4y + 2z)x + (4y + 2z)^2 + 3y^2 - 4yz + 2z^2$

$= (x - 4y - 2z)^2 + 2(y^2 - 2yz + z^2) + y^2$

$= (x - 4y - 2z)^2 + 2(y - z)^2 + y^2 \geq 0$ với mọi x, y, z

(đẳng thức chỉ xảy ra khi x = 0, y = 0, z = 0).

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### 1. *Hiệu hai lũy thừa bậc n*

Ta đã biết $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Một cách tổng quát (với n lẻ)

$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}.B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$

*Ví dụ :* $x^7 - y^7 = (x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)$

luôn chia hết cho x – y.

$A^n - B^n$ (với n lẻ) luôn chia hết cho A – B, ví dụ :

$x^{2015} - y^{2015}$ luôn chia hết cho x – y.

### 2. *Định lí Bơ-du*

*Khi chia đa thức A(x) cho nhị thức x – a ta được số dư (đa thức dư) là một hằng số bằng giá trị A(a) của A(x) khi x = a.*

*Ví dụ 1 :* Tìm số dư khi chia đa thức $A(x) = x^{2018} + x^{2019} + x^{2020}$ cho $x - 1$.

Theo định lí Bơdu ta có ngay số dư là :

$$A(1) = 1^{2018} + 1^{2019} + 1^{2020} = 3.$$

*Ví dụ 2 :* Tìm số dư khi chia đa thức $A(y) = y^n - p^n$ cho nhị thức $y - p$.

Ta có ngay số dư đó là :

$$A(p) = p^n - p^n = 0$$

Điều này chứng tỏ rằng đa thức $y^n - p^n$ chia hết cho $y - p$. Chẳng hạn $y^{2015} - p^{2015}$ chia hết cho $y - p$.

Như vậy từ định lí Bơdu suy ra :

$$\boxed{A(x) \vdots (x - a) \Leftrightarrow \text{ a là nghiệm của } A(x)}$$

*Ví dụ 3 :* Không làm phép chia hãy tìm số dư khi chia đa thức

$$A(t) = 3t^4 - 2t^3 + 5t^2 - t + 2 \text{ cho nhị thức } t - 2.$$

Theo định lí Bơdu ta có ngay số dư đó là :

$$A(2) = 3.2^4 - 2.2^3 + 5.2^2 - 2 + 2$$

$$= 48 - 16 + 20 = 52.$$

# §3. TỪ PHÂN TÍCH ĐA THỨC RA THỪA SỐ ĐẾN PHÉP CHIA ĐA THỨC

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Phân tích đa thức thành nhân tử***

a) Phân tích đa thức thành nhân tử (thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

b) Có ba phương pháp cơ bản là :

– Phương pháp đặt nhân tử chung.

– Phương pháp dùng hằng đẳng thức.

– Phương pháp nhóm hạng tử.

Ngoài ra còn có thể phối hợp nhiều phương pháp.

***2. Chia đa thức***

a) Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B), ta làm như sau :

– Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.

– Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến trong B.

– Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

b) Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của A đều chia hết cho B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

c) Muốn chia đa thức một biến đã sắp xếp, ta bắt đầu chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia để tìm số dư thứ nhất. Lại tiếp tục chia hạng tử bậc cao nhất của số dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, v.v... sẽ tìm được dư cuối cùng.

Nếu dư bằng 0 thì ta có phép chia hết. Nếu dư khác 0 thì ta có phép chia có dư.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung :

a) $m^2 - n^2 + m^3 - n^3$ b) $x^3 + x^2 + x + 1$

c) $5y(y - 1) + 8(1 - y)$ d) $4a(a - b) + 7(b - a)^2$.

**2.** Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức :

a) $p^4q^4 + 4p^2q^2 - 4pq.pq + 4$ b) $t^8 - 1$

c) $y^4 + 8y - 4y^3 - 8y^2$ d) $16m^3n + \frac{1}{4}np^3$.

**3.** Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử :

a) $mn + 1 + m + n$ b) $py^2 - py + qy^2 - qy + p + q$

c) $x^3 + x^2t - xt^2 - t^3$ d) $u^2 + 2uv + v^2 - 2u - 2v + 1$.

**4.** Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $m^2n + mn^2 + m^2p + mp^2 + n^2p + np^2 + 2mnp = (m + n)(n + p)(p + m)$

b) $(c - d) - c^3(1 - d) + d^3(1 - c) = (c - d)(1 - c)(1 - d)(1 + c + d)$.

**5.** a) Phân tích biểu thức sau ra 3 nhân tử :

$$n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32$$

rồi chứng minh biểu thức luôn là số chẵn với mọi n nguyên.

b) Phân tích biểu thức sau ra 4 nhân tử :

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

rồi chứng minh nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác thì biểu thức trên luôn dương.

**6.** Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp tách hạng tử :

a) $p^2 - 4p + 3$

b) $mn(m + n) + np(n + p) + pm(p + m) + 2mnp$.

**7.** Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp thêm và bớt cùng một số hoặc cùng một đơn thức :

a) $4p^2 - 4p - 15$ b) $m^2 - 2m - 3$.

**8.** Phân tích thành nhân tử biểu thức $A = (a - 1)(a - 3)(a - 4)(a - 6) + 9$ và chứng minh rằng :

a) $A \geq 0$ với mọi a

b) A là số chính phương với mọi a nguyên.

**9.** Chứng minh rằng :

a) $68^2 + 136.32 + 32^2 = 10000$ b) $4^4.9^4 - (36^2 + 1)(36^2 - 1) = 1$.

**10.** Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của các biến rồi làm phép chia :

a) $(x^4 + 2x - 1 - 2x^3) : (x^2 + 1 - 2x)$

b) $(3y^4 + 9y - 8y^3 - 7 - 10y^2) : (1 - 2y + 3y^2)$

c) $(12z^5 + 10z^3 + 2z + 3z^6 - 6z^2 - 8z^4 - 1) : (-3z^2 - 1 + 2z + z^4 + 4z^3)$

d) $(27t^3 - 8) : (9t^2 + 6t + 4)$.

**11.** Dùng hằng đẳng thức để làm các phép chia sau :

a) $(a^4 + 8a^2 + 16) : (4 + a^2)$ b) $(64x^2y^2 - 49x^4y^2) : (8xy + 7x^2y)$

c) $(125 - 8t^3) : (25 + 10t + 4t^2)$.

**12.** Tính hằng số p sao cho :

a) Đa thức $8x^2 + 28x + p$ chia hết cho đa thức $2x + 5$.

b) Đa thức $y^3 - 13y + p$ chia hết cho đa thức $y^2 + 4y + 3$.

**13.** Chứng minh rằng :

a) Đa thức $p^3 - p^2 + p - 1$ chia hết cho nhị thức $p - 1$.

b) Đa thức $t^2 - tv + v^2$ không có giá trị âm với mọi t, v.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) Ta có : $m^2 - n^2 + m^3 - n^3$

$$= (m + n)(m - n) + (m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

$$= (m - n)(m + n + m^2 + mn + n^2)$$

b) $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$

c) Đổi dấu hạng tử $(1 - y)$ thành $(y - 1)$ :

$$5y(y - 1) - 8(y - 1) = (y - 1)(5y - 8).$$

d) Viết lại hạng tử $7(b - a)^2 = 7(a - b)^2$ :

$$4a(a - b) + 7(a - b)^2 = (a - b)(4a + 7a - 7b)$$

$$= (a - b)(11a - 7b).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*Phân tích thành nhân tử* :

*e)* $8m + m^4 - 8m^2 - 4m^3$ *f)* $t^2 + t^3 + t^4 - 1$

*g)* $v^3 - 4v^2 + 4v - 1$."

Ta có thể viết :

e) $m(m^3 - 4m^2 - 8m + 8) = m[(m^3 + 8) - (4m^2 + 8m)]$

$$= m[(m + 2)(m^2 - 2m + 4) - 4m(m + 2)]$$

$$= m(m + 2)(m^2 - 2m + 4 - 4m)$$

$$= m(m + 2)(m^2 - 6m + 4)$$

f) $t^4 + t^3 + t^2 - 1 = (t^4 + t^3) + (t^2 - 1) = t^3(t + 1) + (t + 1)(t - 1)$

$$= (t + 1)(t^3 + t - 1)$$

g) $(v^3 - 1) - (4v^2 - 4v) = (v - 1)(v^2 + v + 1) - 4v(v - 1)$

$$= (v - 1)(v^2 + v + 1 - 4v) = (v - 1)(v^2 - 3v + 1).$$

*Lưu ý* : Ta có thể giải hai câu trên *bằng cách khác* như sau :

e) $(m^4 + 8m) - (4m^3 + 8m^2) = m(m^3 + 8) - 4m^2(m + 2)$

$$= m(m + 2)(m^2 - 2m + 4) - 4m^2(m + 2)$$

$$= (m + 2)[m(m^2 - 2m + 4) - 4m^2]$$

$$= m(m + 2)(m^2 - 2m + 4 - 4m)$$

$$= m(m + 2)(m^2 - 6m + 4)$$

f) $(t^4 - 1) + (t^3 + t^2) = [(t^2)^2 - 1] + t^2(t + 1) = (t^2 + 1)(t^2 - 1) + t^2(t + 1)$

$= (t^2 + 1)(t + 1)(t - 1) + t^2(t + 1)$

$= (t + 1)(t^3 - t^2 + t - 1 + t^2) = (t + 1)(t^3 + t - 1).$

**2.** a) $(p^4q^4 + 4p^2q^2 + 4) - 4p^2q^2 = (p^2q^2 + 2)^2 - (2pq)^2$ (dạng $A^2 - B^2$)

$= (p^2q^2 + 2pq + 2)(p^2q^2 - 2pq + 2)$

b) $t^8 - 1 = (t^4)^2 - 1^2 = (t^4 + 1)(t^4 - 1) = (t^4 + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 1)$

$= (t^4 + 1)(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)$

c) $y^4 - 4y^3 - 8y^2 + 8y = y(y^3 - 4y^2 - 8y + 8) = y[(y^3 + 8) - (4y^2 + 8y)]$

$= y[(y + 2)(y^2 - 2y + 4) - 4y(y + 2)]$

$= y(y + 2)(y^2 - 6y + 4)$

d) $16m^3n + \frac{1}{4}np^3 = \frac{1}{4}n(64m^3 + p^3) = \frac{1}{4}n[(4m)^3 + p^3]$

$= \frac{1}{4}n(4m + p)(16m^2 - 4mp + p^2).$

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*Phân tích thành nhân tử :*

*e)* $at^2 - at + bt^2 - bt + a + b$ *f)* $mn(a^2 + b^2) + ab(m^2 + n^2)$

*g)* $(c^2 + d^2 + cd)^2 - c^2d^2 - d^2e^2 - c^2e^2$."

Ta có thể viết :

e) $(at^2 + bt^2) - (at + bt) + (a + b) = t^2(a + b) - t(a + b) + (a + b)$

$= (a + b)(t^2 - t + 1)$

f) $mna^2 + mnb^2 + abm^2 + abn^2 = (mna^2 + m^2ab) + (mnb^2 + n^2ab)$

$= ma(na + mb) + nb(mb + na)$

$= (mb + na)(ma + nb)$

g) $[(c^2 + d^2 + cd)^2 - (cd)^2] - e^2(c^2 + d^2)$

$= (c^2 + d^2 + cd + cd)(c^2 + d^2 + cd - cd) - e^2(c^2 + d^2)$

$= (c^2 + d^2 + 2cd)(c^2 + d^2) - e^2(c^2 + d^2) = (c^2 + d^2)[(c + d)^2 - e^2]$

$= (c^2 + d^2)(c + d + e)(c + d - e).$

**3.** a) Nhóm số hạng thứ nhất với thứ ba, số hạng thứ hai với thứ tư :

$mn + m + 1 + n = m(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)(m + 1).$

b) Nhóm số hạng thứ nhất với thứ ba, số hạng thứ hai với thứ tư và hai số hạng cuối với nhau :

$(py^2 + qy^2) - (py + qy) + (p + q) = y^2(p + q) - y(p + q) + (p + q)$

$= (p + q)(y^2 - y + 1)$

c) Nhóm hai số hạng đầu với nhau, hai số hạng cuối với nhau :

$(x^3 + x^2t) - (xt^2 + t^3) = x^2(x + t) - t^2(x + t) = (x + t)(x^2 - t^2)$

$= (x + t)(x + t)(x - t) = (x + t)^2(x - t)$

d) Nhóm ba số hạng đầu với nhau, hai số hạng thứ tư và thứ năm với nhau :

$$(u^2 + 2uv + v^2) - 2(u + v) + 1 = (u + v)^2 - 2(u + v) + 1$$
$$= (u + v - 1)^2.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*phân tích thêm* :

*e)* $mx^2 - nx^2 + nx - mx + m - n$

*f)* $(ay + bx)^2 + (ax - by)^2 - c^2(x^2 + y^2)$

*g)* $t^4 + 2t^3 - 6t - 9$."

Ta có thể nhóm các số hạng như sau :

e) Nhóm hai số hạng đầu với nhau, hai số hạng giữa với nhau, hai số hạng cuối với nhau :

$$(mx^2 - nx^2) - (mx - nx) + (m - n)$$
$$= x^2(m - n) - x(m - n) + (m - n) = (m - n)(x^2 - x + 1)$$

f) Thực hiện phép tính đối với hai số hạng đầu :

$$a^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy + a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy - c^2(x^2 + y^2)$$
$$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - c^2(x^2 + y^2)$$
$$= a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2) - c^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

g) Nhóm số hạng đầu với số hạng cuối, hai số hạng giữa với nhau :

$$(t^4 - 9) + (2t^3 - 6t) = (t^2 + 3)(t^2 - 3) + 2t(t^2 - 3)$$
$$= (t^2 - 3)(t^2 + 2t + 3).$$

**4.** a) Biến đổi vế trái bằng cách nhóm số hạng thứ nhất và thứ hai, thứ tư và thứ sáu và các số hạng còn lại với nhau, rồi đặt nhân tử chung :

$$(m^2n + mn^2) + (m^2p + 2mnp + n^2p) + (mp^2 + np^2)$$
$$= mn(m + n) + p(m^2 + 2mn + n^2) + p^2(m + n)$$
$$= mn(m + n) + p(m + n)^2 + p^2(m + n)$$
$$= (m + n)(mn + mp + np + p^2)$$
$$= (m + n)[(mn + mp) + (np + p^2)] = (m + n)[m(n + p) + p(n + p)]$$
$$= (m + n)(n + p)(p + m),$$ đúng bằng vế phải.

b) Viết số hạng giữa như sau : $c^3(1 - d) = c^3[(c - d) + (1 - c)]$, ta sẽ được

$$(c - d) - c^3[(c - d) + (1 - c)] + d^3(1 - c)$$
$$= (c - d) - c^3(c - d) - c^3(1 - c) + d^3(1 - c)$$
$$= (c - d)(1 - c^3) + (1 - c)(-c^3 + d^3)$$
$$= (c - d)(1 - c)(1 + c + c^2) - (1 - c)(c - d)(c^2 + cd + d^2)$$
$$= (c - d)(1 - c)(1 + c + c^2 - c^2 - cd - d^2)$$
$$= (c - d)(1 - c)[(1 - d^2) + (c - cd)]$$
$$= (c - d)(1 - c)[(1 - d)(1 + d) + c(1 - d)]$$
$$= (c - d)(1 - c)(1 - d)(1 + c + d),$$ đúng bằng vế phải.

• ***Lời bình :*** Tương tự, "*Chứng minh các hằng đẳng thức sau :*

*c)* $(x^3 + y^3)^2 - (x^2 + y^2)^3 + 3x^2y^2(x + y)^2 = (2xy)^3$

*d)* $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = (x - 3)(x - 2)x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$."

Ta làm như sau :

c) Khai triển vế trái được :

$$x^6 + y^6 + 2x^3y^3 - [x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6] + 3x^2y^2(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^6 + y^6 + 2x^3y^3 - x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 - y^6 + 3x^4y^2 + 6x^3y^3 + 3x^2y^4$$

$$= x^6 + y^6 - x^6 - y^6 - 3x^4y^2 + 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 3x^2y^4 + 2x^3y^3 + 6x^3y^3$$

$= 8x^3y^3 = (2xy)^3$, đúng bằng vế phải.

d) Đặt x làm nhân tử chung để có hiệu hai bình phương :

$$x[x^2(x^2 - 7)^2 - 36] = x(x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36)$$

$$= x(x^6 - 9x^4 - 5x^4 + 45x^2 + 4x^2 - 36)$$

$$= x[x^4(x^2 - 9) - 5x^2(x^2 - 9) + 4(x^2 - 9)]$$

$$= x(x^2 - 9)(x^4 - x^2 - 4x^2 + 4) = x(x^2 - 9)[x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)]$$

$$= x(x^2 - 9)(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$= x(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

$$= (x - 3)(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

* Dựa vào kết quả này, *hãy chứng minh biểu thức* $n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ *luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên n.*

Theo kết quả trên thì nếu x là số nguyên n thì ta đã phân tích được thành 7 số nguyên liên tiếp, do đó chia hết cho 7. Thật vậy :

$$n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Mọi số nguyên n đều có thể viết dưới dạng $n = 7q + r$, trong đó q là số nguyên nào đó còn $r = 0, \pm1, \pm2, \pm3$.

Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho 7, do đó biểu thức chia hết cho 7.

Nếu $r = 1$ (hoặc $-1$) thì $n - 1$ (hoặc $n + 1$) chia hết cho 7 nên biểu thức chia hết cho 7.

Nếu $r = 2$ (hoặc $-2$) thì $n - 2$ (hoặc $n + 2$) chia hết cho 7.

Nếu $r = 3$ (hoặc $-3$) thì $n - 3$ (hoặc $n + 3$) chia hết cho 7.

Vậy với mọi n nguyên biểu thức đã cho luôn chia hết cho 7.

**5.** a) Ta có thể viết :

$$n^4 - n^3 - 5n^3 + 5n^2 + 22n^2 - 22n - 32n + 32$$

$$= (n - 1)(n^3 - 5n^2 + 22n - 32)$$

$$= (n - 1)(n^3 - 2n^2 - 3n^2 + 6n + 16n - 32) = (n - 1)(n - 2)(n^2 - 3n + 16).$$

Vì $(n - 1)(n - 2)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 2, do đó $(n - 1)(n - 2)(n^2 - 3n + 16)$ chia hết cho 2 với mọi n nguyên,

điều này có nghĩa là biểu thức đã cho luôn là số chẵn với mọi n nguyên.

b) Ta có thể viết :

$$4a^2b^2 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - c^4$$
$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2c^2(a^2 + b^2) - c^4 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$
$$= (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2)$$
$$= [c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2]$$
$$= (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$. Do đó các thừa số $(c - a + b)$, $(c + a - b)$, $(a + b - c)$ và $(a + b + c)$ đều dương, vậy tích của chúng cũng dương.

- ***Lời bình :*** Tương tự, hãy giải bài toán sau :

*"Phân tích biểu thức $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$ thành một tích gồm các nhân tử bậc nhất và chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì biểu thức đã cho luôn âm."*

Ta có thể viết :

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$$
$$= [(b + c)^2 - a^2][(b - c)^2 - a^2]$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a).$$

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì $(b + c + a)$, $(b + c - a)$, $(b - c + a)$ đều dương còn $(b - c - a) = -a + c - b < 0$, do đó biểu thức đã cho luôn âm.

**6.** a) Câu này có nhiều cách tách :

– *Cách 1.* Tách hạng tử giữa $-4p$ thành hai hạng tử $-p - 3p$ được :

$$p^2 - p - 3p + 3 = (p^2 - p) - (3p - 3)$$
$$= p(p - 1) - 3(p - 1) = (p - 1)(p - 3).$$

– *Cách 2.* Tách hạng tử cuối 3 thành $4 - 1$ được :

$$p^2 - 4p + 4 - 1 = (p^2 - 1) - (4p - 4) = (p + 1)(p - 1) - 4(p - 1)$$
$$= (p - 1)(p + 1 - 4) = (p - 1)(p - 3).$$

– *Cách 3.* Như cách 2 nhưng nhóm các hạng tử theo cách khác :

$$p^2 - 4p + 4 - 1 = (p^2 - 4p + 4) - 1 = (p - 2)^2 - 1$$
$$= (p - 2 + 1)(p - 2 - 1) = (p - 1)(p - 3).$$

– *Cách 4.* Tách hạng tử cuối 3 thành hai hạng tử mà một là bội của 4.

$$p^2 - 4p - 9 + 12 = (p^2 - 9) - (4p - 12)$$
$$= (p + 3)(p - 3) - 4(p - 3)$$
$$= (p - 3)(p + 3 - 4) = (p - 3)(p - 1).$$

b) Tách hạng tử cuối thành hai hạng tử 2mnp = mnp + mnp được

$[mn(m + n) + mnp] + [np(n + p) + mnp] + pm(p + m)$

$= mn(m + n + p) + np(m + n + p) + pm(p + m)$

$= n(m + n + p)(m + p) + pm(p + m) = (m + p)(mn + n^2 + np + pm)$

$= (m + p)[n(m + n) + p(m + n)] = (m + p)(m + n)(n + p).$

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*Phân tích thành nhân tử :*

*c)* $m^2 + 3mp + 2p^2$ *d)* $k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$."

Ta có thể viết :

c) Tách 3mp thành mp + 2mp được :

$(m^2 + mp) + (2mp + 2p^2) = m(m + p) + 2p(m + p)$

$= (m + p)(m + 2p)$

d) Ta có thể viết bằng cách tách $-16k^2$ thành $-k^2 - 15k^2$ :

$(k^4 - k^2) + (2k^3 - 2k) - (15k^2 - 15) = (k^2 - 1)(k^2 + 2k - 15)$

$= (k + 1)(k - 1)(k - 3)(k + 5).$

* Hãy chứng minh biểu thức cuối này chia hết cho 16 khi k nguyên và lẻ. Thật vậy, khi k nguyên và lẻ thì cả 4 nhân tử (k + 1), (k – 1), (k – 3) và k + 5 đều chẵn, tức là mỗi nhân tử này chia hết cho 2, do đó biểu thức cuối này chia hết cho 2.2.2.2 = 16.

**7.** Các câu a) và b) có nhiều cách thêm và bớt.

a) *Cách 1.* Thêm 1 và bớt 1 được :

$4p^2 - 4p + 1 - 1 - 15 = 4p^2 - 4p + 1 - 16 = [(2p)^2 - 2.2p.1 + 1^2] - 4^2$

$= (2p - 1)^2 - 4^2 = (2p - 1 + 4)(2p - 1 - 4)$

$= (2p + 3)(2p - 5)$

– *Cách 2.* Thêm và bớt 10p được :

$4p^2 - 4p + 10p - 10p - 15 = 4p^2 + 6p - 10p - 15$

$= (4p^2 + 6p) - (10p + 15)$

$= 2p(2p + 3) - 5(2p + 3) = (2p + 3)(2p - 5).$

b) *Cách 1.* Thêm và bớt 3m được :

$m^2 - 2m + 3m - 3m - 3 = m^2 + m - 3m - 3 = (m^2 + m) - (3m + 3)$

$= m(m + 1) - 3(m + 1) = (m + 1)(m - 3)$

– *Cách 2.* Thêm và bớt 1 được :

$m^2 - 2m + 1 - 1 - 3 = m^2 - 2m + 1 - 4 = (m^2 - 2m + 1) - 4$

$= (m - 1)^2 - 2^2 = (m - 1 + 2)(m - 1 - 2)$

$= (m + 1)(m - 3).$

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*Phân tích thành nhân tử :*

*c)* $t^2 - 2t - 48$ *d)* $4a^4b^4 + 1$."

c) Ta có thể viết bằng cách thêm và bớt 6t :

$$t^2 - 2t + 6t - 6t - 48 = t^2 + 6t - 8t - 48 = (t^2 + 6t) - (8t + 48)$$
$$= t(t + 6) - 8(t + 6) = (t + 6)(t - 8)$$

d) Thêm và bớt $4a^2b^2$ được :

$$4a^4b^4 + 4a^2b^2 + 1 - 4a^2b^2 = (2a^2b^2)^2 + 2.2a^2b^2.1 + 1^2 - (2ab)^2$$
$$= (2a^2b^2 + 1)^2 - (2ab)^2$$
$$= (2a^2b^2 + 2ab + 1)(2a^2b^2 - 2ab + 1).$$

**8.** Ta có thể viết : $A = (a^2 - 7a + 6)(a^2 - 7a + 12) + 9$

$$= (a^2 - 7a)^2 + 2.9(a^2 - 7a) + 81$$
$$= (a^2 - 7a + 9)^2.$$

a) Vậy $A \geq 0$ với mọi a.

b) Nếu a nguyên thì $a^2 - 7a + 9$ cũng nguyên nên A là một số chính phương.

• ***Lời bình :*** Tương tự, ta có bài toán sau về số chính phương :

*"Chứng minh rằng với mọi p, q nguyên biểu thức sau là một số chính phương : $(p + q)(p + 2q)(p + 3q)(p + 4q) + q^4$."*

Thật vậy, thực hiện phép nhân ta có :

$$(p^2 + 3pq + 2q^2)(p^2 + 7pq + 12q^2) + q^4$$
$$= p^4 + 10p^3q + 35p^2q^2 + 50pq^3 + 25q^4$$
$$= (p^4 + 10p^3q + 25p^2q^2) + (10p^2q^2 + 50pq^3) + 25q^4$$
$$= (p^2 + 5pq)^2 + 2.5q^2(p^2 + 5pq) + 25q^4 = (p^2 + 5pq + 5q^2)^2.$$

Vì p, q đều nguyên nên $p^2 + 5pq + 5q^2$ cũng nguyên, do đó biểu thức đã cho là một số chính phương.

**9.** a) Biến đổi vế trái : $68^2 + 2.68.32 + 32^2 = (68 + 32)^2 = 100^2$

$= 10000$, đúng bằng vế phải.

b) Biến đổi vế trái : $(4.9)^4 - (36^4 - 1) = 36^4 - 36^4 + 1 = 1$.

• ***Lời bình :*** Tương tự, *"Chứng minh rằng :*

*c)* $52^2 - 51^2 + 50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 1378$

*d)* $\dfrac{77^3 - 69^3}{70^2 - 62^2} - \dfrac{77^3 + 41^3}{125^2 - 7^2} - \dfrac{1}{2} = 87.$"

Ta biến đổi vế trái :

c) $(52 + 51)(52 - 51) + (50 + 49)(50 - 49) + (48 + 47)(48 - 47) + ... +$
$+ (2 + 1)(2 - 1)$

$= 52 + 51 + 50 + 49 + 48 + 47 + ... + 2 + 1$

$= \dfrac{52}{2}.53 = 26.53 = 1378$

d) $\dfrac{(77-69)(77^2+77.69+69^2)}{(70+62)(70-62)} - \dfrac{(77+41)(77^2-77.41+41^2)}{(125+7)(125-7)} - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{8.16003}{132.8} - \dfrac{118.4453}{132.118} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{16003-1091}{132} - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{16003-4453-66}{132} = \dfrac{11484}{132} = 87.$

**10.** Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần, ta lần lượt có các phép chia sau :

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,2x^3 & & +\,2x & -\,1 & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
-\;x^4 & -\,2x^3 & +\,x^2 & & & x^2-1 \\ \cline{1-5}
 & & -\,x^2 & +\,2x & -\,1 & \\
 & -\; & -\,x^2 & +\,2x & -\,1 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3y^4 & -\,8y^3 & -\,10y^2 & +\,9y & -\,7 & & 3y^2-2y+1 \\ \cline{7-7}
-\;3y^4 & -\,2y^3 & +\,y^2 & & & & y^2-2y-5 \\ \cline{1-6}
 & -\,6y^3 & -\,11y^2 & +\,9y & -\,7 & & \\
 & -\;-\,6y^3 & +\,4y^2 & -\,2y & & & \\ \cline{2-6}
 & & -\,15y^2 & +\,11y & -\,7 & & \\
 & & -\;-\,15y^2 & +\,10y & -\,5 & & \\ \cline{3-6}
 & & & y & -\,2 & &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
3z^6 & +\,12z^5 & -\,8z^4 & +\,10z^3 & -\,6z^2 & +\,2z & -\,1 & z^4+4z^3-3z^2+2z-1 \\ \cline{8-8}
-\;3z^6 & +\,12z^5 & -\,9z^4 & +\,6z^3 & -\,3z^2 & & & 3z^2+1 \\ \cline{1-7}
 & & z^4 & +\,4z^3 & -\,3z^2 & +\,2z & -\,1 & \\
 & -\; & z^4 & +\,4z^3 & -\,3z^2 & +\,2z & -\,1 & \\ \cline{3-7}
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

d) Ta có thể viết :

$$\frac{27t^3-8}{9t^2+6t+4} = \frac{27t^3-2^3}{9t^2+6t+4} = \frac{(3t-2)(9t^2+6t+4)}{9t^2+6t+4} = 3t-2.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, "*Sắp xếp đa thức theo biến chính là m rồi làm phép chia :*

*e)* $(24m^4n^2 + 9m^3n^3 - 12m^6 - 10m^5n + 3m^2n^4 - 2mn^5)$ :

$: (6m^4 - 3m^2n^2 - 2mn^3 - 4m^3n)$

*f)* $(10m^4n - 9m^3n^2 - 8m^5 + 6m^2n^3 + 9mn^4) : (2m^2 + 3n^2 - mn)$."

Ta có các phép chia sau :

e) $-12m^6 - 10m^5n + 24m^4n^2 + 9m^3n^3 + 3m^2n^4 - 2mn^5$ | $6m^4 - 4m^3n - 3m^2n^2 - 2mn^3$

$-12m^6 + 8m^5n + 6m^4n^2 + 4m^3n^3$ | $-2m^2 - 3mn - n^2$

$-18m^5n + 18m^4n^2 + 5m^3n^3 + 3m^2n^4 - 2mn^5$

$-18m^5n + 12m^4n^2 + 9m^3n^3 + 6m^2n^4$

$-6m^4n^2 - 4m^3n^3 - 3m^2n^4 - 2mn^5$

$-6m^4n^2 + 4m^3n^3 + 3m^2n^4 + 2mn^5$

$-8m^3n^3 - 6m^2n^4 - 4mn^5$

f) $-8m^5 + 10m^4n - 9m^3n^2 + 6m^2n^3 + 9mn^4$ | $2m^2 - mn + 3n^2$

$-8m^5 + 4m^4n - 12m^3n^2$ | $-4m^3 + 3m^2n + 3mn^2$

$6m^4n + 3m^3n^2 + 6m^2n^3 + 9mn^4$

$6m^4n - 3m^3n^2 + 9m^2n^3$

$6m^3n^2 - 3m^2n^3 + 9mn^4$

$6m^3n^2 - 3m^2n^3 + 9mn^4$

$0$

**11.** Ta lần lượt có :

a) $(a^2 + 4)^2 : (4 + a^2) = a^2 + 4$

b) $[(8xy)^2 - (7x^2y)^2] : (8xy + 7x^2y) = (8xy + 7x^2y)(8xy - 7x^2y) : (8xy + 7x^2y)$

$= 8xy - 7x^2y$

c) $(125 - 8t^3) = (5 - 2t)(25 + 10t + 4t^2)$, do đó : $\dfrac{125 - 8t^3}{25 + 10t + 4t^2} = 5 - 2t.$

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán : *"Rút gọn rồi tìm :*

*a) giá trị lớn nhất của biểu thức :*

$$3u^2 - (-20u^3 + 15u^2 - 5u) : (-5u) - 3(u - 1)$$

*b) giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$8v^2 + 6v - (v^3 - v^2 - v + 1) : (v - 1) - 3v(v + 2)."$$

Ta phải thực hiện phép chia trước, ta lần lượt có :

a) $3u^2 - (4u^2 - 3u + 1) - (3u - 3) = 3u^2 - 4u^2 + 3u - 1 - 3u + 3$

$= -u^2 + 2.$

Do $u^2 \geq 0$ nên $-u^2 \leq 0$, suy ra $-u^2 + 2 \leq 2$.

Vậy biểu thức đã cho luôn nhỏ hơn hoặc bằng 2 nên có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $u = 0$.

b) $8v^2 + 6v - (v^2 - 1) - (3v^2 + 6v) = 8v^2 + 6v - v^2 + 1 - 3v^2 - 6v$

$= 4v^2 + 1.$

Do $v^2 \geq 0$ nên $4v^2 \geq 0$, suy ra $4v^2 + 1 \geq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng 1 khi $v = 0$.

**12.** a) Ta có phép chia sau :

$$\begin{array}{rrrr|l} 8x^2 & +\ 28x & +\ p & & 2x+5 \\ \cline{4-4} -\ 8x^2 & +\ 20x & & & 4x+4 \\ \cline{1-3} & 8x & +\ p & & \\ & -\ 8x & +\ 20 & & \\ \cline{2-3} & & p-20 & & \end{array}$$

Nếu là phép chia hết thì dư $p - 20$ của phép chia phải bằng 0, tức là $p = 20$.

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l} y^3 & & -\ 13y & +\ p & & y^2+4y+3 \\ \cline{5-5} -\ y^3 & +\ 4y^2 & +\ 3y & & & y-4 \\ \cline{1-4} & -\ 4y^2 & -\ 16y & +\ p & & \\ & -\ -\ 4y^2 & -\ 16y & -\ 12 & & \\ \cline{2-4} & & & p+12 & & \end{array}$$

Nếu là phép chia hết thì dư $p + 12 = 0$, tức là $p = -12$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *"Tìm hằng số m sao cho :*

*c) đa thức $8c^2 - 26c + m$ chia hết cho $2c - 3$.*

*d) đa thức $d^3 - 7d + m$ chia hết cho $d^2 + 3d + 2$."*

Thực hiện phép chia ta có :

c)

$$\begin{array}{rrrr|l} 8c^2 & -\ 26c & +\ m & & 2c-3 \\ \cline{4-4} -\ 8c^2 & -\ 12c & & & 4c-7 \\ \cline{1-3} & -\ 14c & +\ m & & \\ & -\ -\ 14c & +\ 21 & & \\ \cline{2-3} & & m-21 & & \end{array}$$

Ta phải có $m - 21 = 0$, tức là $m = 21$.

d)

$$\begin{array}{rrrrr|l} d^3 & & -\ 7d & +\ m & & d^2+3d+2 \\ \cline{5-5} -\ d^3 & +\ 3d^2 & +\ 2d & & & d-3 \\ \cline{1-4} & -\ 3d^2 & -\ 9d & +\ m & & \\ & -\ -\ 3d^2 & -\ 9d & -\ 6 & & \\ \cline{2-4} & & & m+6 & & \end{array}$$

Ta phải có $m + 6 = 0$, tức là $m = -6$.

**13.** a) *Cách 1.* Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$\begin{aligned} p^3 - p^2 + p - 1 &= (p^3 - p^2) + (p - 1) \\ &= p^2(p - 1) + (p - 1) \\ &= (p - 1)(p^2 + 1) \text{ chia hết cho } p - 1. \end{aligned}$$

*Cách 2.* Làm phép chia :

$$\begin{array}{rrrrr|l} p^3 & -\ p^2 & +\ p & -\ 1 & & p-1 \\ \cline{6-6} -\ p^3 & -\ p^2 & & & & p^2+1 \\ \cline{1-4} & & p & -\ 1 & & \\ & & -\ p & -\ 1 & & \\ \cline{3-4} & & & 0 & & \end{array}$$

Dư bằng 0 chứng tỏ đa thức chia hết cho nhị thức.

b) Ta biến đổi đa thức như sau :

$$t^2 - tv + v^2 = t^2 - 2t.\frac{1}{2}v + \frac{1}{4}v^2 + \frac{3}{4}v^2 = \left(t - \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2$$

Do $\left(t - \frac{1}{2}v\right)^2 \geq 0$ và $\frac{3}{4}v^2 \geq 0$, do đó $\left(t - \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \geq 0$, tức là đa thức $t^2 - tv + v^2$ không có giá trị âm với mọi t, v.

- ***Lời bình :***

c) Tương tự, *"chứng minh rằng đa thức : $z^4 + 2z^2m + m^2 + 2z^2 + 2m + 1$ không có giá trị âm với mọi z, m.*

d) *Số tự nhiên A chia cho 5 dư 4, lập phương của A cộng với bình phương của A lại chia hết cho 5. Tìm A."*

Cách giải như sau :

c) Đa thức đã cho có thể viết :

$$z^4 + m^2 + 1^2 + 2z^2m + 2z^2 + 2m = (z^2 + m + 1)^2 \geq 0$$

nên không có giá trị âm với mọi z, m.

d) Số A phải có dạng là 5k + 4. Thật vậy ta có :

$$(5k + 4)^3 + (5k + 4)^2 = (5k + 4)^2(5k + 4 + 1)$$
$$= 5(5k + 4)^2(k + 1) \text{ luôn chia hết cho 5.}$$

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### QUY TẮC HOÓC-NE

**Ví dụ 1 :** *Muốn tìm đa thức thương và đa thức dư của phép chia* $A(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ cho nhị thức $x - 2$, ta lập bảng sau đây :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | –3 | 7 | –5 |
| 2 | × → 2 | + 5 | | | |

Cột bên trái viết số 2 là nghiệm của nhị thức $x - 2$, dòng trên cùng viết tất cả hệ số của đa thức A(x) đã cho. Hệ số cao nhất (tức là hệ số của số hạng có số mũ cao nhất) là (2) (của số hạng $2x^4$). Viết thêm 2 dưới cột có số 2, đem nhân 2 với 2 được 4, cộng với 1 được 5, viết kết

quả 5 ở dòng thứ hai (theo hướng mũi tên ở bảng trên).

Lại tiếp tục lấy (2) nhân với 5 được 10, cộng với (–3) được 7 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | × | 5 | –3 |
| | | + | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | × | 7 | 7 | –5 |
| | | + | 21 | 37 |

Lại tiếp tục lấy (2) nhân với 7 được 14, cộng với 7 được 21. Cuối cùng lấy (2) nhân với 21 được 42, cộng với (–5) được 37.

Ở dòng thứ hai bây giờ là :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 5 | 7 | 21 | 37 |

Vậy đa thức thương là $2x^3 + 5x^2 + 7x + 21$ và dư là 37. (Do đa thức A(x) có bậc cao nhất là 4 chia cho đa thức B(x) có bậc cao nhất là 1 nên thương Q(x) có bậc cao nhất là 3).

**Ví dụ 2 :** Tìm đa thức thương và số dư của phép chia

$$A(p) = 2p^4 - 3p^2 + 4p - 5 \text{ cho nhị thức } p + 2.$$

Trước hết ta nhận xét rằng đa thức thương Q(x) có dạng :

$bp^3 + cp^2 + dp + e$. Ta lập bảng sau :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | –3 | 4 | –5 |
| –2 | × 2 | + –4 | 5 | –6 | 7 |

Cách làm tương tự như ở ví dụ 1, căn cứ theo dòng thứ hai ta được :

- Đa thức thương là $2p^3 - 4p^2 + 5p - 6$.
- Số dư là 7.

# §4. HÃY KHÁM PHÁ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Định nghĩa. Tính chất cơ bản***

a) Một phân thức (phân thức đại số) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và $B \neq 0$.

b) Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu A.D = B.C.

c) Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho :

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad \text{(M là một đa thức} \neq \text{đa thức 0)}$$

Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho :

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad \text{(N là một nhân tử chung).}$$

***2. Rút gọn và quy đồng mẫu***

a) Ta có thể đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức :

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$$

b) Muốn rút gọn một phân thức ta có thể :

– Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.

– Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

c) Muốn quy đồng mẫu nhiều phân thức ta có thể :

– Phân tích các mẫu thành nhân tử rồi tìm mẫu chung.

– Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu.

– Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

***3. Bốn phép tính về phân thức***

a) Cộng hai phân thức có cùng mẫu hoặc có mẫu khác nhau : giống như cộng hai phân số.

b) Trừ các phân thức : $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$, trong đó $-\frac{C}{D}$ là phân thức đối của $\frac{C}{D}$ (với lưu ý thêm : $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ và $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$).

c) Nhân hai phân thức : $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$.

d) Chia các phân thức : $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$ với $\frac{C}{D} \neq 0$.

***4. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ***

a) Ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

b) Với những bài toán liên quan đến giá trị của phân thức thì trước hết phải tìm điều kiện của biến để giá trị của mẫu khác 0.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Khi nào thì các phân thức sau bằng 0 :

a) $\frac{(x-7)(x+9)}{(x+1)(x-6)}$ b) $\frac{mp-m-p+1}{m^2+n^2+4}$ c) $\frac{y^2-2y}{y^2-4y+4}$ ?

**2.** Các phân thức sau có bằng nhau không :

a) $\frac{-m}{m-2}$ và $\frac{m}{2-m}$ b) $\frac{-p}{(p-5)^2}$ và $\frac{p}{(5-p)^2}$

c) $\frac{3-t}{t-4}$ và $\frac{t^3-27}{(t^2+3t+9)(4-t)}$ ?

**3.** Chứng minh rằng :

a) $\frac{x^4+x^3+x+1}{x^4-x^3+2x^2-x+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

b) $\frac{y}{z^3-1} + \frac{z}{y^3-1} = \frac{2(yz-2)}{y^2z^2+3}$ nếu $y + z = 1$

c) $\left(\frac{t^5-5}{x}\right)^0 : \frac{x+y}{z} = \frac{z}{x+y}$.

**4.** a) Tìm các số a, b sao cho : $\frac{4y}{y^2-1} = \frac{a}{y+1} + \frac{b}{y-1}$

b) Tìm các số a, b, c sao cho : $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}$.

**5.** Cộng và trừ các phân thức sau :

a) $\frac{5-x}{x-y} + \frac{6-x}{x^2-y^2} - \frac{4-x}{x+y}$ b) $\frac{1}{2y-2z} - \frac{1}{2y+2z} + \frac{1}{z^2-y^2}$ ;

c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)} + \frac{2}{(2-z)(3-z)} + \frac{3}{(1-z)(z-3)}$.

**6.** Tìm x, y, z trong các biểu thức sau :

a) $3x - \dfrac{2x+5}{7} + \dfrac{7x+19}{2} + \dfrac{2x+1}{3} = 16$

b) $y - \dfrac{3}{9-3m} = \dfrac{2m}{2m^2 - 12m + 18}$

c) $z - \dfrac{a^4 + b^4}{(a-b)^2} = -(a+b)^2$.

**7.** Nhân các phân thức sau :

a) $\dfrac{mx^2 - my^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \dfrac{3 + 3y}{mx^2 - 2mxy + my^2}$

b) $\left(\dfrac{z+1}{z^2 - 9z} + \dfrac{z-1}{z^2 + 9z}\right) \cdot \dfrac{z^2 - 81}{z^2 + 9}$

c) $\dfrac{d + e + f}{(d+e)^2 - f(d+e)} \cdot \dfrac{2d + 2e}{d^2 + 2de + e^2 - f^2}$.

**8.** Chia các phân thức sau :

a) $\dfrac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} : \dfrac{y^2 + y - 6}{y^2 - 4}$

b) $\dfrac{m^3z + mz^3}{m^2 + z^2} : (mz)^3$

c) $\dfrac{kx + ky}{x^2 + y^2 - 2xy} : \dfrac{kx^2 + ky^2 + 2kxy}{2x + 2y}$.

**9.** Chứng tỏ rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

a) $\dfrac{(p+3x)^2 - (3x-1)^2}{6x - 6px - (p-1)^2}$

b) $\left(\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{4x}{x^2-1}\right) \cdot \left(\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{4x}{x^2-1}\right)$.

**10.** Cho $M = \left(m - \dfrac{4mn}{m+n} + n\right) : \left(\dfrac{m}{m+n} - \dfrac{n}{n-m} - \dfrac{2mn}{m^2 - n^2}\right)$

$$N = \left[\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{2}{(m+n)^3} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) : \frac{m-n}{(mn)^3}\right].$$

Rút gọn M và N và chứng tỏ tích M.N = m.n.

**11.** Rút gọn biểu thức $E = \left(\dfrac{e+1}{ef+1} + \dfrac{ef+e}{ef-1} - 1\right) : \left(\dfrac{e+1}{ef+1} - \dfrac{ef+e}{ef-1} + 1\right)$ và tìm giá trị nhỏ nhất của E để e + f = 4.

**12.** Tính p biết rằng : $\dfrac{p}{1 - \dfrac{p}{p-1}} = \dfrac{7p+2}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{p}}}$.

**13.** Cho biểu thức $D = \left(\frac{d^2 - 1}{d^4 - d^2 + 1} - \frac{1}{d^2 + 1}\right)\left(d^4 + \frac{1 - d^4}{1 + d^2}\right)$

a) Chứng tỏ mẫu $d^4 - d^2 + 1$ luôn dương với mọi d.

b) Rút gọn D.

c) Tìm d để D đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**14.** Cho biểu thức $K = \frac{k + 2}{k + 3} - \frac{5}{k^2 + k - 6} + \frac{1}{2 - k}$.

a) Rút gọn K.

b) Tìm giá trị nguyên của k để 4K + 1 chia hết cho 3.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** Muốn cho phân thức $\frac{A}{B} = 0$ thì điều kiện là A = 0 và B ≠ 0. Vì thế trước hết ta phải tìm tập xác định (TXĐ) của phân thức, tức là tìm những giá trị của biến ở mẫu để mẫu phải khác 0. Ta lần lượt có :

a) TXĐ : $x \neq -1$, $x \neq 6$.

Tử $(x - 7)(x + 9) = 0$ khi $x = 7$ hoặc $x = -9$. Các giá trị này của biến đều thuộc TXĐ của phân thức đã cho.

Vậy phân thức bằng 0 khi $x = 7$ hoặc $x = -9$.

b) TXĐ : mọi m, n ∈ Q.

Tử $mp - m - p + 1 = m(p - 1) - (p - 1) = (p - 1)(m - 1) = 0$ khi $p = 1$ hoặc $m = 1$. Các giá trị này thuộc TXĐ của phân thức đã cho. Vậy phân thức bằng 0 khi $p = 1$, m bất kì, hoặc khi $m = 1$, p bất kì.

c) Do $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$ nên TXĐ là $y \neq 2$.

Tử $y^2 - 2y = y(y - 2) = 0$ khi $y = 0$ hoặc $y = 2$. Loại giá trị $y = 2$, ta thấy rằng phân thức bằng 0 khi $y = 0$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Khi nào thì các phân thức sau bằng 0 :*

*d)* $\frac{t^2 - 10t + 25}{t^2 - 64}$ *e)* $\frac{p^2 - 4p + 3}{p^3 - 2p - 4}$ *f)* $\frac{(b + c)(a + c)}{ab + cd + cb + ad}$ *?"*

Ta có thể viết :

d) $\frac{(t - 5)^2}{(t + 8)(t - 8)}$.

Từ đó TXĐ : $t \neq \pm 8$ và phân thức bằng 0 khi $(t - 5)^2 = 0$, tức là $t = 5$.

e) Ta có tử $p^2 - 4p + 3 = p^2 - p - 3p + 3 = (p^2 - p) - (3p - 3)$

$= p(p - 1) - 3(p - 1)$

$= (p - 1)(p - 3)$ bằng 0 khi $p = 1$ hoặc $p = 3$.

Với các giá trị p = 1 hoặc p = 3 thì mẫu $p^3 - 2p - 4 \neq 0$

(vì $1^3 - 2.1 - 4 = -5 \neq 0$ hoặc $3^3 - 2.3 - 4 = 17 \neq 0$)

Vậy phân thức đã cho bằng 0 khi p = 1 hoặc p = 3.

f) Mẫu có thể viết :

$$ab + cb + ad + cd = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d)$$

Do đó TXĐ là $a \neq -c$, $b \neq -d$.

Tử bằng 0 khi b = –c, a = –c, tức là a = b = c. Vậy phân thức đã cho bằng 0 khi b = –c (loại a = –c).

**2.** a) Nếu đổi dấu của phân thức $\frac{-m}{m-2}$ thành $\frac{m}{2-m}$ (do $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$) ta sẽ được phân thức thứ hai. Vậy hai phân thức này bằng nhau (với điều kiện $m \neq 2$).

b) Hai phân thức này có mẫu $(p - 5)^2$ và $(5 - p)^2$ bằng nhau, nhưng tử lại đối nhau ($-p \neq p$) nên không bằng nhau (với điều kiện $p \neq 5$).

c) Theo quy tắc đổi dấu ta có $\frac{3-t}{t-4} = \frac{-(3-t)}{-(t-4)} = \frac{t-3}{4-t}$,

ngoài ra $t^3 - 27 = t^3 - 3^3 = (t - 3)(t^2 + 3t + 9)$ nên phân thức thứ hai có thể viết : $\frac{(t-3)(t^2+3t+9)}{(4-t)(t^3+3t+9)} = \frac{t-3}{4-t}$ tức là hai phân thức đã cho bằng nhau (với điều kiện $t \neq 4$ và $t^3 + 3t + 9 \neq 0$).

• ***Lời bình :*** Thêm bài ra tương tự :

*"Chứng minh tại sao :*

*d) biểu thức* $\frac{p^2 + 3p - q^2 - 3q}{p^2 - q^2}$ *lại bằng* $\frac{p+q+3}{p+q}$ *(với $p \neq q$).*

*e) biểu thức* $\frac{(t^3 - 4t^2) - (t-4)}{(t^3 - 8) - (7t^2 - 14t)}$ *lại bằng* $\frac{t+1}{t-2}$ *(với $t \neq 1$, $t \neq 2$, $t \neq 4$).*

Ta biến đổi các biểu thức như sau :

d) $$\frac{(p^2 - q^2) + (3p - 3q)}{(p+q)(p-q)} = \frac{(p+q)(p-q) + 3(p-q)}{(p+q)(p-q)}$$

$$= \frac{(p-q)(p+q+3)}{(p+q)(p-q)} = \frac{p+q+3}{p+q}$$

e) $$\frac{t^2(t-4) - (t-4)}{(t-2)(t^2 + 2t + 4 - 7t)} = \frac{(t-4)(t^2-1)}{(t-2)(t^2 - 5t + 4)} = \frac{(t-4)(t+1)(t-1)}{(t-2)(t^2 - t - 4t + 4)}$$

$$= \frac{(t-4)(t+1)(t-1)}{(t-2)[t(t-1) - 4(t-1)]} = \frac{(t-4)(t+1)(t-1)}{(t-2)(t-1)(t-4)} = \frac{t+1}{t-2}.$$

**3.** Trước hết phải biến đổi vế trái. Ta lần lượt có :

a) $$\frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1} = \frac{(x^4 + x^3) + (x + 1)}{(x^4 - x^3 + x^2) + (x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{x^3(x + 1) + (x + 1)}{x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^3 + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{(x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}.$$

b) Thay $y = 1 - z$ vào $\frac{y}{z^3 - 1} + \frac{z}{y^3 - 1}$ ta được :

$$-\frac{z - 1}{z^3 - 1} + \frac{z}{(1 - z)^3 - 1} = -\frac{z - 1}{(z - 1)(z^2 + z + 1)} + \frac{z}{-z(z^2 - 3z + 3)}$$

$$= -\frac{1}{z^2 + z + 1} - \frac{1}{z^2 - 3z + 3} = \frac{2[z(1 - z) - 2]}{z^2(1 - z)^2 + 3}$$

$$= \frac{2(yz - 2)}{z^2(1 - z)^2 + 3} = \frac{2(yz - 2)}{y^2z^2 + 3} \text{ (với } yz \neq 0).$$

c) Ta biết rằng $\left(\frac{t^5 - 5}{x}\right)^0 = 1$ với $x \neq 0$, nên ta có ngay : $\frac{1}{\frac{x + y}{z}} = \frac{z}{x + y}$.

- ***Lời bình :*** *"Chứng minh rằng:*

*d)* $$\frac{2x}{x - 1} - \frac{x^3 + 3x(x - 1) - 1}{2x^2 + 2x} \cdot \frac{-4x}{x^2 + 1 - 2x} - \frac{4x^2}{x^2 - 1} = \frac{10x + 2}{x^2 - 1},$$

*với $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$;*

*e)* $$\frac{x + y + z}{(x + y)^2 - z(x + y)} \cdot \frac{2x + 2y}{x^2 + 2xy + y^2 - z^2} = \frac{2}{(x + y - z)^2},$$ *với $x + y \neq z$."*

Ta lần lượt biến đổi vế trái.

d) $$\frac{2x}{x - 1} - \frac{[(x^3 - 1) + 3x(x - 1)].(-4x)}{2x(x + 1)(x - 1)^2} - \frac{4x^2}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{2x}{x - 1} - \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1 + 3x).(-4x)}{2x(x + 1)(x - 1)^2} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x}{x - 1} - \frac{-2(x^2 + 4x + 1)}{x^2 - 1} - \frac{4x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x(x + 1) + 2(x^2 + 4x + 1) - 4x^2}{x^2 - 1} = \frac{10x + 2}{x^2 - 1}.$$

e) $\dfrac{x+y+z}{(x+y)(x+y-z)}.\dfrac{2(x+y)}{(x+y)^2-z^2}=$

$$=\frac{(x+y+z).2(x+y)}{(x+y)(x+y-z)(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{2}{(x+y-z)^2}.$$

**4.** a) Với điều kiện $y \neq \pm 1$ ta có thể viết : $\dfrac{4y}{y^2-1}=\dfrac{(a+b)y-a+b}{(y+1)(y-1)}$

Suy ra $a + b = 4$ và $b - a = 0$. Từ đó ta có ngay $a = b = 2$.

Vậy : $\dfrac{4y}{y^2-1}=\dfrac{2}{y+1}+\dfrac{2}{y-1}$.

b) Cộng các phân thức ở vế trái ta có :

$$\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

Vậy đẳng thức đã cho có thể viết :

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{(ax+b)(x+1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$=\frac{(a+c)x^2+(a+b)x+(b+c)}{(x^2+1)(x+1)} \quad (*), \text{ với điều kiện } x \neq -1.$$

Đặc biệt, đẳng thức này đúng với $x = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

Thay các giá trị này vào (*) ta được : $\begin{cases} b+c=1 \\ 2a+2b+2c=1 \\ 6a+3b+5c=1 \end{cases}$

Giải ra được $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$ và $c=\dfrac{1}{2}$.

(Thử lại ta sẽ thấy bộ ba giá trị này thỏa mãn đề bài).

- ***Lời bình :*** Tương tự :

*"c) Viết phân thức* $\dfrac{t^2+5}{t^3-3t-2}$ *dưới dạng tổng hai phân thức*

$$\frac{m}{t-2}+\frac{n}{(t+1)^2};$$

*d) Viết phân thức* $\dfrac{p^3+2p}{p^4-1}$ *dưới dạng tổng ba phân thức*

$$\frac{s}{p+1}+\frac{t}{p-1}+\frac{up+v}{p^2+1}."$$

Cách giải như sau :

c) Ta có tổng $\frac{m}{t-2} + \frac{n}{(t+1)^2} = \frac{m(t+1)^2 + n(t-2)}{(t-2)(t+1)^2}$

$$= \frac{mt^2 + (2m+n)t + (m-2n)}{t^3 - 3t - 2}.$$

Như vậy : $\frac{t^2+5}{t^3-3t-2} = \frac{mt^2 + (2m+n)t + (m-2n)}{t^3-3t-2}$

Do mẫu giống nhau nên tử cũng bằng nhau, ta suy ra các hệ số tương ứng bằng nhau, tức là : $\begin{cases} m = 1 \\ 2m + n = 0 \\ m - 2n = 5 \end{cases}$

Ta có ngay giá trị của $n = -2$, vậy ta có thể viết :

$$\frac{t^2+5}{t^3-3t-2} = \frac{1}{t-2} + \frac{-2}{(t+1)^2}.$$

d) Ta có thể viết tổng ba phân thức như sau :

$$\frac{s}{p+1} + \frac{t}{p-1} + \frac{up+v}{p^2+1} =$$

$$= \frac{s(p-1)(p^2+1) + t(p+1)(p^2+1)}{p^4-1} + \frac{(up+v)(p^2-1)}{p^4-1} = \frac{p^3+2p}{p^4-1}$$

Suy ra :

$$p^3 + 2p = s(p-1)(p^2+1) + t(p+1)(p^2+1) + (up+v)(p^2-1)$$
$$= (s+t+u)p^3 + (-s+t+v)p^2 + (s+t-u)p + (-s+t-v)$$

Từ đó, các hệ số tương ứng bằng nhau : $\begin{cases} s + t + u = 1 \\ -s + t + v = 0 \\ s + t - u = 2 \\ -s + t - v = 0 \end{cases}$

Giải ra được $s = t = \frac{3}{4}$, $u = -\frac{1}{2}$ và $v = 0$.

Vậy ta có thể viết : $\frac{p^3+2p}{p^4-1} = \frac{3}{4(p+1)} + \frac{3}{4(p-1)} - \frac{1}{2(p^2+1)}$.

**5.** a) MC : $(x+y)(x-y)$. Điều kiện $x^2 - y^2 \neq 0$.

Ta có : $\frac{(5-x)(x+y) + (6-x) - (4-x)(x-y)}{(x+y)(x-y)} =$

$$= \frac{5x + 5y - x^2 - xy + 6 - x - 4x + 4y + x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{9y - 2xy + 6}{x^2 - y^2}$$

b) MC : $2(y + z)(y - z)$. Điều kiện $y^2 - z^2 \neq 0$. Ta có :

$$\frac{1}{2(y-z)} - \frac{1}{2(y+z)} - \frac{1}{y^2 - z^2} \quad \left(\text{đổi dấu của } \frac{1}{z^2 - y^2}\right)$$

$$= \frac{y + z - (y - z) - 2}{2(y+z)(y-z)} = \frac{y + z - y + z - 2}{2(y^2 - z^2)} = \frac{2(z-1)}{2(y^2 - z^2)} = \frac{z-1}{y^2 - z^2}.$$

c) MC : $(z - 1)(z - 2)(z - 3)$. Điều kiện $z \neq 1$, $z \neq 2$, $z \neq 3$. Ta có :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} + \frac{2}{(z-2)(z-3)} + \frac{-3}{(z-1)(z-3)} = \frac{(z-3) + 2(z-1) - 3(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$= \frac{z - 3 + 2z - 2 - 3z + 6}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cộng và trừ các phân thức sau :*

*d)* $\dfrac{t^3}{t-1} - \dfrac{t^2}{t+1} - \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t+1}$

*e)* $\dfrac{3}{a^2 + 2ab + b^2} + \dfrac{5}{a^2 - b^2} - \dfrac{4}{a^2 - 2ab + b^2}$

*f)* $\dfrac{2x - z}{4z} - \dfrac{3x^2 - 2yz}{6xz} - \dfrac{5x - y}{2y} - \dfrac{4y - x}{3y}$."

Ta có cách giải sau đây :

d) Ta chỉ cần nhóm các phân thức rồi rút gọn mà không phải quy đồng mẫu, nhờ đó mà tính toán được nhanh hơn. Ta nhóm như sau (điều kiện $t \neq \pm 1$) :

$$\left(\frac{t^3}{t-1} - \frac{1}{t-1}\right) - \left(\frac{t^2}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right) = \frac{t^3 - 1}{t-1} - \frac{t^2 - 1}{t+1}$$

$$= \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{t-1} - \frac{(t+1)(t-1)}{t+1} = t^2 + t + 1 - (t - 1) = t^2 + 2.$$

e) Do $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, nên MC là $(a + b)^2(a - b)^2$.

Ta có : $\dfrac{3(a-b)^2 - 4(a+b)^2 + 5(a^2 - b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}$

$$= \frac{3(a^2 - 2ab + b^2) - 4(a^2 + 2ab + b^2) + 5(a^2 - b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$= \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2 - 4a^2 - 8ab - 4b^2 + 5a^2 - 5b^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$= \frac{4a - 6b^2 - 14ab}{(a+b)^2(a-b)^2} = \frac{2(2a - 7ab - 3b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}.$$

f) MC : 12xyz. Ta có :

$$\frac{3xy(2x - z) - 2y(3x^2 - 2yz) - 6xz(5x - y) - 4xz(4y - x)}{12xyz} =$$

$$= \frac{6x^2y - 3xyz - 6x^2y + 4y^2z - 30x^2z + 6xyz - 16xyz + 4x^2z}{12xyz}$$

$$= \frac{-13xyz + 4y^2z - 26x^2z}{12xyz}, \text{ với x, y, z khác 0.}$$

**6.** a) MC : 42. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$42.3x - 6(2x + 5) + 21(7x + 19) + 14(2x + 1) = 16.42$$

hay : $126x - 12x - 30 + 147x + 399 + 28x + 14 = 672$

từ đó $126x - 12x + 147x + 28x = 672 + 30 - 399 - 14$

$$289x = 289.$$

Vậy x = 1.

b) Ở đây m là hằng số, tìm y là thực hiện phép cộng phân thức.

Ta có $y = \dfrac{2m}{2m^2 - 12m + 18} + \dfrac{3}{9 - 3m}$

$$y = \frac{2m}{2(m^2 - 6m + 9)} + \frac{3}{3(3 - m)} = \frac{m}{(m - 3)^2} + \frac{1}{3 - m}.$$

Đổi dấu $\dfrac{1}{3 - m}$ thành $\dfrac{-1}{m - 3}$ và lấy MC là $(m - 3)^2$ được :

$$y = \frac{m}{(m - 3)^2} - \frac{1}{m - 3} = \frac{m - (m - 3)}{(m - 3)^2} = \frac{3}{(m - 3)^2} \text{ (với } m \neq 3).$$

c) Điều kiện $a \neq b$, ta có :

$$z = \frac{a^4 + b^4}{(a - b)^2} - (a + b)^2 = \frac{a^4 + b^4 - (a + b)^2(a - b)^2}{(a - b)^2}$$

$$= \frac{a^4 + b^4 - [(a + b)(a - b)]^2}{(a - b)^2} = \frac{a^4 + b^4 - (a^2 - b^2)^2}{(a - b)^2}$$

$$= \frac{a^4 + b^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}{(a - b)^2}. \text{ Vậy } z = \frac{2a^2b^2}{(a - b)^2}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tìm t, u, v trong các biểu thức sau :*

*d)* $t.\left(\dfrac{5a}{a + b} + \dfrac{5b}{a - b} + \dfrac{10ab}{a^2 - b^2}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{a}{a + b} + \dfrac{b}{a - b} - \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}}$;

*e)* $\dfrac{\left(\dfrac{m + 2}{m - 2}\right)^2 + 3}{\left(\dfrac{m - 2}{m + 2}\right)^2 + 3}.\dfrac{m^3 - 8}{m^3 + 8} = \dfrac{2m}{m - 2} + u$

f) $\dfrac{4v(n-p)}{5(n^3-p^3)} = \dfrac{5n^2-10np+5p^2}{2(n^2-np+p^2)}$.

Ta lần lượt có :

d) $t = \dfrac{1}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}} : \left(\dfrac{5a}{a+b}+\dfrac{5b}{a-b}+\dfrac{10ab}{a^2-b^2}\right)$ (với $a \neq b \neq 0$)

$$= \frac{a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)-2ab} : \frac{5a(a-b)+5b(a+b)+10ab}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2}{(5a^2-5ab+5ab+5b^2+10ab)(a^2-ab+ab+b^2-2ab)}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)^2}{(5a^2+10ab+5b^2)(a^2-2ab+b^2)} = \frac{(a+b)^2(a-b)^2}{5(a+b)^2(a-b)^2} = \frac{1}{5}$$

e) $u = \dfrac{\left(\dfrac{m+2}{m-2}\right)^2+3}{\left(\dfrac{m-2}{m+2}\right)^2+3} \cdot \dfrac{m^3-8}{m^3+8} - \dfrac{2m}{m-2}$ (với $m \neq \pm 2$)

$$= \frac{(m+2)^2+3(m-2)^2}{(m-2)^2} : \frac{(m-2)^2+3(m+2)^2}{(m+2)^2} \cdot \frac{m^3-8}{m^3+8} - \frac{2m}{m-2}$$

$$= \frac{m^2+4m+4+3(m^2-4m+4)}{(m-2)^2} \cdot \frac{(m+2)^2}{m^2-4m+4+3(m^2+4m+4)} \times$$

$$\times \frac{m^3-8}{m^3+8} - \frac{2m}{m-2}$$

$$= \frac{4m^2-8m+16}{(m-2)^2} \cdot \frac{(m+2)^2}{4m^2+8m+16} \cdot \frac{m^3-8}{m^3+8} - \frac{2m}{m-2}$$

$$= \frac{4(m^2-2m+4)}{(m-2)^2} \cdot \frac{(m+2)^2}{4(m^2+2m+4)} \cdot \frac{(m-2)(m^2+2m+4)}{(m+2)(m^2-2m-4)} - \frac{2m}{m-2}$$

$$= \frac{m+2}{m-2} - \frac{2m}{m-2} = \frac{2-m}{m-2} = \frac{-(m-2)}{m-2} = -1$$

f) $v = \dfrac{5n^2-10np+5p^2}{2n^2-2np+2p^2} : \dfrac{4(n-p)}{5(n^3+p^3)} = \dfrac{5(n^2-2np+p^2)}{2(n^2-np+p^2)} \cdot \dfrac{5(n^3+p^3)}{4(n-p)}$

$$= \frac{5(n-p)^2}{2(n^2-np+p^2)} \cdot \frac{5(n+p)(n^2-np+p^2)}{4(n-p)}$$

$$= \frac{25(n-p)(n+p)}{8} = \frac{25}{8}(n^2-p^2).$$

**7.** Trước hết phân tích thành nhân tử rồi rút gọn, sau đó làm phép nhân.

a) $$\frac{m(x^2 - y^2)}{(x+y)^2}.\frac{3(1+y)}{m(x^2 - 2xy + y^2)} = \frac{m(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}.\frac{3(1+y)}{m(x-y)^2}$$

$$= \frac{3(1+y)}{(x+y)(x-y)} \quad (\text{với } x \neq \pm y).$$

b) $$\left[\frac{z+1}{z(z-9)} + \frac{z-1}{z(z+9)}\right].\frac{z^2-81}{z^2+9} = \frac{(z+1)(z+9)+(z-1)(z-9)}{z(z^2-81)}.\frac{z^2-81}{z^2+9}$$

$$= \frac{z^2+9z+z+9+z^2-9z-z+9}{z}.\frac{1}{z^2+9}$$

$$= \frac{2z^2+18}{z}.\frac{1}{z^2+9} = \frac{2(z^2+9)}{z}.\frac{1}{z^2+9} = \frac{2}{z} \quad (\text{với } z \neq 0).$$

c) Ta có thể biến đổi như sau :

$$\frac{d+e+f}{(d+e)(d+e-f)}.\frac{2(d+e)}{(d+e)^2-f^2} = \frac{(d+e+f).2(d+e)}{(d+e)(d+e-f)(d+e+f)(d+e-f)}$$

$$= \frac{2}{(d+e-f)^2} \quad (\text{với } d+e \neq f).$$

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Làm các phép tính sau :*

*d)* $$\left[\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}\right].\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

*e)* $$\frac{1}{(a+b)^3}.\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right) + \frac{2}{(a+b)^4}.\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) + \frac{2}{(a+b)^5}.\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)."$$

Cách giải như sau :

d) Làm phép tính trong dấu [ ], sau đó mới làm phép nhân :

$$\left[\frac{x^2+1}{(x^2+1)(x-1)} - \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)}\right].\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)(x-1)}.\frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)}.\frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

e) Tổng này có 3 số hạng, ta bắt đầu cộng hai số hạng cuối sau đó mới cộng kết quả tìm được với số hạng thứ nhất. Ta có :

Tổng hai số hạng cuối bằng :

$$\frac{2(b-a)(a^2+ab+b^2)+2ab(b-a)}{a^3b^3(a+b)^4} = \frac{2(b-a)(a^2+2ab+b^2)}{a^3b^3(a+b)^4}$$

$$= \frac{2(b-a)(a+b)^2}{a^3b^3(a+b)^4} = \frac{2(b-a)}{a^3b^3(a+b)^2}.$$

Cộng với số hạng thứ nhất được :

$$\frac{(b-a)(b+a)(b^2+a^2)}{a^4b^4(a+b)^4}+\frac{2(b-a)}{a^3b^3(a+b)^2}=\frac{(b-a)(b^2+a^2)+2ab(b-a)}{a^4b^4(a+b)^2}$$

$$=\frac{(b-a)(a+b)^2}{a^4b^4(a+b)^2}=\frac{b-a}{a^4b^4}\text{ (với } ab\neq 0 \text{ và } a\neq -b).$$

**8.** a) Ta phân tích tử và mẫu của các phân thức thành nhân tử :

$$\frac{y^2-5y+3y-15}{y^2-5y+2y-10}.\frac{y^2-2^2}{y^2-4+y-2}=\frac{y(y-5)+3(y-5)}{y(y-5)+2(y-5)}.\frac{(y+2)(y-2)}{(y^2-4)+(y-2)}$$

$$=\frac{(y-5)(y+3)}{(y-5)(y+2)}.\frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y+3)}=1$$

b) Ta có : $\frac{mz(m^2+z^2)}{m^2+z^2}:m^3z^3=\frac{mz(m^2+z^2)}{m^2+z^2}.\frac{1}{m^3z^3}=\frac{1}{m^2z^2}$ (với $mz\neq 0$)

c) Ta có : $\frac{k(x+y)}{(x-y)^2}:\frac{k(x^2+2xy+y^2)}{2(x+y)}=\frac{k(x+y)}{(x-y)^2}.\frac{2(x+y)}{k(x+y)^2}$

$$=\frac{2}{(x-y)^2}\text{ (với } x\neq y).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Làm phép tính sau :*

*d)* $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$

*e)* $\left(\frac{p}{n^2-pn}+\frac{n}{p^2-pn}\right):\frac{n^2-p^2}{n^2p+np^2}$."

Thực hiện phép tính trong ngoặc trước. Ta lần lượt có :

d) $\frac{(2m+1)^2-(2m-1)^2}{(2m+1)(2m-1)}:\frac{4m}{5(2m-1)}$

$$=\frac{4m^2+4m+1-(4m^2-4m+1)}{(2m+1)(2m-1)}.\frac{5(2m-1)}{4m}$$

$$=\frac{8m}{2m+1}.\frac{5}{4m}=\frac{40m}{4m(2m+1)}=\frac{10}{2m+1}\quad\left(\text{với } m\neq -\frac{1}{2}\right)$$

e) $\left[\frac{p}{n(n-p)}-\frac{n}{p(n-p)}\right]:\frac{(n+p)(n-p)}{np(n+p)}=\frac{p^2-n^2}{np(n-p)}.\frac{np(n+p)}{(n+p)(n-p)}$

$$=\frac{-(n^2-p^2)}{np(n-p)}.\frac{np}{n-p}=\frac{-(n+p)(n-p)}{np(n-p)}.\frac{np}{n-p}$$

$$=\frac{-(n+p)}{np}.\frac{np}{n-p}=-\frac{n+p}{n-p}=\frac{p+n}{p-n}.$$

**9.** a) Ta có : $\dfrac{p^2 + 6px + 9x^2 - (9x^2 - 6x + 1)}{-6x(p-1) - (p-1)^2} = \dfrac{p^2 + 6px + 6x - 1}{(p-1)(-6x - p + 1)}$

$= \dfrac{(p+1)(p-1+6x)}{-(p-1)(p-1+6x)} = \dfrac{p+1}{1-p}$, không phụ thuộc vào biến x.

b) Trong hai thừa số của tích thì hai số hạng đầu giống nhau, còn số hạng thứ ba trái dấu. Do đó ta hãy tính tổng của hai số hạng đầu :

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{2x(x-1) + 2(x+1)}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2x + 2x + 2}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}.$$

Vậy tích đã cho có thể viết :

$$\left(\frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} + \frac{4x}{x^2 - 1}\right).\left(\frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} - \frac{4x}{x^2 - 1}\right) = \frac{2(x^2 + 2x + 1).2(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$= \dfrac{2(x+1)^2.2(x-1)^2}{(x^2 - 1)^2} = 4.\dfrac{(x^2 - 1)^2}{(x^2 - 1)^2} = 4$, không phụ thuộc vào biến x.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Chứng tỏ các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến t :*

*c)* $\dfrac{p^2 - 2pt + 6t - 9}{(p+3)^2 - 2pt - 6t}$ *d)* $\dfrac{(5t+m)^2 - (5t-1)^2}{(m-5)(m+10t-1)}$*."*

Ta có thể viết các biểu thức đã cho như sau :

c) $\dfrac{p^2 - 9 - 2t(p-3)}{(p+3)^2 - 2t(p+3)} = \dfrac{(p-3)(p+3-2t)}{(p+3)(p+3-2t)}$

$= \dfrac{p-3}{p+3}$, không phụ thuộc vào biến t.

d) Tử là hiệu của hai bình phương nên biểu thức có thể biến đổi thành

$\dfrac{(5t + m + 5t - 1)(5t + m - 5t + 1)}{(m-5)(m+10t-1)} = \dfrac{(10t + m - 1)(m+1)}{(m-5)(m+10t-1)}$

$= \dfrac{m+1}{m-5}$, không phụ thuộc vào biến t.

**10.** $M = \left(m - \dfrac{4mn}{m+n} + n\right) : \left(\dfrac{m}{m+n} - \dfrac{n}{n-m} - \dfrac{2mn}{m^2 - n^2}\right)$

$= \dfrac{m(m+n) - 4mn + n(m+n)}{m+n} : \dfrac{m(m-n) + n(m+n) - 2mn}{(m+n)(m-n)}$

$= \dfrac{m^2 + mn - 4mn + mn + n^2}{m+n} : \dfrac{m^2 - mn + mn + n^2 - 2mn}{(m+n)(m-n)}$

$= \dfrac{(m-n)^2}{m+n} : \dfrac{(m-n)^2}{(m+n)(m-n)} = \dfrac{(m-n)^2}{m+n}.\dfrac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2} = m - n$

$$N = \left[\frac{m^2+n^2}{m^2n^2}.\frac{1}{(m+n)^2} + \frac{2}{(m+n)^3}.\frac{m+n}{mn}\right].\frac{m^3n^3}{m-n}$$

$$= \frac{(m^2+n^2)(m+n)+2mn(m+n)}{m^2n^2(m+n)^3}.\frac{m^3n^3}{m-n} = \frac{mn}{m-n}$$

Vậy tích $M.N = (m-n).\frac{mn}{m-n} = m.n.$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Với giá trị nào của c thì biểu thức :*

$$C = \left\{\left[\left(\frac{2}{b-c} - \frac{2b}{b^3+c^3}.\frac{b^2-bc+c^2}{b-c}\right)\right] : \frac{4c^2}{b^2-2bc+c^2}\right\}.\frac{b+c}{b-c}$$

*có giá trị bằng 1 ?"*

Trước hết ta rút gọn biểu thức C, ta có :

$$C = \left\{\left[\frac{2}{b-c} - \frac{2b}{(b+c)(b^2-bc+c^2)}.\frac{b^2-bc+c^2}{b-c}\right].\frac{(b-c)^2}{4c^2}\right\}.\frac{b+c}{b-c}$$

$$= \left\{\left[\frac{2}{b-c} - \frac{2b}{(b+c)(b-c)}\right].\frac{(b-c)^2}{4c^2}\right\}.\frac{b+c}{b-c}$$

$$= \frac{2(b+c)-2b}{(b+c)(b-c)}.\frac{(b-c)^2}{4c^2}.\frac{b+c}{b-c} = \frac{2b+2c-2b}{4c^2} = \frac{1}{2c}$$

Nếu $C = 1$ tức là $\frac{1}{2c} = 1$, suy ra $c = \frac{1}{2}$.

**11.** Ta có : $E = \left[\frac{(e+1)(ef-1)+(ef+e)(ef+1)-(ef+1)(ef-1)}{(ef+1)(ef-1)}\right] :$

$$\left[\frac{(e+1)(ef-1)-(ef+1)(ef+1)+(ef+1)(ef-1)}{(ef+1)(ef-1)}\right]$$

$$= \frac{(e+1)(ef-1)+(ef+e)(ef+1)-(ef+1)(ef-1)}{(e+1)(ef-1)-(ef+e)(ef+1)+(ef+1)(ef-1)}$$

$$= \frac{e^2f-e+ef-1+e^2f^2+ef+e^2f+e-e^2f^2+1}{e^2f-e+ef-1-e^2f^2-ef-e^2f-e+e^2f^2-1}$$

$$= \frac{2e^2f+2ef}{-2e-2} = \frac{2ef(e+1)}{-2(e+1)} = -ef.$$

Ta biết rằng $(e-f)^2 = (e+f)^2 - 4ef \geq 0$, suy ra $-ef > -\frac{(e+f)^2}{4}$.

Vậy $E = -ef \geq -\frac{4^2}{4} = -4$ (thay $e + f = 4$ theo gt). Từ đó E đạt giá trị nhỏ nhất là $-4$ khi $e = f = 2$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Rút gọn biểu thức :*

$$X = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$$

*và tìm các giá trị nguyên của x, y để X rút gọn bằng –3."*

Ta lấy MC = (x + y)(1 + x)(1 – y) và có :

$$X = \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y) - x^2y^2(x+y)}{MC}$$

$$= \frac{(x+y)[x(x+1) + y^2(1-x^2) - y(1+x)]}{MC}$$

$$= \frac{(x+y)(1+x)(x+y^2-y^2x-y)}{MC}$$

$$= \frac{(x+y)(1+x)(1-y)(x+xy-y)}{(x+y)(1+x)(1-y)} = x + xy - y.$$

Bây giờ ta phải tìm x, y nguyên để x + xy – y = –3 (*). Muốn vậy ta viết đẳng thức thành x + xy – y – 1 = –4, hay (x – 1)(1 + y) = –4.

Do (–4) có thể viết dưới dạng tích của hai thừa số nguyên sau :

$$(-4).1 = 1.(-4) = 4.(-1) = (-1).4 = (-2).2 = 2.(-2)$$

và do (x – 1) + (1 + y) = x + y ≠ 0 nên phải loại 2 trường hợp cuối. Vậy các giá trị nguyên của x, y thỏa mãn (*) là :

| x | 5 | 0 | –3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | –2 | 3 | 0 | –5 |

**12.** Ta phải tính từ dưới lên. Ta lần lượt có :

Vế trái : $1 - \frac{p}{p-1} = \frac{p-1-p}{p-1} = \frac{-1}{p-1} = \frac{1}{1-p}$

$$p : \frac{1}{1-p} = p.(1-p) = p - p^2.$$

Vế phải : $3 + \frac{1}{p} = \frac{3p+1}{p}$; $\frac{1}{3+\frac{1}{p}} = \frac{p}{3p+1}$;

$$2 + \frac{1}{3+\frac{1}{p}} = 2 + \frac{p}{3p+1} = \frac{6p+2+p}{3p+1} = \frac{7p+2}{3p+1}$$

$$7p + 2 : \frac{7p+2}{3p+1} = 3p + 1.$$

Vậy đẳng thức đã cho trở thành : $p - p^2 = 3p + 1$,

hay $p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 = 0$, từ đó $p = -1$.

• ***Lời bình :*** Tương tự :

*"Cho* $A = \dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}$, $B = \dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}$. *Tính A + B và A : B."*

Ta tính riêng A và B, ta có :

$$A = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2+b^2}{ab} : \frac{a^2-b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \quad (\text{với } a \neq b \neq 0);$$

$$B = \left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} : \frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{2ab}{a^2-b^2} \quad (\text{với } a \neq b \neq 0).$$

Ta có : $A + B = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \dfrac{2ab}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b};$$

$$A : B = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

**13.** a) Mẫu $d^4 - d^2 + 1 = d^4 - d^2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$

$$= \left(d^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ luôn dương với mọi d.}$$

b) $D = \left[\dfrac{(d^2-1)(d^2+1)-d^4+d^2-1}{(d^4-d^2+1)(d^2+1)}\right] \cdot \left(d^4 + \dfrac{(1+d^2)(1-d^2)}{1+d^2}\right)$

$$= \frac{d^4-1-d^4+d^2-1}{(d^4-d^2+1)(d^2+1)} \cdot (d^4-d^2+1) = \frac{d^2-2}{d^2+1}$$

c) Ta có thể viết : $D = \dfrac{d^2-2}{d^2+1} = \dfrac{d^2+1-3}{d^2+1} = 1 - \dfrac{3}{d^2+1}$.

Vì $d^2 + 1 > 0$ nên $d^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi d = 0. Suy ra $\dfrac{3}{d^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất và $1 - \dfrac{3}{d^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Vậy D đạt giá trị nhỏ nhất khi d = 0 và giá trị đó là 1 – 3 = –2.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho biểu thức* $K = \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{k-1}{k+1}\right) : \frac{2k}{5k-5}$.

*a) Rút gọn K và tính giá trị của K khi k = 2019;*

*b) Với giá trị nào của k thì K = 9 ?"*

Cách giải như sau :

a) Điều kiện $k \neq \pm 1$, ta có :

$$K = \frac{(k+1)^2 - (k-1)^2}{(k+1)(k-1)} : \frac{2k}{5(k-1)}$$

$$= \frac{(k+1+k-1)(k+1-k+1)}{(k+1)(k-1)} \cdot \frac{5(k-1)}{2k}$$

$$= \frac{4k}{(k+1)(k-1)} \cdot \frac{5(k-1)}{2k} = \frac{10}{k+1}.$$

Khi k = 2019 thì giá trị của $K = \frac{10}{2020} = \frac{1}{202}$.

b) Nếu K = 9 thì $\frac{10}{k+1} = 9$, hay $9k + 9 = 10$. Từ đó $k = \frac{1}{9}$.

**14.** a) Biểu thức có thể viết :

$$\frac{k+2}{k+3} - \frac{5}{k^2 - 2k + 3k - 6} - \frac{1}{k-2} \text{ (với } k \neq 2, k \neq -3)$$

$$= \frac{k+2}{k+3} - \frac{5}{k(k-2) + 3(k-2)} - \frac{1}{k-2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{5}{(k-2)(k+3)} - \frac{1}{k-2}$$

$$= \frac{(k+2)(k-2) - 5 - (k+3)}{(k-2)(k+3)} = \frac{k^2 - 4 - 5 - k - 3}{(k-2)(k+3)} = \frac{k^2 - k - 12}{(k-2)(k+3)}$$

$$= \frac{k^2 - 4k + 3k - 12}{(k-2)(k+3)} = \frac{k(k-4) + 3(k-4)}{(k-2)(k+3)} = \frac{(k-4)(k+3)}{(k-2)(k+3)} = \frac{k-4}{k-2}.$$

b) Ta có : $4K + 1 = \frac{4(k-4)}{k-2} + 1 = \frac{5k-18}{k-2} = 5 - \frac{8}{k-2}$ nguyên khi $(k - 2)$ là ước của 8.

Ta có bảng sau :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k – 2 | 1 | –1 | 2 | –2 | 4 | –4 | 8 | –8 |
| k | 3 | 1 | 4 | 0 | 6 | –2 | 10 | –6 |
| 4K + 1 | –3 | 13 | 1 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |

Căn cứ vào bảng trên và kết hợp với điều kiện, ta có với $k \in \{3; 0; 6; -6\}$ thì 4K + 1 chia hết cho 3.

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT VÀ LỚN NHẤT

**Ví dụ 1 :** *Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức*

$$A = a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 10b.$$

***Giải***

– *Cách 1.* Dựa vào bình phương của tổng

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

Ta có : $A = a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b + b^2 - 8b + 16 - 17$

$= (a - b + 1)^2 + (b - 4)^2 - 17 \geq -17.$

Khi a = 3 và b = 4 thì A = –17, vậy GTNN của A là –17.

– *Cách 2.* Dựa vào hằng đẳng thức $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$.

Ta có : $A = (a^2 - 2ab + b^2) + (2a - 2b) + 1 + (b^2 - 8b + 16) - 17$

$= [(a - b)^2 + 2(a - b) + 1] + (b - 4)^2 - 17$

$= (a - b + 1)^2 + (b - 4)^2 - 17 \geq -17.$

Vậy GTNN của A là –17.

**Ví dụ 2 :** *Tìm GTNN của biểu thức* $B = (b + 1)^2 + (b - 3)^2$.

***Giải***

Ta có : $B = (b^2 + 2b + 1) + (b^2 - 6b + 9) = 2b^2 - 4b + 10$

$= 2(b^2 - 2b + 1) + 8 = 2(b - 1)^2 + 8 \geq 8.$

Khi B = 8 thì b – 1 = 0, hay b = 1. Vậy GTNN của B là 8.

**Ví dụ 3 :** *Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức* $C = cd + de + ec$, *trong đó các số c, d, e thỏa mãn điều kiện* $c + d + e = 3$.

***Giải***

Ta có : $C = cd + e(c + d) = cd + [3 - (c + d)](c + d)$

$= cd + 3(c + d) - (c + d)^2$

$= -c^2 - d^2 - cd + 3c + 3d = -c^2 - (d - 3)c + 3d - d^2.$

Biến đổi tiếp :

$$C = -\left[c^2 + c(d - 3) + \left(\frac{d - 3}{2}\right)^2\right] + 3d - d^2 + \left(\frac{d - 3}{2}\right)^2$$

$$= -\left(c + \frac{d - 3}{2}\right)^2 + \frac{-3d^2 + 6d + 9}{4} = -\left(c + \frac{d - 3}{2}\right)^2 + \frac{-3(d^2 - 2d + 1) + 12}{4}$$

$$= -\left(c + \frac{d - 3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}(d - 1)^2 + 3 \leq 3.$$

Khi c = d = e = 1 thì C = 3. Vậy GTLN của C là 3.

**Ví dụ 4 :** *Tìm GTLN của biểu thức :*

$$D = -5d^2 - 2de - 2e^2 + 14d + 10e - 1.$$

***Giải***

Ta có : $-5D = 25d^2 + 10de + 10e^2 - 70d - 50e + 5$

$= (25d^2 + e^2 + 49 + 10de - 70d - 14e) + (9e^2 - 36e + 36) - 80$

Suy ra $D = -\frac{1}{5}(5d + e - 7)^2 - \frac{9}{5}(e - 2)^2 + 16 \leq 16.$

Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} 5d + e - 7 = 0 \\ e - 2 = 0 \end{cases}$ tức là $\begin{cases} e = 2 \\ d = 1 \end{cases}$

Vậy GTLN của D là 16 (khi d = 1, e = 2).

**Ví dụ 5 :** *Cho a và b liên hệ với nhau bởi hệ thức :*

$$a^2 + 2ab + 7(a + b) + 2b^2 + 10 = 0.$$

*Tìm GTLN và GTNN của $M = a + b + 1$.*

***Giải***

Hệ thức đã cho có thể viết :

$4a^2 + 8ab + 28a + 28b + 8b^2 + 40 = 0$

hay $4a^2 + 4b^2 + 49 + 8ab + 28a + 28b + 4b^2 - 9 = 0$

hay $(2a + 2b + 7)^2 + 4b^2 = 9.$

Vì $4b^2 \geq 0$ nên $(2a + 2b + 7 - 3) \leq 0$

hay $(a + b + 5)(a + b + 2) \leq 0.$

Từ đó : $\begin{cases} a + b + 5 \geq 0 \\ a + b + 2 \leq 0 \end{cases}$ (vì $a + b + 5 > a + b + 2$)

hay $\begin{cases} M \geq -4 \\ M \leq -1 \end{cases}$

Vậy M có GTNN là $-4$ khi $b = 0$, $a = -5$

và có GTLN là $-1$ khi $b = 0$, $a = -2$.

# §5. ĐÀO SÂU VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Phương trình bậc nhất một ẩn***

a) Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

b) Trong một phương trình ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

c) Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với (cho) cùng một số khác 0.

Phương trình bậc nhất luôn có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

(*Lưu ý* : Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương).

d) Phương trình tích. Công thức để giải :

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ hoặc } B(x) = 0.$$

e) Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Giải theo bốn bước :

– Bước 1. Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình.

– Bước 2. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu.

– Bước 3. Giải phương trình.

– Bước 4. Các giá trị thỏa mãn ĐKXĐ chính là nghiệm của phương trình đã cho.

***2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn***

a) Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

b) Khi nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương (với cùng một số âm) ta được bất đẳng thức mới cùng chiều (ngược chiều) với bất đẳng thức đã cho.

c) Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

d) Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải :

– Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương.

– Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

e) Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Khi giải phải bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức.

**Ví dụ 4 :** *Tìm GTLN của biểu thức :*

$$D = -5d^2 - 2de - 2e^2 + 14d + 10e - 1.$$

***Giải***

Ta có : $-5D = 25d^2 + 10de + 10e^2 - 70d - 50e + 5$

$= (25d^2 + e^2 + 49 + 10de - 70d - 14e) + (9e^2 - 36e + 36) - 80$

Suy ra $D = -\frac{1}{5}(5d + e - 7)^2 - \frac{9}{5}(e - 2)^2 + 16 \le 16.$

Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} 5d + e - 7 = 0 \\ e - 2 = 0 \end{cases}$ tức là $\begin{cases} e = 2 \\ d = 1 \end{cases}$

Vậy GTLN của D là 16 (khi d = 1, e = 2).

**Ví dụ 5 :** *Cho a và b liên hệ với nhau bởi hệ thức :*

$$a^2 + 2ab + 7(a + b) + 2b^2 + 10 = 0.$$

*Tìm GTLN và GTNN của M = a + b + 1.*

***Giải***

Hệ thức đã cho có thể viết :

$4a^2 + 8ab + 28a + 28b + 8b^2 + 40 = 0$

hay $4a^2 + 4b^2 + 49 + 8ab + 28a + 28b + 4b^2 - 9 = 0$

hay $(2a + 2b + 7)^2 + 4b^2 = 9.$

Vì $4b^2 \ge 0$ nên $(2a + 2b + 7 - 3) \le 0$

hay $(a + b + 5)(a + b + 2) \le 0.$

Từ đó : $\begin{cases} a + b + 5 \ge 0 \\ a + b + 2 \le 0 \end{cases}$ (vì $a + b + 5 > a + b + 2$)

hay $\begin{cases} M \ge -4 \\ M \le -1 \end{cases}$

Vậy M có GTNN là −4 khi b = 0, a = −5

và có GTLN là −1 khi b = 0, a = −2.

# §5. ĐÀO SÂU VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Phương trình bậc nhất một ẩn***

a) Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

b) Trong một phương trình ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

c) Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với (cho) cùng một số khác 0.

Phương trình bậc nhất luôn có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

(*Lưu ý* : Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương).

d) Phương trình tích. Công thức để giải :

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ hoặc } B(x) = 0.$$

e) Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Giải theo bốn bước :

– Bước 1. Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình.

– Bước 2. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu.

– Bước 3. Giải phương trình.

– Bước 4. Các giá trị thỏa mãn ĐKXĐ chính là nghiệm của phương trình đã cho.

***2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn***

a) Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

b) Khi nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương (với cùng một số âm) ta được bất đẳng thức mới cùng chiều (ngược chiều) với bất đẳng thức đã cho.

c) Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

d) Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải :

– Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương.

– Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

e) Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Khi giải phải bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Các cặp phương trình sau có tương đương không ?

a) $|x - 5| = 7$ và $(x - 12)(x + 2) = 0$

b) $4y - 3 = 3y + 4$ và $4y - 3 + \dfrac{2}{y - 7} = 3y + 4 + \dfrac{2}{y - 7}$

c) $\dfrac{49z^2 - 64}{7z + 8} = 0$ và $7z - 8 = 0$.

**2.** Giải các phương trình :

a) $x + 1{,}5x + 9 = \dfrac{2}{3}x + 4 + \dfrac{5}{6}x - 1{,}2x + 0{,}2$

b) $5{,}76 + 4{,}8y - 0{,}05y = 6{,}99y - 1{,}995y + 5{,}13$

c) $5z + 3{,}48 - 2{,}35z = 5{,}381 - 2{,}9z + 10{,}42$.

**3.** Giải các phương trình chứa hằng đẳng thức :

a) $5(x - 1)^2 - 2(x + 3)^2 = 3(x + 2)^2 - 7(6x - 1)$

b) $(3y - 1)^2 - 5(2y + 1)^2 + (6y - 3)(2y + 1) - (y - 1)^2 = 0$

c) $3(z + 1)^2 + (z - 4)^3 = 101 + (z - 3)^3$.

**4.** Giải các phương trình chứa ẩn ở mẫu :

a) $\dfrac{x + 5}{x^2 - 5x} - \dfrac{x + 25}{2x^2 - 50} = \dfrac{x - 5}{2x^2 + 10x}$

b) $\dfrac{4}{y^2 + y + 1} - \dfrac{1}{y - 1} = \dfrac{2y^2 - 5}{y^3 - 1}$

c) $\dfrac{2}{z + 2} - \dfrac{2z^2 + 16}{z^3 + 8} = \dfrac{5}{z^2 - 2z + 4}$.

**5.** Giải phương trình tích :

a) $\dfrac{2x}{x + 4} - \dfrac{4x}{x^2 - 16} = 0$

b) $\dfrac{2y^2 + 15y}{5 + y^2} - 3y = 0$

c) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$.

**6.** Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối :

a) $|2x + 1| = x + 1$

b) $|1 - 2y| = |y + 1|$

c) $\dfrac{|z| - 12}{z^2 - 144} = 0$.

**7.** Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn :

a) $-1 < \dfrac{x + 3}{4} - \dfrac{x - 3}{6} < 2$

b) $\dfrac{z(1{,}5z + 1)}{6} - \dfrac{(2 - z)^2}{4} \geq \dfrac{5z}{3} - 2$.

**8.** Giải bất phương trình :

a) $2x^2 - 6x + (x - 6)^2 \geq 2(x + 7)^2 - 145 + (x + 5)^2$

b) $\dfrac{2}{(1 - 3y)(3y + 11)} < \dfrac{1}{(3y - 1)^2} - \dfrac{3}{(3y + 11)^2}$.

c) $\dfrac{4}{z^2 + z + 1} - \dfrac{1}{z - 1} \leq \dfrac{2z^2 - 5}{z^3 - 1}$.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** Muốn chứng tỏ rằng hai phương trình là tương đương thì hai phương trình đó phải có cùng một tập nghiệm.

a) Phương trình $|x - 5| = 7$ có nghiệm là 12 và –2

và phương trình $(x - 12)(x + 2) = 0$ cũng có nghiệm là 12 và –2, nên hai phương trình này tương đương.

b) Phương trình $4y - 3 = 3y + 4$ có nghiệm $y = 7$. Với $y = 7$ thì $\dfrac{2}{y - 7}$ không xác định (vì $y - 7 = 0$), do đó hai phương trình đã cho không tương đương.

c) Phương trình $\dfrac{49z^2 - 64}{7z + 8} = 0$ có TXĐ là $z \neq -8$. Do $\dfrac{49z^2 - 64}{7z + 8} = 0$ khi $49z^2 - 64 = 0$ và $7z + 8 \neq 0$, hay $(7z + 8)(7z - 8) = 0$ và $7z + 8 \neq 0$ nên phương trình này trở thành $7z - 8 = 0$. Đó chính là phương trình thứ hai $7z - 8 = 0$.

Vậy cặp phương trình này tương đương.

- ***Lời bình :*** *"Ba phương trình $4t + 3 = 0$; $2t + 8 = 0$ và $(4t + 3)(2t + 8) = 0$ có tương đương không nếu :*

*a) $t \in \mathbb{N}$ b) $t \in \mathbb{Z}$ c) $t \in \mathbb{Q}$?"*

Ta phải tìm nghiệm của từng phương trình. Phương trình $4t + 3 = 0$ có nghiệm là $t = -\dfrac{3}{4}$, phương trình $2t + 8 = 0$ có nghiệm là $t = -4$, phương trình $(4t + 3)(2t + 8) = 0$ có nghiệm là $t = -\dfrac{3}{4}$ hoặc $t = -4$. Vậy :

a) Nếu $t \in \mathbb{N}$ thì cả ba phương trình đều vô nghiệm, tức là có chung tập nghiệm $S = \varnothing$, do đó chúng tương đương với nhau.

b) Nếu $t \in \mathbb{Z}$ thì chỉ hai phương trình $2t + 8 = 0$ và $(4t + 3)(2t + 8) = 0$ có nghiệm duy nhất là $t = -4$ nên chúng tương đương với nhau.

c) Nếu $t \in \mathbb{Q}$ thì phương trình thứ nhất và thứ hai không tương đương, phương trình thứ nhất và thứ ba không tương đương, phương trình

thứ hai và thứ ba cũng không tương đương. Do đó cả ba phương trình đã cho từng đôi một không tương đương.

**2.** a) Phương trình đã cho có thể viết :

$$x + \frac{3}{2}x + 9 = \frac{2}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5}.$$

MC : 30. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$30x + 45x + 270 = 20x + 120 + 25x - 36x + 6$$

hay $75x + 270 = 9x + 126$; $66x = -144$.

Vậy $x = -144 : 66 = -2\frac{12}{66} = -2\frac{2}{11}$.

b) Thực hiện phép tính và chuyển vế ta có :

$$5,76 - 5,13 = 4,995y - 4,75y$$

hay $0,63 = 0,245y$.

Từ đó $y = 0,63 : 0,245 \approx 2,57$.

c) Ta có : $2,65z + 3,48 = -2,9z + 15,801$

hay $2,65z + 2,9z = 15,801 - 3,48$.

Từ đó $5,55z = 12,321$. Vậy $z = 12,321 : 5,55 = 2,22$.

**3.** a) Ta có : $5(x^2 - 2x + 1) - 2(x^2 + 6x + 9) = 3(x^2 + 4x + 4) - 7(6x - 1)$

hay $5x^2 - 10x + 5 - 2x^2 - 12x - 18 = 3x^2 + 12x + 12 - 42x + 7$

$3x^2 - 22x - 13 = 3x^2 - 30x + 19$

Từ đó $8x = 32$, vậy $x = 4$.

b) $9y^2 - 6y + 1 - 5(4y^2 + 4y + 1) + 12y^2 + 6y - 6y - 3 - y^2 + 2y - 1 = 0$

hay $9y^2 - 6y + 1 - 20y^2 - 20y - 5 + 12y^2 + 6y - 6y - 3 - y^2 + 2y - 1 = 0$

$y^2 - 26y - 7 - y^2 + 2y - 1 = 0$.

Từ đó : $-24y = 8$. Vậy $y = -\frac{1}{3}$.

c) $3(z^2 + 2z + 1) + z^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 101 + z^3 - 9z^2 + 27z - 27$

hay $3z^2 + 6z + 3 + z^3 - 12z^2 + 48z - 64 = 101 + z^3 - 9z^2 + 27z - 27$

$z^3 - 9z^2 + 54z - 61 = z^3 - 9z^2 + 27z + 74$.

Từ đó : $27z = 135$. Vậy $z = 5$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các phương trình sau :*

*d)* $2x^2 + (x + 5)^2 - 2(x + 7)^2 = 2(3x - 72,5) + (x - 6)^2$

*e)* $(y + 1)^3 - (y - 1)^3 = 6(y^2 + y + 1)$*."*

Ta lần lượt có :

d) $2x^2 + x^2 + 10x + 25 - 2(x^2 + 14x + 49) = 6x - 145 + x^2 - 12x + 36$

hay $3x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - 28x - 98 = -6x + x^2 - 109$

$x^2 - 18x - 73 = x^2 - 6x - 109$

Từ đó : $-12x = -36$. Vậy $x = 3$.

e) Khai triển $(y + 1)^3$ và $(y - 1)^3$ ta có :

$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) = 6y^2 + 6y + 6$

hay $6y^2 + 2 = 6y^2 + 6y + 6$.

Từ đó : $6y = -4$. Vậy $y = -\frac{2}{3}$.

**4.** a) Các mẫu phải khác 0, tức là :

$x^2 - 5x = x(x - 5) \neq 0$ khi $x \neq 0, x \neq 5$

$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) \neq 0$ khi $x \neq \pm 5$

$2x^2 + 10x = 2x(x + 5) \neq 0$ khi $x \neq 0, x \neq -5$.

Do đó TXĐ : $x \neq 0$ và $x \neq \pm 5$.

Phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{x + 5}{x(x - 5)} - \frac{x + 25}{2(x + 5)(x - 5)} = \frac{x - 5}{2x(x + 5)}$$

MC : $2x(x + 5)(x - 5)$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$2(x + 5)^2 - x(x + 25) = (x - 5)^2$

hay $2(x^2 + 10x + 25) - x^2 - 25x = x^2 - 10x + 25$

$2x^2 + 20x + 50 - x^2 - 25x = x^2 - 10x + 25$

$-5x + 50 = -10x + 25$.

Từ đó : $5x = -25$. Vậy $x = -5$.

Vì $-5 \notin$ TXĐ, nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Do $(y - 1)(y^2 + y + 1) = y^3 - 1$, nên ta có cách giải sau :

TXĐ : $y \neq 1$, MC : $(y - 1)(y^2 + y + 1) = y^3 - 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$4(y - 1) - (y^2 + y + 1) = 2y^2 - 5$

hay $4y - 4 - y^2 - y - 1 = 2y^2 - 5$

$3y - y^2 - 5 = 2y^2 - 5$.

Từ đó : $3y - 3y^2 = 0$; $3y(1 - y) = 0$. Vậy $y_1 = 0, y_2 = 1$.

Vì $0 \in$ TXĐ, nên phương trình chỉ có một nghiệm là $y = 0$.

c) Do $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 + 8$ nên ta có cách giải sau :

TXĐ : $z \neq -2$; MC : $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 + 8$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$2(z^2 - 2z + 4) - (2z^2 + 16) = 5(z + 2)$$

hay $2z^2 - 4z + 8 - 2z^2 - 16 = 5z + 10$;

Từ đó : $-9z - 8 = 10$. Vậy $z = -2$

Do $-2 \notin$ TXĐ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

- ***Lời bình :*** *"Giải phương trình :*

*a)* $\dfrac{1 + \dfrac{x}{x+3}}{1 - \dfrac{x}{x+3}} = 3$ *b)* $\dfrac{1}{y+1} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{-1}{y^2 + y}$*."*

Ta lần lượt có :

a) TXĐ : $x \neq -3$. Phương trình có thể viết :

$$\frac{\dfrac{2x+3}{x+3}}{\dfrac{3}{x+3}} = 3 \quad \text{hay} \quad \frac{2x+3}{x+3} \cdot \frac{x+3}{3} = 3$$

Từ đó : $\dfrac{2x+3}{3} = 3$ ; $2x + 3 = 9$. Vậy $x = 3 \in$ TXĐ.

Phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) TXĐ : $y \neq 0$, $y \neq -1$. MC : $y(y + 1) = y^2 + y$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$y + 2(y + 1) = -1 \quad \text{hay} \quad y + 2y + 2 = -1.$$

Từ đó : $y = -1 \notin$ TXĐ. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**5.** a) TXĐ : $x \neq \pm 4$. MC : $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$2x(x - 4) - 4x = 0 \quad \text{hay} \quad 2x^2 - 8x - 4x = 0$$

$$2x(x - 6) = 0.$$

Từ đó : $2x = 0$, suy ra $x = 0 \in$ TXĐ,

hoặc $x - 6 = 0$, suy ra $x = 6 \in$ TXĐ.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

b) Mẫu $5 + y^2$ luôn dương. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$2y^2 + 15y - 3y(5 + y^2) = 0$$

hay $2y^2 + 15y - 15y - 3y^3 = 0$; $2y^2 - 3y^3 = 0$.

Từ đó : $y^2(2 - 3y) = 0$. Ta có : $y^2 = 0$, suy ra $y = 0$

$2 - 3y = 0$, suy ra $y = \dfrac{2}{3}$.

c) Áp dụng hằng đẳng thức : $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z - 1)^3 = 0$.

Vậy phương trình có ba nghiệm bằng nhau là $z = 1$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các phương trình :*

*d)* $4x^3 + 28x^2 - 9x - 63 = 0$ *e)* $y^4 + 2y^3 + 5y^2 + 4y - 12 = 0$*."*

Ta lần lượt có :

d) Ta phân tích vế trái thành nhân tử :

$$4x^2(x + 7) - 9(x + 7) = (x + 7)(4x^2 - 9) = (x + 7)(2x + 3)(2x - 3)$$

Vậy ta được phương trình tích : $(x + 7)(2x + 3)(2x - 3) = 0$

Giải ra được ba nghiệm là : $x_1 = -7$; $x_2 = -1,5$; $x_3 = 1,5$.

e) Ta cũng phân tích vế trái thành nhân tử :

$$(y - 1)(y^3 + 3y^2 + 8y + 12) = 0$$

hay $(y - 1)(y + 2)(y^2 + y + 6) = 0$ (*)

Do $y^2 + y + 6 = y^2 + 2.\frac{1}{2}.y + \frac{1}{4} + \frac{23}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0$ với mọi x,

nên (*) cho : $y - 1 = 0$, suy ra $y_1 = 1$

$y + 2 = 0$, suy ra $y_2 = -2$.

**6.** Lưu ý trước tiên đến định nghĩa của giá trị tuyệt đối :

$$|A| = \begin{cases} A \text{ khi } A \geq 0 \\ -A \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

Ngoài ra lưu ý đến :

Nếu $|A| = |B|$ thì có hai trường hợp : hoặc $A = B$, hoặc $A = -B$.

a) Phương trình $|2x + 1| = x + 1$ có dạng :

$$2x + 1 = x + 1 \text{ khi } 2x + 1 \geq 0, \text{ tức là } x \geq -\frac{1}{2}$$

và $-2x - 1 = x + 1$ khi $2x + 1 < 0$, tức là $x < -\frac{1}{2}$.

Từ đó ta có : $x = 0$ khi $x \geq -\frac{1}{2}$. Do $0 \geq -\frac{1}{2}$ nên $x = 0$ là nghiệm của phương trình và $-3x = 2$, $x = -\frac{2}{3}$ khi $x < -\frac{1}{2}$. Do $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ nên $x = -\frac{2}{3}$ là nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

b) Phương trình đã cho tương đương với :

$1 - 2y = 1 + y$ hoặc $1 - 2y = -1 - y$, tức là : $0 = 3y$ hoặc $2 = y$.

Do đó ta có $y_1 = 0$ hoặc $y_2 = 2$. Cả hai đều là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Điều kiện : $z \neq \pm 12$.

Từ $|z| - 12 = 0$ hay $|z| = 12$, do đó $z = \pm 12 \notin$ TXĐ. Vậy phương

trình đã cho vô nghiệm.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải phương trình :*

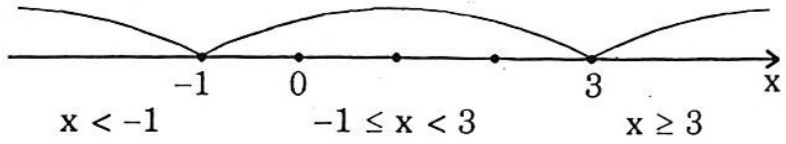
*d)* $|x + 1| + 2|x - 3| = 10$ *e)* $|y| = |y(y - 1)|$."

Ta lần lượt có :

d) Nghiệm của các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối là :

$x + 1 = 0$ hay $x = -1$ và $x - 3 = 0$ hay $x = 3$.

Do đó ta phải xét dấu của vế trái trong các khoảng sau :




– Nếu $x < -1$ thì $x + 1 < 0$ và $x - 3 < 0$ nên

$|x + 1| = -x - 1$ và $|x - 3| = 3 - x$.

Phương trình đã cho có dạng : $-x - 1 + 2(3 - x) = 10$ hay $-3x = 5$

Suy ra $x = -\frac{5}{3} < -1$. Vậy trong khoảng này nghiệm là $x = -\frac{5}{3}$.

– Nếu $-1 \le x < 3$ thì $x + 1 > 0$ và $x - 3 < 0$ nên

$|x + 1| = x + 1$ và $|x - 3| = 3 - x$.

Phương trình đã cho có dạng : $x + 1 + 2(3 - x) = 10$, từ đó $x = -3$, không thuộc khoảng $-1 \le x < 3$. Vậy trong khoảng này phương trình vô nghiệm.

– Nếu $x \ge 3$ thì $x + 1 > 0$ và $x - 3 > 0$ nên

$|x + 1| = x + 1$ và $|x - 3| = x - 3$.

Phương trình đã cho có dạng :

$x + 1 + 2(x - 3) = 10$ hay $3x - 5 = 10$

Suy ra $x = 5 > 3$. Vậy trong khoảng này nghiệm là 5.

Tóm lại, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 5$.

e) Phương trình $|y| = |y(y - 1)|$ tương đương với :

$y = y(y - 1)$ hoặc $y = -y(y - 1)$.

Do đó ta có : $y = y^2 - y$ hay $2y = y^2$; $y^2 - 2y = 0$ mà nghiệm là $y = 0$, $y = 2$; hoặc $y = -y^2 + y$ hay $y^2 = 0$ mà nghiệm là $y = 0$.

Tóm lại, phương trình đã cho có hai nghiệm là $y_1 = 0$, $y_2 = 2$.

**7.** a) Ta phải giải riêng hai bất phương trình :

$$\frac{x+3}{4} - \frac{x-3}{6} > -1 \quad (1) \quad \text{và} \quad \frac{x+3}{4} - \frac{x-3}{6} < 2 \quad (2)$$

Giải (1), ta có MC : 12, nên :

$$\frac{3(x+3) - 2(x-3)}{12} > -1 \text{ hay } 3x + 9 - 2x + 6 > -12, \text{ từ đó } x > -27.$$

Giải (2), ta có MC : 12, nên :

$$\frac{3(x+3)-2(x-3)}{12} < 2 \quad \text{hay} \quad 3x + 9 - 2x + 6 < 24, \text{ từ đó } x < 9.$$

Kết hợp hai nghiệm $x > -27$ và $x < 9$ ta được $-27 < x < 9$. Đó là nghiệm của bất đẳng thức kép đã cho.

b) MC : 12. Ta có : $2(1,5z^2 + z) - 3(2 - z)^2 \geq 20z - 24$

hay $3z^2 + 2z - 3(4 - 4z + z^2) \geq 20z - 24$

$3z^2 + 2z - 12 + 12z - 3z^2 \geq 20z - 24.$

Từ đó : $14z - 12 \geq 20z - 24$ hay $6z \leq 12$. Vậy $z \leq 2$.

- ***Lời bình :*** Ta giải thêm bài toán sau :

*"a) Tìm giá trị của t để giá trị biểu thức $\frac{t+1}{8} + 2$ nhỏ hơn giá trị biểu thức $\frac{1-3t}{4} - 1$.*

*b) Tìm giá trị của v để giá trị biểu thức $1 - \frac{3v-(1+v)}{9}$ lớn hơn giá trị biểu thức $\frac{v}{2} - \frac{6v-(10-7v)}{6}$."*

Cách giải như sau :

Thực chất, đây là giải hai bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a) Ta phải giải bất phương trình : $\frac{t+1}{8} + 2 < \frac{1-3t}{4} - 1$.

MC : 8. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$t + 1 + 16 < 2(1 - 3t) - 8$ hay $t + 17 < 2 - 6t - 8$.

Từ đó : $7t < -23$. Vậy $t < -\frac{23}{7}$.

b) Ta phải giải bất phương trình : $1 - \frac{3v-(1+v)}{9} > \frac{v}{2} - \frac{6v-(10-7v)}{6}$

Bất phương trình này có thể viết : $1 - \frac{2v-1}{9} > \frac{v}{2} - \frac{13v-10}{6}$

MC : 18. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$18 - 2(2v - 1) > 9v - 3(13v - 10)$

hay $18 - 4v + 2 > 9v - 39v + 30$.

Từ đó : $20 - 4v > -30v + 30$ hay $26v > 10$. Vậy $v > \frac{5}{13}$.

**8.** a) Ta có :

$$2x^2 - 6x + x^2 - 12x + 36 \geq 2(x^2 + 14x + 49) - 145 + x^2 + 10x + 25$$

hay $3x^2 - 18x + 36 \geq 3x^2 + 38x - 22$.

Từ đó : $-56x \geq -58$. Vậy $x \leq \frac{29}{28}$.

b) MC : $(3y - 1)^2(3y + 11)^2$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$-2(3y - 1)(3y + 11) < (3y + 11)^2 - 3(3y - 1)^2$$

hay $(-6y + 2)(3y + 11) < 9y^2 + 66y + 121 - 3(9y^2 - 6y + 1)$

$$-18y^2 - 60y + 22 < 9y^2 + 66y + 121 - 27y^2 + 18y - 3$$

$$-60y + 22 < 84y + 118.$$

Từ đó : $144y > -96$. Vậy $y > -\frac{2}{3}$.

c) Điều kiện : $z \neq 1$. MC : $(z - 1)(z^2 + z + 1) = z^3 - 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$4(z - 1) - (z^2 + z + 1) \leq 2z^2 - 5$$

hay $4z - 4 - z^2 - z - 1 \leq 2z^2 - 5$

$$3z^2 - 3z \geq 0 \text{ hay } 3z(z - 1) \geq 0$$

Nếu $z(z - 1) = 0$ thì $z = 0$ hoặc $z = 1$ (loại).

Nếu $z(z - 1) > 0$ thì $z > 0$ hoặc $z > 1$; $z < 0$ hoặc $z < 1$.

Kết hợp lại được $z < 0$ hoặc $z > 1$, phù hợp với điều kiện.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải bất phương trình :*

*d)* $|2x - 1| > 5$ *e)* $2|y - 1| + |y - 2| \geq 3$*."*

Ta lần lượt có :

d) Nếu $2x - 1 \geq 0$, tức là $x \geq \frac{1}{2}$ thì bất phương trình có dạng $2x - 1 > 5$, từ đó $x > 3$.

Từ $x \geq \frac{1}{2}$ và $x > 3$, suy ra $x > 3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

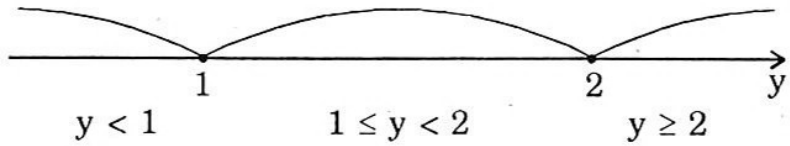
Nếu $2x - 1 < 0$, tức là $x < \frac{1}{2}$ thì bất phương trình có dạng $-(2x - 1) > 5$, hay $-2x + 1 > 5$, từ đó $x < -2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 3$ và $x < -2$.

e) Ta có : $|y - 1| = \begin{cases} y - 1 \text{ nếu } y \geq 1 \\ -(y - 1) \text{ nếu } y < 1; \end{cases}$

$|y - 2| = \begin{cases} y - 2 \text{ nếu } y \geq 2 \\ -(y - 2) \text{ nếu } y < 2. \end{cases}$

Nghiệm của các biểu thức trong giá trị tuyệt đối là y = 1 và y = 2. Do đó phải xét dấu của vế trái trong các khoảng sau :




Ta có : $2|y - 1| + |y - 2| = \begin{cases} -2(y - 1) - (y - 2) = -3y + 4, \text{ nếu } y < 1; \\ 2(y - 1) - (y - 2) = y, \text{ nếu } 1 \leq y < 2; \\ 2(y - 1) + (y - 2) = 3y - 4, \text{ nếu } y \geq 2. \end{cases}$

Nếu $y < 1$ thì $-3y + 4 \geq 3$, ta có $y \leq \frac{1}{3}$, vậy trong khoảng này nghiệm là $y \leq \frac{1}{3}$.

Nếu $1 \leq y < 2$ thì $y \geq 3$, bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $y \geq 2$ thì $3y - 4 \geq 3$, ta có $y \geq \frac{7}{3}$, vậy trong khoảng này nghiệm là $y \geq \frac{7}{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $y \leq \frac{1}{3}$ và $y \geq \frac{7}{3}$.

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### THÊM HAI PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC RA THỪA SỐ

**1. *Phương pháp đặt ẩn phụ***

**Ví dụ 1 :** Phân tích thành thừa số đa thức : $(m + m^2)^2 - 8(m + m^2) + 12$.

Đặt ẩn phụ $m + m^2 = p$, đa thức đã cho có dạng $p^2 - 8p + 12$ và phân tích được thành :

$$p^2 - 8p + 12 = p(p - 6) - 2(p - 6) = (p - 6)(p - 2)$$

Thay $p = m + m^2$ được : $(m^2 + m - 2)(m^2 + m - 6)$.

**Ví dụ 2 :** Phân tích thành thừa số đa thức : $(a^2 + a + 1)(a^2 + a + 2) - 12$.

Đặt ẩn phụ $a^2 + a + 1 = t$ ta có $a^2 + a + 2 = t + 1$. Đa thức đã cho có dạng $t(t + 1) - 12$, hay $t^2 + t - 12$ phân tích được thành :

$$t^2 + t - 12 = (t - 3)(t + 4).$$

Thay giá trị của t được :

$$(a^2 + a + 1 - 3)(a^2 + a + 1 + 4) = (a^2 + a - 2)(a^2 + a + 5)$$
$$= (a^2 + a + 5)(a - 1)(a + 2).$$

## 2. *Phương pháp hệ số bất định*

**Ví dụ 1 :** Phân tích đa thức $y^3 - 19y - 30$ thành hai thừa số bậc nhất dạng $y + m$ và bậc hai dạng $y^2 + ny + p$.

Ta phải có :

$$(y + m)(y^2 + ny + p) = y^3 + (m + n)y^2 + (mn + p)y + mp$$

hay $\quad y^3 - 19y - 30 = y^3 + (m + n)y^2 + (mn + p)y + mp$

Hai đa thức này đồng nhất bằng nhau nên các hệ số tương ứng bằng nhau. Suy ra :

$m + n = 0$ (vì không có số hạng chứa $y^2$)

$mn + p = -19$ (hệ số tương ứng của số hạng chứa y)

$mp = -30$ (hệ số tương ứng của số hạng tự do).

Do tích $mp = -30$ nên có thể chọn $m = 2$, $p = -15$. Từ đó $n = -2$.

Vậy ta có : $y^3 - 19y - 30 = (y + 2)(y^2 - 2y - 15)$.

**Ví dụ 2 :** Viết phân thức $\dfrac{x^2 + 5}{x^3 - 3x - 2}$ dưới dạng một tổng hai phân thức mà mẫu theo thứ tự bằng $x - 2$ và $(x + 1)^2$.

Ta phải tìm hai số m và n sao cho : $\dfrac{m}{x - 2} + \dfrac{n}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 5}{x^3 - 3x - 2}$.

Ta có thể viết :

$$\frac{m}{x - 2} + \frac{n}{(x + 1)^2} = \frac{m(x + 1)^2 + n(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{mx^2 + (2m + n)x + (m - 2n)}{x^3 - 3x - 2}$$

Như vậy : $\dfrac{x^2 + 5}{x^3 - 3x - 2} = \dfrac{mx^2 + (2m + n)x + (m - 2n)}{x^3 - 3x - 2}$

Hai phân thức này đồng nhất bằng nhau nên các hệ số tương ứng bằng nhau, suy ra :

$m = 1$ (hệ số tương ứng của số hạng chứa $x^2$)

$2m + n = 0$ (hệ số tương ứng của số hạng chứa x)

$m - 2n = 5$ (hệ số tương ứng của số hạng tự do).

Ta đã có $m = 1$, do đó tìm được ngay $n = -2$. Vậy ta có thể viết :

$$\frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x - 2} = \frac{1}{x - 2} + \frac{-2}{(x + 1)^2}.$$

Phương pháp này được gọi là *phương pháp hệ số bất định*.

# §6. BÍ QUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Phương trình bậc nhất hai ẩn ax + by = c***

a) Phương trình luôn luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm được biểu diễn bởi đường thẳng ax + by = c, kí hiệu (d).

b) Nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$ thì (d) là đồ thị hàm số bậc nhất $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Nếu $a \neq 0$, $b = 0$ thì $x = \frac{c}{a}$, (d) song song hoặc trùng với trục tung.

Nếu $a = 0$, $b \neq 0$ thì $y = \frac{c}{b}$, (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

***2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn***

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (*)$$

a) Minh họa hình học tập nghiệm.

Gọi (d) là đường thẳng ax + by = c, (d') là đường thẳng a'x + b'y = c'.

– Nếu (d) cắt (d') thì hệ (*) có một nghiệm duy nhất.

– Nếu (d) song song (d') thì hệ (*) vô nghiệm.

– Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (*) có vô số nghiệm.

b) Giải hệ bằng phương pháp thế.

– Biến đổi hệ đã cho thành một hệ mới trong đó có một phương trình một ẩn.

– Giải phương trình một ẩn này, rồi suy ra nghiệm của hệ.

c) Giải hệ bằng phương pháp cộng đại số.

– Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau.

– Áp dụng quy tắc cộng đại số để được một hệ mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

– Giải phương trình một ẩn này, rồi suy ra nghiệm của hệ.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình x + y = xy.

**2.** Tìm hai số nguyên dương z và t thỏa mãn phương trình $z^2 - t^2 = 105$.

**3.** Giải các phương trình bậc nhất hai ẩn sau :

a) $x + 2y = 2$ b) $0x - 5y = 5$ c) $9x + 0y = -27$.

Minh họa tập nghiệm của ba phương trình trên trong mặt phẳng tọa độ.

**4.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 8 & (1) \\ 5x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$

Hãy lập ba hệ tương đương với hệ đã cho bằng ba cách.

**5.** Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2} = 5 \\ 3(2x-5) - 4(3y+4) = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} t^2 + 4z^2 = 13 \\ 2z^2 - t^2 = -7. \end{cases}$

**6.** Giải hệ :

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{m+n} + \dfrac{y}{m-n} = 2m \\ x - y = 4mn \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + t = 2c^3 \\ \dfrac{z}{t} = \dfrac{c + d - \dfrac{cd}{c+d}}{c - d + \dfrac{cd}{c-d}}. \end{cases}$

**7.** Giải hệ :

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y} + \dfrac{4}{2x-3y} = 5 \\ \dfrac{15}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-3y} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{z+t}{zt} + \dfrac{zt}{z+t} = m + \dfrac{1}{m} \\ \dfrac{z-t}{zt} + \dfrac{zt}{z-t} = n + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$

**8.** Giải hệ chứa giá trị tuyệt đối :

a) $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| - y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z-t| = 1 \\ |z-1| + |t-2| = 3. \end{cases}$

**9.** Giải hệ ba ẩn :

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{t}{4} = \dfrac{u}{3} = \dfrac{v}{9} \\ 4t - 5u + 6v = 55. \end{cases}$

**10.** Giải hệ ba ẩn :

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} t = \dfrac{2v^2}{1+v^2} \\ u = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ v = \dfrac{2u^2}{1+u^2}. \end{cases}$

**11.** Giải hệ hai phương trình ba ẩn :

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 + z^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} t^2 + u^2 = v \\ t + u + v = m. \end{cases}$

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** Phương trình $x + y = xy$ có thể viết $(x - 1)(y - 1) = 1$ với x, y nguyên nên $x - 1$ và $y - 1$ cũng là những số nguyên. Rõ ràng tích của hai số nguyên bằng 1 khi cả hai số đó đều bằng 1 hoặc đều bằng –1, tức là

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{matrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ y_2 = 0. \end{matrix}$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tìm tất cả bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn phương trình $x + y + z = xyz$."*

Ta có cách giải sau :

Giả sử $x \le y \le z$. Ta thay ở vế trái của phương trình các ẩn x và y bằng z lớn hơn chúng và được $3z > xyz$ (nếu cả ba số bằng nhau thì ta có đẳng thức $3z = z^3$, nhưng đẳng thức không thể xảy ra với z nguyên dương).

Vì $z > 0$ nên chia cả hai vế của bất đẳng thức $3z > xyz$ cho z ta được $xy < 3$.

Chú ý rằng $0 < x \le y$ ta tìm được nghiệm là hai cặp số $(x_1 = 1, y_1 = 1)$ và $(x_2 = 1, y_2 = 2)$. Thay các nghiệm này vào phương trình đã cho, trong trường hợp thứ nhất ta có : $2 + z = z$ không có nghiệm nguyên, trong trường hợp thứ hai ta có : $3 + z = 2z$, từ đó $z = 3$. Như vậy ta tìm được một nghiệm thỏa mãn điều kiện $x \le y \le z$.

Bằng cách hoán vị vòng quanh ta tìm thêm tất cả các nghiệm khác.

Vậy ta được 6 bộ số nguyên sau đây :

| x | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| z | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

**2.** Phương trình đã cho có thể viết :

$$(z + t)(z - t) = 105 \quad \text{(với z, t nguyên dương).}$$

Suy ra $z - t > 0$ hay $z > t$, cũng thế $z - t < z + t$.

Ta phân tích số 105 thành hai thừa số trong đó thừa số nhỏ $z - t < 0$ (vì $z^2 - t^2$ phải nhỏ hơn 105). Thế thì $z - t$ chỉ có thể lấy những ước của 105 nhỏ hơn 10, đó là : 1, 3, 5 và 7.

Vậy ta có bốn hệ sau :

$$\begin{cases} z - t = 1 \\ z + t = 105 \end{cases} \quad \begin{cases} z - t = 3 \\ z + t = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} z - t = 5 \\ z + t = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} z - t = 7 \\ z + t = 15. \end{cases}$$

Giải ra tìm được bốn cặp số sau :

| z | 53 | 19 | 13 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| t | 52 | 16 | 8 | 4 |

• ***Lời bình :***

*"Tìm các nghiệm là số nguyên tố của phương trình $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$."*

Ta có thể viết : $x^2 = 2y^2 + 1$ chứng tỏ x phải là số lẻ, giả sử $x = 2k + 1$. Thay vào phương trình được :

$(2k + 1)^2 - 2y^2 - 1 = 0$, hay $4k^2 + 4k + 1 - 1 = 2y^2$, từ đó $y^2 = 2k(k + 1)$.

Thế thì $y^2$ phải là số chẵn, nên y cũng phải chẵn. Nhưng chỉ có số nguyên tố chẵn duy nhất là 2, vậy $y = 2$ và khi đó $x = 3$.

**3.** a) Chuyển x sang vế phải rồi chia cho 2 được :

$$2y = -x + 2; \quad y = -\frac{x}{2} + 1.$$

x có thể lấy giá trị thực tùy ý nên phương trình này có vô số nghiệm mà dạng tổng quát của nghiệm là $(x \in \mathbb{R}, y = -\frac{x}{2} + 1)$.

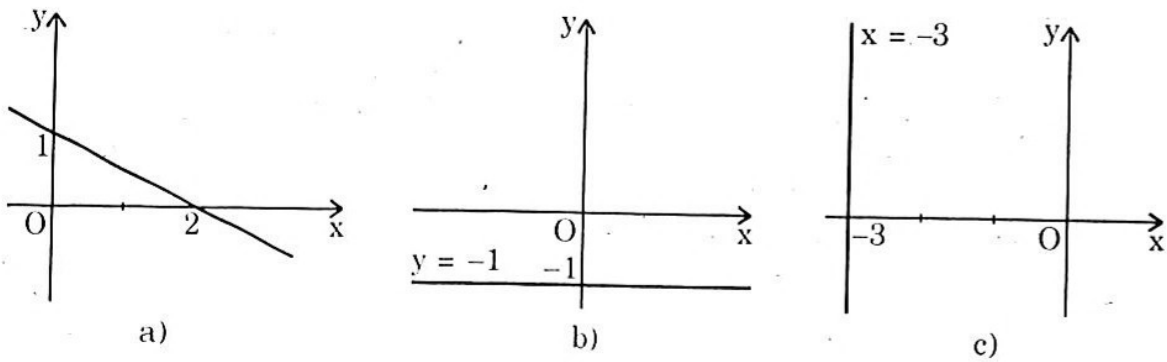
Trên mặt phẳng tọa độ, tập nghiệm là đường thẳng $x + 2y = 2$ (hình 2a).

b) Chia cả hai vế cho (–5) được $0x + y = -1$. Phương trình này có vô số nghiệm mà dạng tổng quát là $(x \in \mathbb{R}, y = -1)$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập nghiệm là đường thẳng $y = -1$ song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng –1 (hình 2b).

c) Chia hai vế cho 9 được $x + 0y = -3$. Phương trình này có vô số nghiệm mà dạng tổng quát là $(x = -3, y \in \mathbb{R})$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập nghiệm là đường thẳng $x = -3$ song song với trục Oy và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng –3 (hình 2c).




H.2

• ***Lời bình :***

*"Viết nghiệm tổng quát của các phương trình sau và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của chúng :*

*d) $3x - 3y = 7$* *e) $4x - y = 0$."*

Trước tiên ta viết nghiệm tổng quát của chúng. Ta có :

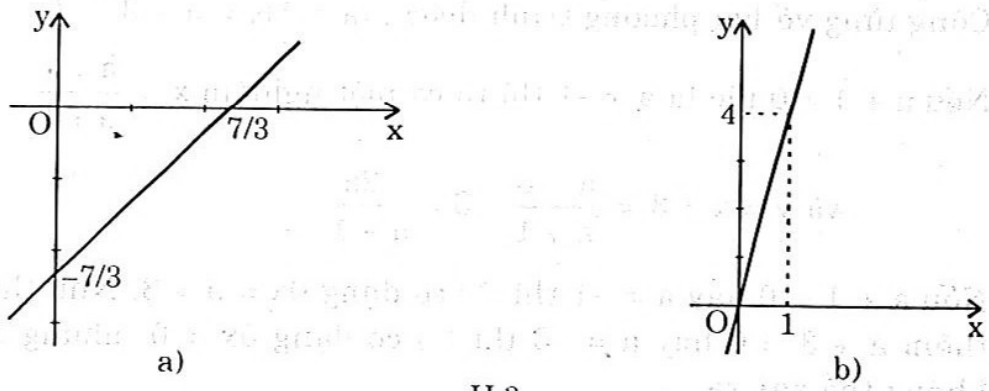
d) $3y = 3x - 7$ hay $y = x - \frac{7}{3}$.

Nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - \dfrac{7}{3}. \end{cases}$

Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm như ở hình 3a.

e) $y = 4x$. Nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 4x. \end{cases}$

Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm như ở hình 3b.




H.3

**4.** Trước tiên hãy lưu ý rằng : hai hệ phương trình tương đương là hai hệ có cùng tập nghiệm.

– *Cách 1.* Nhân hai vế của một phương trình của hệ với một số $k \neq 0$.

Ở đây ta nhân hai vế của (1) với 5 chẳng hạn được $5x + 5y = 40$.

Ta được hệ tương đương : $\begin{cases} 5x + 5y = 40 & (3) \\ 5x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$

– *Cách 2.* Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ để được một phương trình mới.

Ở đây ta cộng từng vế (1) với (2) được phương trình mới $6x - 3y = 8$ (4)

Ta có hệ tương đương sau : $\begin{cases} x + y = 8 & (1) \\ 6x - 3y = 8 & (4) \end{cases}$

– *Cách 3.* Từ một phương trình của hệ biểu thị một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai của hệ để được một phương trình mới một ẩn.

Ở đây từ (1) ta biểu thị x theo y được $x = 8 - y$ (1') rồi thế vào (2) được phương trình mới một ẩn là y sau : $5(8 - y) - 4y = 0$, hay $40 - 9y = 0$ (5)

Ta được hệ tương đương sau : $\begin{cases} x = 8 - y & (1') \\ 40 - 9y = 0 & (5). \end{cases}$

• ***Lời bình :*** *"Tìm giá trị của a để hệ* $\begin{cases} x - y = 3 \\ ax + y = a \end{cases}$

*a) có nghiệm là $x = 2$, $y = -1$* *b) có một nghiệm*

*c) có vô số nghiệm* *d) vô nghiệm."*

Bài toán này có tính chất tổng hợp đề cập đến tất cả trường hợp có và không có nghiệm của một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

a) Thay $x = 2$, $y = -1$ vào hệ đã cho được : $\begin{cases} 2 - (-1) = 3 \\ 2a - 1 = a. \end{cases}$

Từ đó ta có ngay $a = 1$.

(Thử lại thấy rằng hệ $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ có một nghiệm là $x = 2$, $y = -1$).

b) Cộng từng vế hai phương trình được : $(a + 1)x = a + 3$ (*)

Nếu $a + 1 \neq 0$ tức là $a \neq -1$ thì ta có một nghiệm $x = \dfrac{a+3}{a+1}$

và $y = x - 3 = \dfrac{a+3}{a+1} - 3 = \dfrac{-2a}{a+1}$.

c) Nếu $a + 1 = 0$ hay $a = -1$ thì (*) có dạng $0x = a + 3$. Như thế nếu có thêm $a + 3 = 0$ hay $a = -3$ thì (*) có dạng $0x = 0$, nhưng điều này không thể xảy ra.

d) Nếu $a + 1 = 0$ và $a + 3 = -1 + 3 \neq 0$ thì $0x \neq 0$, phương trình này vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

Tóm lại : Với $a \neq -1$ hệ có một nghiệm, với $a = -1$ hệ vô nghiệm và không có giá trị nào của a để hệ có vô số nghiệm.

**5.** a) Điều kiện $y + 2 \neq 0$ hay $y \neq -2$. Hệ đã cho có thể viết :

$$\begin{cases} x + 1 = 5y + 10 \\ 6x - 15 - 12y - 16 = 5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x - 5y = 9 \\ 6x - 12y = 36. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với (–6) được hệ :

$$\begin{cases} -6x + 30y = -54 \\ 6x - 12y = 36. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình được :

$18y = -18$ hay $y = -1$, thỏa mãn điều kiện $y \neq -2$.

Thay vào $x - 5y = 9$ được $x = 9 + 5y = 9 - 5 = 4$.

Vậy nghiệm của hệ là : $x = 4$, $y = -1$.

b) Đặt $u = z^2 \geq 0$, $v = t^2 \geq 0$. Hệ đã cho có thể viết : $\begin{cases} v + 4u = 13 \\ 2u - v = -7 \end{cases}$

Từ đó $6u = 6$ hay $u = 1$. Thay vào phương trình thứ nhất chẳng hạn được $v + 4 = 13$, $v = 9$.

Như vậy $z^2 = 1$, suy ra $z = \pm 1$, $t^2 = 9$, suy ra $t = \pm 3$.

Vậy nghiệm của hệ là : $(z, t) = (1; 3), (-1; -3), (1; -3)$ và $(-1; 3)$.

• ***Lời bình :***

*"Nếu là hệ* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$ *thì cách giải như thế nào ?"*

Cách giải sau đây là hay nhất :

Biến đổi phương trình thứ nhất thành $x^2 + y^2 - 2xy = 4$ hay $(x - y)^2 = 4$, từ đó : $x - y = 2$ hoặc $x - y = -2$. Ta được hai hệ :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Giải ra có ngay nghiệm của hệ đã cho là : $(x, y) = (4; 2)$ hoặc $(2; 4)$.

**6.** a) Điều kiện $m \neq \pm n$. Từ phương trình thứ hai ta có : $x = y + 4mn$ (*)

Thay giá trị này của x vào phương trình thứ nhất được :

$$\frac{y + 4mn}{m + n} + \frac{y}{m - n} = 2m$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ($MC = (m + n)(m - n) = m^2 - n^2$) được :

$$(y + 4mn)(m - n) + y(m + n) = 2m(m^2 - n^2)$$

hay $my + 4m^2n - ny - 4mn^2 + my + ny = 2m(m^2 - n^2)$

$$2my + 4mn(m - n) = 2m(m^2 - n^2)$$

$$y + 2n(m - n) = m^2 - n^2$$

$$y = m^2 - n^2 - 2mn + 2n^2 = (m - n)^2.$$

Thay giá trị của y vào (*) được : $x = (m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2$.

Vậy nghiệm của hệ là :

$$x = (m + n)^2; \quad y = (m - n)^2, \quad \text{với } m \neq \pm n,\ m \neq 0.$$

b) Điều kiện : $c \neq \pm d$. Phương trình thứ hai có thể viết :

$$\frac{z}{t} = \frac{(c + d)^2 - cd}{c + d} : \frac{(c - d)^2 + cd}{c - d} = \frac{c^2 + d^2 + 2cd - cd}{c + d} : \frac{c^2 + d^2 - 2cd + cd}{c - d}$$

$$= \frac{(c^2 + d^2 + cd)(c - d)}{(c^2 + d^2 - cd)(c + d)} = \frac{c^3 - d^3}{c^3 + d^3}.$$

Vậy ta phải giải hệ sau : $\begin{cases} z + t = 2c^3 \\ \dfrac{z}{t} = \dfrac{c^3 - d^3}{c^3 + d^3}. \end{cases}$

Phương trình thứ hai có thể viết :

$$\frac{z + t}{t} = \frac{c^3 - d^3 + c^3 + d^3}{c^3 + d^3} \quad \text{hay} \quad \frac{2c^3}{t} = \frac{2c^3}{c^3 + d^3}.$$

Từ đó có ngay : $z = c^3 - d^3$; $t = c^3 + d^3$.

• ***Lời bình :*** *"Tìm giá trị của k sao cho hệ* $\begin{cases} kx + y = k^2 & (1) \\ x + ky = 1 & (2) \end{cases}$

*vô nghiệm, có vô số nghiệm."*

Nhân (2) với k được $kx + k^2y = k$, rồi trừ đi (1) được : $(k^2 - 1)y = k - k^2$.

Từ đó ta được nghiệm là : $y = \dfrac{k - k^2}{k^2 - 1}$, $x = \dfrac{k^3 - 1}{k^2 - 1}$.

Nếu $k + 1 \neq 0$ và $k - 1 \neq 0$, tức là $k \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{k^2 + k + 1}{k + 1}, \quad y = \frac{-k}{k + 1}.$$

Nếu $k = \pm 1$ thì với $k = -1$ ta được hệ : $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Còn với $k = 1$ ta được hệ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ có vô số nghiệm (x tùy ý, $y = 1 - x$).

**7.** Ta phải dùng ẩn phụ để giải.

a) Đặt $2x + y = u$, $2x - 3y = v$ (*). Hệ đã cho có thể viết :

$$\begin{cases} \dfrac{5}{u} + \dfrac{4}{v} = 5 \\ \dfrac{15}{u} + \dfrac{2}{v} = 5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{15}{u} + \dfrac{12}{v} = 15 & (1) \\ \dfrac{15}{u} + \dfrac{2}{v} = 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ đi (2) từng vế được :

$$\frac{12}{v} - \frac{2}{v} = 10 \quad \text{hay} \quad \frac{10}{v} = 10, \text{ suy ra } v = 1.$$

Thay vào (2) được : $\dfrac{15}{u} + 2 = 5$ hay $\dfrac{15}{u} = 3$, suy ra $u = 5$.

Thay vào (*) ta có hệ : $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$ Giải ra được ngay $y = 1$, $x = 2$.

b) Đặt $\dfrac{z + t}{zt} = u$, $\dfrac{z - t}{zt} = v$. Hệ đã cho có thể viết : $\begin{cases} u + \dfrac{1}{u} = m + \dfrac{1}{m} \\ v + \dfrac{1}{v} = n + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$

Giải hệ này tìm được : $u_1 = m$, $v_1 = n$ và $u_2 = \dfrac{1}{m}$, $v_2 = \dfrac{1}{n}$.

Vậy hệ đã cho trở thành : $\begin{cases} \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{z} = u \\ \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{z} = v \end{cases}$ hay $\begin{cases} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}(u - v) \\ \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{2}(u + v) \end{cases}$ (*)

Thay các giá trị của $u_1$, $v_1$ và của $u_2$, $v_2$ vào vế phải của hệ (*) rồi giải sẽ được :

$$z_1 = \frac{2}{m-n},\ t_1 = \frac{2}{m+n} \quad \text{và} \quad z_2 = \frac{2mn}{n-m},\ t_2 = \frac{2mn}{m+n} \text{ với } m \neq \pm n.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các hệ sau :*

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{3}{8} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2}{z-t} + \dfrac{6}{z+t} = 1,1 \\ \dfrac{4}{z-t} - \dfrac{9}{z+t} = 0,1." \end{cases}$

c) Đặt $\dfrac{1}{x+y} = u$, $\dfrac{1}{x-y} = v$ (điều kiện $x \neq \pm y$) ta được hệ sau :

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{5}{8} \\ u - v = \dfrac{3}{8}. \end{cases} \quad \text{Giải ra được } u = \frac{1}{2},\ v = \frac{1}{8}.$$

Như vậy ta có :

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{2} \text{ hay } x + y = 2 \quad \text{và} \quad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{8} \text{ hay } x - y = 8.$$

Biết tổng $x + y$ và hiệu $x - y$ ta có ngay $x = 5$, $y = -3$.

d) Đặt $\dfrac{1}{z+t} = u$, $\dfrac{1}{z-t} = v$ (điều kiện $z \neq \pm t$) ta được hệ sau :

$$\begin{cases} 2v + 6u = 1,1 \\ 4v - 9u = 0,1 \end{cases} \quad \text{Giải ra được } u = \frac{1}{10},\ v = \frac{1}{4}.$$

Như vậy ta có :

$$\frac{1}{z+t} = \frac{1}{10} \text{ hay } z + t = 10 \quad \text{và} \quad \frac{1}{z-t} = \frac{1}{4} \text{ hay } z - t = 4.$$

Từ đó ta có ngay $z = 7$, $t = 3$.

**8.** a) Phương trình thứ hai có thể viết : $y - 5 = |x - 1| \geq 0$, do đó $y \geq 5$.

Vì thế phương trình thứ nhất có thể viết : $y - 5 = 1 - |x - 1|$.

Từ đó $y = \dfrac{11}{2}$.

Từ phương trình thứ hai ta có $|x - 1| = \dfrac{1}{2}$ hay $x - 1 = \pm\dfrac{1}{2}$, do đó

$x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_1 = \dfrac{11}{2}$; $x_2 = \dfrac{3}{2}$, $y_2 = \dfrac{11}{2}$.

b) Từ phương trình thứ nhất ta có $z - t = \pm 1$.

Từ phương trình thứ hai ta có : $|z - 1| \le 3$ và $|t - 2| \le 3$,

từ đó $-2 \le z \le 4$ và $-1 \le t \le 5$.

– Nếu $-2 \le z \le 1$ thì :

Với $-1 \le t \le 2$ ta có : $1 - z + 2 - t = 3$, hay $z + t = 0$

Với $2 \le t \le 5$ ta có : $1 - z + t - 2 = 3$, hay $t - z = 4$.

– Nếu $1 \le z \le 4$ thì :

Với $-1 \le t \le 2$ ta có : $z - 1 + 2 - t = 3$, hay $z - t = 2$

Với $2 \le t \le 5$ ta có : $z - 1 + t - 2 = 3$, hay $z + t = 6$.

Vậy ta phải giải 8 hệ phương trình sau đây :

1. $\begin{cases} z - t = 1 \\ z + t = 0 \end{cases}$ có nghiệm $z = \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$ (thuộc khoảng xác định).

2. $\begin{cases} z - t = 1 \\ t - z = 4 \end{cases}$ vô nghiệm.

3. $\begin{cases} z - t = 1 \\ z - t = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.

4. $\begin{cases} z - t = 1 \\ z + t = 6 \end{cases}$ có nghiệm $z = \frac{7}{2}$, $t = \frac{5}{2}$ (thuộc khoảng xác định).

5. $\begin{cases} z - t = -1 \\ z + t = 0 \end{cases}$ có nghiệm $z = -\frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{2}$ (thuộc khoảng xác định).

6. $\begin{cases} z - t = -1 \\ t - z = 4 \end{cases}$ vô nghiệm.

7. $\begin{cases} z - t = -1 \\ z - t = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.

8. $\begin{cases} z - t = -1 \\ z + t = 6 \end{cases}$ có nghiệm $z = \frac{5}{2}$, $t = \frac{7}{2}$ (thuộc khoảng xác định).

Tóm lại ta có bốn nghiệm sau :

$$(z, t) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các hệ chứa giá trị tuyệt đối sau :*

*c)* $\begin{cases} y - 2|x| = -3 \\ |y| + x = 3 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} z = |t| + 1 \\ 2z = 5 + t. \end{cases}$*"*

Cách giải như sau :

c) Nếu $x \ge 0$, $y \ge 0$ thì được hệ $\begin{cases} y - 2x = -3 \\ y + x = 3 \end{cases}$, mà nghiệm là $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

Nếu $x \geq 0$, $y < 0$ thì : $\begin{cases} y - 2x = -3 \\ -y + x = 3 \end{cases}$, mà nghiệm là $x_2 = 0$, $y_2 = -3$.

Nếu $x < 0$, $y \geq 0$ thì : $\begin{cases} y + 2x = -3 \\ y + x = 3 \end{cases}$, mà nghiệm là $x_3 = -6$, $y_3 = 9$.

Nếu $x < 0$, $y < 0$ thì : $\begin{cases} y + 2x = -3 \\ -y + x = 3 \end{cases}$, mà nghiệm là $x_4 = 0$, $y_4 = -3$.

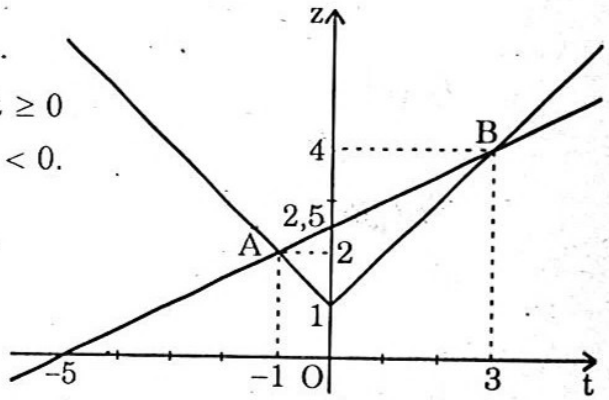
Bốn cặp giá trị trên đều thỏa mãn các điều kiện đã nêu và là bốn nghiệm của hệ đã cho.

d) Trên cùng một hệ trục tọa độ Ozt ta vẽ đồ thị hai hàm số $z = |t| + 1$ và $2z - t - 5 = 0$.

Trước tiên vẽ đồ thị $z = |t| + 1$..

Ta có $z = |t| + 1 = \begin{cases} t + 1 \text{ nếu } t \geq 0 \\ -t + 1 \text{ nếu } t < 0. \end{cases}$

Do đó ta vẽ đường thẳng $z = t + 1$ và chọn tia bên phải Oz ($t \geq 0$), rồi vẽ đường thẳng $z = -t + 1$ và chọn tia bên trái Oz ($t < 0$). Sau đó vẽ đồ thị của $2z = 5 + t$ (hình 4).



H.4

Giao điểm hai đồ thị là A($t = -1$; $z = 2$) và B($t = 3$; $z = 4$). Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là : $(t, z) = (-1; 2)$ và $(3; 4)$.

**9.** a) Lưu ý nếu cộng từng vế cả ba phương trình thì ở vế trái sẽ được $4x + 4y + 4z$, từ đó mà có được $x + y + z$ để kết hợp với phương trình thứ nhất mà tìm được nghiệm x. Thật vậy, cộng từng vế cả ba phương trình ta có : $4(x + y + z) = 7$, từ đó $x + y + z = \frac{7}{4}$.

Do đó ta được hệ hai phương trình 2 ẩn sau : $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y = -1. \end{cases}$

Giải ra được $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$.

Thay x và y vào phương trình thứ hai $x + 2y + z = 2$ sẽ được $z = \frac{9}{4}$.

b) Đặt $\frac{t}{4} = \frac{u}{3} = \frac{v}{9} = a$, ta có $t = 4a$, $u = 3a$, $v = 9a$.

Thay các giá trị này vào phương trình thứ hai được :

$$16a - 15a + 54a = 55 \quad \text{hay} \quad 55a = 55, \text{ từ đó } a = 1.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $t = 4$, $u = 3$, $v = 9$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các hệ sau :*

c) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} t + u + v = 2 \\ 2tu - v^2 = 4." \end{cases}$

Ta có cách giải sau :

c) Cộng từng vế ba phương trình được :

$$k(x + y + z) + 2(x + y + z) = 1 + k + k^2$$

hay $(k + 2)(x + y + z) = 1 + k + k^2$ (*)

Nếu $k \neq -2$ thì $x + y + z = \dfrac{1 + k + k^2}{k + 2}$.

Giải hệ $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + y + z = \dfrac{1 + k + k^2}{k + 2} \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình :

$$kx - x = 1 - \frac{1 + k + k^2}{k + 2},$$

hay $(k - 1)x = \dfrac{k + 2 - 1 - k - k^2}{k + 2} = \dfrac{1 - k^2}{k + 2}$,

với $k \neq 1$ ta có : $x = -\dfrac{1 + k}{k + 2}$

Tương tự, ta tìm được $y = \dfrac{1}{k + 2}$, $z = \dfrac{(k + 1)^2}{k + 2}$.

Nếu $k = -2$, hệ vô nghiệm.

Nếu $k = 1$, hệ có vô số nghiệm vì mọi bộ ba số thỏa mãn $x + y + z = 1$ đều là nghiệm.

d) Khử v từ hệ đã cho ta có : $2tu - (2 - t - u)^2 = 4$

hay $t^2 - 4t + 4 + u^2 - 4u + 4 = 0$

tức là $(t - 2)^2 + (u - 2)^2 = 0$, mà nghiệm là $t = 2$, $u = 2$.

Thay giá trị của t và u vào phương trình thứ nhất ta tìm được $v = -2$.

Vậy hệ có nghiệm là $t = 2$, $u = 2$, $v = -2$.

**10.** a) Điều kiện : $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Phương trình thứ hai có thể viết : $\dfrac{xy + yz + zx}{xyz} = 1$,

mà $xy + yz + 2z = 27$, nên $xyz = 27$.

Nhân phương trình thứ ba với z rồi kết hợp với $xyz = 27$ được :

$$27 + (x + y).z^2 = 27z$$

Thay $x + y = 9 - z$ từ phương trình thứ nhất được :

$$z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \quad \text{hay} \quad (z - 3)^3 = 0.$$

Do đó $z = 3$. Từ đó tìm được $x = 3$ và $y = 3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

b) Để giải nhanh hệ này ta dựa vào bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (suy ra từ bất đẳng thức $(a \pm b)^2 \geq 0$). Thật vậy, ta có $\dfrac{2v}{1 + v^2} \leq 1$, từ phương trình thứ nhất suy ra $t \leq v$ (1).

Tương tự, từ phương trình thứ hai và thứ ba ta có :

$$u \leq t \quad (2) \quad \text{và} \quad v \leq u \quad (3).$$

Hệ các bất đẳng thức (1), (2), (3) chỉ thỏa mãn khi $t = u = v$ (4)

Thay $v = t$ vào phương trình thứ nhất được $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Từ (4) cuối cùng ta chỉ có hai nghiệm của hệ đã cho là :

$$(t, u, v) = (0; 0; 0) \text{ hoặc } (1; 1; 1).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các hệ sau :*

c) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{tuv}{t + u} = 2 \\ \dfrac{tuv}{u + v} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{tuv}{v + t} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ta có :

c) Ta lập phương trình thứ nhất : $[(x + y) - z]^3 = 8$, hay

$$x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - 6xyz = 8 \quad (*)$$

Do $x^3 + y^3 + z^3 = 8$ nên (*) trở thành : $(x + y)(y - z)(x - z) = 0$.

Nếu $x + y = 0$ thì từ phương trình thứ nhất có $z = -2$. Khi đó $y = -x$, suy ra $x = \pm 1$.

Nếu $y - z = 0$ thì từ phương trình thứ nhất có $x = 2$, từ phương trình thứ hai lại có $y = \pm 1$.

Nếu $x - z = 0$ thì ta có $y = 2$, $x = z = \pm 1$.

Vậy nghiệm của hệ theo bảng sau :

| x | ±1 | 2 | ±1 |
|---|---|---|---|
| y | ∓1 | ±1 | 2 |
| z | −2 | ±1 | ±1 |

**11.** a) Rút x từ phương trình thứ nhất ta có $x = 2 - y$. Thay vào phương trình thứ hai được :

$2y - y^2 - z^2 - 1 = 0$ hay $z^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$, tức là $z^2 + (y - 1)^2 = 0$

Mỗi số hạng của phương trình cuối này đều không âm, vậy nó phải bằng 0, từ đó ta có ngay z = 0, y = 1. Thay vào x = 2 – y được x = 1.

Vậy nghiệm của hệ là x = 1, y = 1, z = 0.

b) Lưu ý rằng giá trị của v được xác định duy nhất từ phương trình thứ nhất $v = t^2 + u^2$ (1)

Thay nó vào phương trình thứ hai được $t^2 + t + u^2 + u = m$. Phương trình này tương đương với phương trình :

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = m + \frac{1}{2} \quad (2)$$

Nếu $m + \frac{1}{2} < 0$ thì (2) vô nghiệm.

Nếu $m + \frac{1}{2} = 0$ thì (2) trở thành : $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ và có nghiệm duy nhất : $t = -\frac{1}{2}$, $u = -\frac{1}{2}$. Từ đó tìm được $v = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $t = -\frac{1}{2}$, $u = -\frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$.

Nếu $m + \frac{1}{2} > 0$ thì nghiệm của (2) là tập hợp tất cả các giá trị t, u thỏa mãn $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = m + \frac{1}{2}$ và $v = t^2 + u^2$.

- ***Lời bình :*** Sau đây ta thử *"Giải một hệ phương trình gồm 12 phương trình 12 ẩn :*

$$\begin{cases} p_1 + 12p_2 = 15 \\ p_1 - 12p_2 + 11p_3 = 2 \\ p_1 - 11p_3 + 10p_4 = 2 \\ p_1 - 10p_4 + 9p_5 = 2 \\ p_1 - 9p_5 + 8p_6 = 2 \\ p_1 - 8p_6 + 7p_7 = 2 \\ p_1 - 7p_7 + 6p_8 = 2 \\ p_1 - 6p_8 + 5p_9 = 2 \\ p_1 - 5p_9 + 4p_{10} = 2 \\ p_1 - 4p_{10} + 3p_{11} = 2 \\ p_1 - 3p_{11} + 2p_{12} = 2 \\ p_1 - 2p_{12} = 2." \end{cases}$$

Nhìn qua thấy có vẻ phức tạp, nhưng nếu để ý rằng tất cả số hạng đầu tiên của vế trái của cả 12 phương trình đều là $p_1$ nên nếu ta cộng từng vế cả 12 phương trình sẽ tìm ngay được giá trị của $p_1$. Từ đó tiếp tục tìm $p_2, p_3, \ldots, p_{11}, p_{12}$.

Thật vậy, cộng từng vế 12 phương trình ta có ngay :

$$12p_1 = 37, \quad \text{do đó } p_1 = \frac{37}{12}.$$

Thay giá trị của $p_1$ vào phương trình thứ nhất được $p_2 = \frac{143}{144}$. Tiếp tục thay giá trị của $p_1$ và $p_2$ vào phương trình thứ hai được $p_3 = \frac{65}{66}$, v.v...

Cuối cùng nghiệm của hệ theo thứ tự là :

$$p_1 = \frac{37}{12}, \quad p_2 = \frac{143}{144}, \quad p_3 = \frac{65}{66}, \quad p_4 = \frac{39}{40},$$

$$p_5 = \frac{26}{27}, \quad p_6 = \frac{9}{96}, \quad p_7 = \frac{13}{14}, \quad p_8 = \frac{65}{72},$$

$$p_9 = \frac{13}{15}, \quad p_{10} = \frac{13}{16}, \quad p_{11} = \frac{13}{18} \text{ và } p_{12} = \frac{13}{24}.$$

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### QUY TẮC CRA-ME

**1.** Xét hệ phương trình bậc nhất hai ẩn : $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

Tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các phương trình (1) và (2). Nhân hai vế của (1) với b' và của (2) với –b, rồi cộng từng vế được :

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b \qquad (3)$$

Nhân hai vế của (1) với –a' và của (2) với a, rồi cộng từng vế được :

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c \qquad (4)$$

Trong trường hợp tổng quát nếu $ab' - a'b \neq 0$ thì từ (3) và (4) ta được nghiệm tổng quát của hệ là :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}; \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Người ta thường kí hiệu $D = ab' - a'b$ và gọi D là *định thức* của hệ phương trình

$$D = ab' - b'a = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Với cách kí hiệu này ta cũng có :

$$D_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix};$$

$$D_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất cho bởi công thức :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Các công thức này gọi là *công thức Cra-me* (tên nhà toán học Thụy Sĩ 1704 – 1752).

**2. Ví dụ :** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 7y = 55 \\ 5x + 4y = 18. \end{cases}$

Ta tính định thức D :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 35 = 47 \neq 0.$$

Hệ có nghiệm duy nhất cho bởi công thức Cra-me :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 55 & -7 \\ 18 & 4 \end{vmatrix}}{D} = \frac{55.4 - (-7.18)}{47} = \frac{346}{47}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 55 \\ 5 & 18 \end{vmatrix}}{D} = \frac{3.18 - 5.55}{47} = -\frac{221}{47}.$$

Nhà toán học Crame còn tìm được công thức tổng quát để giải các hệ n phương trình bậc nhất n ẩn.

# §7. CĂN BẬC HAI CÓ GÌ LẠ ?

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Căn bậc hai***

a) Với số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a. (Số 0 được gọi là căn bậc hai số học của 0).

b) Với hai số a và b không âm ta có : $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

c) Với A là một biểu thức đại số thì $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A ($\sqrt{A}$ xác định hay có nghĩa khi A không âm).

d) Với mọi số a ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.

Một cách tổng quát, với A là một biểu thức thì :

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

***2. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương***

a) Với hai số a, b không âm ta có : $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

Một cách tổng quát với hai biểu thức A và B không âm ta có :

$$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$$

(Đặc biệt với A không âm thì $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$).

b) Với số a không âm và số b dương ta có : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Một cách tổng quát, với biểu thức A không âm và B dương ta có :

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

***3. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai***

a) Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{A^2.B} = |A|.\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} \text{ nếu A và B đều } \geq 0 \\ -A\sqrt{B} \text{ nếu } A < 0 \text{ và } B \geq 0. \end{cases}$$

b) Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} \text{ nếu A và B đều } \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} \text{ nếu } A < 0 \text{ và } B \geq 0. \end{cases}$$

c) Khử mẫu của biểu thức lấy căn

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} \text{ (với } A.B \geq 0,\ B \neq 0).$$

d) Trục căn thức ở mẫu

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \ (B > 0)$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \text{ (với } A \geq 0,\ A \neq B^2)$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \text{ (với A, B không âm, } A \neq B).$$

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Tính :

a) $(5\sqrt{7} + \sqrt{3})(5\sqrt{7} - \sqrt{3})$

b) $(2 + \sqrt{5} + \sqrt{11})(2 + \sqrt{5} - \sqrt{11})$

c) $\left(\sqrt{\frac{16}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{3}\right).\sqrt{3}$

d) $\sqrt{\frac{144}{13}} \cdot \sqrt{\frac{39}{121}}$.

**2.** Phân tích thành nhân tử :

a) $m - n - \sqrt{m} - \sqrt{n}$

b) $8 + \sqrt{p^3}$

c) $m + \sqrt{m} - n - \sqrt{n}$ (với $m > 0$, $n > 0$).

**3.** Cộng và trừ các căn bậc hai sau :

a) $20\sqrt{245} - \sqrt{5} + \sqrt{125} - 2\frac{1}{2}\sqrt{180}$

b) $6m\sqrt{63mn^3} - 3\sqrt{112m^3n^3} + 2mn\sqrt{343mn} - 5n\sqrt{28m^3n}$

c) $3\sqrt{8p} - \sqrt{18p} - 5\sqrt{\frac{1}{2}p} + \sqrt{4\frac{1}{2}p} + \sqrt{50p} - \sqrt{32p} + \sqrt{72p}$.

**4.** Nhân và chia các căn bậc hai sau :

a) $\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{8}\right).2\sqrt{6}$

b) $\left(2\sqrt{cd} + 3\sqrt{\frac{d}{c}} - 4\sqrt{\frac{c}{d}} + 5\sqrt{\frac{1}{cd}}\right).\sqrt{cd}$

c) $(\sqrt{75} + \sqrt{243} - \sqrt{48}) : \sqrt{3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}}\right) : \frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$.

**5.** Chứng minh rằng :

a) $\left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right):(x-y)+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=1$

b) $\left(\dfrac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}-\dfrac{1-t}{\sqrt{1-t^2}-1+t}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{t^2}}-1-\dfrac{1}{t}\right)=-1$ (nếu $0<t<1$).

**6.** Giải phương trình :

a) $\sqrt{25x-275}-\sqrt{9x-99}-\sqrt{x-11}=1$

b) $\sqrt{25+25y}+\sqrt{49+49y}-\sqrt{81y+81}=6+\sqrt{y+1}$.

**7.** a) Rút gọn biểu thức :

$$M=\left(\frac{\sqrt{m}-1}{3\sqrt{m}-1}-\frac{1}{3\sqrt{m}+1}+\frac{8\sqrt{m}}{9m-1}\right):\left(1-\frac{3\sqrt{m}-2}{3\sqrt{m}+1}\right),$$

rồi tìm giá trị của m để $M=1{,}2$.

b) Rút gọn biểu thức :

$$P=\left(\frac{p-3\sqrt{p}}{p-9}-1\right):\left[\frac{9-p}{(\sqrt{p}+3)(\sqrt{p}-2)}+\frac{\sqrt{p}-3}{\sqrt{p}-2}-\frac{\sqrt{p}+2}{\sqrt{p}+3}\right],$$

rồi tìm giá trị của p để hiệu $P-1<0$.

**8.** a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}-3}\cdot\left(\dfrac{2+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}-\dfrac{2-\sqrt{a}}{2+\sqrt{a}}-\dfrac{4a}{a-4}\right)$,

rồi tìm giá trị của a để $|A|=1$.

b) Rút gọn biểu thức :

$$B=\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+2}+\frac{8(\sqrt{b}+1)}{b+2\sqrt{b}}-\frac{b+3\sqrt{b}+2}{b+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{b+\sqrt{b}+3}{b+2\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right),$$

rồi tìm giá trị của b để $\sqrt{B}>B$.

**9.** Chứng minh các đẳng thức :

a) $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}=-1$ b) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$ c) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{6}$.

**10.** Trục căn ở mẫu :

a) $\dfrac{20}{8\sqrt{5}-10\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$

c) $\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{m^2-n^2}-\sqrt{m^2+n^2}}$ d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

**11.** Tính giá trị biểu thức :

$$A = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{khi } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \text{ với } a > 0, b > 0.$$

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) $(5\sqrt{7} + \sqrt{3})(5\sqrt{7} - \sqrt{3})$ có dạng $(a + b)(a - b)$ nên ta có ngay :

$$(5\sqrt{7} + \sqrt{3})(5\sqrt{7} - \sqrt{3}) = (5\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 25.7 - 3 = 175 - 3 = 172;$$

b) $[(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{11}][(2 + \sqrt{5}) - \sqrt{11}] = (2 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{11})^2$

$$= 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 11 = 4\sqrt{5} - 2;$$

c) $\left(\sqrt{\frac{16}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{3}\right).\sqrt{3} = \sqrt{\frac{16}{3}.3} + \sqrt{\frac{1}{3}.3} - \sqrt{3.3}$

$$= \sqrt{16} + \sqrt{1} - \sqrt{9} = 4 + 1 - 3 = 2;$$

d) $\sqrt{\frac{144}{13}} \cdot \sqrt{\frac{39}{121}} = \sqrt{\frac{144.13.3}{13.121}} = \sqrt{\frac{144.3}{121}} = \frac{12.\sqrt{3}}{11}.$

- ***Lời bình :*** *"Chứng minh đẳng thức :*

*a)* $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ *b)* $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$*."*

Ta hãy biến đổi vế phải để được kết quả bằng vế trái. Ta lần lượt có :

a) $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5.2} + 2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}.$$

Vế phải đúng bằng vế trái.

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5.3} + 3} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

**2.** a) $m - n - \sqrt{m} - \sqrt{n} = (\sqrt{m})^2 - (\sqrt{n})^2 - (\sqrt{m} + \sqrt{n})$

$$= (\sqrt{m} - \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n}) - (\sqrt{m} + \sqrt{n})$$

$$= (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n} - 1), \text{ với } m > 0, n > 0.$$

b) $8 + \sqrt{p^3} = 8 + (\sqrt{p})^3 = 2^3 + (\sqrt{p})^3$ dạng $a^3 + b^3$

nên có ngay kết quả là : $(2 + \sqrt{p})(4 - 2\sqrt{p} + p)$.

c) $m + \sqrt{m} - n - \sqrt{n} = (m - n) + (\sqrt{m} - \sqrt{n})$

$$= (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) + (\sqrt{m} - \sqrt{n})$$

$$= (\sqrt{m} - \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n} + 1).$$

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Phân tích thành nhân tử :*

*d)* $\sqrt{ab} - \sqrt{cd} + \sqrt{bc} - \sqrt{ad}$ *e)* $\sqrt{c^3 + d^3} + \sqrt{c^2 - d^2}$

*f)* $mn + m\sqrt{n} - n\sqrt{m} - \sqrt{mn}$*."*

Ta lần lượt có :

d) $(\sqrt{ab} + \sqrt{cb}) - (\sqrt{cd} + \sqrt{ad}) = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - \sqrt{d}(\sqrt{c} + \sqrt{a})$

$= (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{d})$

e) $\sqrt{(c+d)(c^2 - cd + d^2)} - \sqrt{(c+d)(c-d)} = \sqrt{c+d}(\sqrt{c^2 - cd + d^2} - \sqrt{c-d})$

f) $m\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1) - \sqrt{mn}(\sqrt{n} + 1) = (\sqrt{n} + 1)(m\sqrt{n} - \sqrt{mn})$

$= \sqrt{mn}(\sqrt{n} + 1)(\sqrt{m} - 1).$

**3.** a) $20\sqrt{49.5} - \sqrt{5} + \sqrt{25.5} - \frac{5}{2}\sqrt{36.5} = 140\sqrt{5} - \sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 15\sqrt{5} = 125\sqrt{5}$

b) $6m\sqrt{9.7mn^3} - 3\sqrt{16.7m^3n^3} + 2mn\sqrt{49.7mn} - 5n\sqrt{4.7m^3n}$

$= 18mn\sqrt{7mn} - 12mn\sqrt{7mn} + 14mn\sqrt{7mn} - 10mn\sqrt{7mn}$

$= 10mn\sqrt{7mn}$ (với điều kiện $m > 0$, $n > 0$).

c) $3\sqrt{4.2p} - \sqrt{9.2p} - 5\sqrt{\frac{2p}{4}} + \sqrt{\frac{9p}{2} \cdot \frac{2}{2}} + \sqrt{25.2p} - \sqrt{16.2p} + \sqrt{36.2p}$

$= 6\sqrt{2p} - 3\sqrt{2p} - \frac{5}{2}\sqrt{2p} + \frac{3}{2}\sqrt{2p} + 5\sqrt{2p} - 4\sqrt{2p} + 6\sqrt{2p}$

$= 9\sqrt{2p}$ (với điều kiện $p > 0$).

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tính :*

*d)* $\sqrt{4a^2 - 4b^2} + \sqrt{(a+b)^2} - 5\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{9a^2 - 9b^2} - \sqrt{(a-b)^2}$

*e)* $2d\sqrt{c-d} + c\sqrt{\frac{1}{c-d}} - c\sqrt{\frac{m}{mc - md}} - \sqrt{c^3 - c^2d} +$

$+ \sqrt{c^2d\left(\frac{c}{d} - 1\right)} - d^2\sqrt{\frac{4(c-d)}{d^2}}$*."*

Ta lần lượt có :

d) $\sqrt{4(a^2 - b^2)} + \sqrt{(a+b)^2} - 5\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{9(a^2 - b^2)} - \sqrt{(a-b)^2}$

$= 2\sqrt{a^2 - b^2} - 5\sqrt{a^2 - b^2} + 3\sqrt{a^2 - b^2} + |a + b| - |a - b| = |a + b| - |a - b|$

Khi $a + b > 0$, $a - b > 0$ thì biểu thức này bằng $a + b - (a - b) = 2b$.

e) $2d\sqrt{c-d}+c\sqrt{\frac{1}{c-d}\cdot\frac{c-d}{c-d}}-c\sqrt{\frac{m}{m(c-d)}}-\sqrt{c^2(c-d)}+$

$$+\sqrt{c^2d\left(\frac{c-d}{d}\right)}-d^2.\frac{2}{|d|}\sqrt{c-d}=$$

$$=2d\sqrt{c-d}+\frac{c}{c-d}\sqrt{c-d}-\frac{c}{c-d}\sqrt{c-d}-2|d|\sqrt{c-d}=2\sqrt{c-d}(d-|d|).$$

Biểu thức này bằng 0 khi $d>0$ và bằng $4d\sqrt{c-d}$ khi $d<0$.

**4.** a) $\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right).2\sqrt{6}=2.6-6\sqrt{18}+10\sqrt{12}-\sqrt{48}$

$=12-6\sqrt{9.2}+10\sqrt{4.3}-\sqrt{16.3}$

$=12-18\sqrt{2}+20\sqrt{3}-4\sqrt{3}=12-18\sqrt{2}+16\sqrt{3}$

b) $\left(2\sqrt{cd}+3\sqrt{\frac{d}{c}}-4\sqrt{\frac{c}{d}}+5\sqrt{\frac{1}{cd}}\right).\sqrt{cd}$

$=2.cd+3\sqrt{\frac{d}{c}:cd}-4\sqrt{\frac{c}{d}.cd}+5\sqrt{\frac{1}{cd}.cd}=2cd+3\sqrt{d^2}-4\sqrt{c^2}+5$

$=2cd+3|d|-4|c|+5=2cd+3d-4c+5$ nếu $c>0$, $d>0$.

c) $\sqrt{\frac{75}{3}}+\sqrt{\frac{243}{3}}-\sqrt{\frac{48}{3}}=\sqrt{25}+\sqrt{81}-\sqrt{16}=5+9-4=10$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{4}{5}\sqrt{\frac{4}{5}}\right):\frac{8}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}=\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{8}{25}\sqrt{5}\right):\frac{2}{15}\sqrt{2}$

$=\frac{15}{8}-\frac{15}{8}\sqrt{6}+\frac{6}{5}\sqrt{10}=\frac{75-75\sqrt{6}+48\sqrt{10}}{40}.$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tính các biểu thức sau :*

*e)* $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{1,2}+\sqrt{2}-4\sqrt{0,2}\right)$

*f)* $\left(\frac{3m}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}-0,4\sqrt{\frac{p}{mn}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{mn}{2}}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{3n}{2m}}$ *với $m>0$, $n>0$."*

**Ta lần lượt có :**

e) $\sqrt{1,2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)-4\sqrt{0,2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)$

$=\frac{4}{3}\sqrt{3,6}+\sqrt{2,4}+\sqrt{\frac{10}{3}.1,2}+\frac{4}{3}\sqrt{6}+2+\sqrt{\frac{10}{3}.2}-\frac{16}{3}\sqrt{0,6}-4\sqrt{0,4}-4\sqrt{\frac{10}{3}.0,2}$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{9.2}{5}} + \sqrt{\frac{4.3}{5}} + \sqrt{4} + \frac{4}{3}\sqrt{6} + 2 + \sqrt{\frac{4.5}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{2}{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5}} + 2 + \frac{4}{3}\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{5}} + 4 + \frac{4}{3}\sqrt{6} - 4\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{3}}$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{15} + 4 + \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{15} = 4.$$

f) $$\frac{45m}{8}\sqrt{\frac{2m^2}{3n^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2p}{3n^2}} + \frac{5}{4}\sqrt{\frac{m^2}{3}} = \frac{45m^2}{8n}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2n}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{5m}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{15m^2}{8n}\sqrt{6} - \frac{1}{2n}\sqrt{6p} + \frac{5m}{12}\sqrt{3}.$$

**5.** Ta biến đổi vế trái :

a) $$\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x - y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 1,$$ đúng bằng vế phải.

b) Vế trái có dạng A.B, ta biến đổi A và B như sau :

$$A = \frac{\sqrt{1+t}(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t})}{(\sqrt{1+t})^2 - (\sqrt{1-t})^2} - \frac{(1-t)[\sqrt{1-t^2} + (1-t)]}{(\sqrt{1-t^2})^2 - (1-t)^2}$$

$$= \frac{1 + t + \sqrt{1-t^2}}{1 + t - 1 + t} - \frac{(1-t)(\sqrt{1-t^2} + 1 - t)}{1 - t^2 - (1 - 2t + t^2)}$$

$$= \frac{1 + t + \sqrt{1-t^2}}{2t} - \frac{(1-t)(\sqrt{1-t^2} + 1 - t)}{2t - 2t^2}$$

$$= \frac{1 + t + \sqrt{1-t^2}}{2t} - \frac{(1-t)(\sqrt{1-t^2} + 1 - t)}{2t(1-t)}$$

$$= \frac{1 + t + \sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-t^2} - 1 + t}{2t} = \frac{2t}{2t} = 1$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{t^2}} - 1 - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} - 1 - \frac{1}{t} = -1 \quad (\text{do } 0 < t < 1)$$

Như vậy vế trái bằng –1, đúng bằng vế phải.

• ***Lời bình :*** Tương tự :

*"c) Chứng minh đẳng thức :*

$$\left(\frac{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}+\sqrt{mn}\right)\left(\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}\right)^2 = 1 \text{ nếu } m > n > 0.$$

*d) Chứng minh rằng giá trị của $P = 4p^3 - 8p^2 + 2p + 3$ bằng 1 khi $p = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$."*

Cách giải như sau :

c) Ta biến đổi vế trái :

$$\left[\frac{(\sqrt{m})^3-(\sqrt{n})^3}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}+\sqrt{mn}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}\right]^2$$

$$= (\sqrt{m^2}+\sqrt{mn}+\sqrt{n^2}+\sqrt{mn}).\frac{1}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}$$

$$= (\sqrt{m}+\sqrt{n})^2.\frac{1}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2} = 1 \text{ (vì } m > n > 0)$$

Vậy vế trái đúng bằng vế phải.

d) Giá trị của P cần tìm là :

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^3 - 2(1+\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3}) + 3$$

$$= \frac{1}{2}(1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}) - 2(1+2\sqrt{3}+3) + 1 + \sqrt{3} + 3$$

$$= 5 + 3\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 1.$$

**6.** a) Ta có thể viết :

$$\sqrt{25(x-11)} - \sqrt{9(x-11)} - \sqrt{x-11} = 1,$$

hay $5\sqrt{x-11} - 3\sqrt{x-11} - \sqrt{x-11} = 1$. Từ đó : $\sqrt{x-11} = 1$.

Bình phương hai vế với điều kiện $x - 11 > 0$, tức là $x > 11$ ta được $x - 11 = 1$, hay $x = 12$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 12$.

b) Phương trình có thể viết :

$$\sqrt{25(1+y)} + \sqrt{49(1+y)} - \sqrt{81(1+y)} = 6 + \sqrt{1+y},$$

hay $5\sqrt{1+y} + 7\sqrt{1+y} - 9\sqrt{1+y} - \sqrt{1+y} = 6$, hay $2\sqrt{1+y} = 6$.

Từ đó $\sqrt{1+y} = 3$ (với $y > -1$). Vậy $1 + y = 9$, hay $y = 8$, thỏa mãn điều kiện. Nghiệm của phương trình là $y = 8$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải phương trình :*

*c)* $\dfrac{7\sqrt{y}-13}{3}+\dfrac{4\sqrt{y}-11}{5}=\dfrac{3\sqrt{y}-8}{4}+3\sqrt{y}-7$

*d)* $(3\sqrt{5z}+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{5z})=(7\sqrt{z}+2\sqrt{13})(2\sqrt{13}-7\sqrt{z})$."

Ta lần lượt có :

c) MC : 60 ($y \geq 0$). Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$20(7\sqrt{y}-13)+12(4\sqrt{y}-11)=15(3\sqrt{y}-8)+60(3\sqrt{y}-7),$$

hay $140\sqrt{y}-260+48\sqrt{y}-132=45\sqrt{y}-120+180\sqrt{y}-420$

$$140\sqrt{y}+48\sqrt{y}-45\sqrt{y}-180\sqrt{y}=260+132-120-420,$$

hay $-37\sqrt{y}=-148$. Từ đó $\sqrt{y}=4$, vậy $y=16$.

Thử lại thấy $y=16$ đúng là nghiệm của phương trình.

d) Điều kiện $z \geq 0$. Phương trình đã cho có thể viết :

$$(2\sqrt{3}+3\sqrt{5z})(2\sqrt{3}-3\sqrt{5z})=(2\sqrt{13}+7\sqrt{z})(2\sqrt{13}-7\sqrt{z}),$$

hay $(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5z})^2=(2\sqrt{13})^2-(7\sqrt{z})^2$

$12-45z=52-49z$, hay $4z=40$, $z=10$ thỏa mãn điều kiện ở trên. Vậy nghiệm của phương trình là $z=10$.

**7.** a) Điều kiện : $m>0$, $m \neq \dfrac{1}{9}$.

MC : $9m-1=(3\sqrt{m}+1)(3\sqrt{m}-1)$. Ta có :

$$M=\frac{(\sqrt{m}-1)(3\sqrt{m}+1)-(3\sqrt{m}-1)+8\sqrt{m}}{9m-1}:\frac{3\sqrt{m}+1-3\sqrt{m}+2}{3\sqrt{m}+1}$$

$$=\frac{3m+\sqrt{m}-3\sqrt{m}-1-3\sqrt{m}+1+8\sqrt{m}}{(3\sqrt{m}+1)(3\sqrt{m}-1)}\cdot\frac{3\sqrt{m}+1}{3}$$

hay $M=\dfrac{3m+3\sqrt{m}}{3(3\sqrt{m}-1)}=\dfrac{m+\sqrt{m}}{3\sqrt{m}-1}$.

Để $M=1,2$ ta phải giải phương trình :

$$\frac{m+\sqrt{m}}{3\sqrt{m}-1}=1,2 \quad \text{hay} \quad m+\sqrt{m}=3,6\sqrt{m}-1,2$$

$$m=2,6\sqrt{m}-1,2.$$

Giải ra được $\sqrt{m_1}=2$, $\sqrt{m_2}=0,6$.

Từ đó $m_1=4$, $m_2=0,36$. Đó là hai giá trị của m để $M=1,2$.

b) Điều kiện : $p \geq 0$, $p \neq 4$, $p \neq 9$. Ta có :

$$P = \frac{p - 3\sqrt{p} - p + 9}{p - 9} : \frac{9 - p + (\sqrt{p} - 3)(\sqrt{p} + 3) - (\sqrt{p} + 2)(\sqrt{p} - 2)}{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}$$

$$= \frac{9 - 3\sqrt{p}}{p - 9} \cdot \frac{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}{9 - p + p - 9 - p + 4} = \frac{9 - 3\sqrt{p}}{p - 9} \cdot \frac{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}{4 - p}$$

$$= \frac{3(3 - \sqrt{p})}{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 3)} \cdot \frac{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}{(2 + \sqrt{p})(2 - \sqrt{p})} = \frac{3}{2 + \sqrt{p}}.$$

Hiệu $P - 1 = \frac{3}{2 + \sqrt{p}} - 1 < 0$ hay $\frac{3}{2 + \sqrt{p}} < 1$, tức là $2 + \sqrt{p} > 3$ (vì $2 + \sqrt{p} > 0$). Suy ra $\sqrt{p} > 1$ hay $p > 1$, trừ $p = 4$ và $p = 9$.

Vậy để hiệu $P - 1 < 0$ thì $p > 1$ (trừ giá trị $p = 4$ và $p = 9$).

- ***Lời bình :*** Tương tự :

*"c) Rút gọn biểu thức :* $N = \frac{3n + 3\sqrt{n} - 3}{n + \sqrt{n} - 2} - \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 2} + \frac{\sqrt{n} - 2}{1 - \sqrt{n}}$,

*rồi tìm giá trị nguyên của n sao cho N nhận giá trị nguyên.*

*d) Rút gọn biểu thức :*

$T = \left(\frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{tv} + 1} + \frac{\sqrt{tv} + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{tv}} + 1\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{tv} + \sqrt{t}}{\sqrt{tv} - 1} - \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{tv} + 1}\right)$, *rồi tìm giá trị lớn nhất của T khi* $\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{v}} = 6$."

Cách giải như sau :

c) Ta nhận thấy rằng : $(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1) = n + \sqrt{n} - 2$ nên trước tiên đổi dấu của $\frac{\sqrt{n} - 2}{1 - \sqrt{n}}$ thành $\frac{2 - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}$ để có mẫu chung là :

MC : $(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1) = n + \sqrt{n} - 2$, với điều kiện : $n \geq 0$, $n \neq 1$.

Ta có : $N = \frac{3n + 3\sqrt{n} - 3 - (\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} - 1) - (\sqrt{n} - 2)(\sqrt{n} + 2)}{(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1)}$

$$= \frac{3n + 3\sqrt{n} - 3 - (n - \sqrt{n} + \sqrt{n} - 1) - (n - 4)}{(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1)}$$

$$= \frac{3n + 3\sqrt{n} - 3 - n + 1 - n + 4}{(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1)} = \frac{n + 3\sqrt{n} + 2}{(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} + 1)}{(\sqrt{n} + 2)(\sqrt{n} - 1)} \quad \text{hay} \quad N = \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}.$$

– Biểu thức N rút gọn có thể viết :

$N = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n} - 1}$, muốn N nguyên (tức $N \in \mathbb{Z}$) thì $\sqrt{n} - 1$ **phải là ước** của 2. Ta lập bảng sau :

| $\sqrt{n} - 1$ | 1 | –1 | 2 | –2 |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{n}$ | 2 | 0 | 3 | –1 |
| n | 4 | 0 | 9 | không có |

Kết hợp với điều kiện có $n \in \{0; 4; 9\}$ thì $P \in \mathbb{Z}$.

d) Điều kiện : $t \geq 0$, $v \geq 0$, $tv \neq 1$. Biểu thức có dạng $T = A : B$.

Ta tính riêng A và B, ta có :

$$A = \frac{(\sqrt{t} + 1)(1 - \sqrt{tv}) + (\sqrt{tv} + \sqrt{t})(1 + \sqrt{tv}) + (1 + \sqrt{tv})(1 - \sqrt{tv})}{(1 + \sqrt{tv})(1 - \sqrt{tv})}$$

$$= \frac{\sqrt{t} - t\sqrt{v} + 1 - \sqrt{tv} + \sqrt{tv} + tv + \sqrt{t} + t\sqrt{v} + 1 - tv}{(1 + \sqrt{tv})(1 - \sqrt{tv})} = \frac{2\sqrt{t} + 2}{1 - tv};$$

$$B = \frac{tv - 1 - (\sqrt{tv} + \sqrt{t})(\sqrt{tv} + 1) - (\sqrt{t} + 1)(\sqrt{tv} - 1)}{(\sqrt{tv} - 1)(\sqrt{tv} + 1)}$$

$$= \frac{tv - 1 - (tv + \sqrt{tv} + t\sqrt{v} + \sqrt{t}) - (t\sqrt{v} - \sqrt{t} + \sqrt{tv} - 1)}{(\sqrt{tv} - 1)(\sqrt{tv} + 1)}$$

$$= \frac{tv - 1 - tv - \sqrt{tv} - t\sqrt{v} - \sqrt{t} - t\sqrt{v} + \sqrt{t} - \sqrt{tv} + 1}{(\sqrt{tv} - 1)(\sqrt{tv} + 1)}$$

$$= \frac{-2\sqrt{tv} - 2t\sqrt{v}}{tv - 1} = \frac{2\sqrt{tv} + 2t\sqrt{v}}{1 - tv}.$$

Vậy biểu thức T trở thành :

$$T = A : B = \frac{2(\sqrt{t} + 1)}{2(\sqrt{tv} + t\sqrt{v})} = \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{tv}(\sqrt{t} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{tv}}.$$

– Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab$ ta có :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{v}}\right)^2 \geq 4.\frac{1}{\sqrt{tv}}, \text{ hay } 4T \leq 36, \text{ suy ra } T \leq 9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $t = v = \dfrac{1}{9}$. Vậy $T_{max} = 9$.

**8.** a) Điều kiện : $a > 0$, $a \neq 4$, $a \neq 9$.

MC : $4 - a = (2 + \sqrt{a})(2 - \sqrt{a})$. Ta có :

$$A = \frac{\sqrt{a}(2 - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - 3} \cdot \frac{(2 + \sqrt{a})^2 - (2 - \sqrt{a})^2 + 4a}{(2 + \sqrt{a})(2 - \sqrt{a})}$$

$$A = \frac{\sqrt{a}(8\sqrt{a} + 4a)}{(\sqrt{a} - 3)(2 + \sqrt{a})} = \frac{8a + 4a\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - 3)(2 + \sqrt{a})} = \frac{4a(2 + \sqrt{a})}{(\sqrt{a} - 3)(2 + \sqrt{a})} = \frac{4a}{\sqrt{a} - 3}.$$

– Muốn $|A| = 1$ thì $\left|\frac{4a}{\sqrt{a} - 3}\right| = 1$. Từ đó $\frac{4a}{\sqrt{a} - 3} = \pm 1$.

Nếu $\frac{4a}{\sqrt{a} - 3} = 1$ thì phương trình bậc hai $4a - \sqrt{a} + 3 = 0$ vô nghiệm vì $\Delta < 0$ (xem §8).

Nếu $\frac{4a}{\sqrt{a} - 3} = -1$ thì phương trình bậc hai $4a + \sqrt{a} - 3 = 0$ có nghiệm $\sqrt{a_1} = -1$ (loại) và $\sqrt{a_2} = \frac{3}{4}$, suy ra $a_2 = \frac{9}{16}$.

Vậy để $|A| = 1$ thì $a = \frac{9}{16}$.

b) Biểu thức có dạng $B = M : N$. Ta tính riêng M và N.

Vì mẫu $b + 2\sqrt{b} = \sqrt{b}(\sqrt{b} + 2)$ và $b + \sqrt{b} = \sqrt{b}(\sqrt{b} + 1)$, nên ta có :

$$M = \frac{\sqrt{b}(b + \sqrt{b}) + 8(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} + 1) - (b + 3\sqrt{b} + 2)(\sqrt{b} + 2)}{\sqrt{b}(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} + 2)}$$

$$= \frac{b\sqrt{b} + b + 8(b + 2\sqrt{b} + 1) - (b\sqrt{b} + 2b + 3b + 6\sqrt{b} + 2\sqrt{b} + 4)}{MC}$$

$$= \frac{b\sqrt{b} + b + 8b + 16\sqrt{b} + 8 - b\sqrt{b} - 5b - 8\sqrt{b} - 4}{MC}$$

$$= \frac{4b + 8\sqrt{b} + 4}{MC} = \frac{4(\sqrt{b} + 1)^2}{\sqrt{b}(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} + 2)} = \frac{4(\sqrt{b} + 1)}{\sqrt{b}(\sqrt{b} + 2)};$$

$$N = \frac{\sqrt{b}(b + \sqrt{b} + 3) + b + 2\sqrt{b}}{\sqrt{b}(b + 2\sqrt{b})} = \frac{b\sqrt{b} + b + 3\sqrt{b} + b + 2\sqrt{b}}{MC}$$

$$= \frac{b\sqrt{b} + 2b + 5\sqrt{b}}{MC} = \frac{\sqrt{b}(b + 2\sqrt{b} + 5)}{\sqrt{b}(b + 2\sqrt{b})} = \frac{b + 2\sqrt{b} + 5}{b + 2\sqrt{b}}.$$

Vậy $B = M : N$ hay $B = \frac{4(\sqrt{b} + 1)}{b + 2\sqrt{b}} \cdot \frac{b + 2\sqrt{b}}{b + 2\sqrt{b} + 5} = \frac{4\sqrt{b} + 4}{b + 2\sqrt{b} + 5}$.

– Khi $\sqrt{B}$ có nghĩa thì $B > 0$. Rõ ràng ta có $B > 0$ với mọi $b > 0$.

$\sqrt{B} > B \Leftrightarrow B > B^2$ tức là $B(1 - B) > 0$ hay $B < 1$; $B - 1 < 0$.

Do đó $\frac{-(\sqrt{b} - 1)^2}{(\sqrt{b} + 1)^2 + 4} < 0$ hay $\sqrt{b} \neq 1$ tức là $b \neq 1$.

Vậy với $b > 0$, $b \neq 1$ thì $\sqrt{B} > B$.

• ***Lời bình :*** Tương tự :

*"c) Cho biểu thức :* $C = \dfrac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{2\sqrt{c}-2\sqrt{d}} + \dfrac{\sqrt{d}-\sqrt{c}}{2\sqrt{c}+2\sqrt{d}} + \dfrac{c+d}{c-d}$.

*Rút gọn biểu thức và tìm cặp số nguyên (c, d) sao cho C > 1 và c + d = 7.*

*d) Cho biểu thức :* $D = \left(\dfrac{2\sqrt{d}}{\sqrt{d}+3} + \dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}-3} - \dfrac{3d+3}{d-9}\right) : \left(\dfrac{2\sqrt{d}-2}{\sqrt{d}-3} - 1\right)$.

*Rút gọn biểu thức và tính giá trị của D, nếu*

$$d = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\right)."$$

Cách giải như sau :

c) Điều kiện : $c \geq 0$, $d \geq 0$ và $c \neq d$.

MC : $(2\sqrt{c}+2\sqrt{d})(2\sqrt{c}-2\sqrt{d}) = 4c - 4d = 4(c-d)$. Ta có :

$$C = \frac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(2\sqrt{c}+2\sqrt{d}) + (\sqrt{d}-\sqrt{c})(2\sqrt{c}-2\sqrt{d}) + 4(c+d)}{4(c-d)}$$

$$= \frac{2c + 2\sqrt{cd} + 2\sqrt{cd} + 2d + 2\sqrt{cd} - 2d - 2c + 2\sqrt{cd} + 4c + 4d}{4(c-d)}$$

$$= \frac{8\sqrt{cd} + 4c + 4d}{4(c-d)} = \frac{2\sqrt{cd} + c + d}{c-d}$$

hay $C = \dfrac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{c}-\sqrt{d})} = \dfrac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$.

– Muốn $C > 1$ thì $\dfrac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} - 1 > 0$, hay $\dfrac{2\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} > 0$, tức là $c > d > 0$.

Do $c + d = 7$ và c, d nguyên nên cặp (c, d) nguyên sẽ bằng :

$$(c, d) = (6; 1) = (5; 2) = (4; 3).$$

d) Điều kiện : $d \geq 0$, $d \neq 9$.

MC : $(\sqrt{d}+3)(\sqrt{d}-3) = d - 9$. Ta có :

$$D = \frac{2\sqrt{d}(\sqrt{d}-3) + \sqrt{d}(\sqrt{d}+3) - (3d+3)}{d-9} : \frac{2\sqrt{d}-2-(\sqrt{d}-3)}{\sqrt{d}-3}$$

$$= \frac{2d - 6\sqrt{d} + d + 3\sqrt{d} - 3d - 3}{d-9} : \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-3}$$

$$= \frac{-3(\sqrt{d}+1)}{(\sqrt{d}+3)(\sqrt{d}-3)} \cdot \frac{\sqrt{d}-3}{\sqrt{d}+1}, \quad \text{hay} \quad D = \frac{-3}{\sqrt{d}+3}.$$

Bây giờ ta tính giá trị của d, ta có :

$d = \sqrt{2} - 1 + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$ hay $d = \sqrt{100} - 1 = 9$.

Vậy $D = \dfrac{-3}{\sqrt{9}+3} = \dfrac{-3}{3+3} = -\dfrac{1}{2}$.

**9.** Ta biến đổi vế trái :

a) $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}-2} = \dfrac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-2}$

$= \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = -1$, đúng bằng vế phải.

b) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$, đúng bằng vế phải.

c) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}} = \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{6}$, đúng bằng vế phải.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Chứng minh các đẳng thức :*

*d)* $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 0$ *(với $a > 0$, $b > 0$).*

*e)* $\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}} = \sqrt{3}-1$*."*

Ta biến đổi vế trái :

d) $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = (\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$= 0$, đúng bằng vế phải.

e) Ta bắt đầu từ dưới lên, ta có :

$\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ ; $\sqrt{18-\sqrt{128}} = \sqrt{16-8\sqrt{2}+2} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} = 4-\sqrt{2}$.

Như thế vế trái thành :

$\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+4-\sqrt{2}}} = \sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1}$

$= \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$, đúng bằng vế phải.

**10.** a) $\dfrac{20}{8\sqrt{5}-10\sqrt{3}} \cdot \dfrac{8\sqrt{5}+10\sqrt{3}}{8\sqrt{5}+10\sqrt{3}} = \dfrac{20(8\sqrt{5}+10\sqrt{3})}{(8\sqrt{5})^2-(10\sqrt{3})^2} = \dfrac{20(8\sqrt{5}+10\sqrt{3})}{320-300}$

$= 8\sqrt{5}+10\sqrt{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}=\dfrac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{a+b-(a-b)}=\dfrac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{2b}$

c) $\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{m^2-n^2}-\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{m^2+n^2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{m^2+n^2})^2}{(m^2-n^2)-(m^2+n^2)}=\dfrac{(\sqrt{m^2-n^2}+\sqrt{m^2+n^2})^2}{-2n^2}$

d) Nhân tử và mẫu với số $1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\neq 0$ ta có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})^2-5}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2(\sqrt{2}-1)}.$$

Lại nhân tử và mẫu của phân số cuối này với $\sqrt{2}+1\neq 0$ ta có :

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2(\sqrt{2}-1)}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1+2+\sqrt{2}-\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2(2-1)}=\frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{10}-\sqrt{5}}{2}.$$

- ***Lời bình :*** *"Chứng minh rằng :*

*a)* $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)$

*c)* $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=1-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$."

Cách giải như sau :

a) Ta có : $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2=2+\sqrt{3}$ và $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\sqrt{12}}{4}+\dfrac{1}{2}=2+\sqrt{3}$

Vì $\sqrt{2+\sqrt{3}}>0$ và $\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$ nên các số $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ và $\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ đều bằng căn bậc hai của số $2+\sqrt{3}$.

b) Trước hết ta nhận thấy rằng mẫu $2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}$ có thể viết dưới dạng tích sau $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}+1)$, nên ta trục căn ở vế trái như sau :

$$\frac{1}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{2}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}{(5-4)(2-1)}$$

$=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)$, đúng bằng vế phải.

c) Ta có : $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)+1}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{[(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)+1](\sqrt[3]{2}-1)}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt[3]{4}}{2}=1-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$, đúng bằng vế phải.

**11.** Ta có : $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)-1}$

$$= \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}.$$

Như vậy $A = \frac{2b|a-b|}{2\sqrt{ab}} : \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right) - \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}\right]$

$$= \frac{2b|a-b|}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-|a-b|} = \frac{2b|a-b|}{a+b-|a-b|}.$$

– Nếu $a - b \geq 0$ thì $|a-b| = a-b$, ta có :

$$A = \frac{2b(a-b)}{(a+b)-(a-b)} = \frac{2b(a-b)}{2b} = a-b$$

– Nếu $a - b \leq 0$ thì $|a-b| = -(a-b)$, ta có :

$$A = \frac{-2b(a-b)}{(a+b)+(a-b)} = \frac{b(b-a)}{a}$$

Vậy : $A = \begin{cases} a-b \text{ nếu } a \geq b \\ \frac{b}{a}(b-a) \text{ nếu } a < b. \end{cases}$

- ***Lời bình :*** Hãy giải thêm bài sau :

*"Viết biểu thức $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}$ dưới dạng tổng của 3 căn thức."*

Ta đặt : $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Bình phương hai vế :

$$8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8} = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}.$$

Từ đó ta có : $x+y+z=8$; $2\sqrt{xy}=\sqrt{40}$; $2\sqrt{xz}=\sqrt{20}$; $2\sqrt{yz}=\sqrt{8}$ (*)

Từ dãy (*) ta tìm được :

$xy = \frac{40}{4} = 10$; $xz = \frac{20}{4} = 5$; $yz = \frac{8}{4} = 2$; $xyz = \frac{\sqrt{40.20.8}}{8} = 10.$

Suy ra : $x = 5; y = 2; z = 1.$

Vậy ta có : $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{1}.$

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### 1. *Căn bậc n*

1. *Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n bằng a.*

Phép tìm căn của một số gọi là phép khai căn. Phép khai căn là phép tính ngược của phép nâng lên lũy thừa.

a) Một số dương hoặc một số âm chỉ có một căn bậc lẻ.

Ví dụ số 64 chỉ có một căn bậc ba là 4, số –8 chỉ có một căn bậc ba là –2.

b) Một số âm không có căn bậc chẵn.

c) Một số dương chỉ có hai căn bậc chẵn đối nhau.

Số 25 có hai căn bậc hai là 5 và –5.

d) Căn bậc nào của 0 cũng chỉ là 0.

Kí hiệu căn bậc n của số a là $\sqrt[n]{a}$ (ví dụ căn bậc năm của –8 viết là $\sqrt[5]{-8}$, căn bậc bốn của 2 viết là $\sqrt[4]{2}$)

Kí hiệu $\sqrt[2k]{a}$ (a dương) chỉ dùng để chỉ căn dương (căn số học) bậc chẵn của a, còn căn âm thì chỉ bằng $-\sqrt[2k]{a}$.

Ta có : $\sqrt{a^2} = |a|$ ; $\sqrt[2k]{2^{2k}} = |a|$.

2. *Các phép tính về căn thức*

a) $\sqrt[n]{abc} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$

b) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \Longleftrightarrow \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

c) $\sqrt[n]{a^{n.m}} = a^m$

d) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

*Ví dụ* : $(3\sqrt{2p})^3 = 3^3.\sqrt{(2p)^3} = 27.\sqrt{2^3}.\sqrt{p^3} = 54p\sqrt{2p}$ $(p > 0)$.

e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

*Ví dụ* : $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

2. ***Chứng minh điều ngụy biện :*** 4 = 5(!) hay 2.2 = 5(!)

Tìm chỗ sai trong việc chứng minh điều ngụy biện sau : 2.2 = 5 (1).

Xét đẳng thức 16 – 36 = 25 – 45 (= –20).

Cộng thêm $20\frac{1}{4}$ vào hai vế được :

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4},$$

hay $4^2 - 2.4.\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2.5.\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$, ta được $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$.

Khai phương hai vế được : $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$.

Suy ra : 4 = 5(!) hay 2.2 = 5(!).

# §8. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỪA MỚI, VỪA THÚ VỊ

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$***

a) Tính chất :

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

b) Đồ thị :

Đồ thị là một đường cong gọi là parabol có đỉnh là gốc tọa độ O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Nếu $a > 0$ thì parabol nằm trên trục hoành có O là điểm thấp nhất.

Nếu $a < 0$ thì parabol nằm dưới trục hoành có O là điểm cao nhất.

***2. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$***

a) Phương trình bậc hai khuyết :

$ax^2 + bx = 0$ (khuyết c) có nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

$ax^2 + c = 0$ (khuyết c) có nghiệm là $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ nếu a và c khác dấu.

b) Phương trình bậc hai đủ :

Lập biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta > 0$ : 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ : 1 nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta < 0$ : vô nghiệm.

* Trường hợp hệ số b chẵn ($b = 2b'$)

Lập biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$.

Nếu $\Delta' > 0$ : 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

$\Delta' = 0$ : 1 nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$

$\Delta' < 0$ : vô nghiệm.

***3. Định lí Viète***

Nếu $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

* Ứng dụng :

a) Muốn tìm hai số u và v, biết $u + v = S$, $uv = P$ ta phải giải phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$).

b) Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình bậc hai có hai nghiệm

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

c) Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình bậc hai có hai nghiệm

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a}.$$

***4. Phương trình quy về bậc hai***

a) Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Đặt ẩn phụ $x^2 = t$, $t \geq 0$ để được phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$.

b) Phương trình chứa ẩn ở mẫu, chẳng hạn $\dfrac{7}{x^2 - 9} = 1 - \dfrac{1}{3 - x}$.

c) Phương trình tích, chẳng hạn $(x - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$.

d) Phương trình vô tỉ, chẳng hạn $x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** 1. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^2$.

a) Vẽ đồ thị hàm số và vẽ đường thẳng $y = -x - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm M của hai đồ thị.

2. Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = 3x - 2$.

a) Vẽ đồ thị của chúng trên cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

b) Lập phương trình của đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ và cắt đồ thị $y = x^2$ tại điểm A có hoành độ là $-1$.

**2.** Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Tìm a biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $P(-2; 1)$ và vẽ đồ thị với a tìm được.

b) Cho đường thẳng $y = x + k$, với giá trị nào của k thì parabol cắt đường thẳng tại hai điểm, tại một điểm ? Xác định tọa độ của tiếp

điểm Q.

c) Giải thích tại sao tiếp điểm Q đối xứng với điểm P qua trục tung.

d) Tính chu vi và diện tích của tam giác POQ.

**3.** Cho parabol (P) $y = ax^2$ và điểm A(1; 1) nằm trên (P).

a) Xác định hệ số a và vẽ parabol.

b) Lấy điểm B trên (P) có hoành độ bằng –2. Viết phương trình của đường thẳng AB.

c) Tìm điểm T trên trục tung sao cho ba điểm A, T, B thẳng hàng.

d) Một đường thẳng (d) qua T có hệ số góc a cắt (P) tại hai điểm M và N. Gọi M' và N' theo thứ tự là hình chiếu của M và N trên trục hoành, chứng minh hệ thức OM'.ON' = OT (đơn vị trên hai trục tọa độ bằng nhau).

**4.** Giải các phương trình bậc hai khuyết :

a) $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) = 102$

b) $(2y - 7)^2 + (3y - 5)^2 - (4y + 9)(4y - 9) = 2(64 - 29y)$

c) $\dfrac{3z^2 - 4}{12} = \dfrac{32}{9} + \dfrac{20 - 3z^2}{18}$.

**5.** Giải các phương trình bậc hai đủ :

a) $\dfrac{x}{x - m} - \dfrac{2m}{x + m} = \dfrac{-8m^2}{m^2 - x^2}$ b) $y^3 - 7y^2 + 14y - 8 = 0$

c) $z^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})z + \sqrt{6} = 0$.

**6.** Giải các phương trình sau :

a) $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$

b) $\dfrac{y^2 + 2y + 7}{y^2 + 2y + 3} = 4 + 2y + y^2$

c) $(z - 4)(z - 5)(z - 6)(z - 7) = 1680$.

**7.** Giải :

a) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ b) $\left(\dfrac{y}{y + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{y + 1}{y}\right)^2 = \dfrac{17}{4}$

c) $\dfrac{z + 1}{z^3 + z - 1} + \dfrac{z^3 + z - 1}{z + 1} = 2$.

**8.** Không giải phương trình :

a) $x^2 - \dfrac{\sqrt{85}}{4}x + 1\dfrac{5}{16} = 0$, tính hiệu các lập phương của nghiệm lớn và nghiệm bé của nó.

b) $y^2 + py + q = 0$, tính tổng các lập phương của các nghiệm của nó.

c) $3z^2 + 17z - 14 = 0$, tính giá trị biểu thức $\dfrac{3z_1^2 + 5z_1z_2 + 3z_2^2}{4z_1z_2^2 + 4z_1^2z_2}$.

**9.** Chứng minh rằng :

a) Nếu hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ đều dương thì các nghiệm của phương trình $qy^2 + (p - 2rq)y + 1 - pr = 0$ cũng dương với mọi $r \geq 0$.

b) Phương trình $\dfrac{1}{z-a} + \dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{c^2}$ có nghiệm với mọi a, b, c.

**10.** Cho phương trình : $2t^2 - (2m + 1)t + m^2 - 9m + 39 = 0$.

Với giá trị nào của m thì phương trình có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia và tìm các nghiệm đó.

**11.** Giải các phương trình quy về bậc hai :

a) $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4,5x + 3,5) = 0$

b) $\dfrac{1}{y+2} + \dfrac{4y}{y^2-4} = 1 + \dfrac{2}{y-2}$ c) $(z + 1)^4 = 2(1 + z^4)$.

**12.** Giải phương trình trùng phương sau :

a) $m^2p^2x^4 = p^4x^2 - p^2m^2 + m^4x^2$ (với $m > p > 0$)

b) $y^4 + (y - 1)^4 - 97 = 0$

c) $(z^2 - 1993^2)^2 - 7972z + 1 = 0$.

**13.** Giải phương trình vô tỉ sau :

a) $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$

b) $\dfrac{\sqrt{21+y} + \sqrt{21-y}}{\sqrt{21+y} - \sqrt{21-y}} = \dfrac{21}{y}$ $(y \neq 0)$ c) $\sqrt{z^2 - \dfrac{7}{z^2}} + \sqrt{z - \dfrac{7}{z^2}} = z$.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** 1.a) Ta lập bảng một số giá trị của x và y :

| x | ... | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ... | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | ... |

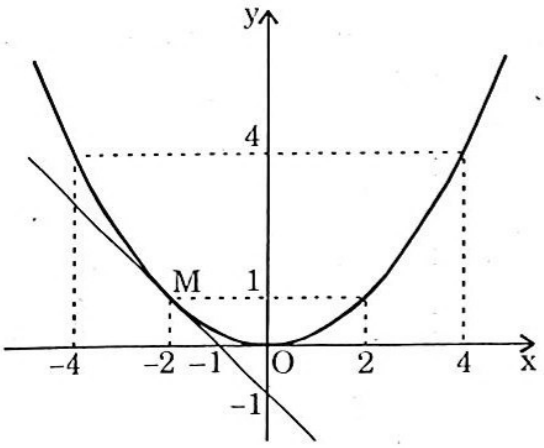
và

| x | 0 | −1 |
|---|---|---|
| y | −1 | 0 |

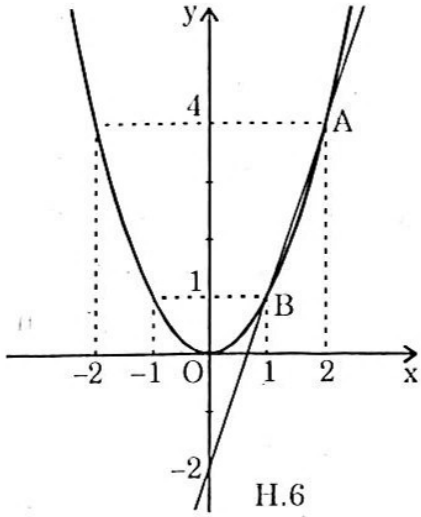
Đồ thị hai hàm số như ở hình 5.

b) Hoành độ giao điểm M là nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{4}x^2 = -x - 1$ hay $x^2 + 4x + 4 = 0$, tức là $(x + 2)^2 = 0$ mà nghiệm là $x_1 = x_2 = -2$. Từ đó $y = 1$.

Vậy ta có M(−2; 1) : đường thẳng tiếp xúc với parabol tại M.




H.5




H.6

2.a) Ta lập bảng một số giá trị của x và y :

| x | ... | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ... | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | ... |

và

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | –2 | 1 |

Đồ thị hai hàm số như ở hình 6.

Hoành độ các giao điểm A và B là nghiệm của phương trình $x^2 = 3x - 2$ hay $x^2 - 3x + 2 = 0$. Giải ra được $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

Vậy tọa độ A là (x, y) = (2; 4), tọa độ B là (1; 1).

b) Vì hai đường thẳng song song có hệ số góc a = a' và b ≠ b', nên đường thẳng (d) song song với đường thẳng y = 3x – 2 sẽ có hệ số góc là a = 3. Vì (d) cắt parabol $y = x^2$ nên (d) có phương trình hoành độ là $x^2 = 3x + b$.

Hai đồ thị trên cắt nhau tại A có hoành độ là –1 nên $(-1)^2 = 3(-1) + b$, suy ra b = 4.

Vậy đường thẳng (d) có phương trình là y = 3x + 4.

- ***Lời bình :*** Tương tự :

*"Cho parabol (P) : $y = ax^2$ và đường thẳng (d) : y = mx + p.*

*a) Tìm phương trình của (d) đi qua hai điểm A(1; 0) và B(–1; –1).*

*b) Tìm phương trình của (P) biết rằng (P) tiếp xúc với đường thẳng (d) tìm được ở câu a.*

*c) Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của (d) với trục hoành và trục tung. Tính đường cao của tam giác vuông MON."*

Ta có cách giải sau :

a) Thay tọa độ của A và B vào y = mx + p ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 0 = m + p \\ -1 = -m + p \end{cases}$$ Giải ra tìm được $m = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

b) Tại giao điểm của đường thẳng (d) với parabol $y = ax^2$, ta có :

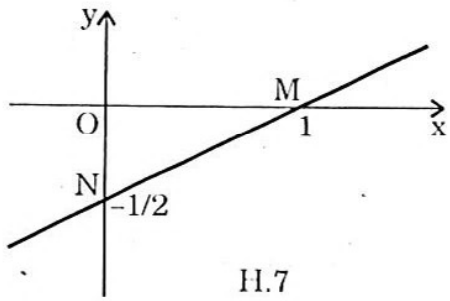
$$ax^2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad 2ax^2 - x + 1 = 0 \quad (*)$$

Nếu parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng (d) thì phương trình (*) phải có nghiệm kép tức là $\Delta = 0$.

Ta có $\Delta = 1 - 8a = 0$ khi $a = \frac{1}{8}$. Phương trình của (P) là $y = \frac{1}{8}x^2$.

c) Ta có :

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | $-\frac{1}{2}$ | 0 |



H.7

Do đó tọa độ của M là (1; 0) và của N là $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Cạnh huyền MN của tam giác vuông MON là $MN = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (hình 7). Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông bc = ah ta có đường cao h của tam giác vuông MON là :

$$h = \frac{OM.ON}{MN} = \left(1.\frac{1}{2}\right) : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

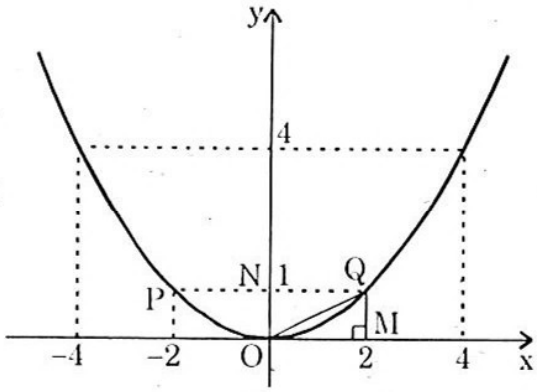
**2.** a) Thay tọa độ của P vào $y = ax^2$ ta có : $1 = a.(-2)^2$, suy ra $a = \frac{1}{4}$. Ta vẽ parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ bằng cách lập bảng sau :

| x | ... | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{4}x^2$ | ... | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | ... |

Đồ thị như ở hình 8. Đó là parabol có đỉnh là gốc tọa độ O, có trục đối xứng là trục tung, nằm phía trên trục hoành.

b) Tại giao điểm của parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = x + k$ ta có $\frac{1}{4}x^2 = x + k$, hay $x^2 - 4x - 4k = 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình này có hai nghiệm phân biệt, lúc đó parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt.



H.8

Ta có $\Delta' = 4 + 4k > 0$ khi $k > -1$.

Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép, lúc đó parabol và đường thẳng chỉ có một giao điểm (đường thẳng tiếp xúc parabol).

Ta có $\Delta' = 0$ khi $k = -1$.

Khi đó $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, suy ra $x = 2$.

Tọa độ tiếp điểm Q là $x = 2$, $y = 1$.

c) Ta có hoành độ của Q là 2, của P là $-2$, còn tung độ của chúng đều bằng 1. Do đó P và Q là hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

d) Từ Q hạ $QM \perp Ox$. Xét tam giác vuông OMQ ta có :

$$OQ^2 = OM^2 + MQ^2 = 4 + 1 = 5, \text{ suy ra } OQ = \sqrt{5}.$$

Do $OP = OQ$ nên $OP = \sqrt{5}$. Cạnh đáy $PQ = 2NQ = 4$.

Vậy $\Delta POQ$ có chu vi là : $OP + PQ + OQ = 2\sqrt{5} + 4$ (đơn vị dài)

và có diện tích là : $\frac{1}{2}PQ.ON = \frac{1}{2}.4.1 = 2$ (đơn vị diện tích).

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Viết phương trình của parabol có đỉnh ở gốc tọa độ O và đi qua điểm* $A\left(1; -\frac{1}{15}\right)$, *rồi tìm tọa độ các điểm của parabol có tung độ bằng* $-\frac{1}{5}$."

Parabol có đỉnh tại O và qua A nên ta có : $-\frac{1}{15} = a.1^2$ hay $a = -\frac{1}{15}$.

Vậy phương trình của parabol là $y = -\frac{1}{15}x^2$.

Vì các điểm thuộc parabol này có tung độ bằng $-\frac{1}{5}$ nên ta có :

$$-\frac{1}{15}x^2 = -\frac{1}{5} \text{ hay } \frac{1}{15}x^2 = \frac{1}{5}, \text{ tức là } 5x^2 = 15;$$

$$x^2 = 3, \text{ suy ra } x_1 = \sqrt{3} \text{ và } x_2 = -\sqrt{3}.$$

Vậy có hai điểm thuộc parabol có tung độ $-\frac{1}{5}$ là các điểm có tọa độ :

$$\left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{5}\right) \text{ và } \left(\sqrt{3}; -\frac{1}{5}\right).$$

**3.** a) Vì parabol đi qua điểm A(1; 1) nên ta có : $1 = a.1^2$, suy ra $a = 1$.

Vậy ta phải vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2$.

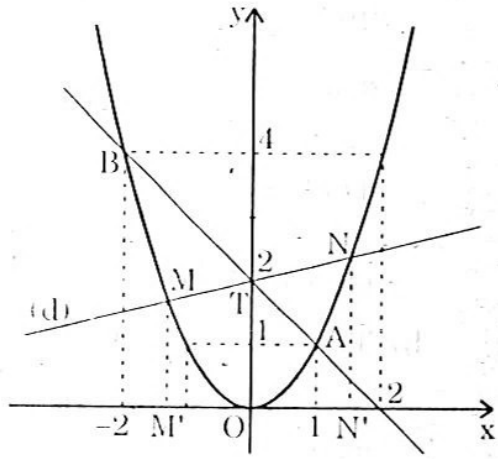
b) Do hoành độ của B là $-2$, nên tung độ của nó là $y = (-2)^2 = 4$. Đường thẳng AB có phương trình $y = ax + b$ đi qua A và B nên ta có

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 4 = -2a + b \end{cases}$$

Giải ra được $a = -1$, $b = 2$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = -x + 2$.

c) Để ba điểm A, T, B thẳng hàng khi T nằm trên trục tung thì T phải nằm trên đường thẳng AB, do đó ta có : $y = -0 + 2$, nên tọa độ của T là (0; 2).



H.9

d) Đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$ đi qua T nên ta có :

$2 = a.0 + b$, tức là $b = 2$, đó là đường thẳng $y = ax + 2$.

Do (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $M(x_M; y_M)$ và $N(x_N; y_N)$, hình chiếu của chúng trên trục hoành là $M'(x_M; 0)$ và $N'(x_N; 0)$, nên ta có

$$\left.\begin{array}{l} y_M = x_M^2 \\ y_M = ax_M + 2 \end{array}\right\} \text{ suy ra } x_M^2 - ax_M - 2 = 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_N = x_N^2 \\ y_N = ax_N + 2 \end{array}\right\} \text{ suy ra } x_N^2 - ax_N - 2 = 0 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) và do $x_M \neq x_N$ chứng tỏ $x_M$, $x_N$ là nghiệm của phương trình $X^2 - aX - 2 = 0$, suy ra :

$$|OM'.ON'| = |x_M.x_N| = \left|\frac{c}{a}\right| = \left|-\frac{2}{1}\right| = 2$$

mà OT = 2 nên ta có hệ thức OM'.ON' = OT.

- ***Lời bình :*** *"Một tam thức bậc hai có dạng $z = t^2 + pt + q$.*

*a) Tìm giá trị của p và q sao cho hàm số $z = 0$ khi $t_1 = 2$, $t_2 = -3$ và hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-2$ khi $t = 5$, biết rằng đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $(-4; 0)$ và $(-1; 0)$.*

*b) Trong mỗi trường hợp, hãy xác định các giá trị của t để giá trị hàm số là dương, bằng 0, âm."*

Ta có cách giải sau :

a) Theo điều kiện thứ nhất $z = 0$, tức là tam thức có hai nghiệm là 2 và $-3$ nên có thể viết dưới dạng $z = (t - 2)(t + 3) = t^2 + t - 6$. Suy ra $p = 1$, $q = -6$.

Theo điều kiện thứ hai ta có hệ phương trình $\begin{cases} -\dfrac{p}{2} = 5 \\ \dfrac{4q - p^2}{4} = -2 \end{cases}$ (vì tọa độ

đỉnh của parabol $y = ax^2 + bx + c$ được xác định bằng công thức $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$). Giải hệ này được $p = -10$, $q = 23$.

Theo điều kiện thứ ba ta có hệ phương trình $\begin{cases} 0 = 16 - 4p + q \\ 0 = 1 - p + q. \end{cases}$

Giải ra được $p = 5$, $q = 4$.

b) Theo câu a) ta được ba hàm số sau :

$$z_1 = t^2 + t - 6; \quad z_2 = t^2 - 10t + 23; \quad z_3 = t^2 + 5t + 4.$$

Ta lần lượt có :

- $z_1 > 0$ khi $t < -3$ hoặc $t > 2$, $z_1 = 0$ khi $t = -3$ hoặc $t = 2$, $z_1 < 0$ khi $-3 < t < 2$.
- $z_2 > 0$ khi $t < 5 - \sqrt{2}$ hoặc $t > 5 + \sqrt{2}$, $z_2 = 0$ khi $t = 5 \pm \sqrt{2}$, $z_2 < 0$ khi $5 - \sqrt{2} < t < 5 + \sqrt{2}$.
- $z_3 > 0$ khi $t < -4$ hoặc $t > -1$, $z_3 = 0$ khi $t = -4$ hoặc $t = -1$, $z_3 < 0$ khi $-4 < t < -1$.

**4.** a) Ta có sau khi làm phép tính :

$$x^2 + 3x - 7x - 21 + x^2 + 5x - x - 5 = 102$$

hay $2x^2 - 26 = 102$; $x^2 - 13 = 51$.

Vậy $x^2 = 64$, từ đó $x = \pm 8$.

b) Thực hiện phép tính được :

$$4y^2 - 28y + 49 + 9y^2 - 30y + 25 - (16y^2 - 81) = 128 - 58y$$

hay $-3y^2 - 58y + 155 = 128 - 58y$.

Vậy $3y^2 - 27 = 0$, từ đó $y^2 = 9$, $y = \pm 3$.

c) MC : 36, ta có sau khi quy đồng mẫu rồi khử mẫu :

$$9z^2 - 12 = 128 + 40 - 6z^2 \quad \text{hay} \quad 15z^2 = 180.$$

Vậy $z^2 = 12$, từ đó $z = \pm 2\sqrt{3}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các phương trình :*

*d)* $(2x - 3)(x + 3) = 4x^2 - 9$ *e)* $\frac{y + a}{y - a} + \frac{y - a}{y + a} = \frac{a(3y + 2a)}{y^2 - a^2}$

*f)* $\frac{3z - 1}{z - 1} + \frac{4}{z^2 + 2z - 3} = 1 + \frac{2z + 5}{z + 3}$."

Ta lần lượt có :

d) $(2x - 3)(x + 3) = (2x + 3)(2x - 3)$

hay $(2x - 3)(x + 3) - (2x + 3)(2x - 3) = 0$;

$$(2x - 3)(x + 3 - 2x - 3) = 0 \quad \text{hay} \quad (2x - 3)(-x) = 0.$$

Từ đó $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5$.

e) Điều kiện $y \neq \pm a$. MC : $(y - a)(y + a) = y^2 - a^2$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$(y + a)^2 + (y - a)^2 = a(3y + 2a)$$

hay $y^2 + 2ay + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 3ay + 2a^2$;

$$2y^2 + 2a^2 = 3ay + 2a^2.$$

Từ đó : $2y^2 - 3ay = 0 \Leftrightarrow y(2y - 3a) = 0$.

Giải ra được $y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{3a}{2}$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

f) Ta nhận thấy rằng : $(z - 1)(z + 3) = z^2 + 2z - 3$ nên có điều kiện : $z \neq 1$, $z \neq -3$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$(3z - 1)(z + 3) + 4 = z^2 + 2z - 3 + (2z + 5)(z - 1)$$

hay $3z^2 + 9z - z - 3 + 4 = z^2 + 2z - 3 + 2z^2 - 2z + 5z - 5$;

$8z + 1 = 5z - 8$. Từ đó $3z = -9$ và $z = -3$.

Giá trị $z = -3$ không thỏa mãn điều kiện ở trên, vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**5.** a) Điều kiện : $x \neq \pm m$. Đổi dấu của $\dfrac{-8m^2}{m^2 - x^2}$ thành $\dfrac{8m^2}{x^2 - m^2}$ để được MC : $(x + m)(x - m) = x^2 - m^2$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$x(x + m) - 2m(x - m) - 8m^2 = 0$$

hay $x^2 + mx - 2mx + 2m^2 - 8m^2$; $\quad x^2 - mx - 6m^2 = 0$.

$\Delta = m^2 + 24m^2 = 25m^2$; $\quad \sqrt{\Delta} = 5m$.

$$x_1 = \frac{m + 5m}{2} = 3m; \qquad x_2 = \frac{m - 5m}{2} = -2m.$$

Cả hai giá trị này đều phù hợp với điều kiện ở trên, vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $3m$ và $-2m$.

b) Phương trình có thể viết :

$$(y^3 - 8) - (7y^2 - 14y) = 0$$

hay $(y - 2)(y^2 + 2y + 4) - 7y(y - 2) = 0$;

$$(y - 2)(y^2 - 5y + 4) = 0$$

hay $(y - 2)[y(y - 1) - 4(y - 1)] = 0$, ta được phương trình tích :

$(y - 1)(y - 2)(y - 4) = 0$ có ba nghiệm là $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$.

(Cũng có thể giải phương trình $y^2 - 5y + 4 = 0$ được hai nghiệm là 1 và 4).

c) Ta có $\Delta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$, nhưng nên viết $\Delta$ như sau theo công thức $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$ :

$$\Delta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}.\sqrt{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Vậy $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự : *Giải các phương trình :*

*d)* $\dfrac{13}{x^3 + 1} - \dfrac{17x + 10}{5x^2 - 5x + 5} = -\dfrac{5}{x + 1}$ *e)* $\dfrac{y + 1}{y^2 - y + 1} = \dfrac{y + 2}{y(y + 1)}$

*f)* $\dfrac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} - \dfrac{4}{z + 1} = \dfrac{z^2 + 10z}{z^4 - 1} - \dfrac{4z^2 + 21}{z^3 + z^2 + z + 1}$.

Ta lần lượt có :

d) Điều kiện : $x \neq -1$. MC : $5(x^3 + 1) = 5(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$13.5 - (17x + 10)(x + 1) = -5.5(x^2 - x + 1)$$

hay $65 - 17x^2 - 17x - 10x - 10 = -25x^2 + 25x - 25$;

$8x^2 - 52x + 80 = 0$ hay $2x^2 - 13x + 20 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 4$, $x_2 = 2{,}5$ phù hợp với điều kiện $x \neq -1$.

e) Điều kiện : $y \neq 0$, $y \neq -1$.

Nhân chéo được :

$$y(y + 1)^2 = (y + 2)(y^2 - y + 1)$$

hay $y(y^2 + 2y + 1) = (y + 2)(y^2 - y + 1)$

$$y(y^2 + 2y + 1) = y^3 - y^2 + y + 2y^2 - 2y + 2$$

hay $y^3 + 2y^2 + y = y^3 + y^2 - y + 2$

Từ đó : $y^2 + 2y - 2 = 0$.

Giải ra được hai nghiệm là $y_1 = -1 + \sqrt{3}$, $y_2 = -1 - \sqrt{3}$ đều phù hợp với điều kiện ở trên.

f) Mẫu ở đây phức tạp nên trước hết ta phân tích các mẫu thành nhân tử để tìm MC và điều kiện.

$$z^3 - z^2 + z - 1 = z^2(z - 1) + (z - 1) = (z - 1)(z^2 + 1);$$

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1)$$

$$z^3 + z^2 + z + 1 = z^2(z + 1) + (z + 1) = (z + 1)(z^2 + 1).$$

Từ đó MC : $(z^2 + 1)(z^2 - 1)$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$z + 1 - 4(z - 1)(z^2 + 1) = z^2 + 10z - (4z^2 + 21)(z - 1)$$

hay $z + 1 - 4z^3 - 4z + 4z^2 + 4 = z^2 + 10z - 4z^3 + 4z^2 - 21z + 21;$

$-3z + 5 = z^2 - 11z + 21$ hay $z^2 - 8z + 16 = 0.$

Từ đó $(z - 4)^2 = 0$ có nghiệm kép $z_1 = z_2 = 4$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

**6.** a) Đặt $x^2 - 16x = t$, phương trình đã cho có dạng : $t^2 - 2t - 63 = 0$.

Giải ra được $t_1 = 9$, $t_2 = -7$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$$x^2 - 16x - 9 = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad x^2 - 16x + 7 = 0 \quad (2).$$

Giải phương trình (1) được $x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{73}$;

Giải phương trình (2) được $x_{3,4} = 8 \pm \sqrt{57}$.

b) Đặt $y^2 + 2y + 3 = v$, phương trình đã cho có dạng

$$\frac{v + 4}{v} = v + 1 \quad \text{hay} \quad v + 4 = v^2 + v.$$

Từ đó $v^2 = 4$, $v = \pm 2$.

Ta giải tiếp hai phương trình :

$y^2 + 2y + 3 = 2$ hay $y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 = 0$, từ đó $y_{1,2} = -1$;

$y^2 + 2y + 3 = -2$ hay $y^2 + 2y + 5 = 0$ vô nghiệm vì $\Delta' = 1 - 5 = -4 < 0$.

c) Ta có thể viết : $(z^2 - 11z + 28)(z^2 - 11z + 30) = 1680$

Đặt $z^2 - 11z + 30 = s$, phương trình có thể viết :

$$(s - 2).s = 1680 \quad \text{hay} \quad s^2 - 2s - 1680 = 0.$$

Giải ra được nghiệm là $s_1 = 42$, $s_2 = -40$.

Vậy ta phải giải hai phương trình :

$$z^2 - 11z + 30 = 42 \quad \text{hay} \quad z^2 - 11z - 12 = 0 \quad (1)$$

và $z^2 - 11z + 30 = -40$ hay $z^2 - 11z + 70 = 0$ (2)

Nghiệm của phương trình (1) là : $z_1 = -1$, $z_2 = 12$.

Phương trình (2) vô nghiệm.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải các phương trình :*

*d)* $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0,5625$ *e)* $(8y + 7)^2(4y + 3)(y + 1) = 4,5$

*f)* $\dfrac{1}{z^2 - 2z + 2} + \dfrac{2}{z^2 - 2z + 3} = \dfrac{6}{z^2 - 2z + 4}$."

Ta lần lượt có :

d) $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = \dfrac{9}{16}$.

Đặt $x^2 + 3x + 2 = t$, ta được phương trình : $16t^2 - 32t - 9 = 0$ mà

nghiệm là $t_1 = \frac{9}{4}$, $t_2 = -\frac{1}{4}$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$$x^2 + 3x + 2 = \frac{9}{4} \quad \text{hay} \quad 4x^2 + 12x - 1 = 0 \qquad (1)$$

và $$x^2 + 3x + 2 = -\frac{1}{4} \quad \text{hay} \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0 \qquad (2)$$

Nghiệm của phương trình (1) là : $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$;

Nghiệm của phương trình (2) là : $x_{3,4} = -\frac{3}{2}$.

e) Nhân hai vế của phương trình với 16 được :

$$(8y + 7)^2(8y + 6)(8y + 8) = 72$$

hay $(64y^2 + 112y + 49)(64y^2 + 112y + 48) = 72$

Đặt $64y^2 + 112y + 48 = v$, ta được phương trình

$(v + 1)v = 72$ hay $v^2 + v - 72 = 0$ mà nghiệm là $v_1 = 8$, $v_2 = -9$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$$64y^2 + 112y + 40 = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad 64y^2 + 112y + 57 = 0 \quad (2)$$

Nghiệm của (1) là $y_1 = -\frac{5}{4}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

Phương trình (2) vô nghiệm.

f) Đặt $z^2 - 2z + 2 = s$, ta được phương trình $\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} = \frac{6}{s+2}$.

MC : $s(s + 1)(s + 2)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$(s + 1)(s + 2) + 2s(s + 2) = 6s(s + 1)$$

hay $s^2 + 3s + 2 + 2s^2 + 4s - 6s^2 - 6s = 0$

Từ đó ta được phương trình bậc hai : $3s^2 - s - 2 = 0$, mà nghiệm là : $s_1 = 1$, $s_2 = -\frac{2}{3}$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$z^2 - 2z + 1 = 0$ mà nghiệm là $z_{1,2} = 1$

$z^2 - 2z + \frac{8}{3} = 0$ vô nghiệm.

**7.** a) Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên ta chia hai vế cho $x^2 \neq 0$, ta được phương trình :

$$x^2 + x - 10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \qquad (*)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, ta có : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$ hay $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Thay vào (*) được : $t^2 + t - 12 = 0$. Giải ra ta có : $t_1 = 3$, $t_2 = -4$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$x + \frac{1}{x} = 3$ hay $x^2 - 3x + 1 = 0$ mà nghiệm là $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

và $x + \frac{1}{x} = -4$ hay $x^2 + 4x + 1 = 0$ mà nghiệm là $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$.

b) Đặt $\frac{y+1}{y} = v$, ta được phương trình :

$$\frac{1}{v^2} + v^2 = \frac{17}{4} \quad \text{hay} \quad 4v^4 - 17v^2 + 4 = 0$$

Giải ra được $v_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $v_{3,4} = \pm 2$.

Vậy ta phải giải tiếp bốn phương trình :

$\frac{y+1}{y} = \pm\frac{1}{2}$ hay $2y + 2 = y$, từ đó $y_1 = -2$

$-2y - 2 = y$, từ đó $y_2 = -\frac{2}{3}$

và $\frac{y+1}{y} = \pm 2$ hay $y + 1 = 2y$, từ đó $y_3 = 1$

$y + 1 = -2y$, từ đó $y_4 = -\frac{1}{3}$.

c) Đặt $\frac{z^3 + z - 1}{z + 1} = s$, ta được phương trình

$\frac{1}{s} + s = 2$ hay $s^2 - 2s + 1 = 0$, mà nghiệm là $s_{1,2} = 1$.

Vậy ta phải giải tiếp phương trình :

$\frac{z^3 + z - 1}{z + 1} = 1$ hay $z^3 - 2 = 0$, mà nghiệm là $z = \sqrt[3]{2}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải phương trình :*

*d)* $x^3 + 1 + \frac{1}{x^3 + 1} = 2,5$ *e)* $y^4 - 2y^3 + y - 132 = 0$

*f)* $z^4 - 4z^3 - 19z^2 + 106z - 120 = 0$ *(trước hết hãy phân tích vế trái thành nhân tử)."*

Ta lần lượt có :

d) Đặt $x^3 + 1 = t$, phương trình trở thành $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ hay $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Giải ra được $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$$x^3 + 1 = 2 \quad \text{hay} \quad x^3 - 1 = 0 \qquad (1)$$

và $$x^2 + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad x^3 + \frac{1}{2} = 0 \qquad (2)$$

Giải (1) được nghiệm là $x_1 = 1$.

Giải (2) được nghiệm là $x_2 = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

e) Phương trình đã cho có thể viết : $(y^2 - y)^2 - (y^2 - y) - 132 = 0$

Đặt $y^2 - y = v$, ta có : $v^2 - v - 132 = 0$.

Giải ra được $v_1 = -11$, $v_2 = 12$.

Vậy ta phải giải tiếp hai phương trình :

$y^2 - y + 11 = 0$ vô nghiệm

và $y^2 - y - 12 = 0$ có nghiệm là $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

f) Ta phân tích vế trái thành nhân tử như sau :

$$z^4 - 4z^3 - 19z^2 + 76z + 30z - 120 = 0$$

hay $z^3(z - 4) - 19z(z - 4) + 30(z - 4) = 0$.

Biến đổi tiếp :

$$(z - 4)(z^3 - 19z + 30) = 0$$

hay $(z - 4)(z^3 - 3z^2 + 3z^2 - 9z - 10z + 30) = 0$

$$(z - 4)(z - 3)(z^2 + 3z - 10) = 0.$$

Giải ra được : $z_1 = 4$, $z_2 = 3$, $z_3 = 2$ và $z_4 = -5$.

**8.** a) Giải sử $x_1 > x_2$, thế thì

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2]$$

$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}.[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] \qquad (*)$$

Theo định lí Viète ta có $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$, $x_1x_2 = \frac{21}{16}$. Thay các giá trị này vào (*) được :

$$\sqrt{\frac{85}{16} - \frac{4.21}{16}} \cdot \left(\frac{85}{16} - \frac{21}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \frac{64}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{16} = \frac{64}{64} = 1$$

Vậy hiệu $x_1^3 - x_2^3 = 1$.

b) Gọi $y_1$, $y_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho, ta có :

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1 + y_2)(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2)$$

$$= (y_1 + y_2).[(y_1 + y_2)^2 - 3y_1y_2].$$

Theo định lí Viète thì $y_1 + y_2 = -p$, $y_1y_2 = q$. Thay vào đẳng thức cuối được : $-p(p^2 - 3q) = p(3q - p^2)$

Vậy tổng $y_1^3 + y_2^3 = p(3q - p^2)$.

c) Biểu thức đã cho có thể viết : $\dfrac{3(z_1 + z_2)^2 - z_1z_2}{4z_1z_2(z_1 + z_2)}$

Nhưng $z_1 + z_2 = -\dfrac{17}{3}$, $z_1z_2 = -\dfrac{14}{3}$ nên thay các giá trị này vào biểu thức trên được :

$$\frac{3.\left(-\frac{17}{3}\right)^2 - \left(\frac{-14}{3}\right)}{4.\left(\frac{-14}{3}\right).\left(-\frac{17}{3}\right)} = \frac{3.\frac{289}{9} + \frac{14}{3}}{\frac{-56}{3}.\frac{-17}{3}} = 101 : \frac{952}{9} = \frac{909}{952}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự :

*"d) Không giải phương trình $x^2 - 4x\sqrt{3} + 8 = 0$, hãy tính giá trị của biểu thức $\dfrac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{3x_1x_2^3 + 3x_1^3x_2}$.*

*e) Cho phương trình $y^2 - 2(k + 1) + 2k + 10 = 0$. Tìm giá trị của k để biểu thức $10y_1y_2 + y_1^2 + y_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.*

*f) Cho phương trình $z^2 + mz + n = 0$. Lập phương trình bậc hai mà nghiệm là $t_1 = z_1^2 + z_2^2$, $t_2 = z_1^3 + z_2^3$."*

Ta lần lượt có :

d) Biểu thức đã cho có thể viết :

$$\frac{6(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2}{3x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]} = \frac{6(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{MS}$$

Theo định lí Viète thì $x_1 + x_2 = 4\sqrt{3}$ và $x_1x_2 = 8$. Thay vào biểu thức trên được :

$$\frac{6(4\sqrt{3})^2 - 2.8}{3.8[(4\sqrt{3})^2 - 2.8]} = \frac{6.16.3 - 16}{24(16.3 - 16)} = \frac{16(18 - 1)}{24(48 - 16)} = \frac{2.17}{3.32} = \frac{17}{48}.$$

e) Trước tiên ta tìm xem khi nào phương trình đã cho có nghiệm.

Ta có $\Delta' = (k + 1)^2 - 2k - 10 = k^2 - 9 \geq 0$ khi $|k| \geq 3$, tức là khi $k \geq 3$ hoặc $k \leq -3$. Khi đó :

$$10y_1y_2 + y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 + 8y_1y_2.$$

Thay $y_1 + y_2 = 2(k + 1)$ và $y_1y_2 = 2k + 10$ vào được :

$$4(k + 3)^2 + 48 \geq 48.$$

Vậy biểu thức đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là 48 khi $k = -3$, phù hợp với điều kiện ở trên.

f) Ta có : $t_1 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = m^2 - 2n$

$$t_2 = (z_1 + z_2)^3 - 3(z_1 + z_2).z_1z_2 = -m^3 + 3mn$$

vì $z_1 + z_2 = -m$ và $z_1z_2 = n$.

Do đó các hệ số của phương trình bậc hai $t^2 + pt + q = 0$ mà nghiệm là $t_1$, $t_2$ sẽ bằng :

$$p = -(t_1 + t_2) = m^3 - m^2 - 3mn + 2n;$$

$$q = t_1t_1 = (m^2 - 2n)(-m^3 + 3mn).$$

**9.** a) Vì các nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ đều dương nên biệt thức $\Delta = p^2 - 4q \geq 0$ (1) và các hệ số của nó thỏa mãn các bất đẳng thức : $p = -x_1 - x_2 < 0$ (2)

$$q = x_1x_2 > 0 \qquad (3)$$

Giả sử bây giờ $y_1$, $y_2$ là nghiệm của phương trình

$$qy^2 + (p - 2rq)y + 1 - pr = 0$$

thì biệt thức của nó bằng $\Delta_1 = 4r^2q^2 + p^2 - 4q$, và theo (1) $\Delta_1 \geq 0$ với mọi r. Vậy $y_1$ và $y_2$ theo (2) và (3) và theo định lí Viète với $r \geq 0$ thì

$$y_1y_2 = \frac{1 - pr}{q} > 0, \text{ vậy } y_1 \text{ và } y_2 \text{ cùng dấu.}$$

Hơn nữa $y_1 + y_2 = -\dfrac{p - 2rq}{q} > 0$, do đó $y_1$ và $y_2$ dương với mọi $r \geq 0$.

b) Phương trình đã cho có thể viết sau khi quy đồng mẫu rồi khử mẫu

$$c^2(z - b) + c^2(z - a) = (z - a)(z - b)$$

hay $c^2z - bc^2 + c^2z - ac^2 = z^2 - az - bz + ab$

Từ đó có : $z^2 - (a + b + 2c^2)z + ab + (a + b)c^2 = 0$ (điều kiện $z \neq a$, $z \neq b$ và $c \neq 0$).

Biệt thức $\Delta = (a + b + 2c^2)^2 - 4[ab + (a + b)c^2] = (a - b)^2 + 4c^4$.

Do $\Delta \geq 0$ với mọi a, b, c nên phương trình đã cho luôn có nghiệm.

• ***Lời bình :*** Ta xét thêm các bài toán chứng minh sau đây :

*"Chứng minh rằng :*

*c) Phương trình bậc hai : $m^2x^2 + (n^2 + m^2 - p^2)x + n^2 = 0$ vô nghiệm nếu $m + n > p$ và $|m - n| < p$.*

*d) Biểu thức : $(y - 1)(y - 3)(y - 4)(y - 6) + 10$ là số dương với mọi y.*

*e) Phương trình bậc hai : $z^2 - 2(k - 1)z + k - 3 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi k."*

Ta lần lượt có :

c) Xét biệt thức của phương trình :

$$\begin{aligned}\Delta &= (n^2 + m^2 - p^2)^2 - 4m^2n^2\\ &= (n^2 + m^2 - p^2 - 2mn)(n^2 + m^2 - p^2 + 2mn)\\ &= [(m - n)^2 - p^2][(m + n)^2 - p^2].\end{aligned}$$

Vì $m + n > p$ và $|m - n| < p$ nên $(m + n)^2 > p^2$ và $(m - n)^2 < p^2$.

Vậy $\Delta < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Ta có : $(y^2 - 7y + 6)(y^2 - 7y + 12) + 10 = (y^2 - 7y)^2 + 2.9(y^2 - 7y) + 82$

$= (y^2 - 7y + 9)^2 + 1 > 0$ với mọi y.

e) Ta có : $\Delta' = k^2 - 3k + 4 = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ luôn dương với mọi k nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

**10.** Gọi $t_1$ và $t_2$ là các nghiệm của phương trình mà $t_1 = 2t_2$. Theo định lí Viète :

$$t_1 + t_2 = \frac{2m + 1}{2} \quad \text{và} \quad t_1t_2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}$$

Thay giá trị của $t_1$ vào hai đẳng thức trên ta được

$$3t_2 = \frac{2m + 1}{2} \quad \text{và} \quad 2t_2^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}$$

hay $2\left(\frac{2m + 1}{6}\right)^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}$ tức là $m^2 - 17m + 70 = 0$

Giải ra được $m_1 = 7$, $m_2 = 10$.

Thay các giá trị này vào phương trình đã cho ta được 2 phương trình bậc hai sau :

$2t^2 - 15t + 25 = 0$, mà nghiệm là $t_1 = 5$, $t_2 = 2,5$.

$2t^2 - 21t + 49 = 0$, mà nghiệm là $t'_1 = 7$, $t'_2 = 3,5$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho phương trình $4z^2 - 15z + 4k^2 = 0$. Tìm giá*

*trị của k sao cho một nghiệm của phương trình bằng bình phương của nghiệm kia và tìm các nghiệm đó."*

Gọi $z_1$ và $z_2$ là hai nghiệm của phương trình đã cho sao cho $z_2 = z_1^2$. Theo định lí Viète ta có :

$$z_1 + z_1^2 = \frac{15}{4}, \text{ tức là } 4z_1^2 + 4z_1 - 15 = 0$$

Giải ra được : $z_1 = \frac{3}{2}, z_1' = -\frac{5}{2}$ ; $z_2 = \frac{9}{4}, z_2' = \frac{25}{4}$.

Thay giá trị $z_1 = \frac{3}{2}$ này vào phương trình đã cho được :

$$4.\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 15.\frac{3}{2} + 4k^2 = 0 \quad \text{hay} \quad 9 - \frac{45}{2} + 4k^2 = 0.$$

Từ đó $4k^2 = \frac{45}{2} - 9 = \frac{27}{2}$.

Vậy $k^2 = \frac{27}{8}$ và $k = \pm\sqrt{\frac{27}{8}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Còn khi thay các giá trị còn lại thì đều được $k^2$ là số âm nên phải loại.

Tóm lại chỉ có hai giá trị của k là $\pm 1,5\sqrt{1,5}$.

**11.** a) Ta có phương trình tích dạng A.B = 0, từ đó phải giải A = 0 hoặc B = 0.

Giải phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ được hai nghiệm :

$$x_1 = 1 \text{ (vì } a + b + c = 0), \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Giải phương trình $x^2 + 4,5x + 3,5 = 0$ được hai nghiệm :

$$x_1 = -1 \text{ (vì } a - b + c = 0), x_2 = -3,5.$$

b) Điều kiện : $y \neq \pm 2$. MC : $(y + 2)(y - 2) = y^2 - 4$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$y - 2 + 4y = y^2 - 4 + 2(y + 2) \quad \text{hay} \quad y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Giải ra được $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Nhưng giá trị y = 2 không thỏa mãn điều kiện $y \neq \pm 2$, do đó phương trình chỉ có một nghiệm là y = 1.

c) Phương trình đã cho có thể viết :

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 = 2z^4 + 2$$

hay $z^4 - 4z^3 - 6z^2 - 4z + 1 = 0$.

Từ đó : $z^2 + \frac{1}{z^2} - 4\left(z + \frac{1}{z}\right) - 6 = 0$.

Đặt $z + \frac{1}{z} = t$ ta tìm được $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$. Do đó ta có phương trình $t^2 - 4t - 8 = 0$.

Giải ra được : $t_1 = 2(1 + \sqrt{3})$, $t_2 = 2(1 - \sqrt{3})$.

Từ đó : $z + \frac{1}{z} = 2(1 + \sqrt{3})$ hay $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 1 = 0$ (1)

và $z + \frac{1}{z} = 2(1 - \sqrt{3})$ hay $z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 1 = 0$ (2)

Giải (1) được : $z_{1,2} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 1} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}$

$$= (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}.\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Tương tự, giải (2) thì phương trình (2) vô nghiệm.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *Giải phương trình :*

*d)* $(x - 1)(x - 2) = (p - 1)(p - 2)$

*e)* $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$."

Ta lần lượt có :

d) Thực hiện phép nhân được : $x^2 - 3x + 2 = p^2 - 3p + 2$

hay $(x^2 - p^2) - 3(x - p) = 0$.

Từ đó được phương trình tích $(x - p)(x + p - 3) = 0$.

Giải ra được nghiệm là : $x_1 = p$, $x_2 = 3 - p$.

e) Đặt $z^3 = t$, ta có phương trình ẩn t là : $t^2 - 7t - 8 = 0$.

Giải ra được $t_1 = -1$ (vì $a - b + c = 0$) và $t_2 = 8$.

Suy ra : $z^3 = -1$ nên $z_1 = -1$;

$z^3 = 8$ nên $z_2 = 2$.

**12.** a) Đặt $y = x^2$ ta có phương trình :

$$m^2p^2y^2 = p^4y - p^2m^2 + m^4y$$

hay $m^2p^2y^2 - (m^4 + p^4)y + m^2p^2 = 0$ (với $m > p > 0$).

$$\Delta = (m^4 + p^4)^2 - 4m^4p^4 = (m^4 - p^4)^2; \qquad \sqrt{\Delta} = m^4 - p^4.$$

$$y_1 = \frac{m^4 + p^4 + m^4 - p^4}{2m^2p^2} = \frac{2m^4}{2m^2p^2} = \frac{m^2}{p^2};$$

$$y_2 = \frac{m^4 + p^4 - m^4 + p^4}{2m^2p^2} = \frac{p^2}{m^2}.$$

Từ đó : $x^2 = \left(\frac{m}{p}\right)^2$ ; $x_{1,2} = \pm\frac{m}{p}$; $x^2 = \left(\frac{p}{m}\right)^2$ ; $x_{3,4} = \pm\frac{p}{m}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm là : $\pm\frac{m}{p}$ và $\pm\frac{p}{m}$.

b) Phương trình đã cho có dạng $(y + m)^4 + (y + n)^4 = p$.

Để giải nó ta đặt ẩn phụ $t = y + \frac{m+n}{2}$ sẽ được phương trình

$$\left(t + \frac{m-n}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{m-n}{2}\right)^4 = 0.$$

Sau khi khai triển sẽ được phương trình trùng phương ẩn là t :

$ut^4 + vt^2 + s = 0$. Giải ra sẽ tìm được y.

Vận dụng điều này ta đặt $t = y - \frac{1}{2}$ sẽ được phương trình :

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = 97 \quad \text{hay} \quad 16t^4 + 24t - 775 = 0;$$

$(4t^2 + 3)^2 = 28^2$.

Do $4t^2 + 3 > 0$ nên $4t^2 + 3 = 28$ hay $t^2 = \frac{25}{4}$; $t = \pm\frac{5}{2}$.

Thay vào $t = y - \frac{1}{2}$ ta có : $y_1 = t + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ ;

$$y_2 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2.$$

c) Ta nhận thấy rằng : 7972 = 1993.4, nên nếu đặt a = 1993 thì 7972 = 4a và phương trình đã cho có dạng

$z^4 - 2a^2z^2 + a^4 = 4az + 1$

hay $(z^2 + a^2)^2 = z^4 + 2a^2z^2 + a^4 = 4az + 1 + 4a^2z^2 = (2az + 1)^2$.

Vậy ta có : hoặc $z^2 + a^2 = 2az + 1$ (1)

hoặc $z^2 + a^2 = -(2az + 1)$ (2)

Phương trình (1) có thể viết : $(z - a)^2 = z^2 - 2az + a^2 = 1$,

từ đó $z = a \pm 1$.

Phương trình (2) vô nghiệm vì $z^2 + 2az + a^2 = (z + a)^2 > -1$.

Thay a = 1993 ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm là :

$z_1 = 1992$; $z_2 = 1994$.

- ***Lời bình :***

1. *Với phương trình $y^4 + (y - 1)^4 - 97 = 0$, ở trên, ta còn có thể giải*

*như sau :*

Đặt $y - 1 = t$ ta đưa phương trình đã cho về hệ $\begin{cases} y^4 + t^4 = 97 \\ y - t = 1 \end{cases}$

Ta đưa vào ẩn mới $y + t = u$ và kết hợp với $y - t = 1$, ta có :

$y = \dfrac{u+1}{2}$, $t = \dfrac{u-1}{2}$ (*) rồi thay vào $y^4 + t^4 = 97$ được :

$$\left(\frac{u+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{u-1}{2}\right)^4 = 97$$

Thực hiện các phép tính được phương trình trùng phương :

$u^4 + 6u^2 - 775 = 0$. Giải ra được hai nghiệm $u_1 = 5$, $u_2 = -5$.

Thay các giá trị này vào (*) sẽ được $y_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, $y_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$.

2. Tương tự : *"Giải phương trình :*

*d)* $x^4 - 25x^2 = k^2x^2 - 25k^2$ *(với* $k > 0$*)*

*e)* $2y^4 - 11y^3 + 19y^2 - 11y + 2 = 0$*."*

Ta lần lượt có :

d) Đặt $t = x^2$ ta có phương trình :

$$t^2 - 25t = k^2t - 25k^2 \quad \text{hay} \quad t^2 - (25 + k^2)t + 25k^2 = 0.$$

Giải ra được $t_1 = 25$, $t_2 = k^2$.

Từ đó $x^2 = 25$; $x_{1,2} = \pm 5$ và $x^2 = k^2$; $x_{3,4} = \pm k$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $\pm 5$ và $\pm k$.

e) Ta nhận thấy giá trị $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có thể chia hai vế cho $y^2 \neq 0$ được

$$2y^2 - 11y + 19 - \frac{11}{y} + \frac{2}{y^2} = 0$$

hay $\quad 2\left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) - 11\left(y + \dfrac{1}{y}\right) + 19 = 0.$

Đặt $y + \dfrac{1}{y} = t$ thì $y^2 + \dfrac{1}{y^2} = t^2 - 2$, do đó phương trình trở thành :

$$2(t^2 - 2) - 11t + 19 = 0 \quad \text{hay} \quad 2t^2 - 11t + 15 = 0.$$

Giải ra được $t_1 = 3$, $t_2 = \dfrac{5}{2}$.

Với $y + \dfrac{1}{y} = 3$ ta được $y^2 - 3y + 1 = 0$ mà nghiệm là $y_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Với $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ ta được $2y^2 - 5y + 2 = 0$ mà nghiệm là $y_3 = 2$, $y_4 = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, 2 và $\frac{1}{2}$.

**13.** a) Đặt $3x^2 + 5x + 8 = t$, ta được phương trình :

$$\sqrt{t} - \sqrt{t-7} = 1 \quad \text{hay} \quad \sqrt{t-7} = \sqrt{t} - 1 \text{ (điều kiện } t \geq 7)$$

Bình phương hai vế :

$$t - 7 = t - 2\sqrt{t} + 1 \quad \text{hay} \quad 2\sqrt{t} = 8,\ \sqrt{t} = 4, \text{ vậy } t = 16.$$

Thay vào trên được phương trình bậc hai $3x^2 + 5x - 8 = 0$, mà nghiệm là $x_1 = 1$ (vì $a + b + c = 0$), $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{8}{3}$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

b) Trục căn thức ở mẫu ta được : $\frac{21 + \sqrt{441 - y^2}}{y} = \frac{21}{y}$.

Từ đó $\sqrt{441 - y^2} = 0$. Vậy $y_{1,2} = \pm 21$.

c) Phương trình đã cho có thể viết : $\sqrt{z^2 - \frac{7}{z^2}} = z - \sqrt{z - \frac{7}{z^2}}$ (với $z > 0$).

Bình phương hai vế :

$$z^2 - \frac{7}{z^2} = z^2 + z - \frac{7}{z^2} - 2z\sqrt{z - \frac{7}{z^2}} \quad \text{hay} \quad z = 2z\sqrt{z - \frac{7}{z^2}}.$$

Chia hai vế cho $z > 0$ được :

$$1 = 2\sqrt{z - \frac{7}{z^2}} \quad \text{hay} \quad 4z^3 - z^2 - 28 = 0 \text{ hay } (z - 2)(4z^2 + 7z + 14) = 0$$

Từ đó hoặc $z - 2 = 0$; $z = 2$ hoặc $4z^2 + 7z + 14 = 0$, vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm là $z = 2$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Giải phương trình :*

*d)* $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}$

*e)* $\sqrt{y - \frac{1}{y}} - \sqrt{1 - \frac{1}{y}} = \frac{y - 1}{y}$ $(y \neq 0)$ *f)* $\frac{z^3}{\sqrt{4 - z^2}} + z^2 - 4 = 0$."

Ta lần lượt có :

d) Đặt $2x - 5 = t^2$, ta có $x = \frac{t^2 + 5}{2}$. Thay giá trị của x vào phương trình đã cho được :

$$\sqrt{\frac{t^2+5}{2}-2+t}+\sqrt{\frac{t^2+5}{2}+2+3t}=7\sqrt{2}$$

hay $\sqrt{t^2+5-4+2t}+\sqrt{t^2+5+4+6t}=14$;

$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14$. Giải ra được $t = 5$.

Từ đó $x = \dfrac{25+5}{2} = 15$.

e) Ta có : $\sqrt{\dfrac{y^2-1}{y}}-\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}-\left(\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}\right)^2=0$

hay $\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}\left(\sqrt{y+1}-1-\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}\right)=0.$

Từ đó : $\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}=0$, $y_1 = 1$; hoặc $\sqrt{y+1}-\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}-1=0$, hay sau khi biến đổi sẽ được : $(y^2-y)-2\sqrt{y^2-y}+1=0$

$(\sqrt{y^2-y}-1)^2=0$ hay $y^2-y-1=0$.

Giải ra được : $y_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là 1 và $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

f) Với điều kiện $4-z^2>0$ hay $|z|<2$, ta có thể viết ;

$$z^3=(4-z^2).\sqrt{4-z^2}.$$

Bình phương hai vế được : $z^6=(4-z^2)^3$ hay $z^2=4-z^2$.

Từ đó : $z^2=2$ và $z=\pm\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện.

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### A. ĐỊNH LÍ VIÈTE MỞ RỘNG

**1. *Giải một số bài toán***

*a) Bài toán mở đầu*

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm là $x_1$, $x_2$. Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$, $S_0=2$. Chứng minh rằng :

$$aS_{n-2}+bS_{n-1}+cS_n=0 \quad (*) \text{ với mọi n.}$$

**Giải**

Ta có : $S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^n + x_2^n)$

$$= -\frac{b}{a}S_{n+1} - \frac{c}{a}S_n.$$

Từ đó : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1^0 + x_2^0 = 2$, suy ra hệ thức (*) đúng với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

*b) Ứng dụng :*

**Bài 1.** *Cho $x_1$ và $x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$. Hãy tính $x_1^7 + x_2^7$.*

**Giải**

Theo bài toán mở đầu ta có :

$S_{n+2} = 2(S_{n+1} + S_n)$ với mọi $n = 0, 1, 2$

và $S_0 = 2$, $S_1 = 2$.

Từ đó lần lượt tính được :

$S_2 = 8$, $S_3 = 20$, $S_4 = 56$, $S_5 = 152$, $S_6 = 416$, $S_7 = 1136$.

**Bài 2.** *Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4 + \sqrt{15})^7$.*

**Giải**

Đặt $x_1 = 4 + \sqrt{15}$, $x_2 = 4 - \sqrt{15}$, ta có : $x_1x_2 = 1$; $x_1 + x_2 = 8$.

Khi đó $x_1$ và $x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$, theo bài toán mở đầu ta có :

$$S_{n+2} - 8S_{n+1} + S_n = 0.$$

Từ đó tính được : $S_1 = 8$, $S_2 = 62$, $S_3 = 488$, $S_4 = 3842$,

$S_5 = 30\,248$, $S_6 = 238142$, $S_7 = 1874\,888$.

Vậy $x_1^7 = 1\,874\,888 - x_2^7$.

Mà $0 < x_2^7 < (4 - \sqrt{15})^7 < 1$ nên $1\,874\,887 < 1\,874\,888 - x_2^7 < 1\,874\,888$.

Do đó : $1\,874\,887 < x_1^7 = (4 + \sqrt{15})^7 < 1\,874\,888$.

Vậy số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4 + \sqrt{15})^7$ là 1 874 887.

**2. *Giải hệ phương trình***

*a) Nếu phương trình bậc bốn :* $x^4 + M_1x^3 + M_2x^2 + M_3x + M_4 = 0$

có bốn nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4$ thì theo định lí Viète ta có :

– $M_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$M_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

– $M_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

$M_4 = x_1x_2x_3x_4$.

*b) Ứng dụng :*

**Bài 1.** *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 57. \end{cases}$

**Giải**

Gọi x, y, z là ba nghiệm $x_1$, $x_2$, $x_3$ của một phương trình bậc ba

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3 = -M_1$, suy ra $M_1 = -3$.

Từ phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 21$, ta có :

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = M_1^2 - 2M_2$,

suy ra $2M_2 = M_1^2 - S_2 = 9 - 21 = -12$, từ đó $M_2 = -6$.

Từ phương trình $x^3 + y^3 + z^3 = 57$, ta có :

$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) +$

$+ 3x_1x_2x_3$

$= -M_1(S_2 - M_2) - 3M_3 = -M_1^3 + 3M_1M_2 - 3M_1$

Suy ra $3M_3 = -57 + 27 + 54 = 24$, từ đó $M_3 = 8$.

Như vậy $x_1$, $x_2$, $x_3$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ mà nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

Vậy hệ đã cho có sáu nghiệm là :

(1; –2; 4), (1; 4; –2), (–2; 1; 4), (–2; 4; 1), (4; 1; –2) và (4; –2; 1).

**Bài 2.** *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} xyzt = 1 \\ x + y + z + t = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4. \end{cases}$

Từ hai phương trình cuối có $(x + z) + (y + t) = 5$ và $(x + z)(y + t) = 4$.

Giải hệ này được nghiệm $x + z = 1$, $y + t = 4$,

hoặc $x + z = 4$, $y + t = 1$ (1)

Theo định lí Viète, coi x, y, z, t là nghiệm của phương trình :

$$x^4 + M_1x^3 + M_2x^2 + M_3x + M_4 = 0 \qquad (2)$$

Từ phương trình thứ nhất ta có $M_4 = 1$, từ phương trình thứ hai có $M_1 = M_3$, suy ra nếu $x_1$ là nghiệm của (*) thì $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$ cũng là nghiệm của (2) nên $x_1x_2 = 1$. Tương tự $x_3x_4 = 1$.

Xét các trường hợp sau (với chú ý x, y, z, t đều khác 0) :

- Trường hợp xy = 1, zt = 1. Từ phương trình thứ ba có yz + tx = 2, suy ra $\frac{1}{xt} + xt = 2$ hay $(xt - 1)^2 = 0$, suy ra xt = 1, từ đó x = z, y = t. Từ (1) sẽ có : $x = z = \frac{1}{2}$, y = t = 2 và x = z = 2, $y = t = \frac{1}{2}$.
- Trường hợp xz = 1, yz = 1. Lập luận tương tự hệ đã cho có các nghiệm như thế.
- Trường hợp xz = 1, yt = 1. Kết hợp với (1) suy ra hệ vô nghiệm.

## B. MỘT HẰNG ĐẲNG THỨC ĐẸP

Ta đã biết hằng đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Từ đó suy ra :

a) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ tương đương với $\left[\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = y = z; \end{array}\right.$

b) $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ nếu x, y, z không âm.

Ta hãy vận dụng hằng đẳng thức trên vào ba bài toán sau đây :

1. *Trục căn ở mẫu của biểu thức :* $M = \frac{1}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p}}$.

**Giải**

Chỉ cần nhân cả tử và mẫu của biểu thức với

$$\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{p^2} - \sqrt[3]{mn} - \sqrt[3]{np} - \sqrt[3]{pm}$$

Ta sẽ có mẫu là $(m + n + p)^3 - 27mnp$.

2. *Giải phương trình :* $(z - 3)^3 + (z + 1)^3 = 8(z - 1)^3$.

**Giải**

Do tổng $(x - y) + (y - t) + (t - x) = 0$

nên $(x - y)^3 + (y - t)^3 + (t - x)^3 = 3(x - y)(y - t)(t - x)$.

Phương trình đã cho có thể viết :

$[(3z + 3) - (2z + 6)]^3 + [(2z + 6) - (z + 5)]^3 + [(z + 5) - (3z + 3)]^3 = 0$

hay $3(z - 3)(z + 1)(-2z + 2) = 0$ mà nghiệm là $z_1 = 3$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

3. *Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện :*

$$a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a).$$

*Chứng minh rằng tổng :* $T = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ *chia hết cho 81.*

**Giải**

Do tổng $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$ nên ta có

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

Xét ba số dư của phép chia a, b, c cho 3.

- Nếu cả ba số dư khác nhau là (0; 1; 2) thì $(a + b + c)$ chia hết cho 3, khi đó tích $(a - b)(b - c)(c - a)$ không chia hết cho 3, trái với bài ra.
- Nếu có hai số dư bằng nhau thì $a + b + c$ không chia hết cho 3 trong khi đó một trong ba hiệu $a - b$, $b - c$, $c - a$ chia hết cho 3, trái với bài ra.

Vậy chỉ còn trường hợp cả ba số a, b, c đều có cùng số dư khi chia cho 3. Khi đó tích $3(a - b)(b - c)(c - a)$ chia hết cho 3.3.3.3 nên tổng T chia hết cho 81.

## C. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO QUY VỀ BẬC HAI

Phương trình tổng quát bậc n có dạng

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

và có nhiều nhất là n nghiệm thực.

### 1. *Phương trình tích*

**Ví dụ :** Giải phương trình $(x - 2)(x - 7)(8 - x)(12 - x) = 0$.

Nếu thực hiện phép nhân ở vế trái sẽ được một phương trình bậc bốn.

Nhưng ta có ngay khi áp dụng tính chất của một tích nhiều thừa số bằng 0 :

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x - 7 = 0 \\ 8 - x = 0 \\ 12 - x = 0. \end{array}\right. \quad \text{Từ đó} \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 8 \\ x_4 = 12. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm.

### 2. *Phương trình trùng phương*

Dạng tổng quát là $ax^4 + bx^2 + c = 0$, mà cách giải là đặt $y = x^2 \geq 0$ để đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn là y : $ay^2 + by + c = 0$ (*). Từ đó :

- nếu (*) có 2 nghiệm dương thì phương trình trùng phương có 4 nghiệm.
- nếu (*) có 1 nghiệm dương thì phương trình trùng phương có 2 nghiệm.
- nếu (*) có 2 nghiệm âm thì phương trình trùng phương vô nghiệm.
- nếu (*) vô nghiệm thì phương trình trùng phương vô nghiệm.

**Ví dụ :** Giải phương trình $x^4 + 9x^2 + 20 = 0$.

Đặt $y = x^2 \geq 0$ ta có phương trình bậc hai ẩn y sau : $y^2 + 9y + 20 = 0$. Giải ra được hai nghiệm $y_1 = -4$, $y_2 = -5$. Cả hai nghiệm đều âm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

### 3. *Phương trình vô tỉ*

Đó là phương trình có ẩn nằm dưới dấu căn.

**Ví dụ :** Giải phương trình $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$.

Điều kiện để phương trình có nghĩa là các biểu thức dưới dấu căn phải không âm, tức là :

$$\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{5} \\ x \geq \dfrac{2}{3} \\ x \geq 1. \end{cases} \quad \text{Suy ra } x \geq 1.$$

Với điều kiện $x \geq 1$ ta bình phương hai vế được :

$$5x - 1 = 4x - 3 + 2\sqrt{(x-1)(3x-2)}$$

hay $\quad x + 2 = 2\sqrt{(x-1)(3x-2)}$.

Lại bình phương tiếp được :

$$(x+2)^2 = 4(x-1)(3x-2) \quad \text{hay} \quad 11x^2 - 24x + 4 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{2}{11}$ (loại). Phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 2$.

### 4. *Phương trình bậc ba*

Dạng tổng quát là : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Phương trình này có hai tính chất :

- nếu $a + b + c + d = 0$ thì có một nghiệm $x = 1$
- nếu $a - b + c - d = 0$ thì có một nghiệm $x = -1$.

**Ví dụ :** Giải phương trình $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

Ta phát hiện một nghiệm đặc biệt bằng cách thử trực tiếp, đó là $x = -1$.

Thành thử vế phải chia hết cho $x + 1$ và được thương là $2x^2 + 5x + 2$.

Vậy phương trình đã cho có thể viết : $(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$.

Giải ra được ba nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ và $x_3 = -\dfrac{1}{2}$.

### 5. *Phương trình bậc bốn*

Dạng tổng quát là : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

**Ví dụ :** Giải phương trình $t^4 + 12t^3 + 32t^2 - 8t - 4 = 0$.

Ở đây khó đoán được một nghiệm đặc biệt, nên phải tìm cách nhóm các số hạng để phân tích vế trái ra thừa số.

Ta có thể viết $32t^2 = 36t^2 - 4t^2$ và nhóm các số hạng thích hợp như sau

$$(t^4 + 12t^3 + 36t^2) - (4t^2 + 8t + 4) = (t^2 + 6t)^2 - (2t + 2)^2$$
$$= (t^2 + 8t + 2)(t^2 + 4t - 2)$$

Vậy ta được phương trình tích : $(t^2 + 8t + 2)(t^2 + 4t - 2) = 0$

Giải ra được nghiệm là : $t_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14}$; $t_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm.

***Chú ý.*** *Phương trình hồi quy*

Nếu trong phương trình bậc bốn ta có : $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$ với $e \neq 0$ thì phương trình này gọi là phương trình hồi quy.

**Ví dụ :** Giải phượng trình $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Ở đây ta có $\frac{e}{a} = \frac{50}{2} = 25$ ; $\frac{d}{b} = \frac{-105}{-21} = 5$, như thế $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

Cách giải như sau :

Do $x = 0$ không phải là nghiệm nên chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ được :

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0.$$

Đặt $x + \frac{5}{x} = y$ ta có : $x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$. Do đó phương trình có thể viết dưới dạng $2y^2 - 21y + 54 = 0$. Giải ra được $y_1 = 6$, $y_2 = 4,5$.

Với $y_1 = 6$ thì $x + \frac{5}{x} = 6$ hay $x^2 - 6x + 5 = 0$ mà nghiệm là 1 và 5.

Với $y_2 = 4,5$ thì $x + \frac{5}{x} = 4,5$ hay $x^2 - 4,5x + 5 = 0$ mà nghiệm là 2 và 2,5.

Vậy phương trình hồi quy đã cho có bốn nghiệm là :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = 2 \text{ và } x_4 = 2,5.$$

# §9. HAI LOẠI TỨ GIÁC ĐẶC BIỆT : HÌNH THANG VÀ HÌNH BÌNH HÀNH

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Tứ giác. Hình thang***

a) Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

b) Tổng các góc của một tứ giác bằng $360^o$.

c) Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

d) Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Trong hình thang cân : hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.

e) Dấu hiệu nhận biết :

– Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

– Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

f) Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

g) Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

h) Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

***2. Hình bình hành***

a) Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

Trong hình bình hành : các cạnh đối bằng nhau; các góc đối bằng nhau; hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Năm dấu hiệu nhận biết hình bình hành :

– Tứ giác có các cạnh đối song song

– Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau

– Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau

– Tứ giác có các góc đối bằng nhau

– Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

c) Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Chứng minh rằng :

a) Tổng các đường chéo của một tứ giác MNPQ nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn nửa chu vi của tứ giác;

b) Với mọi điểm nằm trong tứ giác tổng các khoảng cách từ điểm đó đến các đỉnh của tứ giác thì nhỏ hơn nửa chu vi tứ giác.

**2.** Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 120^o$, $\widehat{B} = 100^o$, $\widehat{C} = 80^o$. Các phân giác trong tại A, B, C, D cắt nhau theo thứ tự tại M, N, P, Q. Tính số đo mỗi góc trong tứ giác MNPQ.

**3.** Nối trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD ta được tứ giác KLMN trong đó K, L, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Tính tỉ số diện tích của tứ giác KLMN và tứ giác ABCD.

**4.** Cho P, Q, R, S là bốn điểm trên các cạnh của tứ giác ABCD sao cho $\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA} = k$ và diện tích tứ giác PQRS đúng bằng 52% diện tích tứ giác ABCD. Chứng minh rằng k có hai giá trị là $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{2}$.

**5.** Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AD = BC). Gọi I là giao điểm hai đường chéo và M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AI, DI, BC. Nếu $\widehat{AIB} = 60^o$ thì $\Delta MNP$ là tam giác gì ?

**6.** Cho hình thang EFGH có tổng hai đáy EF và GH bằng cạnh bên EH. Gọi M là trung điểm của cạnh bên FG. Đoạn EM kéo dài cắt HG tại K. Chứng minh :

a) $\Delta EHK$ cân.

b) Các phân giác trong của góc E và góc H đi qua M.

c) $\Delta HEK$ đều nếu $\widehat{HEF} = 120^o$.

**7.** Cho tam giác DEF cân tại D. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh DE, EF, DF.

a) Các tứ giác DHIK, EHKF và DEIK là hình gì ?

b) Tứ giác DEIK là hình gì nếu $\Delta DEF$ đều ?

**8.** Chứng minh rằng :

a) Nếu tổng khoảng cách giữa các trung điểm của từng cặp cạnh đối của một tứ giác bằng nửa chu vi của tứ giác thì tứ giác đó là hình bình hành.

b) Nếu một tứ giác có các đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối mà đồng quy thì tứ giác đó là hình bình hành.

**9.** Cho các điểm P và Q trên các cạnh AB và BC của tam giác nhọn ABC. Các đường vuông góc tại P với AB và tại Q với BC cắt nhau ở O. Gọi M là trung điểm của AC, chứng minh rằng MP = MQ khi và chỉ khi $\widehat{AOP} = \widehat{COQ}$.

**10.** Cho tứ giác ABCD. Dựng hình bình hành DBCE. Chứng minh rằng diện tích ΔACE bằng diện tích tứ giác ABCD.

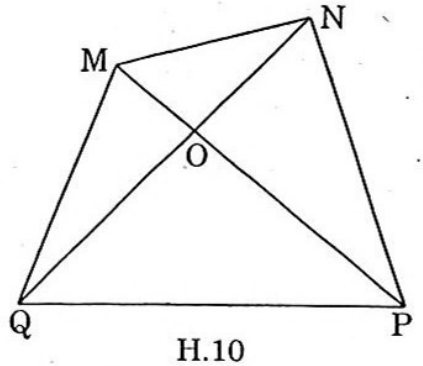
**11.** Cho hình bình hành ABCD với O là giao điểm hai đường chéo. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Các đoạn BE và FD cắt đường chéo AC theo thứ tự tại G và H.

a) Chứng minh rằng AG = GH = HC.

b) Xét hình dạng của tứ giác EGFH.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) Gọi O là giao điểm các đường chéo của tứ giác MNPQ (hình 10). Xét các bất đẳng thức trong bốn tam giác tạo thành ta có :



H.10

$$MN + MQ > QN$$
$$MN + NP > MP$$
$$NP + QP > QN$$
$$QP + QM > MP.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức này rồi chia cho 2 được :

$$\underbrace{MN + NP + QP + QM}_{\text{chu vi}} > \underbrace{QN+MP}_{\text{đường chéo}}$$

b) Tương tự, từ bốn đẳng thức :

$$MN < MO + ON; \qquad NP < NO + OP$$
$$PQ < QO + OP; \qquad QM < QO + OM$$

ta sẽ được :

$$\frac{MN + NP + PQ + QM}{2} < MO + OP + QO + ON = MP + QN,$$

tức là nửa chu vi nhỏ hơn tổng hai đường chéo.

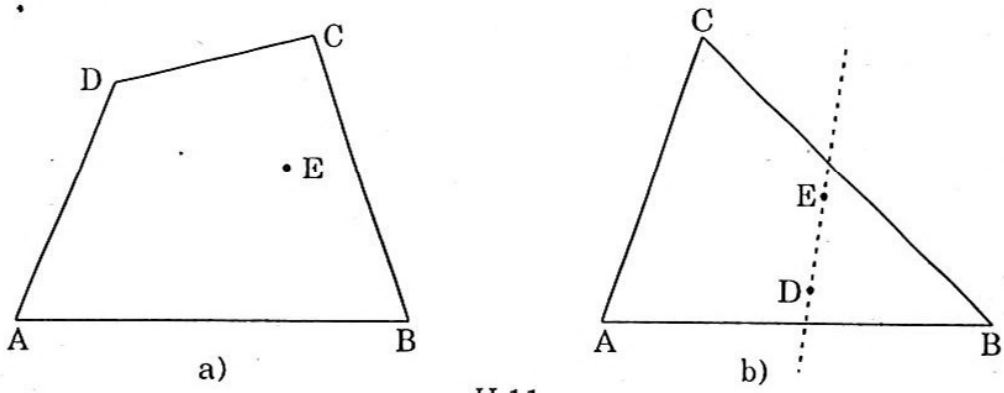
- ***Lời bình :*** *"Chứng minh rằng từ 5 điểm đã cho trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, bao giờ cũng có thể chọn ra 4 điểm là các đỉnh của một tứ giác lồi."*

Cách giải như sau :

Trong năm điểm A, B, C, D, E (hình 11) đã cho bao giờ cũng chọn được

hai điểm (chẳng hạn A và B) sao cho ba điểm còn lại nằm về cùng một phía của đường thẳng AB. Lại có thể chọn một điểm thứ ba, chẳng hạn C, sao cho ba điểm A, D, E nằm về cùng một phía của đường thẳng BC.

– Nếu có một điểm thứ tư nữa, chẳng hạn D, sao cho ba điểm A, B, E nằm về cùng một phía của đường thẳng CD (hình 11a) thì ABCD là tứ giác lồi phải tìm.




H.11

– Nếu tam giác ABC chứa hai điểm D và E (hình 11b) thì D và E cùng với hai đỉnh của tam giác ABC ở về cùng một phía của đường thẳng DE (chẳng hạn A và C) là bốn đỉnh của tứ giác lồi ACED.

**2.** Ta có (hình 12) :

$$\widehat{A} = 120^o \quad \text{và} \quad \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 60^o.$$

Tương tự $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 50^o$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 40^o$.

Do tổng các góc trong một tứ giác bằng $360^o$ nên :

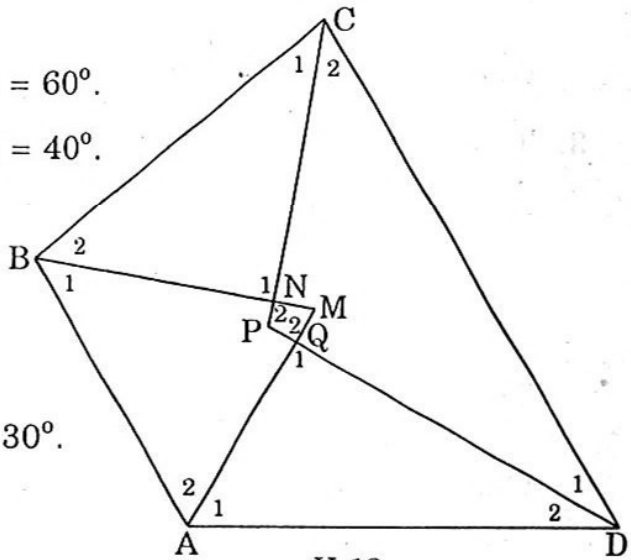
$\widehat{D} = 360^o - (120^o + 100^o + 80^o)$

$= 60^o$.

Biết $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (gt) nên $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 30^o$.

Trong $\Delta AMB$ ta có :

$$\widehat{M} + \widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = 180^o,$$




H.12

suy ra : $\widehat{M} = 180^o - (\widehat{A}_2 + \widehat{B}_1) = 180^o - (60^o + 50^o) = 70^o$.

Tương tự, trong $\Delta CPD$ ta có :

$$\widehat{P} = 180^o - (\widehat{C}_2 + \widehat{D}_1) = 180^o - (40^o + 30^o) = 110^o.$$

Trong $\Delta BNC$ ta có : $\widehat{N}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 = 180^o$,

suy ra $\widehat{N}_1 = 180^o - (\widehat{B}_2 + \widehat{C}_1) = 180^o - (50^o + 40^o) = 90^o$;

$\widehat{N}_2 = \widehat{N}_1$ (đối đỉnh) nên $\widehat{N}_2 = 90^o$.

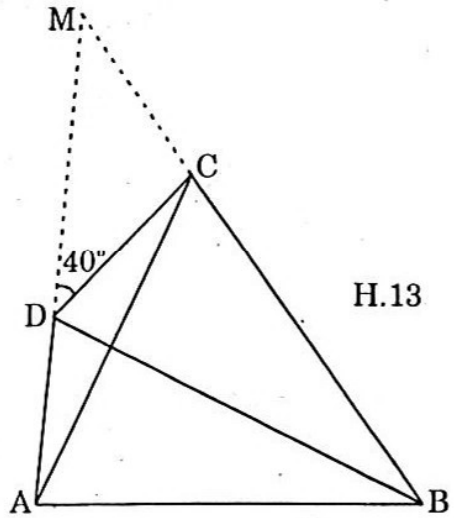
Tương tự, trong $\Delta AQD$ ta có :

$\widehat{Q}_1 = 180^o - (\widehat{A}_1 + \widehat{D}_2) = 180^o - (60^o + 30^o) = 90^o$;

$\widehat{Q}_2 = \widehat{Q}_1$ (đối đỉnh) nên $\widehat{Q}_2 = 90^o$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 85^o$, $\widehat{B} = 55^o$, góc ngoài tại D bằng $40^o$. Tính góc C (hai cách)."*

Ta có (hình 13) :



H.13

– *Cách 1.* Vì góc ngoài tại D bằng $40^o$ nên góc D của tứ giác bằng $180^o - 40^o = 140^o$. Biết tổng các góc trong tứ giác bằng $360^o$ nên $\widehat{C} = 360^o - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D})$

$= 360^o - (85^o + 55^o + 140^o) = 80^o$.

– *Cách 2.* Kéo dài AD cho cắt BC kéo dài tại M. Trong $\Delta MAB$ ta có :

$\widehat{M} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$,

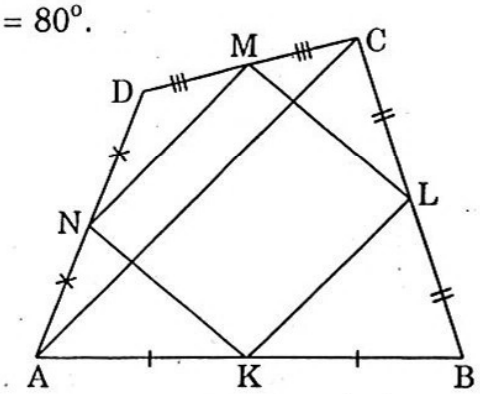
suy ra : $\widehat{M} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 40^o$.

Trong $\Delta MDC$ có : $\widehat{M} + \widehat{MDC} + \widehat{MCD} = 180^o$,

suy ra : $\widehat{MCD} = 180^o - (\widehat{M} + \widehat{MDC}) = 180^o - (40^o + 40^o) = 100^o$.

Góc C của tứ giác kề bù với $\widehat{MCD}$ nên $\widehat{C} = 80^o$.

**3.** Ta có (hình 14) :



H.14

KL là đường trung bình của $\Delta ABC$ nên

$$S_{KBL} = \frac{1}{4}S_{ABC} \qquad (1)$$

Tương tự : $S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ADC} \qquad (2)$

Cộng từng vế (1) và (2) được :

$\frac{1}{4}(S_{ADC} + S_{ABC}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Tương tự, $S_{AKN} + S_{LCM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Từ đó : $S_{KLMN} = S_{ABCD} - S_{KBL} - S_{MDN} - S_{AKN} - S_{LCM}$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Vậy tỉ số diện tích hai tứ giác KLMN và ABCD bằng $\frac{1}{2}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán chứng minh sau :

*"Gọi S và P theo thứ tự là diện tích và chu vi của tứ giác MNPQ, chứng minh các bất đẳng thức :*

*a)* $S \le \frac{1}{4}(MN + PQ)(MQ + NP)$

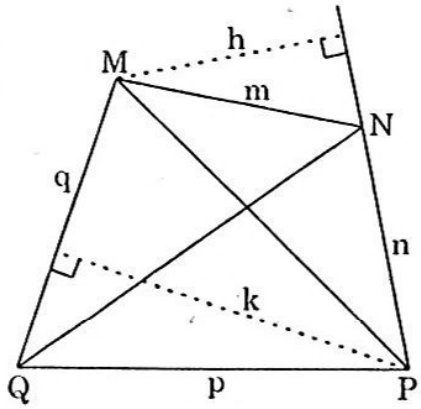
*b)* $4S \le (MN + PQ)(MQ + NP) \le P^2$."

Cách giải như sau :

Để tính toán cho gọn, ta kí hiệu các độ dài như trên hình 15, ta phải chứng minh các bất đẳng thức :

$$S \le \frac{1}{4}(m + p)(n + q)$$

và $4S \le (m + p)(n + q) \le P^2$.



H.15

Thật vậy :

a) Ta lần lượt có :

$$\left.\begin{aligned} S_{MNP} &= \frac{1}{2}n.h \le \frac{1}{2}mn \\ S_{MPQ} &= \frac{1}{2}q.k \le \frac{1}{2}pq \end{aligned}\right\} \quad S_{MNPQ} \le \frac{1}{2}(mn + pq)$$

Tương tự ta chứng minh được $S_{MNPQ} \le \frac{1}{2}(mq + np)$

Vậy $S_{MNPQ} \le \frac{1}{4}(mn + pq + mq + np) = \frac{1}{4}(m + p)(n + q)$.

b) Từ hệ thức ở câu a) ta suy ra ngay $4S \le (m + p)(n + q)$ và

$$2S \le mn + pq \qquad (1)$$

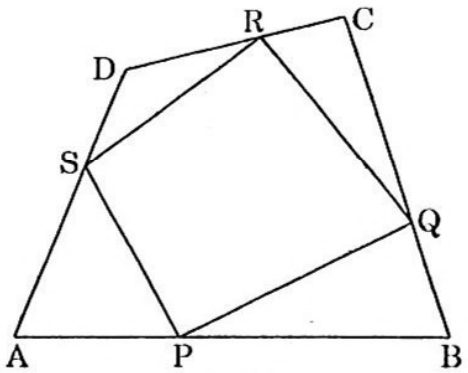
và $$2S \le mq + np \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) được : $4S \le mn + pq + mq + np = (m + p)(n + q)$

$$\le \left(\frac{m + n + p + q}{2}\right)^2 = P^2.$$

(Dấu "=" chỉ xảy ra khi MNPQ là hình vuông).

**4.** Vì diện tích của một tam giác có đường cao cho trước tỉ lệ với độ dài cạnh đáy của nó và do $AP = k.PB = k(AB - AP)$ nên $\frac{AP}{AB} = \frac{k}{k+1}$.



H.16

Lại có $DS = DA - SA = k.SA$ nên $\frac{SA}{DA} = \frac{1}{k+1}$.

Xét hình vẽ 16, ta có : $\frac{S_{SAP}}{S_{SAB}} = \frac{AP}{AB} = \frac{k}{k+1}$

và $\frac{S_{SAB}}{S_{DAB}} = \frac{SA}{DA} = \frac{1}{k+1}$.

Suy ra : $\dfrac{S_{SAP}}{S_{DAB}} = \dfrac{S_{PBQ}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{QCR}}{S_{BCD}} = \dfrac{S_{RDS}}{S_{CDA}} = \dfrac{k}{(k+1)^2}$.

Từ đó ta có :

$$S_{PQRS} = S_{ABCD} - (S_{SAP} + S_{PBQ} + S_{QCR} + S_{RDS})$$

$$= S_{ABCD} - \frac{k}{(k+1)^2}(S_{DAB} + S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA})$$

$$= S_{ABCD} - \frac{2k}{(k+1)^2}.S_{ABCD} = \frac{k^2+1}{(k+1)^2}.S_{ABCD}$$

Suy ra : $\dfrac{k^2+1}{(k+1)^2} = 52\% = \dfrac{52}{100} = \dfrac{13}{25}$.

Nhân chéo rồi rút gọn được : $6k^2 - 13k + 6 = 0$ hay $(3k - 2)(2k - 3) = 0$.

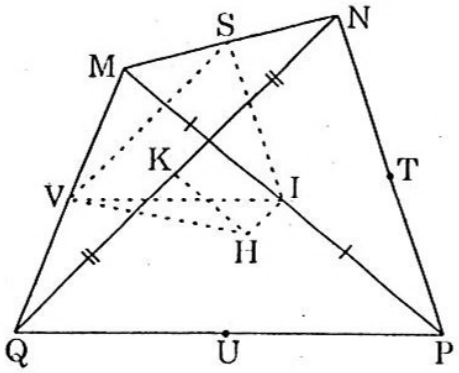
Từ đó : $k_1 = \dfrac{2}{3}$; $k_2 = \dfrac{3}{2}$.

- ***Lời bình :*** Ta giải thêm bài toán sau về diện tích tứ giác :

*"Gọi S, T, U, V theo thứ tự là trung điểm các cạnh MN, NP, PQ, QM của tứ giác MNPQ. Tìm điểm H trong tứ giác sao cho diện tích bốn tứ giác HSMV, HVQU, HUPT và HSNT bằng nhau."*

Cách giải như sau :

Giả sử đã tìm được điểm H (hình 17).



H.17

Khi đó : $S_{MSHV} = \dfrac{1}{4}S_{MNPQ}$

$S_{MSIV} = \dfrac{1}{4}S_{MNPQ}$

trong đó I là trung điểm đường chéo MP.

Suy ra : $S_{MSHV} = S_{MSIV}$.

Lại có : $S_{HVS} = S_{ISV}$, suy ra HI // SV mà SV // NQ, do đó HI // NQ (1)

Gọi K là trung điểm đường chéo QN, tương tự ta có : HK // MP (2)

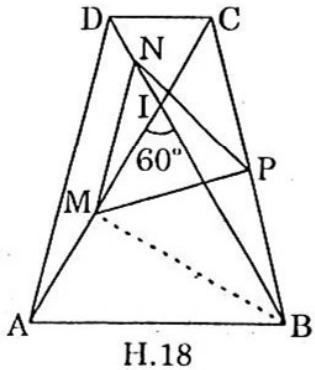
Từ (1) và (2) suy ra H là giao điểm của hai đường thẳng kẻ qua I song song với NQ và kẻ qua K song song với MP.

**5.** Do ABCD là hình thang cân nên ta có :

$\Delta ABD = \Delta BAC$, do đó $\widehat{ABD} = \widehat{BAC}$ (hình 18)

Góc AIB = $60^o$ nên $\Delta AIB$ đều. Vậy BM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao trong $\Delta AIB$.

Tam giác vuông BMC có P là trung điểm của cạnh huyền BC nên trung tuyến MP = $\dfrac{1}{2}$BC.



H.18

Tương tự $NP = \frac{1}{2}BC$.

Xét $\Delta AID$, ta có : $MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$.

Vậy : MN = MP = NP, tức là $\Delta MNP$ đều.

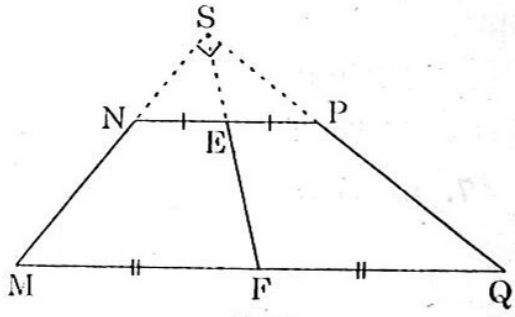
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hình thang có hai đáy dài m và p (m > p) và tổng các góc ở đáy lớn bằng 90°. Tính đoạn nối trung điểm hai đáy."*

Xét hình thang MNPQ có $\widehat{M} + \widehat{Q} = 90^\circ$ (hình 19).

Nếu kéo dài hai cạnh bên cắt nhau tại S thì $\widehat{MSQ} = 90^\circ$.

Kẻ trung tuyến SF của $\Delta SMQ$ cắt NP tại E thì SE cũng là trung tuyến của $\Delta SNP$. Trong tam giác vuông trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, do đó :



H.19

$$SE = \frac{1}{2}NP = \frac{p}{2}; \qquad SF = \frac{1}{2}MQ = \frac{m}{2}$$

Vậy : $EF = SF - SE = \frac{m-p}{2}$.

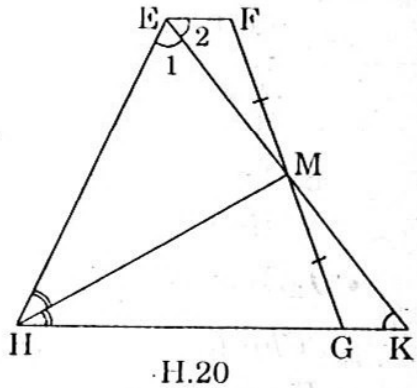
**6.** a) EM kéo dài cắt HG kéo dài tại K (hình 20).

Xét $\Delta EFM = \Delta KGM$ (c.g.c), ta có :

GK = EF

nên HG + GK = HG + EF = EH

Suy ra $\Delta HEK$ cân tại H.



H.20

b) Từ $\Delta HEK$ cân ta có ngay HM là trung tuyến và phân giác của góc H. Ngoài ra $\widehat{E}_1 = \widehat{K}$ mà $\widehat{E}_2 = \widehat{K}$ (so le trong) nên $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$, vậy EM là phân giác góc E.

c) Do $\widehat{HEF} = 120^\circ$ nên $\widehat{EHG} = 60^\circ$. Suy ra $\Delta HEK$ cân có góc ở đỉnh bằng 60° là tam giác đều.

- ***Lời bình :*** Tượng tự : *"Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD). Tia phân giác của các góc A và D cắt nhau tại M, tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại N.*

*a) Tính số đo các góc AMD và BNC.*

*b) Gọi K là giao điểm của AM và BN (K ∈ DC), chứng minh rằng :*

*AD + BC = DC".*

Ta có cách giải sau (hình 21) :

a) Vì AB // DC nên $\widehat{BAD} + \widehat{KDA} = 180^o$ (góc trong cùng phía),

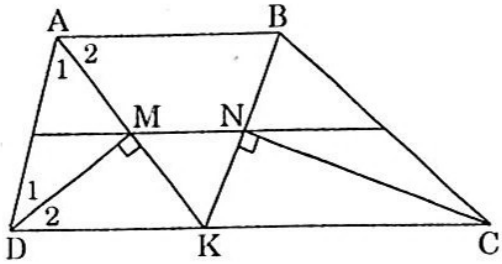
suy ra : $\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^o$.

Trong $\Delta AMD$ ta có :

$$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 + \widehat{AMD} = 180^o,$$

suy ra : $\widehat{AMD} = 180^o - 90^o = 90^o$.

Chứng minh tương tự có $\widehat{BNC} = 90^o$.



H.21

b) Vì $\widehat{AMD} = 90^o$ nên DM ⊥ AK. Tam giác ADK có phân giác DM cũng là đường cao nên tam giác này cân, suy ra AD = DK (1)

Chứng minh tương tự có $\Delta CBK$ cân, suy ra BC = KC (2)

Từ (1) và (2) suy ra : AD + BC = DK + KC hay AD + BC = DC.

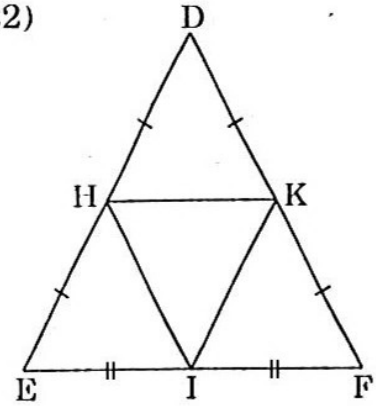
**7.** a) Vì H và I là trung điểm của DE và EF (hình 22)

nên HI // DF và $HI = \frac{1}{2}DF = DK$.

Suy ra DHIK là hình bình hành.

Vì H và K là trung điểm của DE và DF nên HK // EF, mặt khác có HE = KF, do đó EHKF là hình thang cân.

Vì I và K là trung điểm của EF và DF nên IK // DE, vậy DEIK là hình thang.



H.22

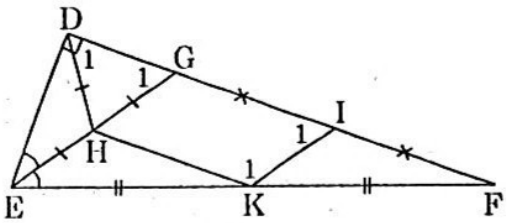
b) Khi $\Delta DEF$ đều thì EI = DK, do đó hình thang DEIK sẽ là hình thang cân.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán về hình thang cân :

*"Cho tam giác DEF vuông tại D có $\hat{E} = 70^o$. Kẻ phân giác EG của góc E và gọi H, I, K theo thứ tự là trung điểm của EG, GF, EF. Chứng minh tứ giác DHKI là hình thang cân và tính các góc của nó."*

Cách giải như sau (hình 23) :

Tứ giác DHKI là hình thang (vì HK // DI, do HK là đường trung bình trong $\Delta EGF$). Tam giác DEG vuông tại D có trung tuyến DH ứng với cạnh huyền nên HD = HG, hay $\Delta HDG$ cân, suy ra : $\hat{D}_1 = \hat{G}_1$ (1)



H.23

$\Delta EGF$ có KE = KF, GI = IF nên KI là đường trung bình.

Suy ra KI // EG, nên $\hat{G}_1 = \hat{I}_1$ (2) (góc đồng vị)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{D}_1 = \hat{I}_1$. Vậy DHKI là hình thang cân.

*Lưu ý :* Có thể chứng minh cách khác. Sau khi chứng minh DHKI là hình thang thì làm tiếp như sau :

Xét $\Delta DEF$ vuông tại D có DK là đường trung bình nên $DK = \frac{1}{2}EF$ (3)

Lại có HI là đường trung bình trong $\Delta GEF$ nên $HI = \frac{1}{2}EF$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra DK = HI. Do đó hình thang DHKI có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Do $\widehat{E} = 70^o$ nên $\widehat{G}_1 = 90^o - 35^o = 55^o = \widehat{D}_1 = \widehat{I}_1$

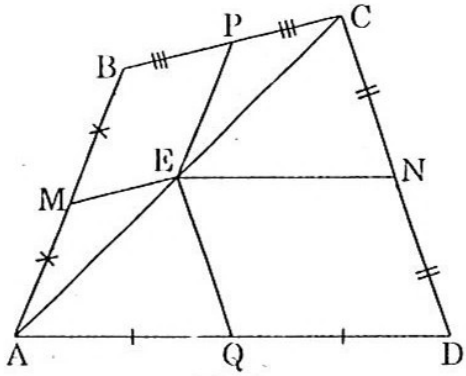
Suy ra $\widehat{K}_1 = 180^o - \widehat{I}_1 = 180^o - 55^o = 125^o$ (vì $\widehat{K}_1 + \widehat{I}_1 = 180^o$) = $\widehat{DHK}$.

Vậy các góc của hình thang cân bằng $125^o$ ở đáy trên HK và bằng $55^o$ ở đáy dưới DI.

**8.** a) Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD (hình 24).

Kẻ đường chéo AC và PE // AB, ta có E là trung điểm của AC và PE = MB, do đó MBPE là hình bình hành.

Vì EN và EQ là đường trung bình của $\Delta ACD$ nên tứ giác ENDQ cũng là hình bình hành. Vậy tổng khoảng cách từ E đến M, N, P, Q bằng nửa chu vi ABCD.



H.24

Ta có : $EM + EN \geq MN$

và $EP + EQ \geq PQ$.

(Dấu "=" xảy ra khi $E \in MN$ hoặc $E \in PQ$).

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta được :

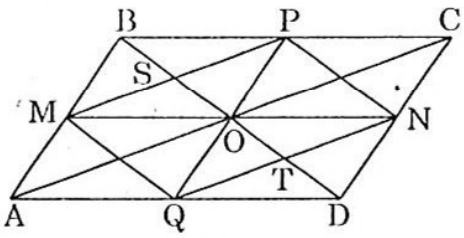
$$EM + EN + EP + EQ \geq MN + PQ \quad (*)$$

(Dấu "=" xảy ra khi $E \in MN$ hoặc $E \in PQ$, tức là E trùng với O).

Bất đẳng thức (*) được thỏa mãn tức là $E \equiv O$. Nhưng MBPO và ONDQ là những hình bình hành, do đó tứ giác ABCD phải là hình bình hành.

b) Cũng như trên, gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD (hình 25). Các đường AC, BD, MN và PQ cắt nhau tại O.

Xét tứ giác MPNQ ta có MP và QN cùng song song với AC và bằng $\frac{1}{2}AC$ nên MP = QN, do đó tứ giác này là hình bình hành và O là trung điểm của MN và PQ.



H.25

Gọi S và T theo thứ tự là giao điểm của MP và QN với đường chéo BD, ta có $\Delta OMS = \Delta ONT$ (g.c.g) nên OS = OT. Suy ra OB = OD.

Chứng minh tương tự có OA = OC. Vậy tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường là hình bình hành.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán về chứng minh sau đây :

*"Qua giao điểm O các đường chéo AC và BD của hình bình hành ABCD ta kẻ hai đường thẳng bất kì cắt các cạnh AB, BC, CD, DA tại bốn điểm E, F, G, H. Chứng minh EFGH là hình bình hành, từ đó suy ra có vô số hình bình hành EFGH như thế."*

Cách giải như sau (hình 26) :

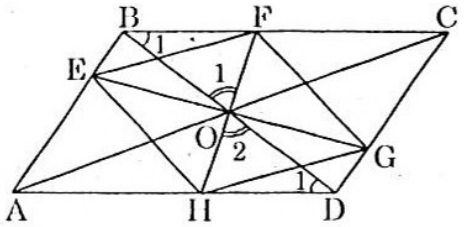
Xét hai tam giác BOF và DOH có

$OB = OD$, $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (so le trong),

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (đối đỉnh)

nên $\Delta BOF = \Delta DOH$ (g.c.g).

Suy ra OF = OH.



H.26

Chứng minh tương tự CE = OG.

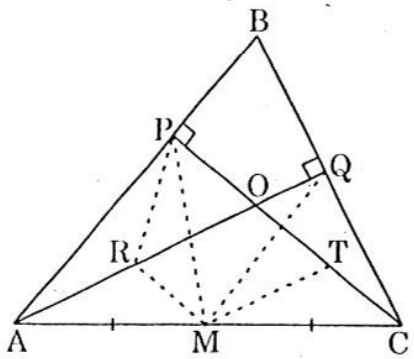
Vậy tứ giác EFGH có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

Vì hai đường thẳng kẻ qua O là bất kì nên có vô số hình bình hành EFGH như thế và chúng đều có tâm đối xứng là O.

**9.** Gọi R và T theo thứ tự là trung điểm của AO và CO (hình 27). Ta có tứ giác MROT là hình bình hành.

Đoạn MR là đường trung bình trong $\Delta AOC$ nên MR = OT và MR // OT. Từ đó $\widehat{MRO} = \widehat{MTO}$ và RO = MT.

$\Delta APO$ vuông tại P nên trung tuyến PR bằng nửa cạnh huyền AO. Do đó $\Delta PRO$ cân (PR = RO). Tương tự $\Delta TOQ$ cân (QT = OT).



H.27

Vậy MT = RO = PR và MR = OT = QT, tức là hai tam giác MRP và QTM có hai cạnh bằng nhau từng đôi một.

Giả sử MP = MQ, ta có $\Delta MRP = \Delta QTM$ (c.c.c). Từ đó $\widehat{MRP} = \widehat{QTM}$ và $\widehat{MRO} = \widehat{MTO}$.

Trừ từng vế hai đẳng thức về góc này được $\widehat{ORP} = \widehat{OTQ} = \alpha$. Do hai tam giác PRO và TOQ cân nên ta có :

$$\widehat{ROP} = \widehat{TOQ} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

Giả sử $\widehat{AOP} = \widehat{COQ}$.

Từ hai tam giác cân PRO và TOQ ta được $\widehat{ORP} = \widehat{OTQ}$.

Từ đó : $\widehat{MRP} = \widehat{MRO} + \widehat{ORP} = \widehat{MTO} + \widehat{OTQ} = \widehat{QTM}$.

Vậy $\Delta MRP = \Delta QTM$ (c.g.c). Suy ra PM = MQ.

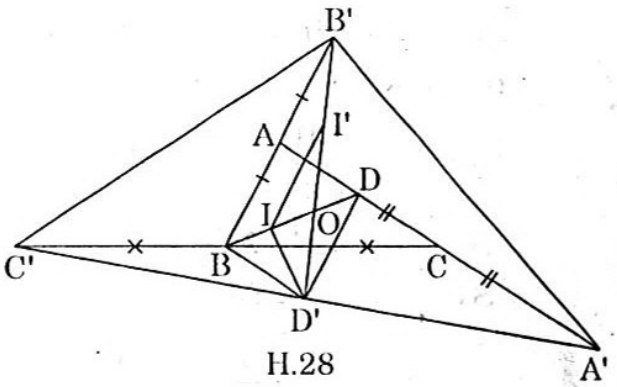
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho tam giác ABC. Vẽ điểm A' đối xứng với A qua C, điểm B' đối xứng với B qua A và điểm C' đối xứng với C qua B. Trung tuyến BD của ΔABC cắt trung tuyến B'D' của ΔA'B'C' tại O. Chứng minh rằng :*

*a) ABD'D là hình bình hành.*

*b) O là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và A'B'C'."*

Cách giải như sau (hình 28) :



H.28

a) Do C' và C đối xứng nhau qua B nên BC' = BC, còn B'D' là trung tuyến của ΔA'B'C nên D'C' = D'A'.

Như vậy BD' là đường trung bình của ΔC'CA', suy ra :

$$BD' = \frac{1}{2}CA' = \frac{1}{2}CA$$

(vì A' và A đối xứng nhau qua C) và BD' // CA'.

Do BD là trung tuyến của ΔABC nên $AD = \frac{1}{2}AC$, ta có :

$$BD' = AD, \quad BD' \,//\, AD \text{ (vì } A, D \in CA'),$$

vậy ABD'D là hình bình hành.

b) Gọi I là trung điểm của OB, theo tính chất trung tuyến trong tam giác ta có BI = IO = OD, như vậy O là trọng tâm ΔABC.

Từ I kẻ II' // BB' ta có I'B' = I'O (1)(đường trung bình trong ΔBOB'), suy ra $II' = \frac{1}{2}BB' = AB$.

Theo câu a) thì DD' // AB, DD' = AB (vì ABD'D là hình bình hành). Như vậy II' = AB = DD' và II' // AB // DD', do đó II'DD' là hình bình hành, suy ra OI' = OD' (2)

Từ (1) và (2) có : B'I' = I'O = OD', chứng tỏ rằng O là trọng tâm của ΔA'B'C'. Vậy O là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và A'B'C'.

**10.** Ta phải chứng minh : $S_{ACE} = S_{ABCD}$ (hình 29).

Thật vậy, từ A kẻ đường vuông góc AH với EC cắt DB tại K. Ta có :

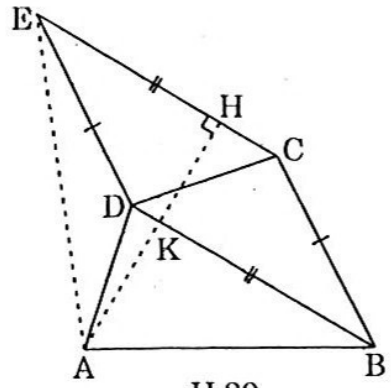
$S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{DBC}$

$= \frac{1}{2}DB.AK + \frac{1}{2}DB.KH$

$= \frac{1}{2}DB.AH = \frac{1}{2}CE.AH$

(vì DBCE là hình bình hành nên DB = EC)

Tích $\frac{1}{2}CE.AH$ chính là diện tích $\Delta ACE$.



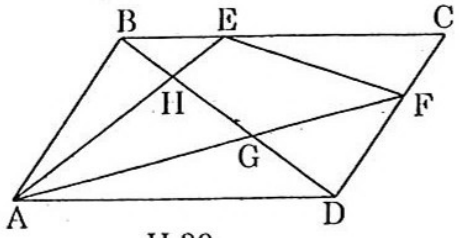
H.29

Vậy $S_{ABCD} = S_{ACE}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho hình bình hành ABCD và điểm E trên cạnh BC, điểm F trên cạnh CD sao cho* $\frac{FC}{FD} = 2.\frac{EB}{EC}$. *Đường chéo BD cắt AE tại H, cắt AF tại G. Chứng minh rằng :* $S_{AEF} = 2.S_{AHG}$*".*

Cách giải như sau (hình 30) :

Gọi tỉ số $\frac{EB}{EC} = k$. Ta có :



H.30

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AHG}} = \frac{AE}{AH}.\frac{AF}{AG}$$

$$= \left(1 + \frac{HE}{AH}\right)\left(1 + \frac{GF}{AG}\right)$$

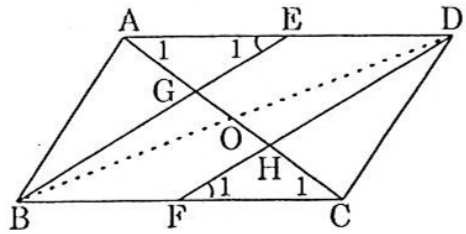
$$= \left(1 + \frac{BE}{AD}\right)\left(1 + \frac{FD}{AB}\right) = \left(1 + \frac{BE}{BC}\right)\left(1 + \frac{FD}{CD}\right) = \frac{BC + BE}{BC}.\frac{CD + FD}{CD}$$

Tích cuối cùng có thể viết :

$$\frac{2BE + EC}{BE + EC}.\frac{2FD + FC}{FD + FC} = \frac{2k + 1}{k + 1}.\frac{2k + 2}{1 + 2k} = 2.$$

Vậy $S_{AEF} = 2.S_{AHG}$.

**11.** a) Ta có GE là đường trung bình của $\Delta AHD$ và HF là đường trung bình cửa $\Delta CGB$ (hình 31).



H.31

Vì ED song song và bằng BF nên EDFB là hình bình hành, suy ra BE // FD.

Xét $\Delta AHD$ có EA = ED và EG // HD nên AG = GH (1)

Xét $\Delta BGC$ có FB = FC và FH // BG nên GH = HC (2)

Từ (1) và (2) ta có ngay AG = GH = HC.

b) Xét hai tam giác AEG và CHF có AE = FC, $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1$ (góc có cạnh tương ứng song song cùng chiều), $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (so le trong) nên

$\Delta AEG = \Delta CFH$ (g.c.g).

Suy ra GE = FH.

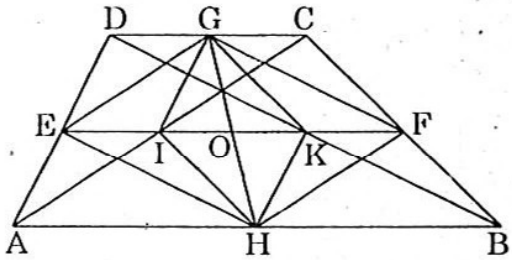
Tứ giác EGFH có GE song song và bằng FH nên nó là hình bình hành.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho hình thang ABCD. Gọi E, F, G, H, I, K theo thứ tự là trung điểm của hai cạnh bên AD, BC và của hai đáy DC và AB, của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh :*

*a) HIGK là hình bình hành.*

*b) Bốn điểm E, I, K, F thẳng hàng.*

*c) EF và IK có chung một trung điểm."*



H.32

Cách giải như sau (hình 32) :

a) Ta có GI là đường trung bình của $\Delta ACD$, nên GI // AD và $GI = \frac{1}{2}AD$.

Tương tự, HK là đường trung bình của $\Delta ABD$ nên HK // AD và $HK = \frac{1}{2}AD$.

Suy ra GI = HK và GI // HK.

Vậy tứ giác HIGK là hình bình hành.

b) Ta có EI và KF cùng song song với DC, IK // AB // DC. Suy ra bốn điểm E, I, K, F thẳng hàng vì cùng nằm trên đường trung bình EF của hình thang ABCD.

c) Gọi O là trung điểm của IK, ta có GH đi qua O và OH = OG (do HIGK là hình bình hành). Ta lại có EGFH cũng là hình bình hành (do $EG = HF = \frac{1}{2}AC$ và EG // HF), suy ra O cũng là trung điểm của EF. Vậy O là trung điểm chung của IK và EF.

## D. BẠN CÓ BIẾT

### NHÀ SƯ PHẠM LỖI LẠC ƠCLIT

**1.** Ơclit là một nhà sư phạm lỗi lạc sống ở thế kỉ thứ 4 trước công nguyên, dạy toán ở Alecxăngđri.

Ông đã xem xét lại gần như toàn bộ những kiến thức toán học từ buổi sơ khai cho đến thời kì ông sống và đã sắp xếp lại một cách có hệ thống.

*Tác phẩm chính của ông là "Cơ bản" gồm 13 tập, chủ yếu nói về hình học được đánh giá là "mẫu mực cho hàng nghìn năm".* Thật thế, tác phẩm này đã trở thành một trong những thành tựu lớn nhất của nền văn hóa thế giới, vì trong hơn hai nghìn năm nay nhân loại đã coi đó

là mẫu mực về hình học được học trong các trường học ở khắp nơi trên thế giới.

Người ta kể lại câu chuyện thú vị sau đây : Một trong những học trò bắt đầu học hình học của Ơclit đã hỏi ông như sau : "Tôi có thể kiếm được gì nếu tôi học thuộc được tất cả sách của ngài ?". Ơclit đã gọi người hầu lại bảo : "Hãy cho anh ta 3 đồng vì anh ta muốn kiếm được tiền bằng học thuyết của ta".

**2.** Ơclit đã đưa ra ba khái niệm cơ bản không định nghĩa là : điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

Sau đó ông đã nêu lên một số quan hệ giữa ba khái niệm này, được ông thừa nhận và gọi chúng là tiên đề. Đó là những mệnh đề toán học được công nhận chứ không cần phải chứng minh. *Tất cả có năm tiên đề :*

1. Qua hai điểm có một đường thẳng và chỉ một mà thôi;
2. Qua ba điểm không thẳng hàng có một mặt phẳng và chỉ một mà thôi;
3. Nếu một đường thẳng có hai điểm nằm trong mặt phẳng thì đường thẳng đó nằm hoàn toàn trong mặt phẳng;
4. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì sẽ có thêm một điểm chung thứ hai nữa;
5. Từ một điểm ở ngoài một đường thẳng bao giờ cũng dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng trên (đây là tiên đề Ơclit). Nó là tiên đề thứ năm.

# §10. TỪ HÌNH CHỮ NHẬT ĐẾN HÌNH VUÔNG

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Hình chữ nhật***

a) Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

– Trong hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Bốn dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật :

– Tứ giác có ba góc vuông.

– Hình thang cân có một góc vuông.

– Hình bình hành có một góc vuông.

– Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

c) Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Nếu một tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

d) Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

e) Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau, và ngược lại.

***2. Hình thoi***

a) Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

– Trong hình thoi hai đường chéo vuông góc với nhau, hai đường chéo là các phân giác của các góc hình thoi.

b) Bốn dấu hiệu nhận biết hình thoi :

– Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

– Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

– Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

– Hình bình hành có một đường chéo là phân giác của một góc.

***3. Hình vuông***

a) Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

b) Năm dấu hiệu nhận biết hình vuông :

– Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.

– Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.

– Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc.

– Hình thoi có một góc vuông.

– Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

***4. Đa giác đều***

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Cho tứ giác ABCD có hai cạnh AB và CD kéo dài tạo thành góc vuông tại M. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác EFGH là hình chữ nhật.

b) Ba điểm K, H, F thẳng hàng (K là trung điểm cạnh AB).

c) Đoạn EG bằng nửa hiệu hai cạnh đối AD và BC.

**2.** Cho tam giác DEF vuông cân tại D và M là một điểm bất kì trên EF. Từ M hạ MN ⊥ DE và MP ⊥ DF.

a) Chứng minh rằng khi M chạy trên cạnh huyền EF thì hình chữ nhật DNMP có chu vi không đổi.

b) Với vị trí nào của M thì DM có độ dài ngắn nhất ?

**3.** Cho M là một điểm nằm trong hình chữ nhật EFGH có diện tích bằng S. Chứng minh rằng : $S \leq ME.MG + MF.MH$.

**4.** Cho ΔABC. Kẻ MN // BC với M trên AB, N trên AC sao cho AM = NC và MP // AC với P trên BC.

a) Chứng minh AP là phân giác của góc A.

b) Muốn MPCN là hình thoi thì ΔABC cần điều kiện gì ?

**5.** Cho hình thoi ABCD. Từ B kẻ BP ⊥ AD và BQ ⊥ CD. Khoảng cách PQ bằng nửa đường chéo AC hoặc BD. Tính các góc của hình thoi.

**6.** Cho hình vuông ABCD. Trên BC lấy điểm E và dựng $\widehat{EAx} = 90^o$, Ax cắt CD tại F.

a) Chứng minh ΔAFE cân.

b) Gọi I là trung điểm của FE, AI cắt DC tại M. Qua E vẽ Ey // DC cắt AI tại K. Chứng minh KFME là hình thoi.

c) Chứng minh chu vi ΔCEM không đổi khi E chuyển động trên BC.

**7.** Cho hình vuông ABCD. Trên tia BC lấy đoạn BE > BC. Trên tia đối của tia DC lấy đoạn DF = BE, rồi vẽ hình bình hành AEGF. Chứng minh rằng :

a) AEGF là hình vuông.

b) Khi E chạy trên BC kéo dài thì G nằm trên phân giác của góc DCE, nếu $\widehat{FCG} = 45^o$.

c) Ba điểm B, D, K thẳng hàng, trong đó K là trung điểm của AG.

**8.** Chứng minh rằng các đường thẳng nối lần lượt các tâm $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ của các hình vuông dựng trên bốn cạnh của hình bình hành ABCD về phía ngoài tạo thành một hình vuông.

**9.** Cho hình bình hành ABCD và O là giao điểm hai đường chéo. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Hai đoạn BE và DF lần lượt cắt đường chéo AC tại G và H.

a) Chứng minh AG = GH = HC.

b) Tứ giác EGFH là hình gì ?

c) Muốn EGFH là hình chữ nhật thì đường chéo AC phải gấp mấy lần cạnh CD ?

d) Muốn EGFH là hình thoi thì góc ACD bằng bao nhiêu ?

e) Muốn EGFH là hình vuông thì dạng của ΔACD phải như thế nào ?

**10.** Dựng hình thoi ABCD biết đường chéo AC = m nằm trên đường thẳng a cho trước và hai đỉnh còn lại nằm trên hai đường thẳng b và c cho trước.

**11.** Dựng hình vuông PQRS sao cho ba đỉnh nằm trên ba đường thẳng song song a, b, c cho trước.

**12.** Dựng tứ giác ABCD biết hai cạnh đối AD = a, BC = b và ba góc $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{D} = \gamma$.

**13.** Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua D, D' là điểm đối xứng của D qua E, E' là điểm đối xứng của E qua A. Chứng minh rằng A'B'C'D'E' là ngũ giác đều.

**14.** Cho ngũ giác đều ABCDE và một điểm M sao cho ΔDME đều. Tính góc AMC.

**15.** Cho tứ giác ABCD có diện tích $96cm^2$ và điểm E thuộc cạnh AB. Qua A kẻ đường thẳng song song với ED cắt CD tại F. Qua B kẻ đường thẳng song song với EC cắt CD tại G. Tính :

a) Diện tích ΔEFG.

b) Diện tích tứ giác AEHD, trong đó H là trung điểm của FG.

**16.** Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có cạnh bằng 1 và một điểm P trong lục giác đó. Nối P với các đỉnh ta được 6 tam giác. Chứng minh rằng :

a) Có ít nhất hai tam giác mà các cạnh của chúng đều ≥ 1 và tổng các cạnh của tam giác ≥ 18.

b) Tổng các khoảng cách từ P đến các cạnh không đổi nhưng tâm lục giác có tổng các khoảng cách tới các đỉnh là nhỏ nhất.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) Ta có EH là đường trung bình của $\Delta ABC$ (hình 33) nên

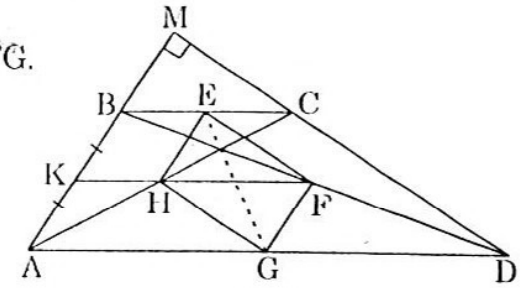
$$EH \parallel AB \text{ và } EH = \frac{1}{2}AB \qquad (1).$$

Tương tự, $FG \parallel AB$ và $FG = \frac{1}{2}AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EH \parallel FG$ và $EH = FG$.

Vậy EFGH là hình bình hành.

Lại có $\widehat{HEF} = \widehat{M} = 90^\circ$ (góc có cạnh tương ứng song song) nên hình bình hành EFGH là hình chữ nhật.



H.33

b) Ta có KF là đường trung bình của $\Delta ABD$, còn KH là đường trung bình của $\Delta ABC$ nên $KF \parallel AD$ và $KH \parallel AD$. Qua H chỉ có một đường thẳng song song với AD (tiên đề Ơclit) nên ba điểm K, H, F phải thẳng hàng.

c) Theo câu b) thì $KF = \frac{1}{2}AD$ (1) và $KH = \frac{1}{2}BC$ (2)

Lấy (1) trừ đi (2) từng vế ta có : $KF - KH = \frac{AD - BC}{2} = HF$.

Do HF = EG (đường chéo hình chữ nhật) nên $EG = \frac{AD - BC}{2}$.

- ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán khác về hình chữ nhật :

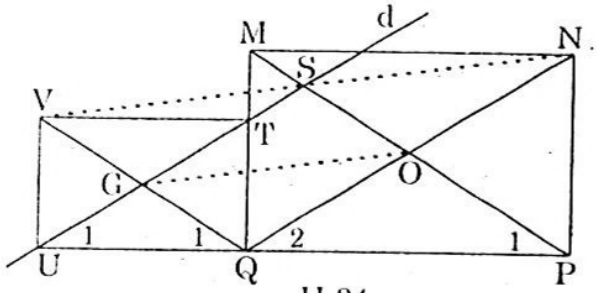
*"Gọi S là điểm trên đường chéo MP của hình chữ nhật MNPQ. Qua S kẻ đường thẳng d song song với đường chéo QN cắt MQ và PQ theo thứ tự tại T và U. Dựng hình chữ nhật QTVU. Chứng minh rằng :*

*a) QV // MP.*

*b) Ba điểm V, S, N thẳng hàng.*

*c) S là trung điểm của VN."*

Cách giải như sau (hình 34) :



H.34

a) Gọi O và G là giao điểm các đường chéo của hai hình chữ nhật MNPQ và VTQU.

Xét hai tam giác cân GUQ và OQP ta có : $\widehat{U}_1 = \widehat{Q}_1$, $\widehat{Q}_2 = \widehat{P}_1$.

Nhưng $\widehat{U}_1 = \widehat{Q}_2$ (góc đồng vị), suy ra $\widehat{P}_1 = \widehat{Q}_1$, vậy $QV \parallel MP$.

b) Xét hình bình hành SOQG (vì $GS \parallel QO$) ta có SO = GQ mà GV = GQ nên GV = SO. Suy ra SVGO là hình bình hành nên $VS \parallel GO$.

Lại có VN // GO trong ΔVNQ. Do đó ba điểm V, S, N thẳng hàng (tiên đề Ơclit).

c) Ta có VS = GO và SN = GO, vì thế S là trung điểm của VN.

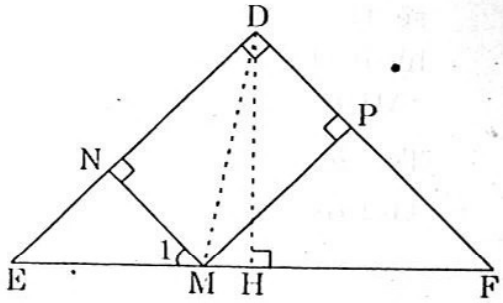
**2.** a) Tứ giác DNMP có ba góc vuông là hình chữ nhật (hình 35).

Vì ΔDEF vuông cân tại D nên $\hat{E} = \hat{F} = 45^o$. Trong tam giác vuông ENM ta có $\widehat{M}_1 = 45^o$ nên tam giác này vuông cân tại N, suy ra

NM = NE (1)

Chứng minh tương tự có :

MP = PF (2)



H.35

Chu vi $\mathscr{C}$ của hình chữ nhật DNMP bằng :

$\mathscr{C}$ = NM + MP + PD + DN (3)

Thay (1) và (2) vào (3) được :

$\mathscr{C}$ = EN + ND + DP + PF = DE + DF

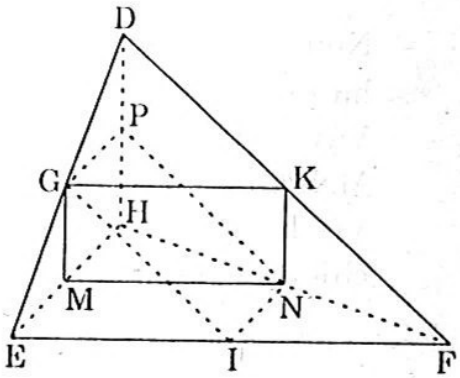
Vì tam giác vuông cân DEF đã cho nên độ dài hai cạnh DE và DF không đổi, vậy $\mathscr{C}$ có độ dài không đổi.

b) Kẻ đường cao DH của ΔDEF. Xét tam giác vuông DHM, ta luôn có DH < DM, do đó khi M ≡ H thì DM có độ dài ngắn nhất.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho ΔDEF có H là trực tâm. Gọi G, I, K theo thứ tự là trung điểm của ba cạnh DE, EF, DF và M, N, P theo thứ tự là trung điểm của ba đoạn HE, HF, HD.*

*a) Tứ giác GMNK là hình gì ?*

*b) Chứng minh ba đoạn PI, GN, MK bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn."*



H.36

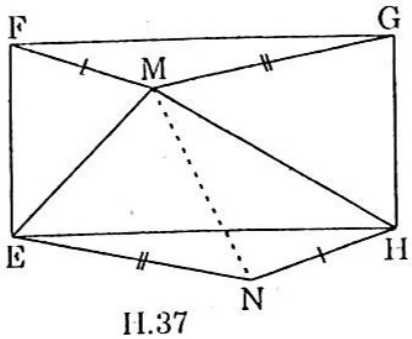
Cách giải như sau (hình 36) :

a) Ta có tứ giác GMNK là hình bình hành vì GK // MN và GK = MN (tính chất đường trung bình trong tam giác).

Lại có GK // EF, GM // DH và DH ⊥ EF (vì H là trực tâm) nên GK ⊥ GM, tức là $\widehat{KGM}$ vuông. Vậy hình bình hành GMNK có một góc vuông là hình chữ nhật.

b) Chứng minh tương tự ta có tứ giác GPNI cũng là hình chữ nhật. Hai hình chữ nhật GMNK và GPNI có chung đường chéo GN nên ba đường chéo PI, GN và MK bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

**3.** Nối điểm M với bốn đỉnh của hình chữ nhật (hình 37). Ta nhận thấy rằng diện tích hình chữ nhật gấp đôi tổng diện tích hai tam giác MEH và MFG (chỉ cần kẻ qua M một đường thẳng song song với cạnh EH sẽ thấy ngay diện tích của một trong hai hình chữ nhật tạo thành gấp đôi diện tích ΔMEH hoặc ΔMFG).



H.37

Ta vẽ thêm ΔENH bằng ΔFMG (MF = NH, MG = EN và FG = EH).

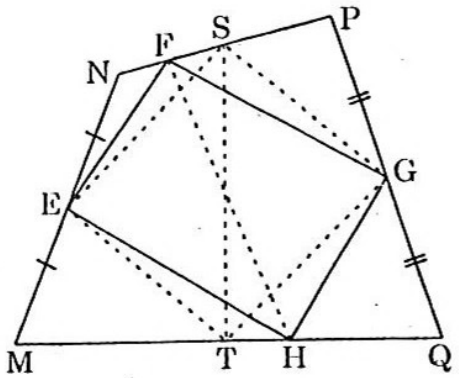
Thế thì : $S = 2(S_{MEH} + S_{MFG}) = 2S_{EMHN} = 2S_{EMN} + 2S_{HMN}$

$\leq ME.NE + NH.MH = ME.MG + MF.MH.$

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán về diện tích :

*"Gọi E, G theo thứ tự là trung điểm các cạnh MN và PQ của một tứ giác MNPQ. Gọi F và H theo thứ tự là hai điểm bất kì trên các cạnh NP và MQ. Chứng minh rằng nếu EFGH là hình chữ nhật thì :*

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}."$$



H.38

Ta có cách giải sau (hình 38) :

Gọi S và T theo thứ tự là trung điểm của NP và MQ ta có ESGT là hình bình hành.

– Nếu F ≡ S thì H ≡ T ta có ngay

$$S_{EFGH} = S_{ESGT} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}.$$

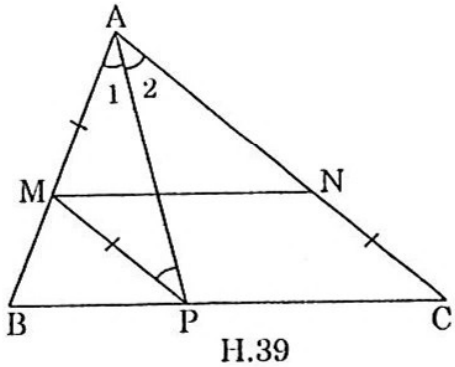
– Nếu F ≢ S thì H ≢ T, khi đó từ hình chữ nhật EFGH và hình bình hành ESGT suy ra FH và ST cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy FSHT là hình bình hành, suy ra FS // TH hay NP // MQ. Bây giờ MNPQ là hình thang có EG là đường trung bình. Do đó EG // NP // MQ. Vì thế các tam giác EHG, ETG và EFG, ESG có đáy EG chung và chiều cao là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song. Suy ra :

$$S_{EFGH} = S_{ESGT} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}.$$

**4.** a) Do MP // AC (hình 39) nên

$\widehat{A}_2 = \widehat{P}$ (so le trong).

Lại có tứ giác MNCP là hình bình hành (vì MN // PC, MP // NC) nên MP = NC. Do đó ΔMAP cân nên $\widehat{A}_1 = \widehat{P}$. Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, tức là AP là phân giác của góc A.



H.39

b) Muốn hình bình hành MNCP là hình thoi thì **phải có NC = PC hay** PMAC là hình thang cân. Suy ra $\widehat{A} = \widehat{C}$, tức là **ΔABC phải cân tại B.**

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho hình thoi EFGH có I là giao điểm hai đường chéo. Gọi K, L, M, N theo thứ tự là các điểm trên các tia đối của FE, GF, HG, EH sao cho FK = GL = HM = EN. Chứng minh :*

*a) Tứ giác KLMN là hình bình hành.*

*b) Hình bình hành này và hình thoi EFGH có chung một tâm đối xứng."*

Cách giải như sau (hình 40) :

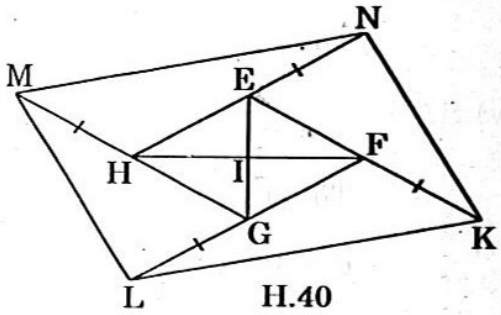
a) Xét các cặp tam giác bằng nhau :

ΔFKL = ΔHMN (c.g.c), suy ra KL = MN

ΔEKN = ΔGML (c.g.c), suy ra KN = ML.

Vậy KLMN có các cạnh đối bằng nhau là hình **bình hành.**

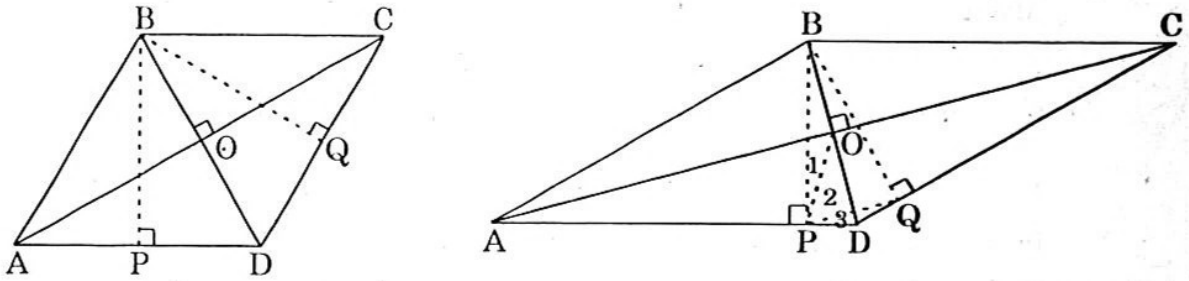
b) Giao điểm I của hai đường chéo của hình thoi EFGH là trung điểm của mỗi đường chéo. Mà I cũng là giao điểm các đường chéo của hình bình hành KLMN. Ngoài ra tứ giác ENGL cũng là hình bình hành nên I cũng là giao điểm các đường chéo của nó.



H.40

Suy ra I là tâm đối xứng của hình bình hành KLMN **và hình thoi** EFGH.

**5.** Ta phải xét hai trường hợp tùy theo PQ = $\frac{1}{2}$AC hoặc **PQ = $\frac{1}{2}$BD.**



H.41

a) Trường hợp PQ = $\frac{1}{2}$AC (hình 41a). Ta có PQ là **đường trung bình** của ΔACD và Q là trung điểm của CD. Do đó **ΔBCD cân. Ngoài ra** DC = BC nên ΔBCD đều.

Suy ra các góc của hình thoi là : $\widehat{A} = \widehat{C} = 60^o$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 120^o$.

b) Trường hợp PQ = $\frac{1}{2}$BD (hình 41b). Ta có trung tuyến **PO của tam**

giác vuông BPD bằng nửa cạnh huyền BD mà OQ cũng bằng nửa BD nên ΔOPQ đều.

Ta có $\widehat{P}_2 = 60^o$, $\widehat{P}_1 = 15^o$. Suy ra $\widehat{P}_3 = 90^o - 60^o - 15^o = 15^o$.

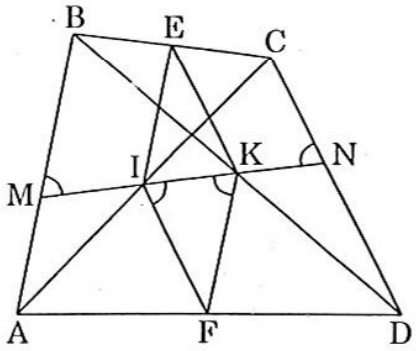
Từ đó các góc của hình thoi là : $\widehat{B} = \widehat{D} = 150^o$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 30^o$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho tứ giác ABCD có AB = CD. Gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của BC, AD, AC, BD. Chứng minh :*

*a) EF ⊥ IK*

*b) Đường thẳng IK tạo với AB và AC những góc bằng nhau."*

Ta có cách giải sau (hình 42) :



H.42

a) Vì E, K là trung điểm của BC, BD nên EK là đường trung bình của ΔBCD, suy ra EK // CD, $EK = \frac{1}{2}CD$ (1)

Tương tự, trong ΔACD có

IF // CD, $IF = \frac{1}{2}CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra EKFI là hình bình hành. Ta cũng có EI là đường trung bình của ΔABC nên $EI = \frac{1}{2}AB$ (3)

Từ (1), (3) và AB = CD (gt) ta có EK = EI.

Hình bình hành EKFI có EK = EI nên là hình thoi, do đó EF ⊥ IK.

* *Có thể giải cách khác :*

Vì E, K là trung điểm của BC, BD nên EK là đường trung bình của ΔBCD, suy ra $EK = \frac{1}{2}CD$.

Chứng minh tương tự có : $KF = \frac{1}{2}AB$, $IF = \frac{1}{2}CD$, $EI = \frac{1}{2}AB$.

Nhưng AB = CD (gt) nên EK = KF = FI = IE. Vậy tứ giác EKFI có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi, suy ra EF ⊥ IK.

b) Kéo dài IK cho cắt AB tại M và cắt CD tại N.

Ta có KF là đường trung bình của ΔABD nên KF // AB, suy ra

$\widehat{BMI} = \widehat{IKF}$ (so le trong) (4)

Tương tự, IF là đường trung bình của ΔACD nên IF // CD, suy ra

$\widehat{KIF} = \widehat{CNK}$ (so le trong) (5)

Lại có : FI = FK (cạnh hình thoi EKFI) nên ΔFIK cân tại F, suy ra

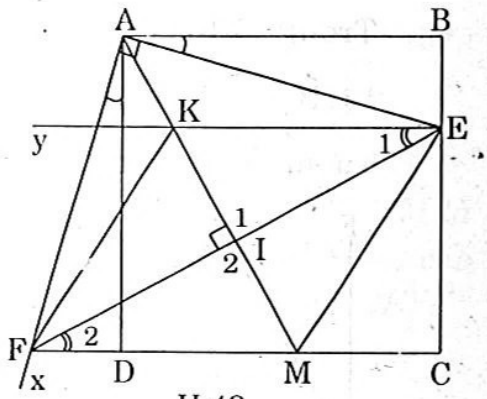
$\widehat{IKF} = \widehat{KIF}$ (6)

Từ (4), (5) và (6) ta có ngay $\widehat{BMI} = \widehat{CNK}$.

**6.** a) Xét hai tam giác ABE và ADF (hình 43) có AB = AD (cạnh hình vuông), $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$ (gt), $\widehat{EAB} = \widehat{FAD}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc : EA ⊥ AF, BA ⊥ AD).

Vậy ΔABE = ΔADF (g.c.g).

Suy ra AE = AF, do đó ΔAFE cân tại A.



H.43

b) Ta lại có : ΔIKE = ΔIMF (g.c.g)

vì $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_2$ (do Ey // CD), IE = IF (gt), $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$ (đối đỉnh).

Suy ra IK = IM.

Như thế : IK = IM, IE = IF nên KFME là hình bình hành.

Do ΔAFE cân nên trung tuyến AI cũng là đường cao, tức là AM ⊥ FE. Hình bình hành KFME có KM ⊥ FE là hình thoi.

c) Chu vi ΔCEM bằng : $\mathscr{C}$ = ME + MC + CE

Biết ME = MF (cạnh hình thoi) mà MF = FD + DM và FD = EB (vì ΔABE = ΔADF) nên ME = EB + DM. Do đó :

$$\mathscr{C} = EB + DM + MC + CE$$

$$= (CE + EB) + (DM + MC) = CB + DC$$

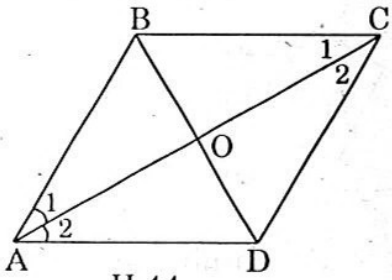
Hình vuông đã cho nên CB = DC = không đổi, do đó $\mathscr{C}$ = 2BC không đổi khi E chuyển động trên BC.

- ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán chứng minh bằng nhiều cách :

*"Chứng minh bằng nhiều cách mệnh đề sau : Nếu trong tứ giác ABCD các đường chéo là phân giác các góc của nó thì tứ giác đó là hình thoi."*

Cách giải như sau :

– *Cách 1.* Ta có ΔABC = ΔADC (g.c.g) và ΔBCD = ΔBAD (g.c.g) (hình 44). Suy ra bốn cạnh của tứ giác ABCD bằng nhau, nên đó là hình thoi.



H.44

– *Cách 2.* Xét ΔABD = ΔCBD (c.g.c), suy ra AB = BC, AD = DC và $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.

Theo bài ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$, suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_2$, $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_1$,

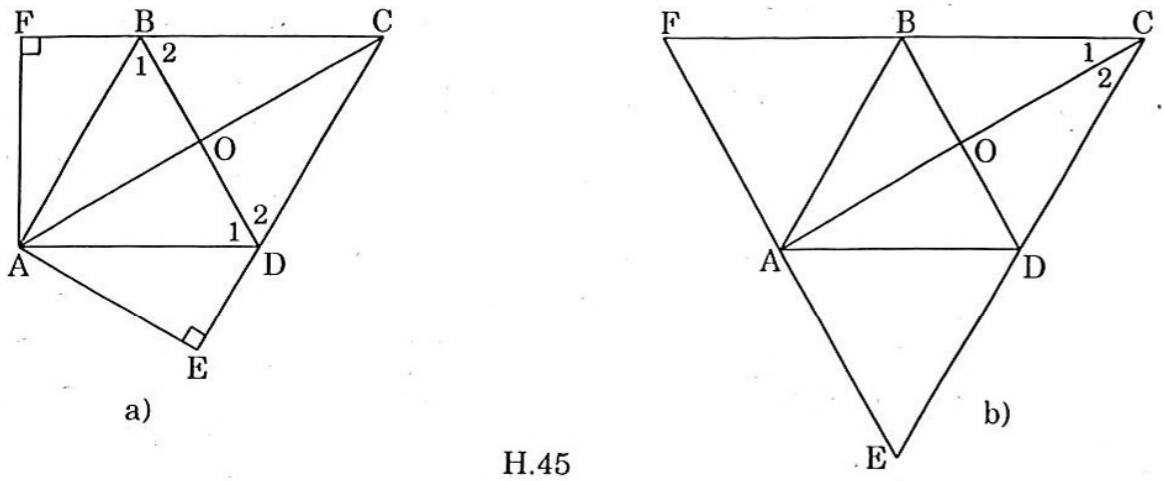
tức là AB // DC và BC // AD. Vậy ABCD là hình thoi.

– *Cách 3.* Kẻ AF ⊥ BC, AE ⊥ CD ta sẽ có AF = AE (hình 45a), từ đó suy ra ΔAFB = ΔAED (vì AF = AE, $\widehat{FAB} = \widehat{EAD}$). Vậy ΔABD cân, nên phân giác AO cũng là đường cao (AO ⊥ BD). ΔABC cũng cân vì BO vừa là phân giác vừa là đường cao nên AB = BC.

Trong $\Delta ABD$ cân ta có : $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$, suy ra $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$ nên $BC = CD$.

Vì $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$ và $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_1$.

Tương tự $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$, nên $AB \parallel CD$ và $BC \parallel AD$.




H.45

– *Cách 4.* Qua đỉnh A kẻ $EF \perp AC$ (hình 45b) ta có $\Delta ECF$ cân vì AC vừa là phân giác vừa là đường cao nên $CF = CE$, $AF = AE$ và $\widehat{CFE} = \widehat{CEF}$. Ta có $\Delta AFB = \Delta ADE$ (g.c.g). Suy ra $AB = AD$, tức là $\Delta ABD$ cân nên AO vừa là phân giác vừa là đường cao.

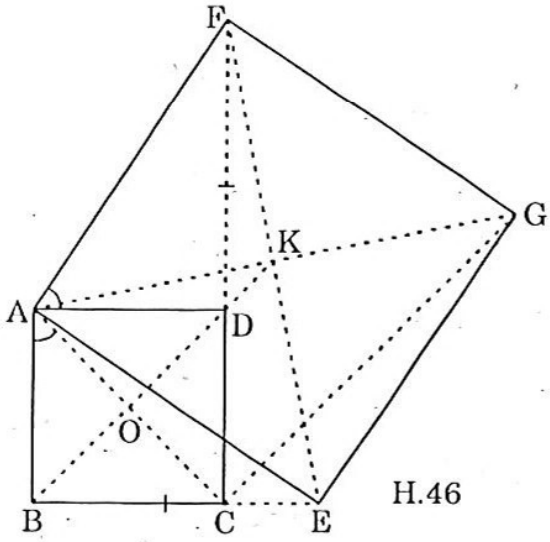
Xét $\Delta ADC$ có DO vừa là phân giác và vừa là đường cao nên tam giác này cân và $AD = CD$. Tương tự $AB = BC$. Vậy tứ giác ABCD có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.

**7.** a) Xét hai tam giác vuông ABE và ADF (hình 46) có $AB = AD$, $BE = DF$, $\widehat{ABE} = \widehat{ADF} = 90^o$ nên $\Delta ABE = \Delta ADF$, do đó $AE = AF$ và $\widehat{BAE} = \widehat{DAF}$.

Mà $\widehat{BAE} + \widehat{EAD} = \widehat{BAD} = 90^o$

nên $\widehat{DAF} + \widehat{EAD} = \widehat{EAF} = 90^o$.

Xét hình bình hành AEGF có hai cạnh liên tiếp $AE = AF$ là hình thoi.




H.46

Hình thoi này có một góc vuông nên là hình vuông.

b) Do $\widehat{DCG} = 45^o$ (gt) và $\widehat{DCE} = 90^o$, suy ra $\widehat{GCE} = 90^o - 45^o = 45^o$. Vậy khi E chạy trên BC kéo dài thì G nằm trên phân giác góc DCE.

c) Gọi O là tâm hình vuông ABCD ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp CG$ nên $BD \parallel CG$ (1)

Mặt khác $OA = OC$, $KA = KG$, suy ra OK là đường trung bình của $\Delta ACG$ nên $OK \parallel CG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm B, D, K cùng nằm trên một đường thẳng qua O và song song với CK, tức là ba điểm B, D, K thẳng hàng.

- ***Lời bình :*** Ta xét thêm bài toán sau về hình vuông :

*"Về phía ngoài của ΔDEF ta vẽ hai hình vuông DEGH và DFIK. DM là đường cao của ΔDEF. Trên đường cao DM kéo dài ta lấy điểm T sao cho DT = EF. Chứng minh rằng giao điểm GF và EI là trực tâm của ΔDEF."*

Cách giải như sau (hình 47) :

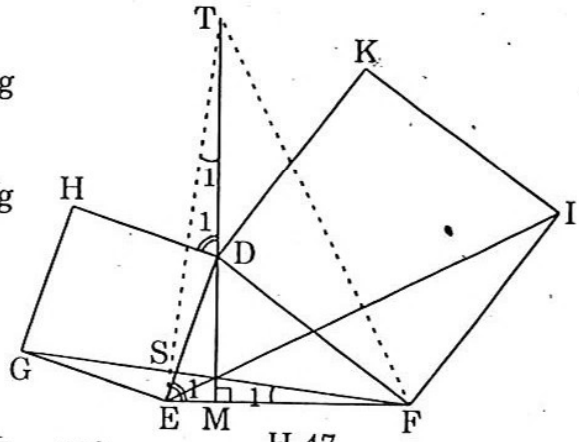
Ta phải chứng minh GF và EI (cùng với DM) là các đường cao của ΔTEF.

Ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), suy ra $\widehat{GEF} = \widehat{EDT}$.

Vậy ΔGEF = ΔEDT (c.g.c).

Suy ra $\widehat{F}_1 = \widehat{T}_1$.

Nhưng $\widehat{T}_1 + \widehat{TEF} = 90^o$ nên $\widehat{F}_1 + \widehat{TEF} = 90^o$.



H.47

Từ đó $\widehat{ESF} = 90^o$, tức là ET ⊥ GF. Chứng minh tương tự FT ⊥ EI. Như vậy ΔEFT có ba đường cao là DM, EI và FG, nên chúng cắt nhau tại một điểm là trực tâm của tam giác.

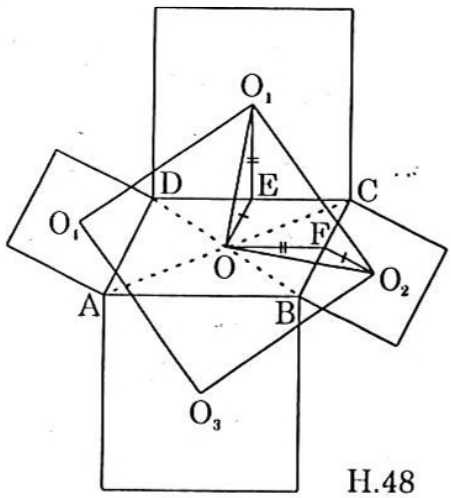
**8.** Dựng hai tam giác $OEO_1$ và $OFO_2$ (E và F theo thứ tự là trung điểm các cạnh CD và BC của hình bình hành ABCD (hình 48)).

Ta có $\Delta OEO_1 = \Delta OFO_2$ (vì OE = FC, FC = $O_2F$, OE = $O_2F$; tương tự ta chứng minh được $O_1E$ = OF).

Các góc tù $OEO_1$ và $OFO_2$ bằng nhau (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Từ hai tam giác bằng nhau $OEO_1$ và $OFO_2$ ở trên suy ra $OO_1 = OO_2$, $\widehat{OO_1E} = \widehat{O_2OF}$.

Do $O_1E$ và OF tạo thành góc vuông nên $OO_1$ và $OO_2$ cũng tạo thành góc vuông.

Vậy $\Delta O_1O_2O$ là tam giác vuông cân.



H.48

Tương tự các tam giác $O_2O_3O$, $O_3O_4O$ và $O_4O_1O$ cũng vuông cân. Suy ra tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho hình vuông ABCD. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AD và DC. Chứng minh rằng :*

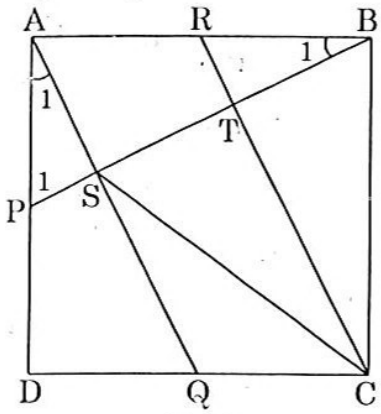
*a) BP ⊥ AQ*

*b) CS = AB, trong đó S là giao điểm của BP và AQ."*

Ta có cách giải sau (hình 49) :

a) Xét $\Delta ABP = \Delta DAQ$ (vì $AP = DQ$, $\widehat{A} = \widehat{D}$, $AB = DA$) (c.g.c) suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$.

Trong tam giác vuông PAB ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{P}_1 = 90^o$, suy ra $\widehat{A}_1 + \widehat{P}_1 = 90^o$, do đó $BP \perp AQ$.



H.49

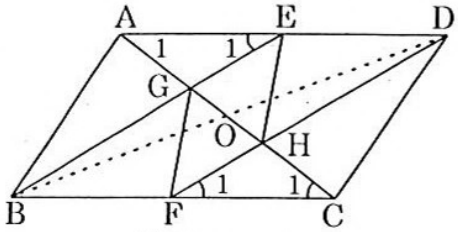
b) Nối C với trung điểm R của AB, ta có $AR = QC$, $AR \parallel QC$ nên ARCQ là hình bình hành, suy ra $AQ \parallel RC$, mà $BP \perp AQ$ (câu a) nên $BP \perp CR$ hay CR là đường cao của $\Delta CSB$.

Trong $\Delta ABS$ ta có $RA = RB$ (gt), $RC \parallel AS$, suy ra $TS = TB$ (tính chất đường trung bình), do đó CT là trung tuyến của $\Delta CSB$.

Trong $\Delta CSB$ có CT vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên tam giác này cân, suy ra $CS = CB = AE$.

**9.** a) Ta có (hình 50) $ED \parallel BF$ và $ED = BF$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}AD$) nên BEDF là hình bình hành, do đó $BE \parallel FD$. Lại có GE là đường trung bình của $\Delta AHD$ (vì $AE = ED$ và $EG \parallel HD$) nên $GA = GH$. Tương tự FH cũng là đường trung bình của $\Delta BCG$ nên $GH = HC$.

Vậy ta có $AG = GH = HC$.



H.50

b) Ta có $\Delta AEG = \Delta CHF$ (g.c.g), vì $AE = FC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$, $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ và $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1$ (so le trong). Suy ra $GE = FH$. Tứ giác EGFH có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.

c) Muốn hình bình hành EGFH là hình chữ nhật thì phải có hai đường chéo $EF = GH$.

Khi đó, ta có $EF = CD$ và $GH = \frac{1}{3}AC$ (câu a). Suy ra $GH = EF$, tức là $\frac{1}{3}AC = CD$ hay $AC = 3CD$.

d) Muốn hình bình hành EGFH là hình thoi thì phải có hai đường chéo $EF \perp GH$.

Khi đó, ta có $AE = ED$, $BF = FC$ nên $EF \parallel CD$. Do đó $EF \perp GH$ thì $DC \perp AC$, tức là $\widehat{ACD} = 90^o$.

e) Muốn hình bình hành EGFH là hình vuông thì hai đường chéo EF và GH phải vuông góc với nhau và bằng nhau.

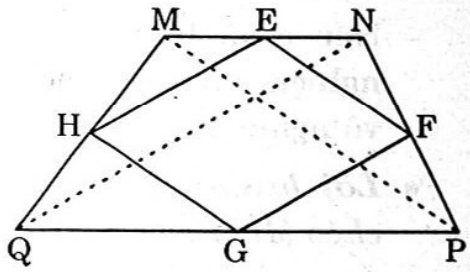
Thật vậy, ta đã có EF ⊥ GH (vì $\widehat{ACD} = 90^o$ theo câu d) và EF = GH hay AC = 3CD (theo câu c). Thành thử ΔACD phải là tam giác vuông tại C mà AC = 3CD.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm các cạnh MN, NP, PQ, QM của hình thang MNPQ.*

  *a) Chứng minh EFGH là hình bình hành.*

  *b) Hình thang đã cho phải có điều kiện gì để hình bình hành EFGH là hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông ?"*

Cách giải như sau (hình 51) :



H.51

a) Trong ΔMQN ta có EH là đường trung bình nên HE // QN và HE = $\frac{1}{2}$QN.

Lại có GF là đường trung bình trong ΔPQN nên GF // QN và GF = $\frac{1}{2}$QN.

Suy ra HE // GF và HE = GF. Vậy tứ giác EFGH là hình bình hành.

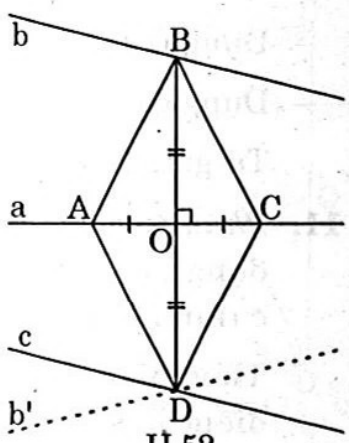
b) Chứng minh tương tự như câu a, ta có EF = HG và EF // HG.

Muốn hình bình hành EFGH là :

- Hình thoi thì phải có hai cạnh liền nhau EF = FG, do đó hai đường chéo MP và NQ bằng nhau, vậy MNPQ phải là hình thang cân.
- Hình chữ nhật thì góc FEH phải vuông tức là hai đường chéo MP và NQ của hình thang MNPQ phải vuông góc với nhau.
- Hình vuông thì hai đường chéo MP và NQ phải bằng nhau và vuông góc với nhau, tức là MNPQ phải là hình thang cân có hai đường chéo vuông góc.

**10.** *Phân tích :* Giả sử ABCD là hình thoi phải dựng mà AC = m, các đỉnh B và D lần lượt nằm trên hai đường thẳng b và c (hình 52). Lưu ý rằng dựng hình thoi quy về dựng một đỉnh bất kì của nó, chẳng hạn đỉnh B.

Theo tính chất hình thoi các đỉnh B và D đối xứng nhau qua đường thẳng a (BD ⊥ a), mà B nằm trên b nên D sẽ nằm trên b' đối xứng với b qua a. Từ đó ta dựng được ngay đỉnh D là giao điểm của đường thẳng c cho trước với đường thẳng b'.



H.52

+ *Cách dựng :* Trên nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng chứa b, bờ là a, dựng đường thẳng b' đối xứng với b qua a.

- Lấy giao điểm D của b' và c.
- Qua D dựng đường thẳng vuông góc với a tại O cắt b tại B.

– Dựng A và C trên a sao cho $AO = CO = \frac{m}{2}$.

Tứ giác ABCD là hình thoi phải dựng.

+ *Chứng minh :* Rõ ràng tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau nên là hình thoi.

+ *Biện luận :*

– Nếu c // b' thì bài toán vô nghiệm.

– Nếu c ≡ b' thì có vô số nghiệm.

– Nếu c và b' cắt nhau ở ngoài đường thẳng a thì bài toán có một nghiệm hình, còn nếu c và b' cắt nhau trên đường thẳng a thì bài toán vô nghiệm.

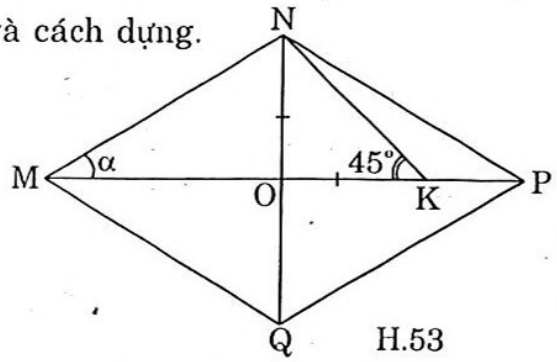
• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Dựng hình thoi MNPQ biết tổng hai đường chéo MP + NQ = a và góc NMP = α."*

Ta có cách giải sau :

Ở đây chỉ nêu hai bước là phân tích và cách dựng.

+ *Phân tích :* Giả sử MNPQ là hình thoi đã dựng được với MP + NQ = a và $\widehat{NMP} = \alpha$ (hình 53).

Gọi O là giao điểm hai đường chéo, ta có OM = OP, ON = OQ và NQ ⊥ MP, với MP > NQ.



H.53

Trên OP lấy điểm K sao cho OK = ON. Khi đó $MK = OM + ON = \frac{a}{2}$.

ΔONK là tam giác vuông cân nên $\widehat{NKO} = 45^o$, do đó dựng được ngay ΔMNK và xác định được điểm O và các đỉnh P và Q của hình thoi.

+ *Cách dựng :*

– Dựng ΔMNK biết $\widehat{NMK} = \alpha$, $MK = \frac{a}{2}$ và $\widehat{NKM} = 45^o$.

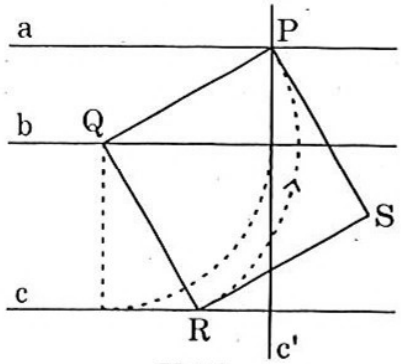
– Dựng trung trực của NK cắt MK tại O.

– Dựng các điểm P và Q đối xứng của M và N qua O.

Tứ giác MNPQ là hình thoi phải dựng.

**11.** *Phân tích :* Giả sử PQRS là hình vuông phải dựng có ba đỉnh P trên a, Q trên b và R trên c (hình 54).

Thực hiện phép quay tâm Q một góc 90° thì điểm R sẽ trùng với điểm P, đường thẳng c sẽ đến vị trí c' qua P là giao điểm của a và c'.



H.54

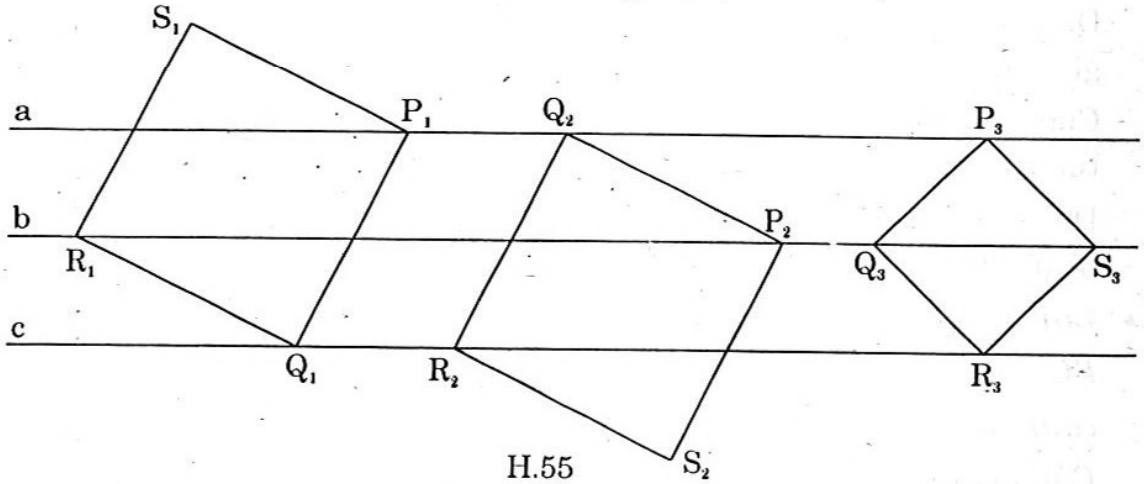
Đoạn thẳng PQ là cạnh hình vuông có thể dựng được, từ đó mà dựng được hình vuông PQRS.

+ *Cách dựng :*

– Lấy một điểm Q bất kì trên đường thẳng b. Phép quay tâm Q một góc $90^o$ sẽ được điểm P trên đường thẳng a. Đoạn thẳng PQ là cạnh hình vuông phải dựng.

– Dựng tiếp các đỉnh R, S của hình vuông PQRS.

Nếu ta chọn điểm Q lần lượt trên ba đường thẳng c, a, b ta sẽ được ba hình vuông $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ và $P_3Q_3R_3S_3$ (hình 55).




H.55

Trong trường hợp một đường thẳng cách đều hai đường thẳng còn lại thì hai hình vuông $P_1Q_1R_1S_1$ và $P_2Q_2R_2S_2$ bằng nhau.

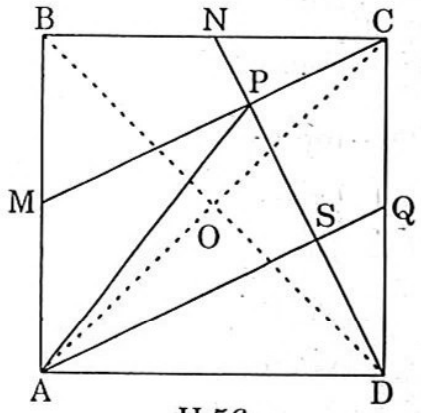
Bài toán có vô số nghiệm hình do vị trí điểm Q thay đổi trên các đường thẳng a, b, c, tức là với Q trên c sẽ có vô số hình vuông bằng $P_1Q_1R_1S_1$, với Q trên a sẽ có vô số hình vuông $P_2Q_2R_2S_2$ và với Q trên b sẽ có vô số hình vuông $P_3Q_3R_3S_3$.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau về hình vuông :

*"Cho M và N là trung điểm các cạnh AB và BC của hình vuông ABCD. Gọi P là giao điểm của DN và CM. Bằng phép quay hãy chứng minh đoạn PA bằng cạnh hình vuông."*

Ta có cách giải sau (hình 56) :

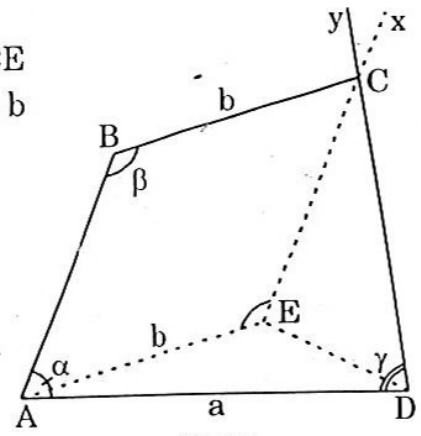
Quay hình vuông xung quanh tâm O một góc $90^o$ ta sẽ được điểm D là ảnh của C. Trung điểm N của BC là ảnh của trung điểm M của AB. Do đó phép quay đã biến đoạn MC thành đoạn ND bằng nó. Suy ra $MC \perp ND$.




H.56

Nếu Q là trung điểm của cạnh CD thì AMCQ là hình bình hành, vậy AQ // CP và giao điểm S của AQ và PD là trung điểm của PD. Ngoài ra $AS \perp PD$, do đó $\Delta PAD$ là tam giác cân nên AP = AD.

**12.** Giả sử tứ giác ABCD đã dựng được với hai cạnh đối bằng a, b và ba góc α, β, γ (hình 57).



H.57

Ta thấy rằng nếu dựng hình bình hành ABCE thì dựng được ngay ΔAED biết AD = a, AE = b và $\widehat{DAE} = \widehat{BAD} - \widehat{BAE} = \widehat{A} - (180^o - \widehat{B})$

$= \alpha + \beta - 180^o$

(hai cạnh và góc xen giữa).

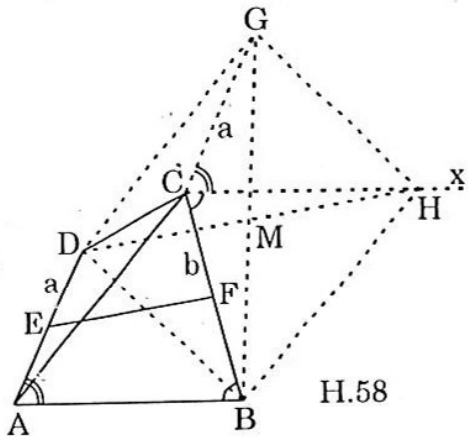
Có được ΔAED ta dựng từ E góc AEx bằng β, rồi dựng từ D góc ADy bằng γ. Do đó xác định được đỉnh thứ ba C là giao điểm của hai tia Ex và Dy.

Cuối cùng chỉ cần xác định đỉnh thứ tư B của hình bình hành AECB, tức cũng là đỉnh thứ tư của tứ giác ABCD cần dựng.

Do tổng các góc của một tứ giác bằng $360^o$ nên bài toán chỉ có nghiệm hình khi tổng $\alpha + \beta + \gamma < 360^o$ và $\alpha + \beta \geq 180^o$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Dựng tứ giác ABCD biết hai cạnh đối AD = a, BC = b, các góc $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$ và đoạn EF = m nối trung điểm hai cạnh đối AD, BC."*

Cách giải như sau :



H.58

+ *Phân tích :* Giả sử ABCD là tứ giác đã dựng được (hình 58). Nếu dời chỗ song song cạnh AD đến CG, cạnh AC đến BH thì ba tứ giác ACGD, ABHC và DBHG đều là hình bình hành. Các góc $\widehat{GCH} = \widehat{A} = \alpha$, $\widehat{HCB} = \widehat{B} = \beta$.

Như vậy ΔCGB dựng được ngay (biết hai cạnh và một góc). Từ đó dựng được Cx // AB.

Ngoài ra có thể xác định vị trí trung điểm M của BG, vị trí của H nằm trên Cx vì F là trung điểm của AH và của BC (giao điểm hai đường chéo), $EF = \frac{1}{2}DH = MH = m$. Xác định được vị trí của D thì dựng được ngay đỉnh A.

+ *Cách dựng :*

– Dựng ΔCGB biết hai cạnh CG = a, CB = b và $\widehat{GCB} = \alpha + \beta$.

– Từ trung điểm M của BG lấy làm tâm dựng cung tròn bán kính m cắt Cx tại H.

– Nối HM và kéo dài đến D sao cho MD = m.

– Từ D dựng DA song song và bằng GC.

Tứ giác ABCD là tứ giác cần dựng. Bài toán có một nghiệm hình.

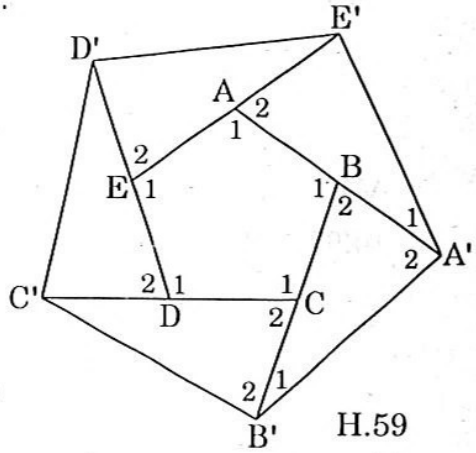
**13.** Do ABCDE là ngũ giác đều (hình 59) nên :

$$AB = BC = CD = DE = EA$$

và $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$.

Suy ra $AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$

và $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_2 = \widehat{D}_2 = \widehat{E}_2$.



H.59

Xét hai tam giác AE'A' và BA'B' có :

- $AE' = BA'$ (gt), $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$, $AA' = BB'$

nên $\Delta AE'A' = \Delta BA'B'$ (c.g.c).

Chứng minh tương tự ta có :

$$\Delta AE'A' = \Delta BA'B' = \Delta CB'C' = \Delta DC'D' = \Delta ED'E',$$

do đó : $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A$ (1)

Lại có : $\widehat{A'_1} = \widehat{B'_1}$ (vì $\Delta AE'A' = \Delta BA'B'$),

$\widehat{A'_2} = \widehat{B'_2}$ (vì $\Delta BA'B' = \Delta CB'C'$),

suy ra : $\widehat{A'_1} + \widehat{A'_2} = \widehat{B'_1} + \widehat{B'_2}$, hay $\widehat{E'A'B'} = \widehat{A'B'C'}$.

Chứng minh tương tự có :

$$\widehat{E'A'B'} = \widehat{A'B'C'} = \widehat{B'C'D'} = \widehat{C'D'E'} = \widehat{D'E'A'} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra A'B'C'D'E' là ngũ giác đều.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Đa giác đều có bao nhiêu cạnh nếu tổng số đo tất cả các góc ngoài và một góc trong của đa giác bằng 468° ?"*

Gọi số cạnh của đa giác đều là n. Mỗi góc của đa giác đều có số đo là $\frac{(n-2).180^\circ}{n}$. Do tổng số đo các góc ngoài của đa giác là 360° nên ta có phương trình : $360 + \frac{(n-2).180}{n} = 468$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$360n + 180n - 360 = 468n \quad \text{hay} \quad 540n - 468n = 360$$

Từ đó : $72n = 360$. Vậy $n = 360 : 72 = 5$.

Đa giác đều này là ngũ giác đều.

**14.** Ta phải xét hai trường hợp tùy theo điểm M ở trong hoặc ở ngoài ngũ giác đều.

– Trường hợp 1. M ở trong ngũ giác (hình 60a). Ta có :

$$\widehat{AEM} = \widehat{CDM} = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$$

Vì thế từ các tam giác cân AEM và CDM có :

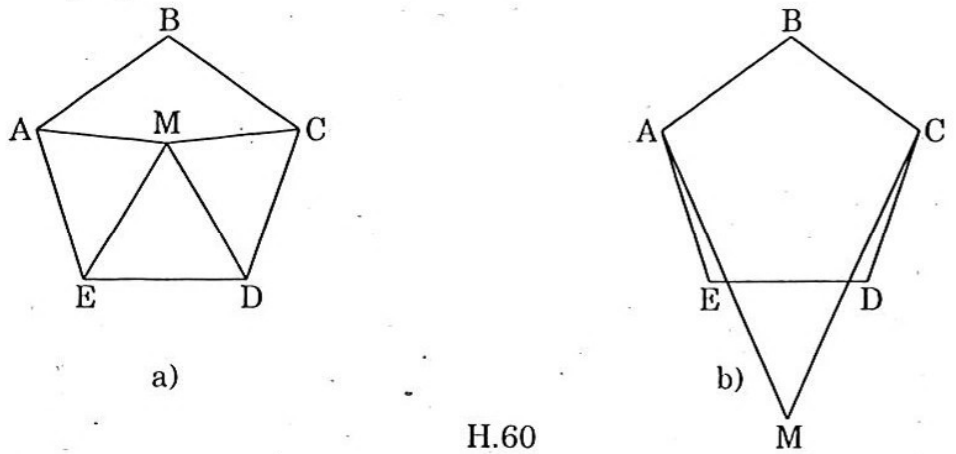
$$\widehat{AME} = \widehat{CMD} = 66^\circ; \quad \widehat{AMC} = 360^\circ - 60^\circ - 2.66^\circ = 168^\circ.$$

– Trường hợp 2. M ở ngoài ngũ giác (hình 60b). Ta có :

$$\widehat{AEM} = \widehat{CDM} = 108^o + 60^o = 168^o;$$

$$\widehat{AME} = \widehat{CMD} = 6^o \quad \text{và} \quad \widehat{AMC} = 60^o - 2.6^o = 48^o.$$

Vậy góc AMC bằng $168^o$ nếu M ở trong ngũ giác và bằng $48^o$ nếu M ở ngoài ngũ giác.




H.60

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán về đa giác đều :

*"Có bao nhiêu đa giác đều mà các đường chéo bằng nhau ?"*

Ta thấy ngay đó là hình vuông và hình ngũ giác đều (tức là n = 4 và n = 5). Thế thì nếu $n \geq 6$ thì sao ?

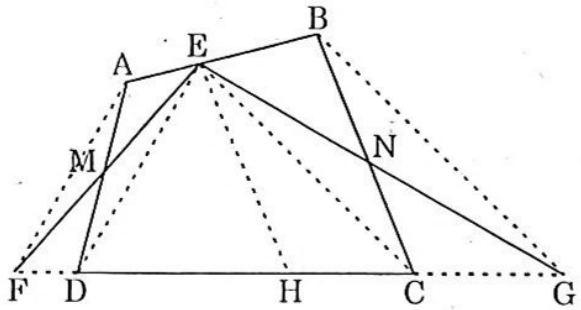
Giả sử đa giác đều $D_1D_2...D_n$ với $n \geq 6$ có các đường chéo bằng nhau. Khi đó các đường chéo $D_1D_4$, $D_2D_5$ bằng nhau. Nhưng tứ giác $D_1D_2D_4D_5$ có $D_1D_4$ và $D_2D_5$ là đường chéo, còn $D_1D_5$ và $D_2D_4$ là cạnh, cho nên $D_1D_5 + D_2D_4 < D_1D_4 + D_2D_5$. Mâu thuẫn ! Vì bốn đoạn $D_1D_5$, $D_2D_4$, $D_1D_4$ và $D_2D_5$ phải bằng nhau.

**15.** a) Do AF // ED (gt) (hình 61) nên độ dài đoạn vuông góc hạ từ A và F xuống ED bằng nhau, do đó : $S_{ADE} = S_{FDE}$.

Hai tam giác này có chung phần diện tích MDE (M là giao điểm của AD và EF) nên $S_{AME} = S_{DMF}$ (1)

Gọi N là giao điểm của BC và EG. Chứng minh tương tự có $S_{EBC} = S_{GEC}$, suy ra

$S_{BNE} = S_{CNG}$ (2)




H.61

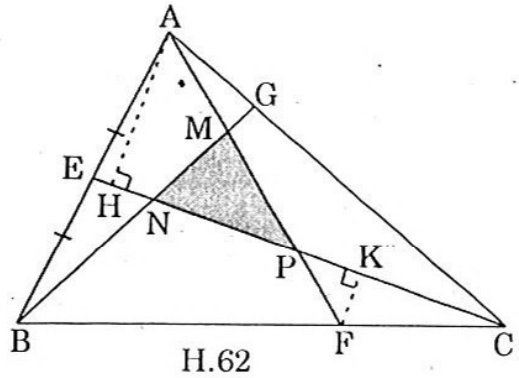
Từ (1) và (2) ta thấy diện tích ΔEFG = diện tích tứ giác ABCD đã cho. Vậy $S_{EFG} = S_{ABCD} = 96cm^2$.

b) Theo câu a) thì $S_{AME} = S_{DMF}$ nên $S_{AEHD} = S_{EHF}$. Do H là trung điểm của FG nên $S_{EHF} = S_{EHG}$ (đáy bằng nhau và đường cao bằng nhau).

Vậy $S_{AEHD} = S_{EHF} = 48cm^2$.

• ***Lời bình :*** Sau đây là bài toán về tính diện tích tam giác :

*"Cho ΔABC có diện tích 252cm². Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho EA = EB, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho BF = 2FC và trên cạnh CA lấy điểm G sao cho CG = 3AG. Ba đường thẳng CE, BG, AF cắt nhau tại N, M, P. Tính diện tích ΔMNP."*



H.62

Ta có cách giải sau (hình 62) :

$S_{BCE} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 126cm^2$ (vì đáy $EB = \frac{1}{2}AB$)

$S_{AFC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 84cm^2$ (vì đáy $FC = \frac{1}{3}BC$)

$S_{ABG} = \frac{1}{4}S_{ABC} = 63cm^2$ (vì đáy $AG = \frac{1}{4}AC$)

Ta có : $S_{MNP} = S_{ABC} - S_{APC} - S_{BNC} - S_{ABM}$ (*)

Lại có : $S_{PFC} = \frac{1}{3}S_{BCE} = \frac{1}{3}.126 = 42\,(cm^2)$

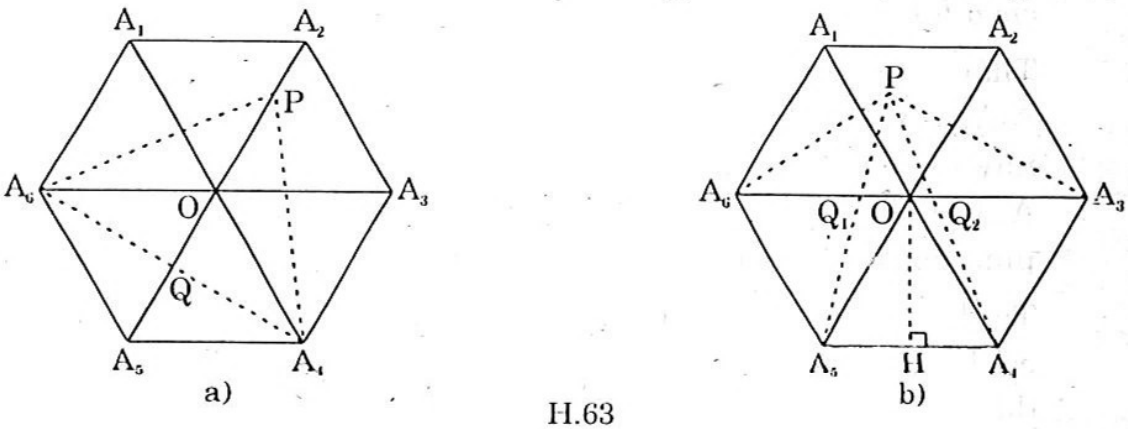
Từ $S_{AEC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 126cm^2$, $S_{PFC} = 42cm^2$, AH là đường cao ΔAEC, suy ra AH = 3.KF (KF là đường cao ΔPFC) và $S_{APC} = 3.S_{PFC}$, $S_{AFC} = 84cm^2$. Từ đó $4S_{PFC} = S_{AFC} = 84cm^2$, nên $S_{APC} = \frac{84}{4}.3 = 63\,(cm^2)$.

Tương tự, ta tính được : $S_{CBN} = 108cm^2$, $S_{ABM} = 56cm^2$.

Vậy thay vào (*) ta có : $S_{MNP} = 252 - 63 - 108 - 56 = 25\,(cm^2)$.

**16.** a) Ta phải xét ba trường hợp, tùy theo điểm P trùng với tâm O của lục giác đều, P nằm trên một cạnh $OA_i$ nào đó (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) hoặc P nằm trong một tam giác nào đó.

– Trường hợp 1. P ≡ O. Khi đó cả sáu tam giác đều có cạnh bằng 1.



H.63

– Trường hợp 2. P nằm trên cạnh $OA_2$ chẳng hạn (hình 63a).

Khi đó ta có hai tam giác $PA_5A_6$ và $PA_4A_5$ thỏa mãn đề bài vì $A_4A_5 = A_5A_6 = 1$, $PA_5 > OA_5 = 1$, $PA_4 > OA_4 = 1$, $PA_6 > OA_6 = 1$, do

$PA_4$ và $PA_6$ là các đường xiên có chân xa chân đường vuông góc $A_4Q$, $A_6Q$ hơn $A_4O$ và $A_6O$.

– Trường hợp 3. P nằm trong một tam giác nào đó, chẳng hạn trong $\Delta OA_1A_2$ (hình 63b).

Khi đó $\Delta PA_4A_5$ có $A_4A_5 = 1$, $PA_5 > A_5Q_1 > A_5O = 1$

và $PA_4 > A_4Q_2 > A_4O = 1$.

$\Delta PA_3A_4$ có $A_3A_4 = 1$, $PA_4 > 1$ (chứng minh trên), $PA_3 + PA_6 > 2$.

Từ đó :

- Nếu $PA_3 \geq 1$ thì $\Delta PA_3A_4$ thỏa mãn.
- Nếu $PA_3 < 1$ thì $PA_6 > 1$ và $\Delta PA_5A_6$ thỏa mãn.

Vậy trong cả ba trường hợp ta đều có ít nhất hai tam giác thỏa mãn bài ra.

Tổng các cạnh của 6 tam giác bằng :

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 + A_6A_1 + 2(PA_1 + PA_2 + ... + PA_6)$$

$$\geq 6 + 2(OA_1 + ... + OA_6) = 6 + 2.6 = 18.$$

b) Gọi khoảng cách từ P đến $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_6A_1$ là $d_1$, $d_2$, ..., $d_6$. Khi đó diện tích lục giác đều bằng :

$$S = 6.\frac{1}{2}.1.OH = 3.OH$$

Mặt khác : $S = \frac{1}{2}.1.(d_1 + d_2 + ... + d_6)$

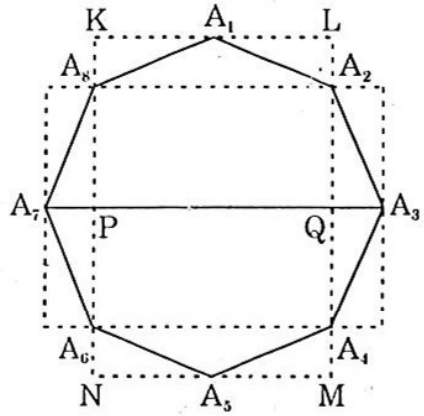
Suy ra : $d_1 + d_2 + ... + d_6 = 6.OH$ = không đổi.

Vậy tổng các khoảng cách từ O tới các đỉnh của lục giác là nhỏ nhất.

- ***Lời bình :*** Xét thêm một bài toán về bát giác đều :

*"Chứng minh rằng diện tích của một bát giác đều bằng tích của đường chéo lớn với đường chéo nhỏ."*

Thật vậy, giả sử ta có bát giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (hình 64). Từ hình này ta cắt bốn tam giác vuông $A_7A_8P$, $A_2A_3Q$, $A_3A_4Q$ và $A_6A_7P$ và chuyển ra phía ngoài như hình vẽ.



H.64

Ta được hình chữ nhật KLMN có hai cạnh chính là đường chéo lớn và đường chéo nhỏ của bát giác đều :

$$KN = LM = A_1A_5$$

và $KL = MN = A_2A_8$.

Suy ra $S_{\text{bát giác đều}}$ = tích hai đường chéo lớn và nhỏ.

# §11. XUNG QUANH TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Định lí Talet***

a) Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Đảo lại, nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

b) Trong tam giác, phân giác của một góc chia cạnh đối thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

***2. Tam giác đồng dạng***

a) Hai tam giác ABC và A'B'C' là đồng dạng nếu $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ và $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

b) Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

***3. Ba trường hợp tam giác đồng dạng***

Hai tam giác đồng dạng khi có :

a) ba cạnh tỉ lệ với nhau từng đôi một.

b) một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tỉ lệ với nhau từng đôi một.

c) hai góc bằng nhau từng đôi một.

***4. Trường hợp tam giác vuông đồng dạng***

Hai tam giác vuông đồng dạng khi có :

a) một góc nhọn bằng nhau từng đôi một.

b) hai cạnh góc vuông tỉ lệ với nhau từng đôi một.

c) cạnh huyền và một cạnh góc vuông tỉ lệ với nhau từng đôi một.

***5. Tỉ số đường cao và diện tích của hai tam giác đồng dạng***

Hai tam giác đồng dạng có :

a) tỉ số hai đường cao bằng tỉ số đồng dạng.

b) tỉ số hai diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Qua giao điểm O của hai đường chéo hình thang MNPQ ta kẻ một đường thẳng cắt hai đáy MN và PQ lần lượt tại S và T. Biết rằng tỉ số

$\frac{SM}{SN} = \frac{5}{3}$, tính tỉ số $\frac{TQ}{TP}$.

**2.** Cho hình bình hành ABCD với P và Q theo thứ tự là trung điểm của CD và DA. Hai đường thẳng AP và BQ cắt nhau tại O. Hỏi diện tích hình bình hành ABCD bằng mấy phần diện tích $\Delta AQO$ ?

**3.** Trên các cạnh MN, NP, PM của $\Delta MNP$ ta lấy theo thứ tự ba điểm P', M', N' sao cho $\frac{MP'}{P'N} = \frac{NM'}{M'P} = \frac{PN'}{N'M} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng giữa chu vi $\mathscr{C}$ của $\Delta MNP$ và chu vi $\mathscr{C}'$ của $\Delta M'N'P'$ có bất đẳng thức :

$$\frac{1}{2}\mathscr{C} < \mathscr{C}' < \frac{3}{4}\mathscr{C}.$$

**4.** Cho $\Delta DEF$. Kẻ trung tuyến DK, phân giác KM của góc DKE và phân giác KN của góc DKF.

a) Chứng minh MN // EF.

b) Gọi O là giao điểm của DK và MN, chứng minh rằng O là trung điểm của MN.

**5.** Cho $\Delta ABC$ có ba trung tuyến AA', BB' và CC'. Phân giác của góc AC'C cắt AA' và AC theo thứ tự tại P và Q, phân giác của góc BC'C cắt BB' và BC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng nếu AP = AQ thì BM = BN.

**6.** Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a ta kẻ một đường thẳng bất kì cắt BC tại M và DC kéo dài tại N. Chứng minh hai tam giác ABM và NCM đồng dạng, từ đó chứng minh hệ thức : $\frac{1}{CM} - \frac{1}{CN} = \frac{1}{a}$.

**7.** Cho hình bình hành DEFH có diện tích bằng 1. Nối đỉnh D với trung điểm K của cạnh EF cắt đường chéo EH tại M. Tính diện tích của tứ giác KMHF.

**8.** Cho tam giác đều ABC và M là trung điểm cạnh đáy BC. Từ M kẻ MN và MP tạo thành góc MNP bằng $60^o$ (N trên AB, P trên AC). Chứng minh rằng :

a) Hai tam giác MBN và PCM đồng dạng và suy ra hệ thức :

$$BC^2 = 4.BN.CP.$$

b) NM và PM theo thứ tự là tia phân giác của các góc BNP và NPC.

c) Các khoảng cách từ M đến các cạnh AB, AC và đoạn thẳng NP bằng nhau và bằng nửa đường cao của tam giác đều ABC.

**9.** Cho hình bình hành ABCD có AC là đường chéo lớn. Từ B hạ $BM \perp AC$, từ C hạ $CN \perp AB$ và $CP \perp AD$. Chứng minh :

a) Hai tam giác ANC và AMB đồng dạng, hai tam giác APC và CMB đồng dạng

b) Hệ thức : $AB.AN + AD.AP = AC^2$.

**10.** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Một đường thẳng d cắt hai cạnh bên, hai đường chéo và hai đáy kéo dài tại sáu điểm K, N, L, M, P và Q tạo thành năm đoạn trên d.

a) Chứng minh rằng nếu hai đoạn đầu và cuối PK = NQ thì hai đoạn thứ hai và thứ tư KL = MN.

b) Tìm tỉ số của hai cạnh đáy hình thang để có thể kẻ đường thẳng d sao cho năm đoạn bằng nhau.

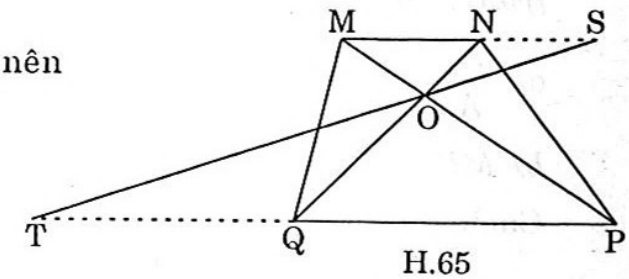
**11.** Dựng tam giác DEF có góc D bằng $70^o$, cạnh DE gấp ba cạnh DF và trung tuyến DM bằng m.

**12.** Dựng tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC biết rằng diện tích của nó bằng $\frac{1}{16}$ diện tích của tam giác ABC.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** Xét ΔOPQ (hình 65) có MN // PQ nên theo định lí Talet : $\frac{SM}{TP} = \frac{OM}{OP}$.

Xét ΔOTQ ta có : $\frac{SN}{TQ} = \frac{ON}{OQ}$.



H.65

Từ các đẳng thức trên suy ra $\frac{SM}{TP} = \frac{SN}{TQ}$ hay $\frac{SM}{SN} = \frac{TP}{TQ}$ (tính chất tỉ lệ thức). Nhưng $\frac{SM}{SN} = \frac{5}{3}$ (gt) nên $\frac{TP}{TQ} = \frac{5}{3}$. Vậy $\frac{TQ}{TP} = \frac{3}{5}$.

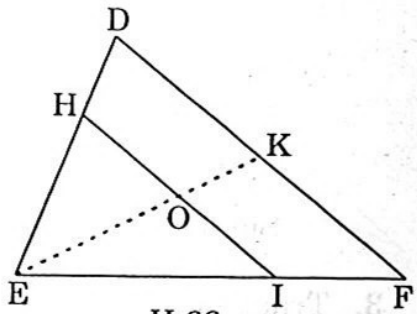
- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Qua trọng tâm O của ΔDEF kẻ đường thẳng song song với cạnh DF cắt DE tại H, cắt EF tại I. Tính HI biết rằng DH + IF = 22cm và ΔDEF có chu vi là 90cm."*

Ta có cách giải sau (hình 66) :

Do O là trọng tâm nên : $\frac{EO}{EK} = \frac{2}{3}$

Lại do HI // DF nên : $\frac{DH}{DE} = \frac{IF}{EF} = \frac{OK}{EK} = \frac{1}{3}$.

Suy ra : $\frac{DH + IF}{DE + EF} = \frac{1}{3} = \frac{22}{90 - DF}$.



H.66

Từ đó DF = 90 – 66 = 24 (cm).

Nhưng $\frac{HI}{DF} = \frac{2}{3}$ nên 2DF = 3HI, vậy HI = $\frac{2.24}{3}$ = 16 (cm).

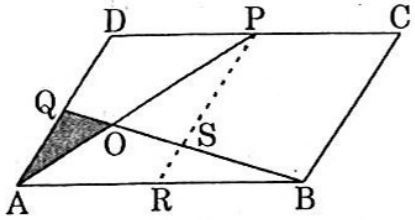
**2.** Từ P kẻ PR // AD cắt QB tại S (hình 67). Ta có :

$$SR = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}RP$$

Do đó : $SP = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{2}AQ$ và $OP = \frac{3}{2}AO$.

Suy ra : $AP = \frac{5}{2}AO$.

Lại có : $\frac{S_{AQO}}{S_{APD}} = \frac{AQ}{AD}.\frac{AO}{AP} = \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.



H.67

Vì $S_{APD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, nên $S_{ABCD} = 20.S_{AQO}$.

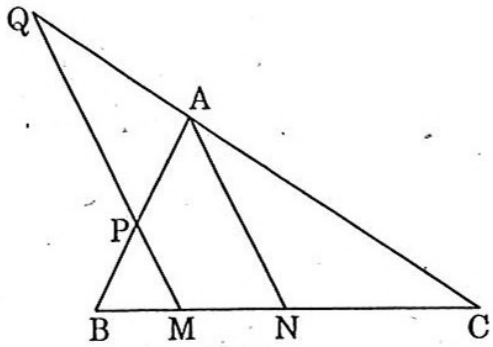
- ***Lời bình :*** Ta xét thêm bài toán sau :

*"Từ điểm M trên đáy BC của ΔABC ta kẻ đường thẳng song song với trung tuyến AN cắt AB tại P và AC tại Q. Chứng minh :*

*a)* $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$

*b) MP + MQ = 2AN."*

Cách giải như sau (hình 68) :



H.68

a) Do AN // MP nên $\frac{AP}{AB} = \frac{NM}{NB}$ (1)

và $\frac{AQ}{AC} = \frac{NM}{NC}$ (2)

Lại có NB = NC (gt) nên từ (1) và (2) suy ra : $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.

b) Cũng do tính chất song song ở trên ta có :

$$\frac{MP}{AN} = \frac{BM}{BN} \text{ và } \frac{MQ}{AN} = \frac{CM}{CN}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này được :

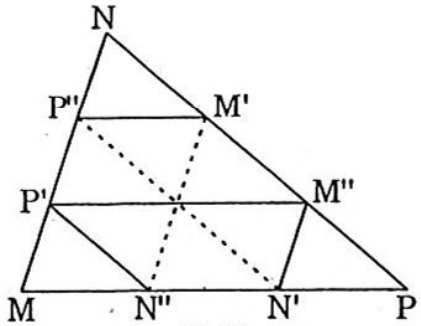
$$\frac{MP + MQ}{AN} = \frac{BM + CM}{BN} = \frac{BC}{BN} = 2$$

Suy ra MP + MQ = 2AN.

**3.** Trước hết ta chứng minh rằng $\mathscr{C}' < \frac{3}{4}\mathscr{C}$ (hình 69).

Trên ba cạnh MN, MP, NP ta lấy ba điểm tương ứng P", N", M" sao cho :

$$\frac{MP''}{P''N} = \frac{NM''}{M''P} = \frac{PN''}{N''M} = 3.$$



H.69

Theo bất đẳng thức giữa các cạnh trong tam giác ta có $\mathscr{C}'$ nhỏ hơn chu vi lục giác M'M"N'N"P'P". Mà chu vi lục giác này bằng $\frac{3}{4}\mathscr{C}$ vì tổng độ dài các cạnh đối của lục giác bằng $\frac{3}{4}$ tổng độ dài các cạnh song song với chúng của tam giác.

– Bây giờ ta chứng minh $\mathscr{C}' > \frac{1}{2}\mathscr{C}$.

Kẻ các đoạn thẳng M'N", N'P", P'M", ta có : M'N" // MN, N'P" // NP, P'M" // MP và $\frac{M'N''}{MN} = \frac{N'P''}{NP} = \frac{P'M''}{PM} = \frac{3}{4}$.

Theo bất đẳng thức giữa các cạnh trong tam giác ta có :

$$M'P' + P'N'' > M'N''$$

$$P'N' + P'M'' > P'M''$$

$$M'N' + M'P'' > N'P''$$

Cộng từng vế ba đẳng thức này ta được :

$$\mathscr{C}' + \frac{1}{4}\mathscr{C} > \frac{3}{4}\mathscr{C} \quad \text{hay} \quad \mathscr{C}' > \frac{1}{2}\mathscr{C}.$$

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hình thang ABCD có đáy AB và CD. Từ A kẻ đường thẳng song song với cạnh bên BC cắt đường chéo DB tại M. Từ B kẻ đường thẳng song song với cạnh bên AD cắt đường chéo AC tại N. Chứng minh đoạn MN song song với hai đáy."*

Ta có cách giải sau (hình 70) :

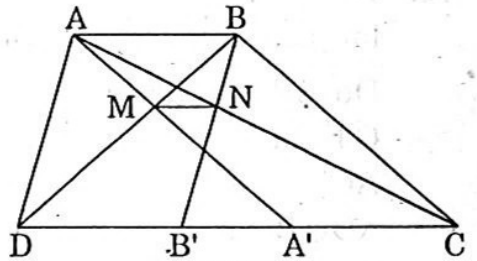
Gọi A' là giao điểm của AM với DC và B' là giao điểm của BN với DC.

Ta có : AB // CD, AM // BC, BN // AD (gt) nên xét hai hình bình hành ABCA' và ABB'D ta có : AB = A'C = DB'.

$\Delta ADC$ có NB' // AD nên $\frac{AN}{AC} = \frac{DB'}{DC}$ (1)

$\Delta BDC$ có MA' // BC nên $\frac{BM}{BD} = \frac{A'C}{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{BD}$.



H.70

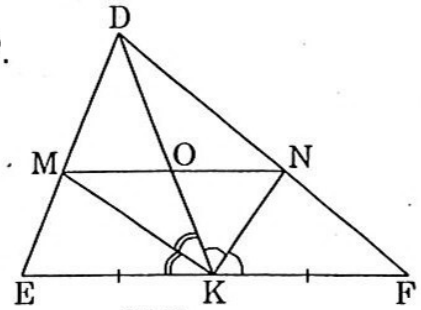
Vậy theo định lí đảo Talet tỉ lệ thức này chứng tỏ : MN // AB // CD.

**4.** a) Theo tính chất đường phân giác của một tam giác, trong $\Delta DKE$ với phân giác KM ta có (hình 71) : $\frac{ME}{MD} = \frac{KE}{KD}$ (1)

Tương tự, trong ΔKDF với phân giác KN ta có : $\frac{NF}{ND} = \frac{KF}{KD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{ME}{MD} = \frac{NF}{ND}$ (vì KE = KF theo gt)

Vậy theo định lí đảo Talet ta có : MN // EF.



H.71

b) Do MN // EF nên theo định lí Talet ta có :

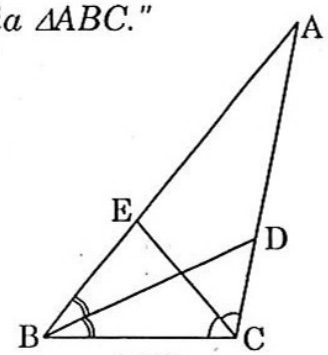
$$\frac{OM}{KE} = \frac{DO}{DK} \text{ và } \frac{ON}{KF} = \frac{DO}{DK}.$$

Suy ra : $\frac{OM}{KE} = \frac{ON}{KF}$ mà KE = KF,

do đó OM = ON, tức là O là trung điểm của MN.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho ΔABC có góc C tù và chu vi là 112cm. Phân giác góc B cắt cạnh AC tại D sao cho $\frac{DA}{DC} = \frac{5}{3}$ và phân giác góc C cắt cạnh AB tại E sao cho EA = 2EB. Tính các cạnh của ΔABC."*

Ta có cách giải sau (hình 72) :



H.72

Do BD là phân giác góc B nên :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{3} \quad \text{hay} \quad \frac{AB}{5} = \frac{BC}{3} \quad (1)$$

Do CE là phân giác góc C nên :

$$\frac{EA}{EB} = \frac{AC}{BC} = 2 \quad \text{hay} \quad AC = 2BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{AB}{5} = \frac{BC}{3} = \frac{AC}{6} = \frac{AB + BC + AC}{5+3+6} = \frac{112}{14} = 8.$

Vậy ba cạnh của ΔABC có độ dài là :

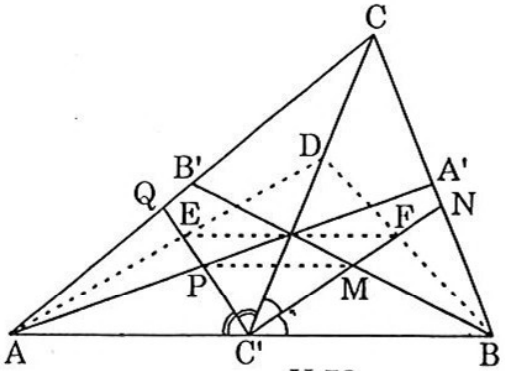
AB = 5.8 = 40 (cm), BC = 3.8 = 24 (cm), AC = 6.8 = 48 (cm).

**5.** Gọi E là trung điểm của đoạn PQ, D là giao điểm của AE và CC', và F là giao điểm của DB và MN (hình 73).

Do AE ⊥ QC' (vì AP = AQ theo gt) và C'E là phân giác của góc AC'C nên AC' = DC', mà AC' = C'B (gt) suy ra ΔDC'B cân và C'F ⊥ DB.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có :

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AC'}{CC'} = \frac{BC'}{CC'} = \frac{BN}{NC},$$



H.73

suy ra QN // AB. Tương tự : PM // EF // AB.

Do đó theo định lí Talet thì FM = FN, do đó BM = BN.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho ΔDEF với EM là phân giác trong, EN là phân giác ngoài của góc E. Từ M và N kẻ các đường thẳng song song với cạnh EF cắt ED tại P và Q.*

*a) Tính DE và PQ biết MP = a, EF = 1,5a.*

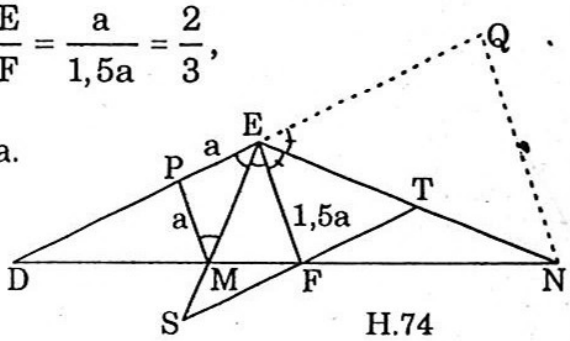
*b) Qua đỉnh F kẻ đường thẳng song song với cạnh DE cắt EM tại S và EN tại T. Chứng minh rằng F là trung điểm của đoạn ST.*

*c) Chứng minh hệ thức EM.FM = DM.SM."*

Ta có cách giải sau (hình 74) :

a) Do PM // EF nên : $\frac{DP}{DE} = \frac{MP}{EF} = \frac{PE}{EF} = \frac{a}{1,5a} = \frac{2}{3}$,

suy ra $\frac{DE - a}{DE} = \frac{2}{3}$, do đó DE = 3a.



H.74

Vì EN là phân giác ngoài nên

$$\frac{ND}{NF} = \frac{DE}{EF} = \frac{3a}{1,5a} = 2.$$

Do EF // QN nên : $\frac{DQ}{EQ} = \frac{ND}{NF} = 2$ hay $\frac{DE + EQ}{EQ} = \frac{3a + EQ}{EQ} = 2$

do đó EQ = 3a. Vậy PQ = a + 3a = 4a.

b) Do ST // DE (gt) nên $\frac{MD}{MF} = \frac{DE}{SF}$ và $\frac{ND}{NF} = \frac{DE}{FT}$.

Lại có $\frac{MD}{MF} = \frac{ND}{NF}$ (vì EM và EN là phân giác trong và ngoài của góc E).

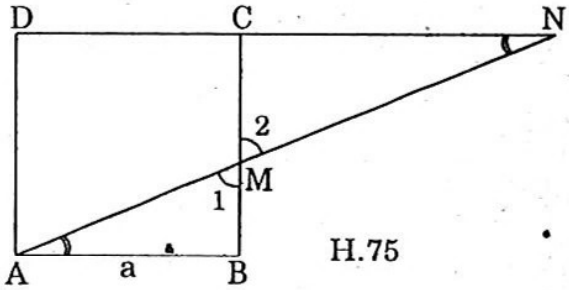
Từ ba đẳng thức trên suy ra $\frac{DE}{SF} = \frac{DE}{FT}$. Từ đó SF = FT, tức là F là trung điểm của đoạn ST.

c) Do $\frac{DM}{FM} = \frac{EM}{SM}$ nên ta có ngay hệ thức EM.FM = DM.SM.

**6.** a) Ta có ΔABM ∽ ΔNCM vì đều là tam giác vuông có hai góc bằng nhau từng đôi một (hình 75) :

$\widehat{A} = \widehat{N}$ (so le trong),

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh).



H.75

b) Đặt BM = b ta có MC = a – b.

Do hai tam giác đồng dạng ở câu a) nên ta có :

$$\frac{CN}{AB} = \frac{CM}{BM} \quad \text{hay} \quad CN = \frac{AB.CM}{BM} = \frac{a(a-b)}{b}$$

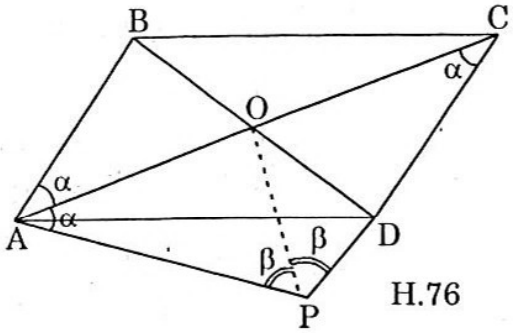
Từ đó : $\frac{1}{CM} - \frac{1}{CN} = \frac{1}{a-b} - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{1}{a}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm hai đường chéo. Các đường thẳng đối xứng với AB và CD qua AC và BD cắt nhau tại P. Chứng minh hai tam giác OAP và ODP đồng dạng."*

Ta có cách giải sau (hình 76) :

Ta chỉ cần chứng minh hai tam giác có hai góc bằng nhau từng đôi một. Để cho gọn ta kí hiệu các góc bằng nhau như ở hình vẽ.

Do tính chất đối xứng, ta có giao điểm O cách đều DC và DP, và cách đều AB và AP.



H.76

Suy ra O cách đều hai cạnh của góc APD, do đó $\widehat{APO} = \widehat{OPD} = \beta$ (1)

Lại có $\widehat{COD} + \widehat{DOP} = \alpha + \beta$ (góc ngoài tại O của $\Delta AOP$) (2)

Xét $\Delta COD$ có : $\widehat{COD} = 180^o - \alpha - \widehat{CDO}$, mà $\widehat{CDO} = \widehat{ODP}$ do đối xứng nên (2) trở thành : $180^o - \alpha - \widehat{ODP} + \widehat{DOP} = \alpha + \beta$

hay $180^o - \alpha - (180^o - \widehat{DOP} - \beta) + \widehat{DOP} = \alpha + \beta$

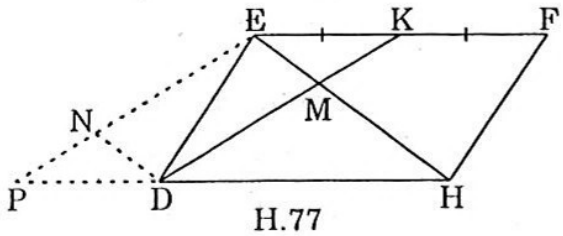
Suy ra $\widehat{DOP} = \alpha = \widehat{OAP}$ (3)

Hai tam giác OAP và ODP có hai góc bằng nhau từng đôi một (theo (1) và (3)) thì đồng dạng.

**7.** Từ E kẻ đường thẳng song song với KD cắt HD kéo dài tại P, rồi từ D lại kẻ DN // EH (hình 77).

Ta có : $S_{PEH} = \frac{3}{4}$,

vì $S_{PDE} = S_{DEK} = \frac{1}{4}$ và $S_{DEH} = \frac{1}{2}$.



H.77

Xét hai tam giác đồng dạng PND và PEH (do DN // EH) ta có :

$$\frac{S_{PND}}{S_{PEH}} = \left(\frac{PD}{PH}\right)^2 = \frac{1}{9}. \text{ Từ đó } S_{PND} = \frac{1}{12}.$$

Do $S_{PND} = S_{EMK}$ nên diện tích tứ giác KMHF bằng hiệu diện tích hai tam giác EHF và EMK, tức là bằng $\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Gọi G là trọng tâm của tam giác đều DEF. Từ một điểm P bất kì trên cạnh EF ta kẻ PQ ⊥ DE và PR ⊥ DF theo thứ tự cắt EG tại S và GF*

*tại T. Chứng minh :*

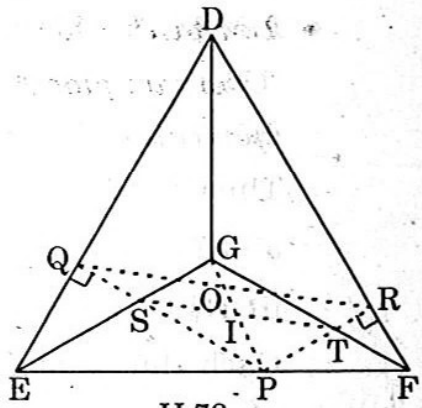
*a) PSGT là hình bình hành.*

*b) OQ = OR, trong đó O là giao điểm của QR với GP."*

Cách giải như sau (hình 78) :

a) G là trọng tâm đồng thời là trực tâm của ΔDEF đều nên EG ⊥ DF, FG ⊥ DE. Do đó EG // PR và FG // PQ. Như vậy tứ giác PSGT có các cặp cạnh đối song song là hình bình hành.

b) Xét các cặp tam giác đồng dạng :



H.78

ΔPTF và PSE (g.g) ta có : $\frac{PT}{PS} = \frac{PF}{PE}$

ΔPRF và PQE (g.g) ta có : $\frac{PR}{PQ} = \frac{PF}{PE}$

Từ hai đẳng thức này suy ra đẳng thức :

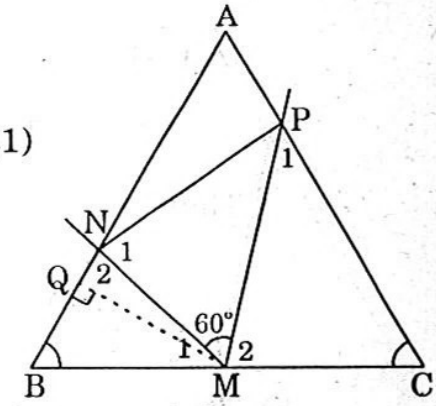
$$\frac{PT}{PS} = \frac{PR}{PQ} \text{ hay } \frac{PT}{PR} = \frac{PS}{PQ},$$

do đó ST // QR (1)

Gọi I là giao điểm của ST và GP ta có IS = IT. Lại có $\frac{IS}{OQ} = \frac{IT}{OR}$.

Suy ra OQ = OR.

**8.** a) Ta có : ΔMBN ∽ ΔPCM (hình 79) vì có $\widehat{B} = \widehat{C} = 60^o$ và $\widehat{M}_1 = \widehat{P}_1$ (do $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \widehat{P}_1 + \widehat{M}_2 = 120^o$)



H.79

Suy ra : $\frac{MB}{CP} = \frac{BN}{MC}$

hay $MB^2 = BN.CP$ (vì MB = MC) (1)

Thay $MB^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ vào (1) được :

$$\frac{BC^2}{4} = BN.CP$$

hay $BC^2 = 4BN.CP$.

b) Do hai tam giác MBN và PCM đồng dạng (câu a) nên ta có :

$$\frac{MN}{MP} = \frac{BN}{MC} \text{ hay } \frac{MN}{MP} = \frac{BN}{MB} \quad (2) \quad \text{và } \widehat{B} = \widehat{NMP} = 60^o \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có ΔMNP ∽ ΔBMN, suy ra $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$. Vậy NM là tia phân giác của góc BNP.

Chứng minh tương tự, PM là tia phân giác của góc NPC.

c) Do M là giao điểm hai tia phân giác NM và PM (câu b) nên M cách

đều hai cạnh của góc BNP và hai cạnh của góc NPC, tức là M cách đều AB, AC và NP.

Nếu kẻ đường cao AM của tam giác đều ABC thì $\widehat{BAM} = 30^o$ nên trong tam giác vuông AQM cạnh MQ đối diện góc $30^o$ bằng nửa cạnh huyền AM. Vậy các khoảng cách từ M đến AB, AC, NP đều bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}AM$ của tam giác đều ABC.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ là $a^2 = b^2 + bc$."*

Theo yêu cầu của đề bài ta phải chứng minh :

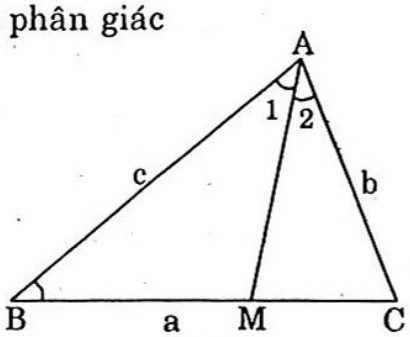
a) Nếu $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ thì $a^2 = b^2 + bc$.

b) Đảo lại, nếu $a^2 = b^2 + bc$ thì $\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

Cách chứng minh như sau :

a) Kẻ phân giác AM của góc A. Theo tính chất phân giác của một tam giác ta có :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \text{ (hình 80)}$$



H.80

Ta lại có thể viết $\frac{c}{b} = \frac{BC - MC}{MC} = \frac{a - MC}{MC}$.

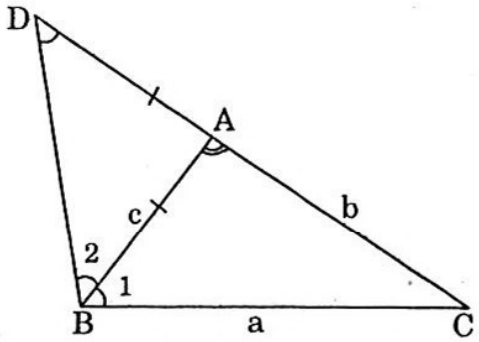
Suy ra $MC = \frac{ab}{b + c}$.

Mặt khác xét hai tam giác đồng dạng AMC và BAC (góc C chung, $\widehat{A}_2 = \widehat{B}$) ta có : $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AC}$ hay $\frac{b}{MC} = \frac{a}{b}$ (*)

Thay giá trị của MC vào (*) được :

$$\frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{a}{b} \text{ hay } \frac{b+c}{a} = \frac{a}{b}. \text{ Từ đó } a^2 = b^2 + bc.$$

b) Trên tia đối của tia AC ta lấy đoạn AD = AB = c (hình 81).



H.81

Hệ thức $a^2 = b^2 + bc$ có thể viết :

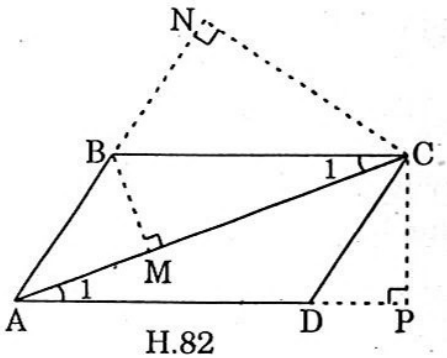
$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a} \text{ hay } \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

Suy ra hai tam giác CBA và CBD đồng dạng mà $\widehat{C}$ chung nên $\widehat{B}_1 = \widehat{D}$.

Do $\widehat{BAC}$ là góc ngoài của tam giác cân ABD nên $\widehat{BAD} = \widehat{D} + \widehat{B}_2 = 2\widehat{B}_2 = 2\widehat{B}_1$, tức là $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ trong $\Delta ABC$.

**9.** a) Hai tam giác vuông ANC và AMB (hình 82) có một góc nhọn BAM chung nên chúng đồng dạng và ta có :

$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$ hay AB.AN = AC.AM (1)



H.82

Hai tam giác vuông APC và CMB có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (so le trong) nên chúng đồng dạng và ta có :

$\frac{AP}{CM} = \frac{AC}{BC}$ hay AD.AP = AC.CM (vì BC = CD là cạnh đối của hình bình hành) (2)

b) Cộng từng vế (1) và (2) được :

$$AB.AN + AD.AP = AC.AM + AC.CM = AC(AM + CM) = AC^2.$$

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

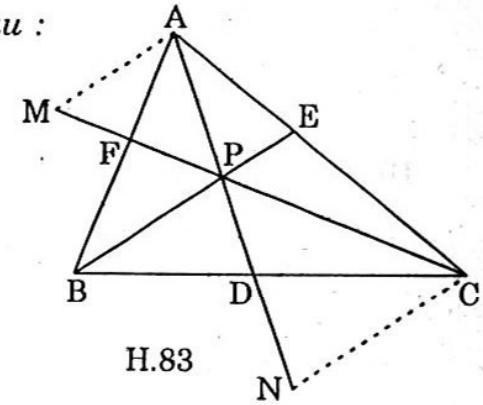
*"Qua điểm P nằm trong ΔABC ta kẻ tia AP cắt cạnh BC tại D, tia BP cắt cạnh AC tại E và tia CP cắt cạnh AB tại F. Chứng minh rằng tích* $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$, *trong bốn trường hợp sau :*

*a) P là trọng tâm.*

*b) P là trực tâm.*

*c) P là giao điểm ba đường phân giác.*

*c) P là điểm tùy ý."*



H.83

Ta có cách giải sau (hình 83) :

a) Trường hợp P là trọng tâm.

Do AD, BE, CF theo thứ tự là ba trung tuyến của ΔABC nên ta có các tỉ số $\frac{DB}{DC} = 1$, $\frac{EC}{EA} = 1$, $\frac{FA}{FB} = 1$.

Nhân từng vế ba đẳng thức này được : $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$.

b) Trường hợp P là trực tâm.

Do AD, BE, CF theo thứ tự là ba đường cao của ΔABC nên ta xét :

– Hai tam giác vuông đồng dạng ABD và CBF (vuông tại D và tại F) vì có góc B chung, ta có : $\frac{DB}{FB} = \frac{AB}{BC}$.

– Hai tam giác vuông đồng dạng BCE và ACD (vuông tại E và tại D) vì có góc C chung, ta có : $\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$.

– Hai tam giác vuông đồng dạng AFC và AEB (vuông tại F và tại E)

vì có góc A chung, ta có : $\frac{FA}{EA} = \frac{AC}{AB}$.

Nhân từng vế ba tỉ lệ thức trên được :

$$\frac{DB}{FB}.\frac{EC}{DC}.\frac{FA}{EA} = \frac{AB}{BC}.\frac{BC}{AC}.\frac{AC}{AB} = 1.$$

c) Trường hợp P là giao điểm ba phân giác.

Ta có các tỉ lệ thức sau : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$

Nhân từng vế ba tỉ lệ thức này được : $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1.$

d) Trường hợp P là điểm tùy ý.

Từ A và C ta kẻ các đoạn thẳng AM và CN cùng song song với BE (hình 83). Áp dụng định lí Talet :

– vào ΔDBP ta có : $\frac{DB}{DC} = \frac{BP}{CN}$ – vào ΔANC ta có : $\frac{EC}{EA} = \frac{PN}{PA}$

– vào ΔPNC ta có : $\frac{PN}{PA} = \frac{CN}{AM}$ – vào ΔFBP ta có : $\frac{FA}{FB} = \frac{AM}{BP}$

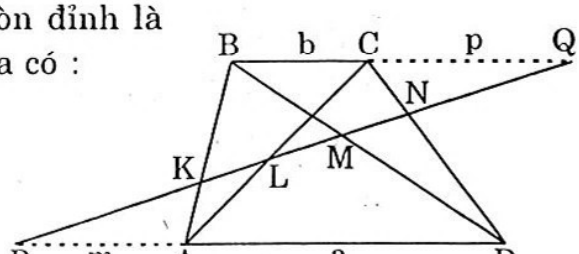
Từ đó : $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{BP}{CN}.\frac{CN}{AM}.\frac{AM}{BP} = 1.$

**10.** a) Để cho gọn ta đặt AD = a, BC = b, PA = m, CQ = p (hình 84).

Xét các cặp tam giác đồng dạng có đáy trên 2 đường thẳng AD và BC còn đỉnh là một trong bốn điểm K, L, M, N ta có :

$\frac{PK}{KQ} = \frac{m}{b+p}$, $\frac{PN}{NQ} = \frac{m+a}{p}$,

$\frac{PL}{LQ} = \frac{m}{p}$, $\frac{PM}{MQ} = \frac{m+a}{p+b}$ (*)



H.84

Nếu tích của hai tỉ số cuối của (*) bằng 1 thì :

$$\frac{PL}{LQ}.\frac{PM}{MQ} = \frac{m(m+a)}{p(p+b)} = 1, \quad \frac{PL}{LQ} = \frac{MQ}{PM}$$

Suy ra $\frac{PL}{PQ} = \frac{MQ}{PQ}$, từ đó PL = MQ.

Nhưng PK = NQ (gt) nên ta có KL = MN.

b) Bốn tỉ số của (*) lần lượt bằng $\frac{1}{4}$, 4, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi :

$$4m = b + p, \quad 4p = a + m, \quad 2p = 3a, \quad 2(m + a) = 3(p + b).$$

Nếu m = 2k thỏa mãn ba đẳng thức đầu thì p = 3k, a = 10k, b = 5k. Suy ra đẳng thức thứ tư cũng thỏa mãn.

Vậy đường thẳng d tồn tại khi và chỉ khi trong hình thang một đáy gấp đôi đáy kia.

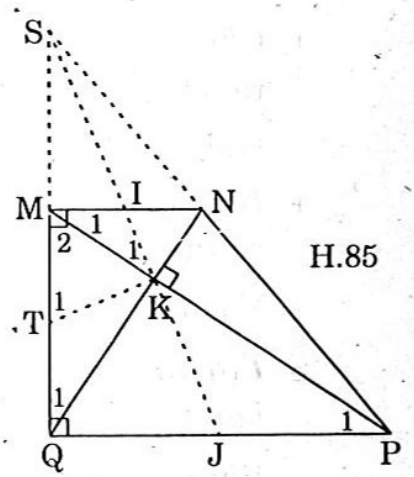
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hình thang vuông MNPQ (MQ là đường cao) có hai đường chéo vuông góc tại K. Gọi S là giao điểm của QM và PN và T là trung điểm của đường cao MQ.*

*a) Chứng minh góc SKT vuông.*

*b) Tính diện tích hình thang MNPQ biết đường cao MQ = 8cm, đường chéo QN = 10cm."*

Cách giải như sau (hình 85) :



H.85

a) Tia SK cắt hai đáy MN và PQ tại I và J.

Do MN // PQ nên ta có :

$$\frac{MI}{QJ} = \frac{SM}{SQ} = \frac{MN}{PQ} = \frac{KN}{KQ} = \frac{IN}{QJ}$$

Suy ra MI = IN, tức là KI là trung tuyến của tam giác vuông MKN. Do đó KI = MI và ΔMIK cân, suy ra :

$$\widehat{K}_1 = \widehat{M}_1 \quad (1)$$

Mặt khác KT là trung tuyến của tam giác vuông MKQ nên KT = TM, suy ra $\widehat{T}_1 = \widehat{M}_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K}_1 + \widehat{T}_1 = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 90^o$, tức là $\widehat{SKT}$ vuông.

b) Xét hai tam giác vuông đồng dạng QMN và PQM (vì $\widehat{Q}_1 = \widehat{P}_1$ là góc có cạnh tương ứng vuông góc) ta có : $QM^2 = MN.PQ$ (*)

Xét tam giác vuông QMN ta có :

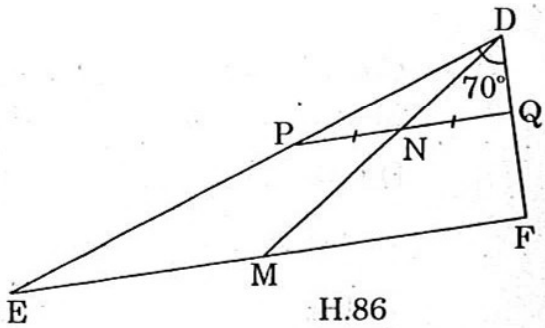
$$MN^2 = QN^2 - MQ^2 = 100 - 64 = 36, \text{ từ đó } MN = 6 \text{ (cm)}.$$

Thay vào (*) được : 64 = 36.PQ, suy ra $PQ = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$ (cm)

Vậy diện tích hình thang MNPQ là :

$$\frac{MN + PQ}{2}.MQ = \frac{6 + \frac{16}{9}}{2}.8 = \frac{280}{9} = 31\frac{1}{9} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**11.** *Phân tích :* Giả sử ΔDEF đã dựng được (hình 86) trong đó $\widehat{D} = 70^o$, DE = 3DF và trung tuyến DM = m. Từ điểm P bất kì trên cạnh DE ta kẻ PQ // EF. Ta được hai tam giác đồng dạng DPQ và DEF mà $\frac{DP}{DQ} = \frac{DE}{DF} = 3$.



H.86

Do đó, nếu dựng được ΔDPQ thì dựng được ΔDEF.

+ *Cách dựng :*

– Dựng ΔDPQ có $\widehat{D} = 70^o$, DP = 3DQ.

– Lấy trung điểm N của PQ, dựng tia DM trên đó lấy điểm M sao cho DM = m.

– Qua M dựng đường thẳng song song với PQ cắt hai tia DP và DQ theo thứ tự tại E và F.

Ta được ΔDEF cần dựng.

+ *Chứng minh :* Xét hai tam giác đồng dạng DPQ và DEF (vì PQ // EF) ta có ngay ΔDEF thỏa mãn bài ra vì $\widehat{D} = 70^o$, DE = 3DF và trung tuyến DM = m.

+ *Biện luận :* Do có thể lấy thêm điểm M' trên tia đối của tia DN nên ta có thêm ΔDE'F'.

Vậy bài toán có hai nghiệm hình.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Dựng ΔMNP biết góc nhọn N bằng α, góc P bằng 45° và đường cao MH bằng h."*

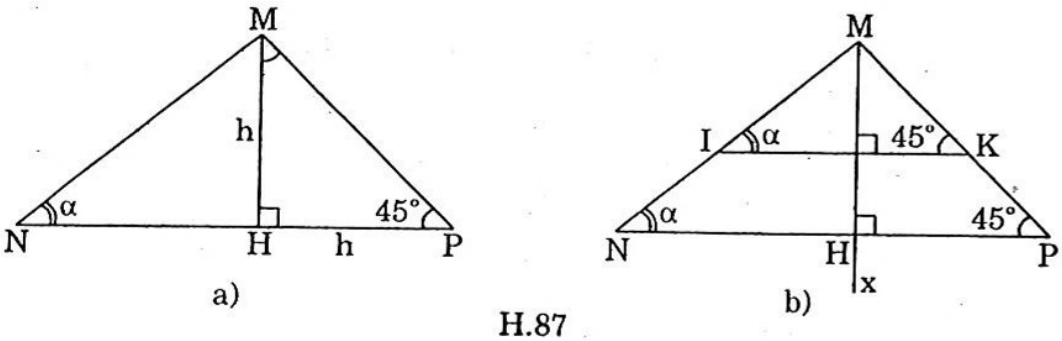
Bài này có hai cách dựng.

– *Cách 1.* (Hình 87a) ΔMHP là tam giác vuông cân vì $\widehat{P} = \widehat{M} = 45^o$ nên MH = HP = h.

Tam giác này dựng được ngay và ta có hai đỉnh M và P của ΔMNP.

Để xác định đỉnh N ta dựng từ M một góc bằng 90° – α mà một cạnh là MH, cạnh kia sẽ cắt đường thẳng HP tại điểm N.

Ta được ΔMNP cần dựng.




H.87

– *Cách 2.* (Hình 87b) Giả sử ΔMNP đã dựng được. Từ điểm I bất kì trên MN ta kẻ đoạn IK // NP, ta được ΔMIK ∽ ΔMNP.

Do đó ta có cách dựng sau :

• Dựng ΔMIK bất kì có $\widehat{I} = \alpha$, $\widehat{K} = 45^o$.

• Dựng tia Mx ⊥ IK trên lấy điểm H sao cho MH = h.

- Dựng qua H đường thẳng song song với IK cắt tia MI tại N và cắt tia MK tại P.

Ta được ΔMNP cần dựng.

Do có thể lấy thêm điểm H' trên tia đối của tia Mx nên ta có thêm ΔMN'P', vì thế bài toán có hai nghiệm hình.

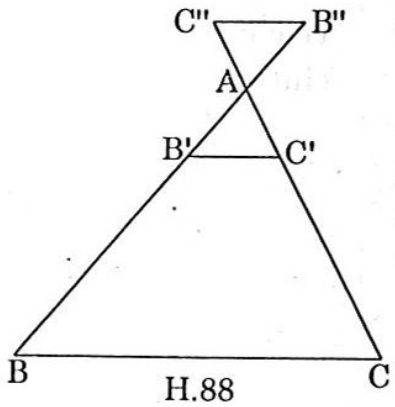
**12.** Ta biết rằng tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên nếu $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16} = k^2$ thì tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{4}$.

Do đó bài toán đã cho quy về : *"Dựng ΔA'B'C' đồng dạng với ΔABC theo tỉ số $\frac{1}{4}$."*

Cách dựng như sau :

Trước hết ta vẽ một tam giác bất kì ABC (hình 88) rồi đặt trên tia AB một đoạn $AB' = \frac{1}{4}AB$. Từ B' dựng đường thẳng song song với cạnh BC cắt tia AC tại C'.

Ta được ΔAB'C' cần dựng.



H.88

Do có thể đặt trên tia đối của tia AB một đoạn $AB'' = \frac{1}{4}AB$ nên ta dựng được một tam giác thứ hai AB''C''. Do đó bài toán có hai nghiệm hình.

- ***Lời bình :*** Ta xét thêm bài toán sau trong đó yêu cầu phải xác định một đoạn thẳng theo các độ dài cho trước :

*"Cho ΔDEF có độ dài ba cạnh là d, e, f. Dựng một đường thẳng song song với cạnh đáy EF sao cho hình thang GHFE tạo thành (G trên DE, H trên DF) có chu vi bằng độ dài m cho trước."*

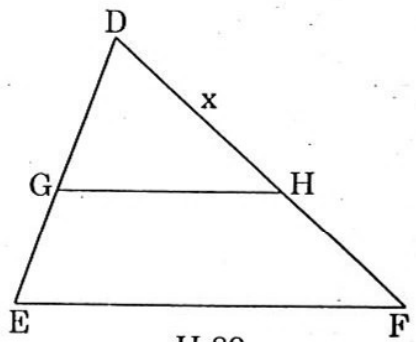
Để giải bài toán này ta giả sử GHFE là hình thang dựng được có chu vi m cho trước (hình 89). Gọi DH = x, ta phải tính DH theo các độ dài d, e, f và m.

Xét ΔDGH ∽ ΔDEF ta có :

$$\frac{DH}{e} = \frac{DG}{f} = \frac{GH}{d} = \frac{x}{e}.$$

Suy ra : $DG = \frac{f.x}{e}$, $GH = \frac{d.x}{e}$

Chu vi hình thang GHFE bằng :



H.89

$$EG + GH + HF + FE = \left(f - \frac{fx}{e}\right) + \frac{dx}{e} + (e - x) + d = m$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$ef - fx + dx + e^2 - ex + de = me$$

hay $$ef + e^2 + de - me = (e + f - d)x$$

Từ đó : $$DH = x = \frac{e(d + e + f - m)}{e + f - d}$$

Nếu gọi chu vi $\Delta DEF$ là $d + e + f = \mathscr{C}$ thì biểu thức x có thể viết gọn :

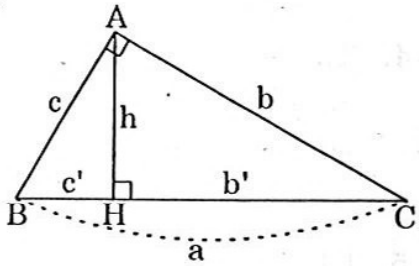
$$x = \frac{e(\mathscr{C} - m)}{\mathscr{C} - 2d}$$ với điều kiện $\mathscr{C} > m$ và $\mathscr{C} > 2d$.

Như vậy độ dài đoạn DH được xác định bởi biểu thức x. Có được điểm H chỉ cần dựng đường thẳng HG // EF để được hình thang GHFE có chu vi m. Bài toán có một nghiệm hình.

# §12. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG CẦN NHỚ TRONG TAM GIÁC VUÔNG

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Năm hệ thức lượng trong tam giác vuông***

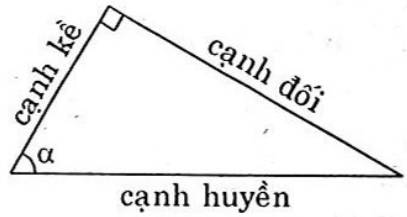



a) $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$ b) $h^2 = b'c'$

c) $a^2 = b^2 + c^2$ d) $ah = bc$

e) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

***2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn***




a) $\sin\alpha = \dfrac{\text{c. đối}}{\text{c. huyền}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{c. kề}}{\text{c. huyền}}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{c. đối}}{\text{c. kề}}$; $\cot\alpha = \dfrac{\text{c. kề}}{\text{c. đối}}$.

b) Một số tính chất :

– Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

– Nếu góc α nhọn thì :

$0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$.

c) Một số hệ thức :

Trong tam giác ABC vuông tại A ta có :

$b = a\sin B = a\cos C$ và $b = c\tan B = c\cot C$

$c = a\sin C = a\cos B$ $c = b\tan C = b\cot B$.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Cho tam giác ABC vuông tại A.

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{b'}{c'}$.

b) Biết tỉ số hai cạnh góc vuông là $\dfrac{5}{6}$, cạnh huyền 122cm, tính độ dài các hình chiếu b' và c'.

c) Tính hai cạnh góc vuông b và c và từ đó tính đường cao h.

**2.** Chứng minh tính chất sau đây của hình thang : "Trong một hình thang tổng các bình phương của hai đường chéo bằng tổng các bình phương hai cạnh bên, cộng hai lần tích hai cạnh đáy."

**3.** Cho $\Delta DEF$ vuông tại D có DE = 9cm, DF = 12cm. Gọi M là trung điểm của EF, từ M kẻ đường vuông góc với EF cắt DF và ED theo thứ tự tại N và P.

a) Chứng minh $\Delta DEF$ đồng dạng với $\Delta MNF$.

b) Tính các cạnh của $\Delta MNF$.

c) Tính độ dài EP và PF.

**4.** Từ một điểm M trong $\Delta DEF$ ta kẻ các đoạn MI, MJ, MK theo thứ tự vuông góc với các cạnh EF, DF và DE (I, J, K là chân các đường vuông góc). Chứng minh hệ thức :

$$EI^2 + JF^2 + DK^2 = IF^2 + JD^2 + KE^2.$$

**5.** Cho $\Delta MNP$ vuông tại M. Kẻ đường cao MH rồi từ H kẻ $HI \perp MN$, $HK \perp MP$. Gọi ba cạnh của tam giác vuông là m, n, p và MH = h, NI = i, KP = k. Chứng minh :

a) $\dfrac{i}{k} = \left(\dfrac{p}{n}\right)^3$ b) $i.k = \dfrac{h^3}{m}$.

**6.** Cho tam giác ABC vuông tại A.

a) Các tia phân giác của các góc B và C chia cạnh đối AC thành hai phần tỉ lệ với 3 : 5 và cạnh đối AB theo tỉ lệ 4 : 5. Tính ba cạnh của $\Delta ABC$, biết chu vi của tam giác bằng 84cm.

b) Nếu tia phân giác của góc vuông A chia cạnh huyền theo tỉ lệ 2 : 5 thì đường cao AH sẽ chia cạnh huyền theo tỉ lệ nào ?

**7.** Cho hình thang cân ABCD (AD = BC).

a) Tính các cạnh bên biết các cạnh đáy dài 12,6cm và 6,6cm và đường cao dài 4cm.

b) Nếu các đường chéo vuông góc với nhau tại K và AC = 7cm, tỉ số các cạnh đáy AB : DC = 3 : 4 thì độ dài các đoạn KA, KB, KC, KD và các cạnh hình thang bằng bao nhiêu ?

**8.** Cho $\Delta MNP$ (MN > MP).

a) Gọi MH là đường cao ứng với cạnh NP và O là một điểm bất kì trên đường cao đó, chứng minh hệ thức :

$$MN^2 - MP^2 = ON^2 - OP^2.$$

b) Nếu MQ là trung tuyến, hãy chứng minh hệ thức :

$$MN^2 - MP^2 = 2NP.HQ.$$

**9.** Chứng minh các hệ thức sau giữa các tỉ số lượng giác của góc nhọn $\alpha$ :

a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ b) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$

c) Áp dụng : Cho tanx = 4, tính cotx, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$.

**10.** Rút gọn các biểu thức sau trong đó α là góc nhọn :

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cot^2\alpha$ b) $1 - \sin\alpha\cot\alpha\cos\alpha$

c) $(1 + \cos\alpha).\tan^2\alpha.(1 - \cos\alpha)$.

**11.** Chứng minh các đẳng thức sau trong đó β là góc nhọn :

a) $\dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta} - \dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \dfrac{4\cot\beta}{\sin\beta}$

b) $\dfrac{\cos\beta + \sin\beta}{\cos^3\beta} = \tan^3\beta + \tan^2\beta + \tan\beta + 1$.

**12.** Một con thuyền được chèo vuông góc với dòng nước của một con sông rộng khoảng 180m. Do nước chảy nên phải đi một khoảng 240m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã giạt con thuyền lệch đi một góc bao nhiêu ?

**13.** Cho tam giác DEF vuông tại D và EP là phân giác góc E. Chứng minh rằng $\tan\dfrac{E}{2} = \dfrac{e}{d+f}$, trong đó d, e, f là độ dài ba cạnh của tam giác.

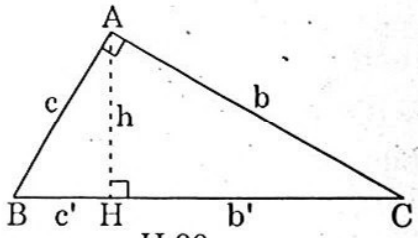
**14.** Cho hai tứ giác ABCD và EFGH có các đường chéo AC = EG, BD = FH và góc xen giữa hai đường chéo của mỗi tứ giác đều bằng α. Chứng minh rằng : $S_{ABCD} = S_{EFGH}$.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC (hình 90) ta có :

$$b^2 = ab' \text{ và } c^2 = ac'$$

Ta có thể viết : $\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{ab'}{ac'} = \dfrac{b'}{c'}$.



H.90

b) Do $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{5^2}{6^2}$ nên $\dfrac{b'}{5^2} = \dfrac{c'}{6^2} = \dfrac{b'+c'}{25+36} = \dfrac{a}{61}$.

Suy ra : $b' = \dfrac{25.122}{61} = 50\,(\text{cm})$; $c' = \dfrac{36.122}{61} = 72\,(\text{cm})$.

c) Ta có : $b^2 = ab' = 122.50 = 100.61$.

Từ đó : $b = 10\sqrt{61}\,(\text{cm})$ và $c = \dfrac{6}{5}b = \dfrac{6.10\sqrt{61}}{5} = 12\sqrt{61}\,(\text{cm})$.

Để tính đường cao h ta có ba cách sau đây :

– *Cách 1.* Áp dụng hệ thức lượng ah = bc, có

$$h = \frac{bc}{a} = \frac{10\sqrt{61}.12\sqrt{61}}{122} = \frac{120.61}{61.2} = 60\,(\text{cm}).$$

– *Cách 2.* Áp dụng hệ thức lượng $h^2 = b'c'$, có

$h^2 = 50.72 = 25.4.36$, suy ra $h = 5.2.6 = 60$ (cm).

– *Cách 3.* Áp dụng hệ thức lượng

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{100.61} + \frac{1}{144.61} = \frac{144+100}{61.100.144} = \frac{4.61}{61.100.144}$$

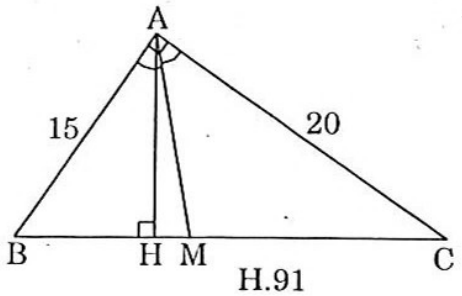
Từ đó : $h^2 = \dfrac{100.144}{4}$, vậy : $h = 60$ (cm).

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho tam giác ABC vuông tại A.*

*a) Tia phân giác góc A chia cạnh huyền thành hai đoạn dài $2\frac{1}{7}$ dm và $2\frac{6}{7}$ dm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.*

*b) Nếu hai cạnh góc vuông dài 15cm và 20cm và ta kẻ thêm đường cao AH (ngoài phân giác AM) thì ba đoạn thẳng BM, MC và HM dài bao nhiêu ?"*

Ta có cách giải sau (hình 91) :



H.91

a) Cạnh huyền dài : $2\frac{1}{7} + 2\frac{6}{7} = 5$ (dm)

Theo bài ra ta có : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\frac{1}{7}}{2\frac{6}{7}} = \dfrac{3}{4}$.

Suy ra : $\dfrac{AB^2}{3^2} = \dfrac{AC^2}{4^2} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \dfrac{BC^2}{25} = \dfrac{25}{25} = 1$

Từ đó ta có ngay : AB = 3 (dm), AC = 4 (dm).

b) Cạnh huyền BC $= \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400}$

$= \sqrt{625} = 25$ (cm).

Phân giác AM chia cạnh huyền thành hai đoạn BM và MC tỉ lệ với hai cạnh kề AB và AC :

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad \text{hay} \quad \frac{BM}{3} = \frac{MC}{4} = \frac{BM + MC}{7} = \frac{25}{7}$$

Từ đó : $BM = \dfrac{3.25}{7} = 10\frac{5}{7}$ (cm), $MC = \dfrac{4.25}{7} = 14\frac{2}{7}$ (cm)

Lại có : $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{15^2}{25} = 9$ (cm)

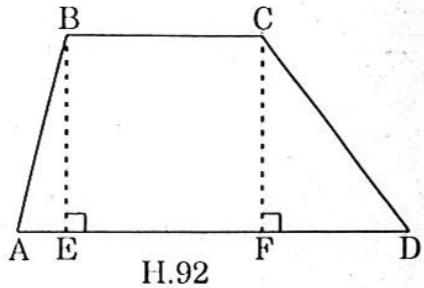
Vậy $HM = 10\frac{5}{7} - 9 = 1\frac{5}{7}$ (cm).

2. Trong hình thang ABCD (hình 92) ta phải chứng minh rằng :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD.BC \quad (*)$$

Thật vậy, từ B và C hạ các đường vuông góc BE và CF tới cạnh đáy lớn AD, ta có BE = CF.

Áp dụng định lí Pytago vào :



H.92

– Hai tam giác vuông AFC và CFD được :

$$AC^2 - AF^2 = CD^2 - DF^2 \ (= CF^2) \quad (1)$$

– Hai tam giác vuông BED và AEB được :

$$BD^2 - DE^2 = AB^2 - AE^2 \ (= BE^2) \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) được :

$$AC^2 + BD^2 - AF^2 - DE^2 = AB^2 + CD^2 - DF^2 - AE^2$$

So sánh với hệ thức (*) ta chỉ còn phải chứng minh :

$$AF^2 + DE^2 - DF^2 - AE^2 = 2AD.BC \quad (3)$$

Ta thấy rằng vế trái của (3) có thể viết :

$$(AF + DF)(AF - FD) + (DE + AE)(DE - AE) =$$
$$= AD(AF - FD) + AD(DE - AE)$$
$$= AD[(AF - AE) + (DE - FD)]$$
$$= AD(EF + EF) = 2AD.BC, \text{ vì } BC = EF.$$

• ***Lời bình :***

1. Nếu là hình thang cân thì tính chất này có thể phát biểu như thế nào?

Rõ ràng trong hình thang cân hai đường chéo bằng nhau (AC = BD) và hai cạnh bên bằng nhau (AB = CD) nên tính chất trên có thể phát biểu như sau :

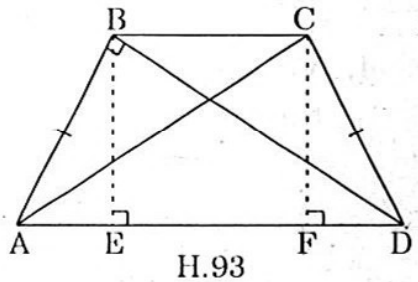
*"Trong một hình thang cân, bình phương của một đường chéo bằng bình phương của một cạnh bên, cộng với tích hai cạnh đáy."*

2. Nếu hình thang cân này có đường chéo vuông góc với cạnh bên thì ta có thể chứng minh rằng : "Tổng bình phương của hai cạnh bên bằng tích của cạnh đáy lớn với hiệu hai đáy", tức là (hình 93) :

$$AB^2 + CD^2 = AD.(AD - BC)$$

Thật vậy, kẻ BE và CF cùng vuông góc với đáy AD ta có :

$$AE = \frac{AD - BC}{2}$$



H.93

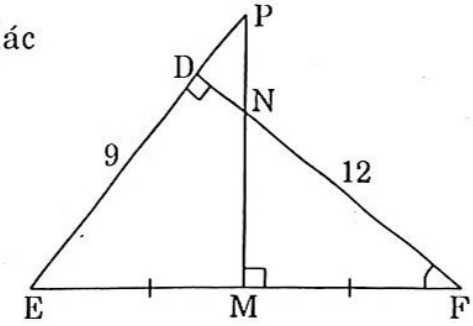
Mặt khác, trong tam giác vuông ABD ta có :

$$AB^2 = AE.AD = \frac{AD - BC}{2}.AD$$

hay $2AB^2 = AD.(AD - BC)$

Do hai cạnh bên AB = CD nên ta có ngay hệ thức cần chứng minh.

**3.** a) Ta có $\Delta DEF \backsim \Delta MNF$ vì đều là tam giác vuông (hình 94) có cùng góc nhọn F.



H.94

b) Xét tam giác vuông DEF ta có :

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 = 9^2 + 12^2$$
$$= 81 + 144 = 225$$

Suy ra EF = 15cm, do đó MF = 7,5cm.

Xét hai tam giác đồng dạng ở câu a) ta có :

$$\frac{DE}{MN} = \frac{DF}{MF} = \frac{EF}{NF} \quad \text{hay} \quad \frac{9}{MN} = \frac{12}{7,5} = \frac{15}{NF} = 1,6$$

Suy ra $MN = 5\frac{5}{8}$ cm, $NF = 9\frac{3}{8}$ cm.

c) Ta có hai tam giác vuông DEF và MEP đồng dạng vì có cùng góc nhọn E. Do đó :

$$\frac{EF}{EP} = \frac{DE}{ME} \quad \text{hay} \quad \frac{15}{EP} = \frac{9}{7,5}. \text{ Suy ra : } EP = \frac{15.7,5}{9} = 12,5\,(\text{cm})$$

Do PM là trung trực của EF nên PE = PF = 12,5cm.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB = 15cm, đường chéo AC = 17cm.*

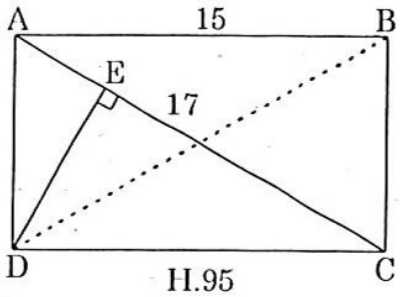
*a) Tính đường chéo BD và cạnh BC.*

*b) Tính khoảng cách DE từ D đến đường chéo AC."*

Cách giải như sau (hình 95) :

a) Trong hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau nên :

BD = AC = 17cm



H.95

Xét tam giác vuông ABC ta có :

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 17^2 - 15^2 = 64.$$

Do đó BC = 8cm.

b) Trong tam giác vuông ADC theo hệ thức lượng ah = bc, ta có :

$$AC.DE = DA.DC \quad \text{hay} \quad DE.17 = 8.15$$

Vậy $DE = \frac{8.15}{17} = \frac{120}{17} \approx 7,05$cm.

**4.** Vế trái của đẳng thức cần chứng minh gợi cho ta phải lần lượt xét ba tam giác vuông MIE, MJF và MKD (hình 96). Theo định lí Pytago ta có

$$EI^2 = ME^2 - MI^2$$
$$JF^2 = MF^2 - MJ^2$$
$$DK^2 = MD^2 - MK^2$$

Cộng từng vế ba đẳng thức này được :

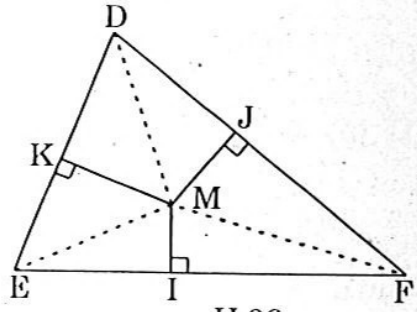
Vế trái $EI^2 + JF^2 + DK^2 = (MF^2 - MI^2) + (MD^2 - MJ^2) + (ME^2 - MK^2)$ (*)

Lại lần lượt xét ba tam giác vuông khác MIF, MJD và MKE ta có :

$$IF^2 = MF^2 - MI^2$$

$$JD^2 = MD^2 - MJ^2$$

$$KE^2 = ME^2 - MK^2$$



H.96

Cộng từng vế ba đẳng thức này ta được :

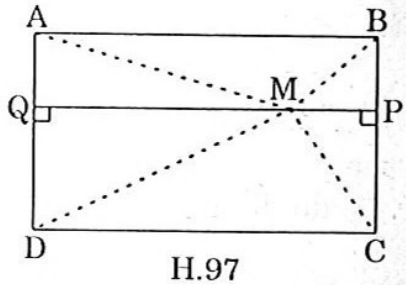
Vế trái $IF^2 + JD^2 + KE^2$ = Vế phải của (*).

Vậy hệ thức đã cho đã được chứng minh.

- ***Lời bình :*** Nếu bây giờ ta thay ΔDEF bằng hình chữ nhật ABCD còn vẫn là điểm M nằm trong hình chữ nhật (hình 97), thì khi hạ từ M đường vuông góc MP với BC và MQ với AD ta có thể chứng minh rằng

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

tức là : "Tổng bình phương các đoạn từ M đến hai đỉnh đối diện bằng tổng bình phương các đoạn từ M đến hai đỉnh đối diện còn lại".



H.97

Thật vậy, xét cặp tam giác vuông MQA và MPC ta có :

$$MA^2 + MC^2 = AQ^2 + QM^2 + MP^2 + PC^2 \qquad (1)$$

Lại xét cặp tam giác vuông MPB và MQD ta có :

$$MB^2 + MD^2 = MP^2 + PB^2 + MQ^2 + QD^2 \qquad (2)$$

Nhưng do ABPQ và PCDQ đều là hình chữ nhật nên AQ = BP, QD = PC, suy ra $AQ^2 = BP^2$, $QD^2 = PC^2$.

Vậy từ (1) và (2) ta có ngay hệ thức $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

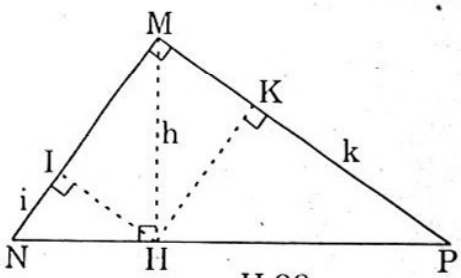
**5.** a) Xét hai tam giác vuông MHN và MHP (hình 98). Coi i và k là các hình chiếu của HN và HP trên cạnh huyền MN và MP ta có (theo hệ thức lượng $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$) : $HN^2 = i.p$; $HP^2 = k.n$

Suy ra : $\dfrac{i}{k} = \dfrac{HN^2}{HP^2} \cdot \dfrac{n}{p}$ (*)

Xét tam giác vuông MNP ta lại có :

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = HN.m \\ n^2 = HP.m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{HN}{HP} = \frac{p^2}{n^2}$$

hay $\dfrac{HN^2}{HP^2} = \dfrac{p^4}{n^4}$



H.98

Thay vào (*) được : $\frac{i}{k} = \frac{p^3}{n^3} = \left(\frac{p}{n}\right)^3$.

b) Hai tam giác vuông NHI và NPM đồng dạng (vì có góc N chung) nên $\frac{i}{p} = \frac{HN}{m}$. Mà $p^2 = HN.m$, hay $HN = \frac{p^2}{m}$, do đó

$$i = \frac{p.HN}{m} = \frac{p}{m}.\frac{p^2}{m} = \frac{p^3}{m^2}. \text{ Tương tự } k = \frac{n^3}{m^2}.$$

Ngoài ra ta lại có : p.n = m.h, vậy :

$$i.k = \frac{n^3p^3}{m^4} = \frac{m^3h^3}{m^4} \text{ hay tích } i.k = \frac{h^3}{m}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, ta xét thêm một hệ thức khác :

*"Chứng minh rằng trong ΔDEF ta luôn có hệ thức :*

$$(d+e+f)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = \left(h_d+h_e+h_f\right)\left(\frac{1}{h_d}+\frac{1}{h_e}+\frac{1}{h_f}\right)."$$

Thật vậy, ta có diện tích ΔDEF bằng : $S = \frac{d.h_d}{2} = \frac{e.h_e}{2} = \frac{f.h_f}{2}$,

do đó : $d = \frac{2S}{h_d}$, $e = \frac{2S}{h_e}$, $f = \frac{2S}{h_f}$.

Như vậy vế trái của hệ thức là :

$$(d+e+f)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = (d+e+f)\left(\frac{h_d+h_e+h_f}{2S}\right) = (h_d+h_e+h_f).\frac{d+e+f}{2S}$$

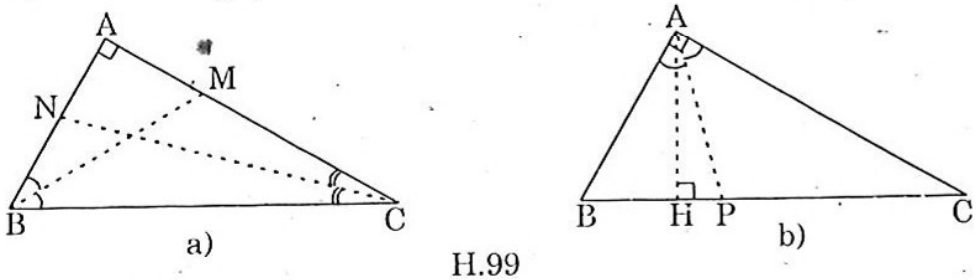
$$= (h_d+h_e+h_f)\left(\frac{1}{h_d}+\frac{1}{h_e}+\frac{1}{h_f}\right), \text{ đúng bằng vế phải.}$$

**6.** a) Theo bài ra ta có (hình 99a) theo tính chất đường phân giác trong tam giác :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \quad \text{và} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}.$$

Suy ra : $\frac{BC}{5} = \frac{AC}{4} = \frac{AB}{3} = \frac{BC+AC+AB}{5+4+3} = \frac{84}{12} = 7.$

Từ đó ta có ngay : BC = 35cm, AC = 28cm, AB = 21cm.




H.99

b) (Hình 99b) Ta có :

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{5} \quad \text{và} \quad \frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{4}{25} \text{ (theo câu 1 của bài 1)}$$

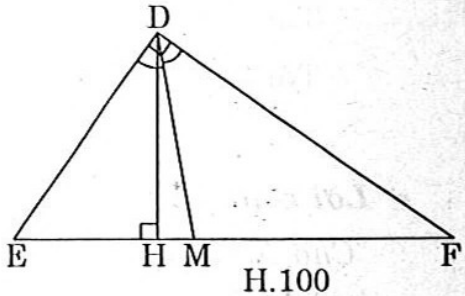
Vậy đường cao chia cạnh huyền theo tỉ số $\frac{4}{25}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Đường cao DH của tam giác DEF vuông tại D chia tam giác thành hai tam giác nhỏ.*

  *a) Tính chu vi tam giác biết chu vi hai tam giác nhỏ là 3dm và 4dm.*

  *b) Tính phân giác DM của góc vuông D biết hai phân giác tại đỉnh góc E và F lần lượt dài 6cm và 8cm."*

Cách giải như sau (hình 100) :



H.100

a) Hai tam giác vuông DHE và FHD đồng dạng, vì có $\hat{D} = \hat{F}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) và tỉ số đồng dạng bằng tỉ số hai chu vi.

Do đó : $\frac{DF}{DE} = \frac{4}{3}$ hay $\frac{DF}{4} = \frac{DE}{3}$.

Suy ra : $\frac{DF^2}{4^2} = \frac{DE^2}{3^2} = \frac{DF^2 + DE^2}{4^2 + 3^2} = \frac{EF^2}{5^2}$ hay $\frac{DF}{4} = \frac{DE}{3} = \frac{EF}{5}$.

Ba tam giác vuông DHF, EHD và EDF đồng dạng (vì có một góc nhọn bằng nhau) và giữa các cạnh tương ứng của chúng có tỉ lệ :

$$DF : DE : EF = 4 : 3 : 5$$

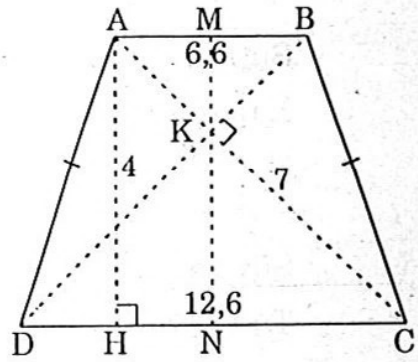
Đó cũng là tỉ số giữa các chu vi của chúng. Mà chu vi hai tam giác nhỏ bằng 4dm và 3dm nên ta suy ra một cách dễ dàng chu vi của $\Delta DEF$ bằng 5dm.

b) Tương tự như câu a), với ba tam giác vuông đồng dạng DHF, EHD và EDF ta có tỉ lệ DF : DE : EF = 4 : 3 : 5. Đó cũng là tỉ lệ giữa các phân giác tương ứng của ba tam giác đó. Vậy ta có :

$$8 : 6 : DM = 4 : 3 : 5.$$

Suy ra ngay DM = 10cm.

**7.** a) Gọi MN là trục đối xứng của hình thang (hình 101) ta kẻ đường cao AH và có :



H.101

$DH = ND - NH = ND - MA$

$= 6,3 - 3,3 = 3$ (cm)

$AH = MN = 4cm$

$AD^2 = AH^2 + DH^2 = 4^2 + 3^2$.

Suy ra $AD = BC = 5cm$.

b) Xét hai tam giác vuông AKB và CKD đồng dạng (vì $\widehat{A} = \widehat{C}$ ở vị trí so le trong) ta có : $\frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KD} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$.

Từ đó suy ra : $\frac{KA}{3} = \frac{KC}{4} = \frac{AC}{7} = 1$, do đó : KA = 3 và KC = 4

$\frac{KB}{3} = \frac{KD}{4} = \frac{BD}{7} = 1$, do đó : KB = 3 và KD = 4.

Trong tam giác vuông AKD ta có : $AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Tam giác cân AKB vuông ở K nên $AB = KA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Tam giác cân CKD vuông ở K nên $CD = KC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Tóm lại : KA = KB = 3cm; KC = KD = 4cm; AD = BC = 5cm;

$AB = 3\sqrt{2}$cm và $CD = 4\sqrt{2}$cm.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 10cm và hình vuông EFGH ngoại tiếp hình vuông đó. Các cạnh của hình vuông lớn bị các đỉnh của hình vuông nhỏ chia theo tỉ số 3 : 4. Tính cạnh của hình vuông ngoại tiếp EFGH."*

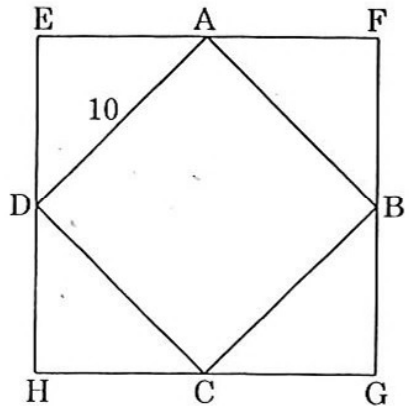
Gọi cạnh hình vuông ngoại tiếp là a với điều kiện a > 10 (hình 102).

Các đoạn bị chia trên hình vuông này sẽ là :

$\frac{3a}{7}$ và $\frac{4a}{7}$.

Ta có : $\left(\frac{3a}{7}\right)^2 + \left(\frac{4a}{7}\right)^2 = 10^2$

hay $3^2.a^2 + 4^2.a^2 = 7^2.10^2$.



H.102

Từ đó : $5^2.a^2 = 7^2.10^2$. Vậy 5.a = 70, suy ra a = 14 thỏa mãn điều kiện ở trên. Thành thử cạnh hình vuông EFGH bằng 14cm.

**8.** a) Xét các tam giác vuông tại H là MHN và MHP (hình 103) ta có :

$$MN^2 - NH^2 = MP^2 - HP^2 \ (= MH^2)$$

Suy ra : $MN^2 - MP^2 = NH^2 - HP^2$ (1)

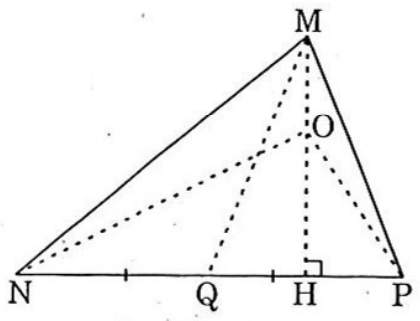
Lại xét các tam giác vuông tại H là OHN và OHP ta có :

$$ON^2 - NH^2 = OP^2 - HP^2 \ (= OH^2)$$

Suy ra : $ON^2 - OP^2 = NH^2 - HP^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ thức :

$$MN^2 - MP^2 = ON^2 - OP^2.$$



H.103

b) Theo chứng minh trên ta có thể viết :

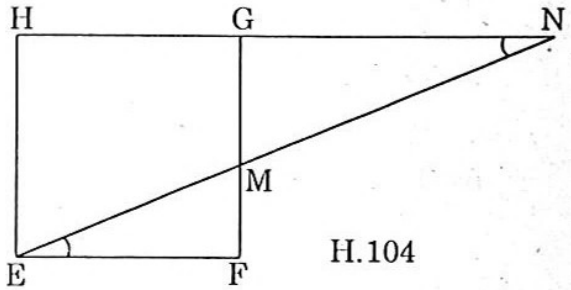
$$MN^2 - MP^2 = NH^2 - HP^2 = (NQ + QH)^2 - (QP - QH)^2$$
$$= 4.NQ.HQ$$

Nhưng do MQ là trung tuyến nên NP = 2NQ. Do đó ta có ngay hệ thức : $MN^2 - MP^2 = 2.NP.HQ$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hình vuông EFGH và M là một điểm trên cạnh FG. Đường thẳng EM kéo dài cắt HG kéo dài tại N. Chứng minh :* $\frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EM^2} + \frac{1}{EN^2}$*."*

Cách giải như sau (hình 104) :



H.104

a) Ta có $\Delta EFM \backsim \Delta NHE$ (vì là hai tam giác vuông có $\hat{E} = \hat{N}$ so le trong). Do đó :

$$\frac{EM}{EN} = \frac{FM}{EH},$$

mà EH = EF nên :

$$\frac{1}{EN} = \frac{FM}{EM.EF} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{EN^2} = \frac{FM^2}{EM^2.EF^2}$$

Mặt khác, trong tam giác vuông EFM ta có : $EM^2 = EF^2 + FM^2$ (*)

Vậy : $\frac{1}{EN^2} + \frac{1}{EM^2} = \frac{FM^2}{EM^2.EF^2} + \frac{1}{EM^2} = \frac{FM^2 + EF^2}{EM^2.EF^2}$.

Kết hợp với (*) được : $\frac{1}{EN^2} + \frac{1}{EM^2} = \frac{EM^2}{EM^2.EF^2} = \frac{1}{EF^2}$.

Đó là hệ thức cần chứng minh.

**9.** a) Theo định nghĩa $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ và $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, do đó ta có :

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

b) $$1 + \cot^2\alpha = 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

c) Do tích $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ nên ta có ngay $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{4}$.

Theo câu a) thì : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 16 = 17$, do đó $\cos^2 x = \frac{1}{17}$.

Để tìm $\sin^2 x$ ta có : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17}$.

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho φ là một góc nhọn.*

*a) Chứng minh rằng : $\sin\varphi < \tan\varphi$ và $\cos\varphi < \cot\varphi$.*

*b) Tính tổng $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi$, biết rằng tích $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{4}$."*

Cách giải như sau :

a) Do φ nhọn nên sinφ và cosφ đều > 0 và < 1.

Ta có : $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, mà $0 < \cos\varphi < 1$ nên $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} > \sin\varphi$,

tức là $\tan\varphi > \sin\varphi$.

Lại có : $\cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, mà $0 < \sin\varphi < 1$ nên $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} > \cos\varphi$,

tức là $\cot\varphi > \cos\varphi$.

b) Ta có thể viết : $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$

$$= 1^2 - 2.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

**10.** Ta có : a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cot^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

b) $1 - \sin\alpha\cot\alpha\cos\alpha = 1 - \sin\alpha.\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

c) $(1 + \cos\alpha).\tan^2\alpha.(1 - \cos\alpha) = (1 - \cos^2\alpha).\tan^2\alpha$

$$= \sin^2\alpha.\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Rút gọn các biểu thức sau :*

*d) $\sin^2\beta + \sin^2\beta.\tan^2\beta$ e) $\dfrac{2\cos^2\beta - 1}{\sin\beta + \cos\beta}$ f) $\dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} + \tan\beta$."*

Ta có thể viết :

d) $\sin^2\beta(1 + \tan^2\beta) = \sin^2\beta.\dfrac{1}{\cos^2\beta} = \tan^2\beta$.

e) $\dfrac{2\cos^2\beta - (\sin^2\beta + \cos^2\beta)}{\sin\beta + \cos\beta} = \dfrac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\sin\beta + \cos\beta} = \cos\beta - \sin\beta$.

f) $\dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\cos^2\beta + \sin\beta + \sin^2\beta}{(1 + \sin\beta)\cos\beta} = \dfrac{1 + \sin\beta}{(1 + \sin\beta)\cos\beta} = \dfrac{1}{\cos\beta}$.

**11.** Ta có :

a) Biến đổi vế trái, sau khi quy đồng mẫu :

$$\frac{(1+\cos\beta)^2-(1-\cos\beta)^2}{1-\cos^2\beta}=\frac{1+2\cos\beta+\cos^2\beta-(1-2\cos\beta+\cos^2\beta)}{1-\cos^2\beta}$$

$$=\frac{4\cos\beta}{\sin^2\beta}=4.\frac{\cos\beta}{\sin\beta}.\frac{1}{\sin\beta}=\frac{4\cot\beta}{\sin\beta}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

b) Biến đổi vế trái :

$$\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos^3\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}.\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}(1+\tan\beta)$$

$$=(1+\tan^2\beta)(1+\tan\beta)=\tan^3\beta+\tan^2\beta+\tan\beta+1$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Chứng minh các đẳng thức sau :*

c) $\dfrac{\sin^2\varphi}{1+\cot\varphi}+\dfrac{\cos^2\varphi}{1+\tan\varphi}=1-\sin\varphi\cos\varphi$

d) $\dfrac{\cos\varphi\cot\varphi-\sin\varphi\tan\varphi}{\dfrac{1}{\sin\varphi}-\dfrac{1}{\cos\varphi}}=\sin\varphi.\cos\varphi."$

Ta lần lượt biến đổi vế trái :

c) $$\frac{\sin^2\varphi}{1+\cot\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{1+\tan\varphi}=\frac{\sin^2\varphi}{1+\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}+\frac{\cot^2\varphi}{1+\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

$$=\frac{\sin^3\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}+\frac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}$$

Áp dụng hằng đẳng thức $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ ta biến đổi tiếp :

$$\frac{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)(\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)+\cos^2\varphi)}{\sin\varphi+\cos\varphi}$$

$$=1-\sin\varphi\cos\varphi.$$

Vế trái đúng bằng vế phải.

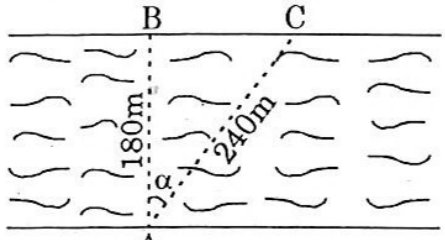
d) Vế trái :

$$\frac{\cos\varphi.\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\sin\varphi.\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\dfrac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}}-1=\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right).\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}-1$$

$$=\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}-1=\frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)(\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi)}{\cos\varphi-\sin\varphi}-1$$

$$=1+\sin\varphi\cos\varphi-1=\sin\varphi\cos\varphi.$$

**12.** Gọi chiều rộng của con sông là AB = 180m, đường đi của con thuyền là AC = 240m (hình 105).



H.105

Trong ΔABC vuông tại B, ta phải tính góc α biết cạnh kề AB và cạnh huyền AC. Muốn thế phải tìm cosin của góc A. Ta có :

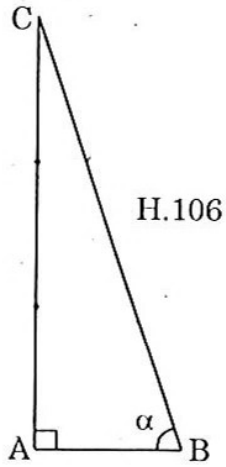
$$\cos A = \cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{180}{240} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Tra bảng lượng giác ta tìm được góc mà cosin bằng 0,75 là $\alpha = 41^\circ 24'$. Vậy dòng nước đã giạt con thuyền đi một góc bằng $41^\circ 24'$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Gọi α là góc do tia nắng mặt trời tạo với mặt đất khi bóng người dài bằng một phần ba chiều cao của người và β là góc khi bóng người dài gấp ba chiều cao của người. Góc nào lớn hơn trong hai góc α và β ?"*

Ta gọi α là góc B, bóng người là AB và chiều cao người là AC trong ΔABC vuông tại A (hình 106).



H.106

Ta có : $\tan\alpha = \tan B = \frac{AC}{AB} = 3$ (vì $AB = \frac{1}{3}AC$)

Tra bảng lượng giác được $\alpha \approx 72^\circ$.

– Trong trường hợp bóng người dài gấp ba chiều cao người thì ta có :

$$\tan\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \text{ (vì } AB = 3.AC\text{), hay } \cot\beta = 3.$$

Tra bảng được $\beta \approx 180^\circ$.

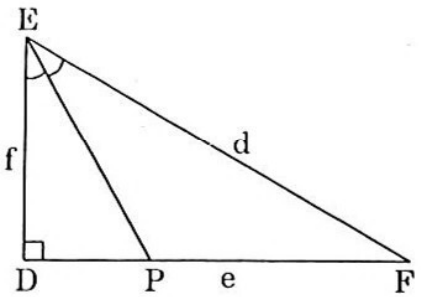
Vậy $\alpha > \beta$.

(*Lưu ý :* Trong hai góc nếu giá trị của tang góc nào lớn hơn thì góc đó lớn hơn. Do đó vì $\tan\alpha = 3$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$ nên $\alpha > \beta$).

**13.** Theo tính chất phân giác EP trong ΔDEF ta có (hình 107) :

$$\frac{PD}{ED} = \frac{PF}{EF} \quad \text{hay} \quad \frac{PD}{f} = \frac{e - PD}{d}$$

Suy ra : $PD = \frac{ef}{d+f}$



H.107

Xét ΔDEP vuông tại D, ta có :

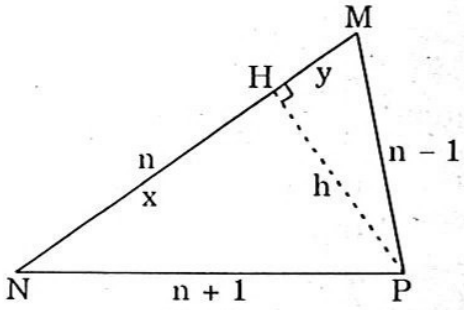
$$\tan\frac{E}{2} = \frac{PD}{ED} = \frac{ef}{d+f} : f$$

hay $\tan\frac{E}{2} = \frac{e}{d+f}$.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho ΔMNP có độ dài ba cạnh là ba số nguyên liên tiếp không nhỏ hơn 3. Chứng minh rằng đường cao hạ xuống cạnh có độ dài trung bình chia cạnh này thành hai đoạn có hiệu độ dài bằng 4."*

Giả sử độ dài ba cạnh của ΔMNP (hình 108) theo thứ tự là MN = n, MP = n – 1, NP = n + 1, trong đó MN là cạnh trung bình và PH = h là đường cao chia MN thành hai đoạn dài x và y (x > y).



H.108

Khi đó ta có x + y = n.

Ngoài ra $x^2 = (n + 1)^2 - h^2$

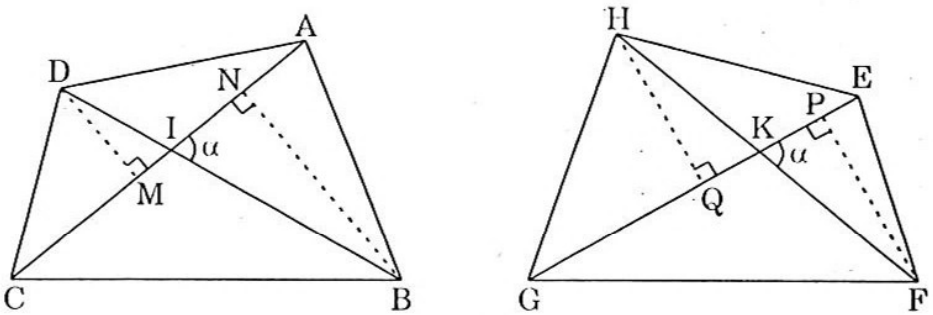
và $y^2 = (n - 1)^2 - h^2$ (theo định lí Pytago)

Suy ra : $x^2 - y^2 = (n + 1)^2 - (n - 1)^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 = 4n$

hay $(x + y)(x - y) = 4n$, vậy $n(x - y) = 4n$,

do đó ta có hiệu $x - y = 4$.

**14.** (Hình 109) Gọi I là giao điểm hai đường chéo của tứ giác ABCD và K là giao điểm hai đường chéo của tứ giác EFGH.



H.109

Xét các tam giác ABC, ADC, EFG và EHG có các đường cao theo thứ tự là BN, DM, FP và HQ. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} BN = BI\sin\alpha \\ DM = DI\sin\alpha \end{array}\right\} \quad \text{Suy ra : } BN + DM = BD.\sin\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} FP = FK\sin\alpha \\ HQ = HK\sin\alpha \end{array}\right\} \quad \text{Suy ra : } FP + HQ = FH.\sin\alpha$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC(BN + DM) = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha \qquad (1)$$

$$S_{EFGH} = S_{EFG} + S_{EHG} = \frac{1}{2}EG(FP + HQ) = \frac{1}{2}EG.FH.\sin\alpha \qquad (2)$$

Mà AC = EG và BD = FH (gt), nên so sánh (1) và (2) ta có ngay :

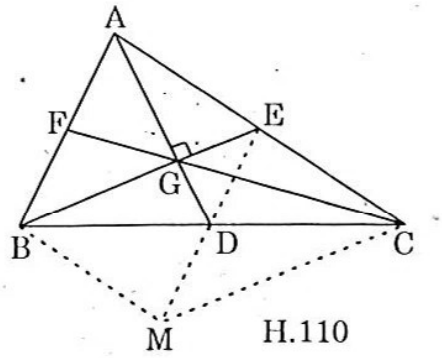
$S_{ABCD} = S_{EFGH}$.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho ΔABC và G là trọng tâm tam giác. Biết rằng hai trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G, chứng minh rằng tổng bình phương của hai trung tuyến này bằng bình phương trung tuyến thứ ba CF."*

Ta phải chứng minh hệ thức $AD^2 + BE^2 = CF^2$ (hình 110).

Vẽ hình bình hành BECM để có trung tuyến BE = MC. Sau đó chứng minh trung tuyến AD = FM. Cuối cùng chỉ cần chứng minh ΔFMC vuông tại M.



H.110

Thật vậy, vẽ hình bình hành BECM ta có hai cạnh đối BE = MC. Do DE là đường trung bình của ΔABC nên DE // AF và DE = AF, suy ra tứ giác ADMF cũng là hình bình hành, nên AD = FM.

Lại có AD ⊥ BE (gt) nên FM ⊥ BE (vì FM // AD), mà BE // MC do đó FM ⊥ MC.

Trong ΔFMC vuông tại M, theo định lí Pytago ta có :

$$FM^2 + MC^2 = CF^2 \quad \text{hay} \quad AD^2 + BE^2 = CF^2.$$

# §13. CÓ GÌ LẠ VỀ ĐƯỜNG TRÒN ?

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Đường tròn***

a) Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

b) Đường tròn là hình có tâm đối xứng và có trục đối xứng. Tâm đường tròn là tâm đối xứng, bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng.

c) Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

– Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

– Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

d) Trong một đường tròn, hai dây bằng nhau thì cách đều tâm, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

– Trong hai dây của một đường tròn, dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn, dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

***2. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn***

a) Đường thẳng và đường tròn cắt nhau : $d < R$

Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau : $d = R$

Đường thẳng và đường tròn không giao nhau : $d > R$

Trong đó, d là khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng.

b) Nếu một đường thẳng là *tiếp tuyến* của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

– Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

c) Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Cho đường tròn (O; R) và hai dây bằng nhau (AC = BD) cắt nhau tại E.

a) Tứ giác ABCD là hình gì ?

b) Tính khoảng cách từ O đến mỗi dây biết rằng $AC = BD = \frac{2}{3}R$.

**2.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB và dây MN cắt bán kính OA tại P. Kẻ AC và BD cùng vuông góc với MN. Qua O kẻ đường kính vuông góc với MN tại E và cắt CB tại F. Chứng minh :

a) E và F theo thứ tự là trung điểm của CD và CB.

b) Hai đoạn CM và DN bằng nhau.

3. Chứng minh rằng dùng thước và compa ta có thể chia một góc $n^o$ thành n phần bằng nhau, nếu n là số tự nhiên không phải là bội của 3 và 5.

4. Trong một hình vuông ABCD vẽ nửa đường tròn đường kính là cạnh AD và vẽ cung AC mà tâm là D. Nối D với một điểm P bất kì trên cung AC, đoạn DP cắt nửa đường tròn đường kính AD ở K. Chứng minh rằng PK bằng khoảng cách từ P đến cạnh AB.

5. Hai đường tròn $O_1$ và $O_2$ có bán kính $r_1$ và $r_2$ tương ứng ($r_1 < r_2$) giao nhau tại các điểm M và P. Gọi MA là dây cung của đường tròn $O_1$ tiếp xúc với đường tròn $O_2$ tại M, gọi MB là dây cung của đường tròn $O_2$ tiếp xúc với đường tròn $O_1$ tại M.

   Trên đường thẳng MP lấy đoạn PH = MP. Từ $O_1$ hạ đường vuông góc với MA, từ $O_2$ hạ đường vuông góc với MB, hai đường vuông góc này cắt nhau tại S.

   Chứng minh rằng PS ⊥ MH, từ đó suy ra tứ giác MAHB nội tiếp được trong một đường tròn.

6. Hai đường tròn (O) và (O') cùng tiếp xúc với một đường thẳng tại M và M' và cùng ở về một phía với đường thẳng đó, bán kính tương ứng bằng 3cm và 12cm, khoảng cách giữa hai tâm bằng 41cm. Hai đường tròn đó đồng thời lăn theo chiều ngược lại trên tiếp tuyến chung với vận tốc 1cm trong 1 giây. Hỏi sau bao nhiêu giây thì chúng chạm nhau ?

7. Ba đường tròn bằng nhau tâm $O_1$, $O_2$, $O_3$ cắt nhau tại điểm K cho trước. Gọi $A_1$, $A_2$, $A_3$ là các giao điểm còn lại. Chứng minh rằng hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $A_1A_2A_3$ bằng nhau.

8. Trong một đường tròn ta vẽ nội tiếp một tam giác cân ba góc nhọn có diện tích S và một hình thang sao cho đáy lớn của nó trùng với đường kính của đường tròn, còn các cạnh bên song song với các cạnh bên của tam giác. Đường trung bình của hình thang bằng a. Tính đường cao của hình thang theo S và a.

9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm (giao điểm các trung tuyến) của các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC. Chứng minh rằng bốn đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' đi qua một điểm cố định và bốn điểm A', B', C', D' nằm trên một đường tròn.

10. Cho đường tròn (O) và điểm M trên (O). Qua M kẻ tiếp tuyến Mt trên đó lấy điểm A bất kì rồi kẻ tiếp tuyến AN.

    a) Chứng minh bốn điểm A, N, O, M nằm trên một đường tròn tâm I.

    b) Tìm quỹ tích của I khi A chạy trên Mt.

    c) Hạ NP ⊥ Mt cắt AO tại Q. Chứng minh tứ giác ONQM là hình thoi và suy ra quỹ tích của Q.

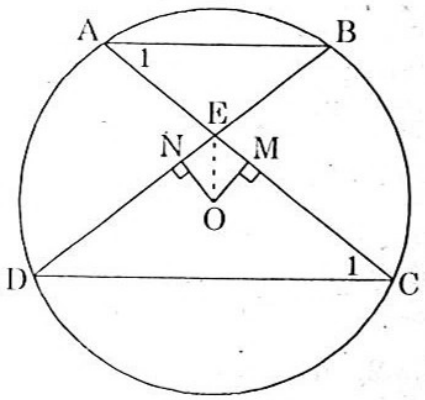
**11.** Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác theo các bán kính $r_1$ và $r_2$ của hai đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC.

**12.** Cho góc xOy và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của nó tại A và B. Từ A trên Ox kẻ đường thẳng song song với Oy cắt đường tròn tại C. Đoạn OC cắt đường tròn tại P và hai đường thẳng AP và OB cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng OQ = QB.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) Do hai dây AC = BD nên khoảng cách từ O đến hai dây bằng nhau hay OM = ON (hình 111). Xét hai tam giác vuông bằng nhau OEM và OEN (cạnh huyền OE, cạnh góc vuông OM = ON) ta có EM = EN.

Hai tam giác cân đỉnh chung E là EAB và ECD có các góc ở đỉnh E bằng nhau nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong). Suy ra AB // CD. Tứ giác ABCD là hình thang có hai đường chéo AC = BD là hình thang cân.



H.111

b) Trong tam giác vuông OAM ta có, theo định lí Pytago :

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = R^2 - \left(\frac{2R}{3.2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{8R^2}{9}$$

Vậy $OM = ON = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$.

- ***Lời bình :*** Có thể nêu thêm hai câu hỏi sau :

*"Nếu góc tại E vuông :*

*c) Tính diện tích tứ giác OMEN và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.*

*d) Tính tổng $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$ theo R."*

Cách giải như sau :

c) Tứ giác OMEN là hình vuông có cạnh là OM

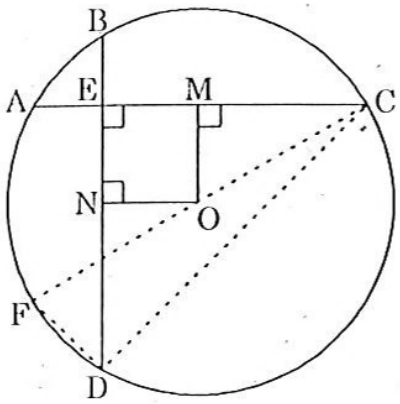
mà $OM^2 = OA^2 - AM^2 = R^2 - \left(\dfrac{R}{3}\right)^2 = \dfrac{8R^2}{9}$ nên $OM = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$.

Diện tích của nó là (hình 112) : $\left(\dfrac{2R\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \dfrac{8R^2}{9}$.

Đường tròn ngoại tiếp tứ giác OMEN có đường kính là OE, ta có :

$$OE = OM\sqrt{2} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}.\sqrt{2} = \frac{4R}{3}$$

Vậy bán kính đường tròn này là $\frac{2R}{3}$.



H.112

d) Kẻ đường kính CF ta có $\Delta FAC$ vuông tại A (vì trung tuyến AO của $\Delta FAC$ bằng $\frac{1}{2}$ cạnh FC). Do đó AF // BD (cùng vuông góc với AC) nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{FD}$, suy ra AB = FD.

Xét hai tam giác vuông AEB và DEC, theo định lí Pytago ta có :

$$EA^2 + EB^2 = AB^2 \quad (1)$$

$$EC^2 + ED^2 = CD^2 \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) được :

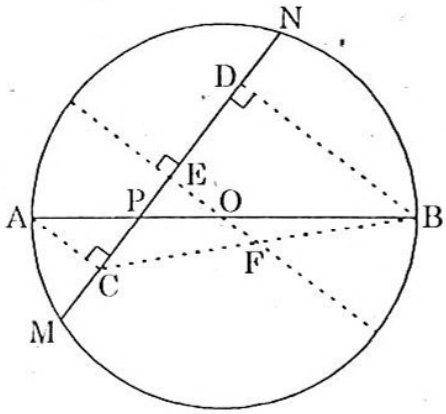
$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + CD^2 = FD^2 + CD^2$$

$$= FC^2 \text{ (vì } \Delta FDC \text{ vuông tại D)}$$

Vậy tổng phải tìm bằng $KC^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

**2.** a) Ta có OF // AC vì cùng vuông góc với MN (hình 113). Do O là trung điểm của AB nên OF là đường trung bình của $\Delta ABC$. Suy ra F là trung điểm của BC.

Xét $\Delta DCB$ có EF // BD vì cùng vuông góc với MN, lại đi qua trung điểm F của BC nên EF là đường trung bình của $\Delta DCB$. Suy ra E là trung điểm của CD.



H.113

b) Do OE ⊥ MN nên E chia dây MN thành hai phần bằng nhau hay EM = EN (1).

Mặt khác E lại là trung điểm của CD nên EC = ED (2)

Trừ từng vế (1) cho (2) được : CM = DN.

- ***Lời bình :*** Có thể nêu thêm hai câu hỏi sau :

*"Chứng minh các hệ thức :*

*c) AC.PE = PC.OE* *d) OE.PD = PE.BD."*

Cách giải như sau :

c) Xét hai tam giác vuông CAP và EOP đồng dạng vì có hai góc đối đỉnh tại P bằng nhau, ta có :

$$\frac{AC}{PC} = \frac{OE}{PE} \quad \text{hay} \quad AC.PE = PC.OE.$$

d) Hai tam giác vuông PEO và PDB cũng đồng dạng vì có góc P chung nên ta có : $\frac{OE}{PE} = \frac{BD}{PD}$ hay OE.PD = PE.BD.

**3.** Các giá trị của n có thể là : 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, ...

a) Với n = 2, 4, 8 ta chia góc bằng cách kẻ đường phân giác.

b) Với n = 7, ta dựng góc $\alpha = 7^o$ liên tiếp 13 lần và được góc $\beta = 91^o$. Từ đỉnh của góc ta hạ đường vuông góc với một cạnh của nó, tức dựng góc $\varphi = 90^o$, được góc $\beta - \varphi = 1^o$. Cuối cùng chỉ việc dựng liên tiếp các góc $1^o$ để chia góc $\alpha$ thành 7 phần bằng nhau.

c) Với n = 11, ta dựng góc $\beta = 11^o$; $88^o$, rồi dựng góc $\varphi = 90^o$ để được góc $\varphi - \beta = 2^o$. Chia đôi góc này ta có góc $1^o$ và sẽ chia dễ dàng góc $11^o$ thành 11 phần bằng nhau.

d) Với n = 13, ta dựng góc $\gamma = 7.13^o = 91^o$ và trở lại trường hợp b) ở trên.

e) Với n = 14, ta làm như ở các trường hợp a) và b) để chia góc $14^o$ thành 14 phần bằng nhau.

g) Với các giá trị còn lại của n ta có đẳng thức n = 15k + r, trong đó r = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Ta dựng góc $15^o$ như sau :

Chia một góc của tam giác đều thành bốn phần bằng nhau. Đặt góc $15^o$ k lần ta được góc $r^o = n^o - (15k)^o$ và chia được góc này thành r phần bằng nhau như cách dựng ở các trường hợp a) và d).

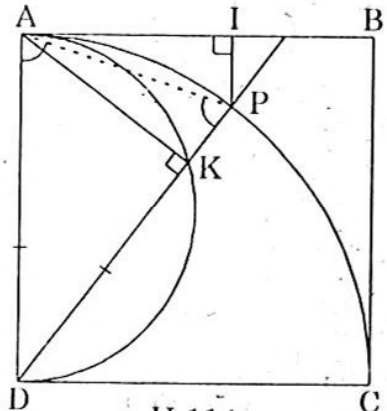
• ***Lời bình :*** Tương tự : *"Hãy chia góc $\frac{\pi}{7}$ thành ba phần bằng nhau."*

Ta thấy rằng chia góc $\frac{\pi}{7}$ thành ba phần bằng nhau tương đương với việc dựng góc $\frac{\pi}{7.3}$. Nhưng $\frac{\pi}{7.3} = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right).\frac{1}{4} = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}\right).\frac{1}{4}$, do đó suy ra cách dựng sau :

Lấy góc $\frac{\pi}{3}$ trừ đi góc đã cho, sau đó chia đôi góc nhận được liên tiếp hai lần.

**4.** Tam giác ADP (hình 114) có hai cạnh DA = DP (bán kính đường tròn tâm D) là tam giác cân. Suy ra $\widehat{DAP} = \widehat{DPA}$. Nối A với K được $\widehat{AKD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét hai tam giác vuông bằng nhau APK và API (cạnh huyền AP chung và góc nhọn $\widehat{APK} = \widehat{API}$) ta có PK = PI.



H.114

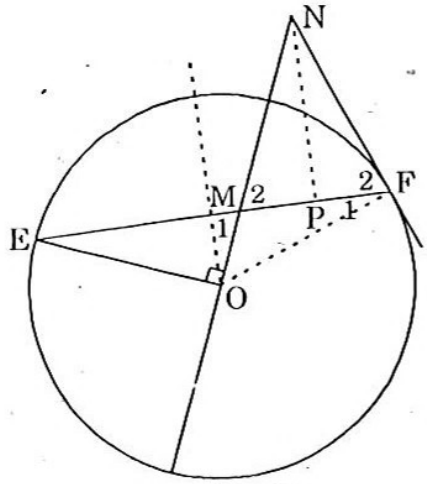
• ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

*"Cho đường tròn tâm O và dây cung EF. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại F. Đường kính vuông góc với OE cắt EF ở M và cắt tiếp tuyến ở N. Chứng minh :*

*a) ΔMNF cân.*

*b) Trục đối xứng của dây EF song song với trung tuyến NP của ΔMNF."*

Cách giải như sau (hình 115) :



H.115

a) Trong tam giác vuông EOM ta có :

$$\widehat{E} + \widehat{M}_1 = 90^o.$$

Lại có $\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = 90^o$ (vì FN là tiếp tuyến tại F).

Nhưng $\widehat{E} = \widehat{F}_1$ vì ΔOEF cân. Từ đó $\widehat{M}_1 = \widehat{F}_2$, $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (đối đỉnh), suy ra $\widehat{M}_2 = \widehat{F}_2$.

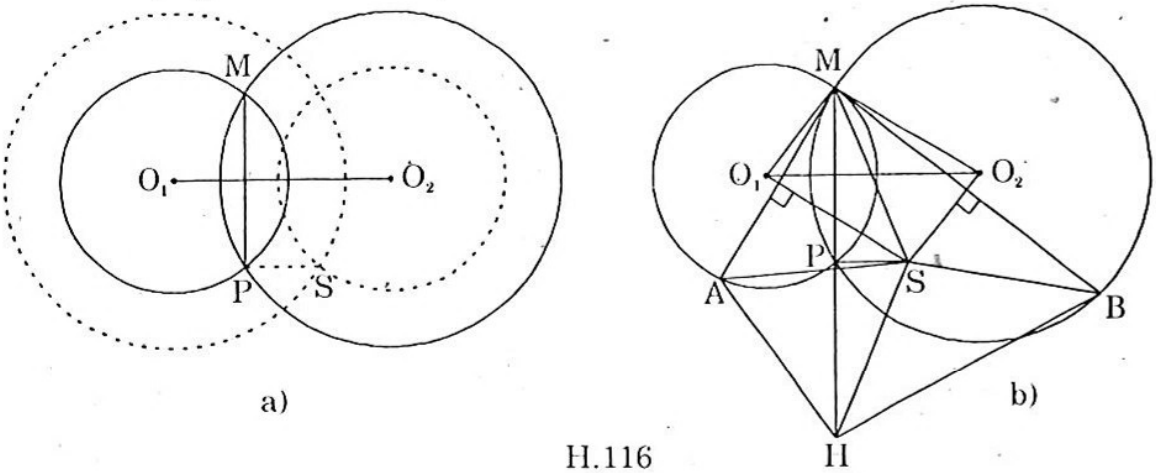
Vậy ΔMNF cân tại N.

b) Trục đối xứng của dây EF là trung trực của nó nên vuông góc với EF. Trung tuyến NP của tam giác cân MNF cũng vuông góc với EF. Do đó trung trực của EF và trung tuyến NP cùng vuông góc với EF nên song song với nhau.

**5.** a) Ta có $O_2M \perp AM$, do đó $O_2M \parallel SO_1$ (hình 116a).

Tương tự $O_1M \parallel SO_2$. Suy ra tứ giác $O_1SO_2M$ là hình bình hành và $O_2S = O_1M$; $O_1S = O_2M$.

Điều này chứng tỏ S là giao điểm của đường tròn tâm $O_1$ bán kính $r_2$ và đường tròn tâm $O_2$ bán kính $r_1$. Do tính đối xứng ta suy ra $PS \parallel O_1O_2$, tức là $PS \perp MH$.



H.116

b) Ta có MP = PH (gt) và SM = SH (do $PS \perp MH$) (hình 116b). Vì S là giao điểm của các trung trực MA và MB nên SM = SA, SM = SB.

Như vậy S là tâm đường tròn đi qua bốn điểm M, A, H, B, nói cách khác tứ giác MAHB nội tiếp được trong một đường tròn.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

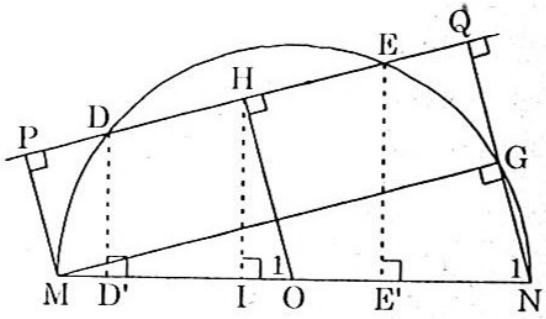
*"Cho nửa đường tròn tâm O đường kính MN và dây DE. Gọi P và Q theo thứ tự là hình chiếu của M và N trên DE. Đường thẳng NQ cắt nửa đường tròn tại G. Gọi H là trung điểm của dây ED và I là hình chiếu của H trên MN. Chứng minh :*

*a) OH ⊥ MG* *b) OH.MG = MN.HI."*

Cách giải như sau (hình 117) :

a) Tam giác MGN vuông tại G vì trung tuyến OG bằng $\frac{1}{2}$MN nên MG ⊥ QN. Lại có PQ ⊥ QN, suy ra MG // PQ.

Do H là trung điểm của DE nên OH ⊥ DE, tức là OH ⊥ PQ. Vậy OH ⊥ MG.



H.117

b) Ta có OH // NQ nên $\widehat{O}_1 = \widehat{N}_1$ (đồng vị). Do đó hai tam giác vuông OIH và NGM đồng dạng. Suy ra :

$$\frac{OH}{MN} = \frac{HI}{MG} \quad \text{hay} \quad OH.MG = MN.HI.$$

**6.** Từ O' hạ O'N ⊥ OM, ta có :

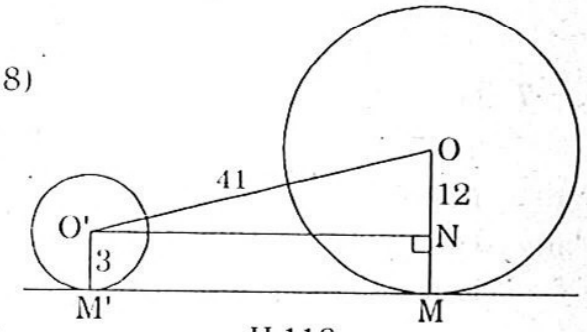
ON = 12 – 3 = 9 (cm) (hình 118)

Khoảng cách giữa hai tiếp điểm là :

$$MM' = O'N = \sqrt{OO'^2 - ON^2}.$$

Ở vị trí ban đầu thì OO' = 41cm.

Ta được : $MM' = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (cm).



H.118

Khi hai đường tròn chạm nhau thì OO' = 12 + 3 = 15 (cm).

Khi đó $MM' = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (cm).

Như vậy hai đường tròn phải lăn một đoạn đường dài 28cm. Do đó thời gian hai đường tròn lăn đồng thời là : $\frac{28}{1+1} = 14$ (giây).

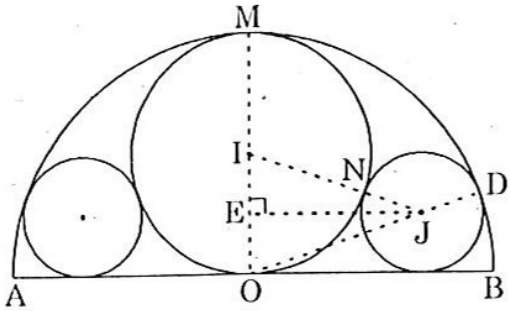
Vậy sau 14 giây thì hai đường tròn chạm nhau.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Trong nửa đường tròn đường kính AB = 4cm có ba đường tròn nội tiếp lần lượt tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với đường kính của nửa đường tròn đã cho. Hai đường tròn ở hai bên đối xứng*

*nhau qua trục đối xứng của nửa đường tròn ở giữa có đường kính là bán kính của đường tròn đã cho. Tính bán kính của ba đường tròn nội tiếp."*

Cách giải như sau (hình 119) :

Gọi tiếp điểm của đường tròn giữa và một đường tròn bên với nửa đường tròn đã cho là M và D. Tiếp điểm của hai đường tròn này là N, tiếp điểm của đường tròn giữa với AB là O. Do tính đối xứng của hình, OM phải vuông góc với AB.



H.119

Gọi tâm đường tròn giữa là I thì bán kính của đường tròn này là :

$$IO = IM = IN = \frac{OM}{2} = 2\,(cm).$$

Gọi tâm đường tròn bên là J. Các điểm I, N, J hay O, J, D đều thẳng hàng. Từ J hạ JE ⊥ OI. Trong tam giác vuông JEI ta có :

$$JE^2 = IJ^2 - IE^2 = (x + 2)^2 - (2 - x)^2 = 8x \qquad (1)$$

(trong đó x là bán kính đường tròn tâm J).

Trong tam giác vuông OEJ ta có :

$$JE^2 = OJ^2 - OE^2 = (4 - x)^2 - x^2 = 16 - 8x \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có ngay : $8x = 16 - 8x$, từ đó $x = 1$.

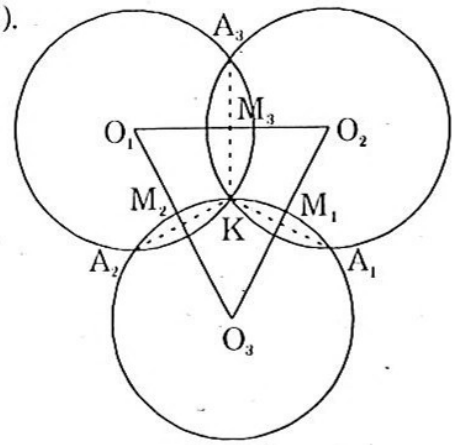
Vậy bán kính ba đường tròn nội tiếp là 1cm, 2cm và 1cm.

**7.** Gọi K là giao điểm của ba đường tròn (hình 120).

Theo bài ra ba đường tròn bằng nhau nên $KA_1$ là trung trực của đoạn $O_2O_3$. Cũng như thế $KA_2$ và $KA_3$ là các trung trực của $O_1O_3$ và $O_1O_2$.

Gọi $M_1$, $M_2$, $M_3$ là trung điểm của ba đoạn $KA_1$, $KA_2$, $KA_3$.

Trong các tam giác $KA_2A_3$ và $O_1O_2O_3$ đoạn $M_2M_3$ là đường trung bình nên $O_2O_3 = 2M_2M_3 = A_2A_3$.



H.120

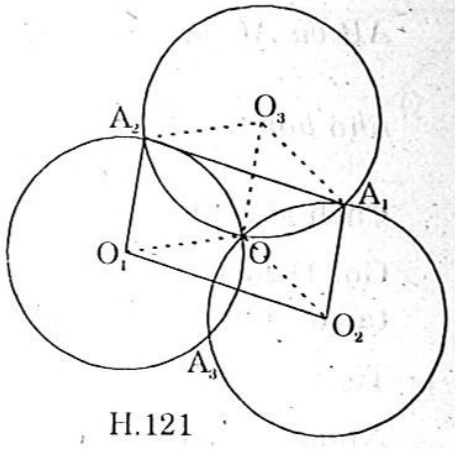
Tương tự ta có : $O_1O_3 = 2M_1M_3 = A_1A_3$ và $O_1O_2 = 2M_1M_2 = A_1A_2$.

Suy ra : $\Delta A_1A_2A_3 = \Delta O_1O_2O_3$ (c.c.c).

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Ba đường tròn bằng nhau cắt nhau tại một điểm O. Giao điểm thứ hai của hai trong ba đường tròn và tâm của đường tròn thứ ba xác định một đường thẳng. Chứng minh rằng ba đường thẳng xác định như vậy cắt nhau tại một điểm."*

Cách giải như sau (hình 121) :

Ta hãy chứng minh rằng hai trong ba đoạn thẳng $O_1A_1$, $O_2A_2$ và $O_3A_3$ cắt nhau tại một điểm là trung điểm của mỗi đoạn thẳng đó.

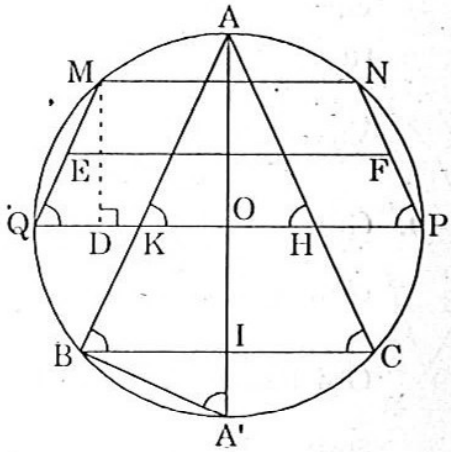


H.121

Chẳng hạn ta chứng minh các đoạn thẳng $O_1A_1$ và $O_2A_2$ bị chia thành hai phần bằng nhau tại giao điểm B của chúng. Thật thế, do các đường tròn bằng nhau nên tứ giác $O_2A_1O_3O$ và tứ giác $O_1A_2O_3O$ đều là hình thoi. Từ đó suy ra các đoạn thẳng $O_2A_1$, $OO_3$ và $O_1A_2$ song song và bằng nhau.

Vậy tứ giác $O_1A_2A_1O_2$ là hình bình hành, do đó các đường chéo $O_1A_1$ và $O_2A_2$ cắt nhau tại trung điểm B của mỗi đường.

**8.** Gọi tam giác cân là ABC và hình thang MNPQ (PQ là đường kính đường tròn) (hình 122), EF là đường trung bình của hình thang, K và H là giao điểm của hai cạnh AB và AC với đáy lớn PQ của hình thang, A' là điểm đối tâm của A.



H.122

Tam giác ABC và hình thang MNPQ đều cân và các cạnh bên hình thang song song với cạnh bên tam giác, nên $\widehat{K} = \widehat{Q} = \widehat{P} = \widehat{H}$.

Do đó PQ // BC và $\widehat{Q} = \widehat{B} = \widehat{AA'B}$.

Từ các đẳng thức $\widehat{Q} = \widehat{AA'B}$ và PQ = AA' suy ra hai tam giác vuông MQP và BAA' bằng nhau. Từ đó AI = DP, D là chân đường cao MD của hình thang.

Nối ED ta có EF = DP = a. Vậy AI = a. Từ hai tam giác bằng nhau MQP và BAA' ở trên ta lại có MD = BI. Nhưng $BI = \frac{1}{2}BC = \frac{S}{AI}$. Vậy

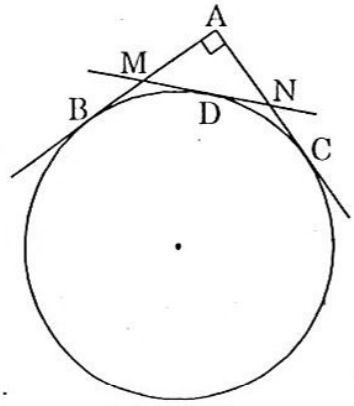
$MD = \frac{S}{AI}$.

Thay giá trị AI = a vào ta được $MD = \frac{S}{a}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của một góc vuông đỉnh A tại hai điểm B và C. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt các cạnh AB và AC tại M và N. Chứng minh rằng tiếp tuyến này xác định trên hai cạnh*

*AB và AC hai đoạn MB và NC có tổng độ dài lớn hơn* $\frac{1}{3}(AB + AC)$ *và nhỏ hơn* $\frac{1}{2}(AB + AC)$."



H.123

Cách giải như sau (hình 123) :

Gọi D là tiếp điểm của MN với đường tròn, ta có : BM = MD và DN = NC.

Từ đó MN = BM + CN.

Nhưng MN < AM + AN, nên

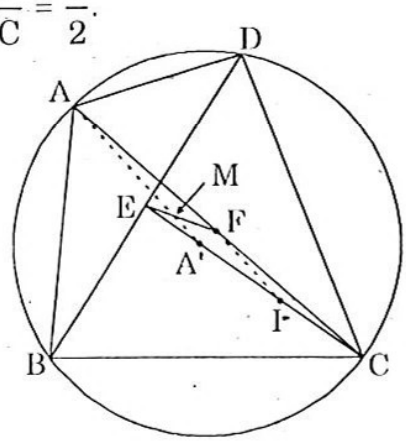
$$2MN < BM + AM + CN + AN = AB + AC.$$

Suy ra $MN < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Mặt khác MN > AN, MN > AM vì MN là cạnh huyền của tam giác vuông AMN. Vì thế 2MN > AN + AM và kết hợp với MN = BM + CN ta có : 3MN > AN + NC + AM + MB = AB + AC.

Vậy : $MN > \frac{1}{3}(AB + AC)$.

**9.** Gọi E và F là trung điểm hai đường chéo BD và AC (hình 124). Trọng tâm A' của ΔBCD là điểm nằm trên CE mà $\frac{EA'}{A'C} = \frac{1}{2}$.



H.124

Gọi I là trung điểm của A'C ta có FI song song và bằng $\frac{1}{2}AA'$. Do đó AA' cắt EF tại trung điểm M của EF và

$$A'M = \frac{1}{2}FI = \frac{1}{4}AA'.$$

Vậy AA' đi qua M và $\frac{A'M}{A'A} = \frac{1}{4}$.

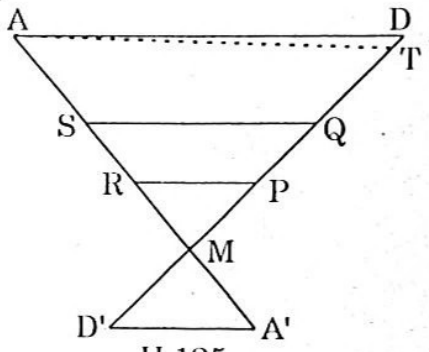
Tương tự, ta lần lượt chứng minh được các đường thẳng BB', CC', DD' cũng đi qua M và $\frac{B'M}{B'B} = \frac{C'M}{C'C} = \frac{D'M}{D'D} = \frac{1}{4}$ (1)

Vậy bốn đường thẳng AA', BB', CC' và DD' đi qua điểm cố định M là trung điểm của EF.

Từ (1) suy ra $\frac{MA'}{MA} = \frac{MD'}{MD} = \frac{1}{3}$.

Áp dụng tính chất đường trung bình trong hình thang ta hãy chứng minh A'D' // AD.

Thật vậy, RP // A'D' (tam giác bằng nhau), RP // SQ. Giả sử AD không song song với SQ, ta kẻ AT // SQ (hình 125).



H.125

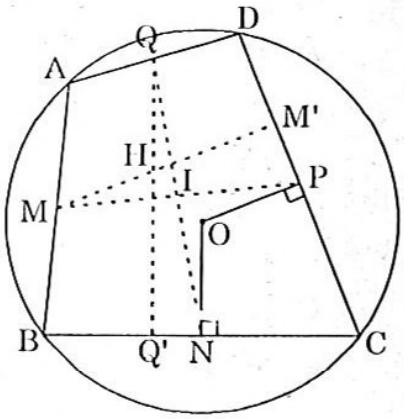
Do tính chất đường trung bình trong hình thang ta có PQ = QT, suy ra T trùng với D hay AD // SQ, từ đó AD // A'D'.

Tương tự ta chứng minh được A'B' // AB, B'C' // BC, C'D' // CD và tứ giác A'B'C'D' có các góc tương ứng bằng các góc của tứ giác ABCD nên tứ giác A'B'C'D' nội tiếp được trong đường tròn.

- ***Lời bình :*** Xét thêm câu hỏi sau :

*"Gọi trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. Chứng minh rằng các đường thẳng kẻ từ các điểm M, N, P, Q lần lượt vuông góc với các đường thẳng CD, DA, AB, BC cắt nhau tại một điểm."*

Sau đây là cách giải (hình 126) :



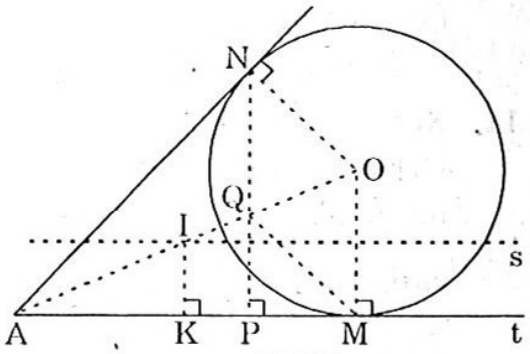
H.126

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD, I là giao điểm của MP và NQ. Ta thấy rằng MNPQ là hình bình hành tâm I, tức là M và P đối xứng nhau qua I, N và Q cũng vậy.

Do ON ⊥ BC nên QQ' // ON, ta có ON và QQ' đối xứng nhau qua I. Tương tự, OP và MM', OQ và NN', OM và PP' cũng đối xứng nhau qua I và OM, ON, OP, OQ cùng qua O.

Vậy các đường thẳng MM', NN', PP' và QQ' cắt nhau tại điểm H đối xứng với O qua I.

**10.** a) Do AN và AM là hai tiếp tuyến kẻ từ A nên OM ⊥ AM và ON ⊥ AN (hình 127), hay $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = 90^o$. Gọi I là trung điểm của OA ta có $NI = \frac{1}{2}OA$ hay IN = IA = IO, do đó ba điểm O, N, A nằm trên đường tròn tâm I. Tương tự ba điểm O, M, A cũng nằm trên đường tròn đó, tức là bốn điểm A, N, O, M nằm trên đường tròn (I).



H.127

b) Kẻ IK ⊥ At ta có IK là đường trung bình trong tam giác vuông AMO nên $IK = \frac{1}{2}OM$. Mà OM có độ dài không đổi nên IK cũng có

độ dài không đổi. Vậy I có tính chất là cách đường thẳng At một đoạn không đổi nên quỹ tích của I là đường thẳng Is // At và cách At một đoạn không đổi bằng $\frac{1}{2}$OM.

c) Do ΔAMN cân nên AO là một đường cao, đường cao thứ hai là NP, do đó Q là trực tâm của tam giác hay MQ ⊥ AN. Ta có : QM // ON (vì cùng vuông góc với AN) và NQ // OM (vì cùng vuông góc với At). Suy ra tứ giác ONQM có hai cặp cạnh đối song song là hình bình hành. Hình bình hành này lại có hai cạnh kề nhau ON = OM nên là hình thoi và QM = MO. Vậy quỹ tích của Q là đường tròn tâm M bán kính MO.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm P trên nửa đường tròn. Gọi Q và S theo thứ tự là điểm chính giữa các cung AP và PB. Gọi C là trung điểm dây PB và D là giao điểm của AP và QS.*

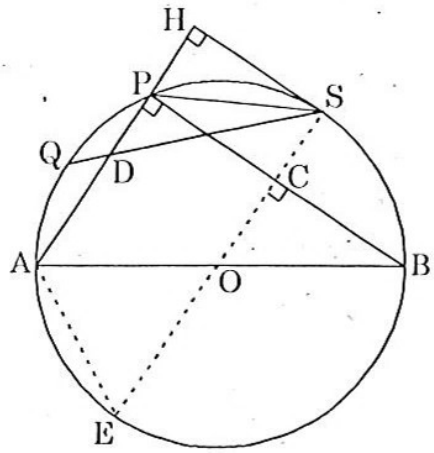
*a) Chứng minh : $\widehat{QDP} = 135^o$.*

*b) Kẻ đường cao SH của ΔDPS, chứng minh rằng SH là tiếp tuyến của (O) tại S.*

*c) Gọi O là điểm đối tâm của S, tìm quỹ tích của E khi điểm P chạy trên nửa đường tròn (O)."*

Cách giải như sau (hình 128) :

a) Ta có $\overset{\frown}{QA} = \overset{\frown}{QP}$ và $\overset{\frown}{SP} = \overset{\frown}{SB}$ nên $\overset{\frown}{QA} + \overset{\frown}{PS}$ bằng $\frac{1}{4}$ đường tròn (O) có số đo bằng $90^o$, do đó $\widehat{QDA} = 45^o$. Suy ra $\widehat{QDP} = 135^o$.



H.128

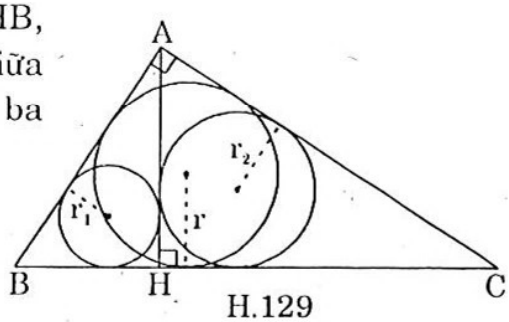
b) Do $\overset{\frown}{SP} = \overset{\frown}{SB}$ nên đường kính SQ ⊥ PB tại trung điểm C của dây PB. Tứ giác HSCP có ba góc vuông là hình chữ nhật, do đó $\widehat{OSH} = 90^o$ hay OS ⊥ SH, vậy SH là tiếp tuyến của (O) tại S.

c) Khi P chạy trên nửa đường tròn (O) về phía trên thì quỹ tích của E là nửa đường tròn (O) phía trên.

**11.** Xét ba tam giác vuông đồng dạng AHB, CHA và BAC (hình 129), ta có tỉ số giữa ba bán kính đường tròn nội tiếp và ba cạnh tương ứng là : $\frac{AB}{r_1} = \frac{AC}{r_2} = \frac{BC}{r} = k$

Theo định lí Pytago ta có :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



H.129

hay $(r_1k)^2 + (r_2k)^2 = (rk)^2$, tức là $r_1^2k^2 + r_2^2k^2 = r^2k^2$.

Từ đó : $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, vậy $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

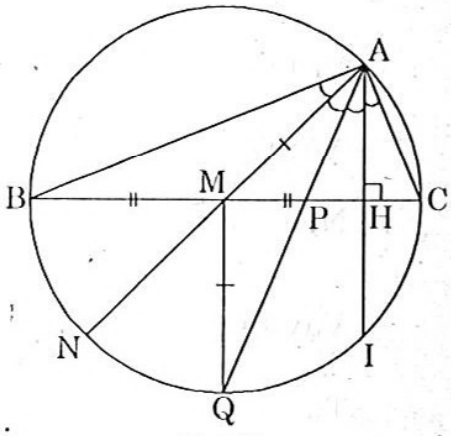
*"Trong ΔABC, trung tuyến AM, phân giác AP và đường cao AH chia góc A thành bốn phần bằng nhau. Chứng minh ΔABC vuông và tính các góc nhọn của nó."*

Cách giải như sau (hình 130) :

Vẽ đường tròn qua ba đỉnh A, B, C của tam giác và kéo dài trung tuyến AM, phân giác AP và đường cao AH cắt đường tròn này lần lượt tại N, Q, I.

Xét ΔMAQ cân ta có MA = MQ. Lại có MB = MC do AM là trung tuyến, do đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vậy ΔABC vuông tại A. Xét ΔMAB cân ta có :



H.130

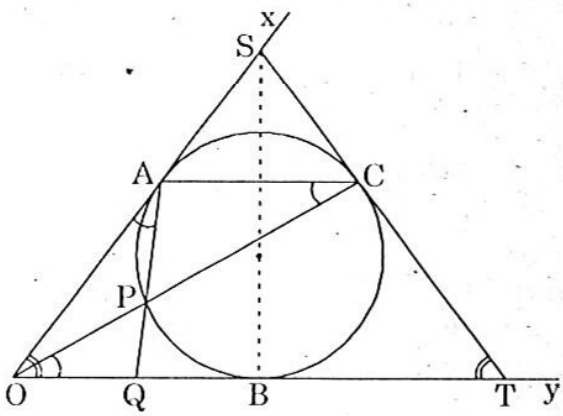
$$\hat{B} = \frac{1}{4}\hat{A} = \frac{90^o}{4} = 22^o30'. \text{ Suy ra } \hat{C} = 67^o30'.$$

**12.** Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ox tại S và Oy tại T (hình 131). Do SB là trục đối xứng của ΔOST nên bốn đoạn tiếp tuyến bằng nhau OA = OB = BT = TC.

Xét ΔTOC ∽ ΔOAQ (vì $\widehat{CTO} = \widehat{AOQ}$, $\widehat{TOC} = \widehat{ACO} = \widehat{OAQ}$) ta có :

$$\frac{OQ}{OB} = \frac{OQ}{OA} = \frac{CT}{OT} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $OQ = \frac{1}{2}OB$ hay OQ = QB.



H.131

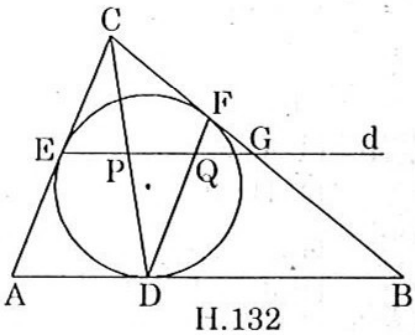
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc các cạnh AB, AC và BC theo thứ tự tại D, E, F. Qua E kẻ đường thẳng d // AB và cắt CD ở P, cắt FD ở Q. Chứng minh rằng EP = PQ."*

Cách giải như sau (hình 132) :

Trước hết ta tính EP theo ba cạnh a, b, c và nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Ta có AE = AD = p – a, BD = BF = p – b và CE = CF = p – c.



H.132

Xét $\Delta ADC \backsim \Delta EPC$ ta có :

$$\frac{AD}{EP} = \frac{AC}{EC} \quad \text{hay} \quad \frac{p-a}{EP} = \frac{b}{p-c}. \text{ Từ đó } \quad EP = \frac{(p-a)(p-c)}{b} \quad (1)$$

Xét $\Delta ABC \backsim \Delta EGC$, tương tự ta có $EG = \dfrac{c(p-c)}{b}$.

Nhưng $PG = EG - EP = \dfrac{(p-c)(c-p+a)}{b}$.

Vì EG // AB nên $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CG}$ hay $CG = \dfrac{a(p-c)}{b}$.

$\Delta AED$ cân, $\Delta QGF$ cũng cân nên $QG = GF$.

Ngoài ra $GF = GQ = CG - CF$, $GQ = \dfrac{a(p-c)}{b} - (p-c) = \dfrac{(p-c)(a-b)}{b}$

Vậy $PQ = PG - GQ = \dfrac{(p-c)(c-p+a)}{b} - \dfrac{(p-c)(a-b)}{b} = \dfrac{(p-c)(p-a)}{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $EP = PQ$.

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### ĐƯỜNG TRÒN CHÍN ĐIỂM HAY ĐƯỜNG TRÒN ƠLE

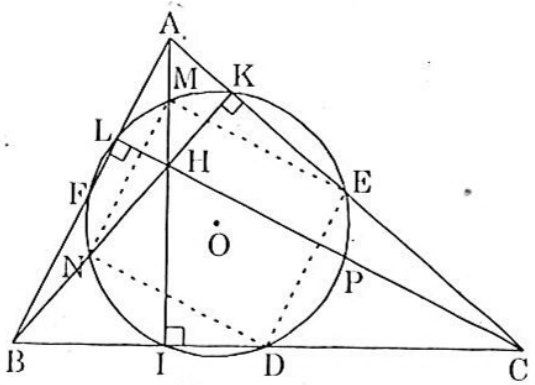
Viện sĩ Viện hàn lâm khoa học Pêtecbua (1707 – 1783) nhà toán học lớn của thế giới được Gauxơ đánh giá là "việc học tập những tác phẩm của Ơle là cách tốt nhất để hiểu toán học".

Tên tuổi của Ơle gắn liền với những bài toán thú vị, trong đó có bài toán về đường tròn chín điểm. Đó là *đường tròn đi qua :*

*3 trung điểm của các cạnh của tam giác;*

*3 chân các đường cao;*

*3 trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh của tam giác* (hình 133).



H.133

Ta hãy chứng minh là :

Trong $\Delta ABC$ ba trung điểm D, E, F của các cạnh, ba chân I, K, L của các đường cao, ba trung điểm M, N, P nối trực tâm H với các đỉnh đều ở trên một đường tròn (O).

Thật vậy, xét ba hình chữ nhật MEDN, FMPD và FEPN. Các đường chéo MD, EN, FP của chúng bằng nhau và có chung nhau trung điểm O. Do đó sáu điểm F, M, E, P, D, N nằm trên đường tròn (O).

Góc MID vuông, MD là cạnh huyền nên I ở trên đường tròn (O). Chứng minh tương tự, các điểm K và L cũng nằm trên (O).

# §14. SỰ PHONG PHÚ VỀ GÓC NỘI TIẾP

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Vị trí tương đối của hai đường tròn***

a) Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là trung trực của dây chung.

Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

b) Hai đường tròn cắt nhau : $R - r < OO' < R + r$

Hai đường tròn tiếp xúc nhau :

+ tiếp xúc ngoài : $OO' = R + r$

+ tiếp xúc trong : $OO' = R - r > 0$

Hai đường tròn không cắt nhau :

+ ở ngoài nhau : $OO' > R + r$

+ đựng nhau : $OO' < R - r$

c) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Có thể là các tiếp tuyến chung ngoài hoặc tiếp tuyến chung trong.

***2. Góc ở tâm***

a) Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

b) Với hai cung nhỏ trong một đường tròn (hay trong hai đường tròn bằng nhau) :

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau; hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.
- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn; dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

***3. Góc nội tiếp***

a) Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

b) Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

c) Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

***4. Góc có đỉnh ở bên trong hoặc bên ngoài đường tròn***

a) Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

b) Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Ba đường tròn bằng nhau có tâm là $O_1$, $O_2$, $O_3$ cùng đi qua một điểm M cắt nhau ở P, Q, R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) bằng ba đường tròn cho trước.

**2.** Cho đường tròn (O; R) và cung nhỏ BC bằng $120^0$. Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau ở M. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với MB, MC và cung nhỏ BC. Chứng minh rằng :

a) $\Delta$MNP đều, trong đó NP là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (I).

b) Bán kính đường tròn (O) gấp ba bán kính đường tròn (I).

**3.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại M. Kẻ các bán kính OP và O'Q song song. Chứng minh rằng ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

**4.** Cho đường tròn (O) đường kính DE và điểm G trên (O). Trên tia DG lấy điểm M sao cho G là trung điểm của DM, trên tia ME lấy điểm N sao cho E là trung điểm của MN. Gọi H là giao điểm của DN với (O). Chứng minh rằng :

a) Ba điểm G, O, H thẳng hàng.

b) Đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định khi G chạy trên (O).

**5.** Cho $\Delta$ABC vuông tại A. Từ B và C lấm tâm vẽ hai cung bán kính BA và CA lần lượt cắt BC tại M và N. Chứng minh rằng :

a) MN bằng đường kính đường tròn nội tiếp tam giác.

b) Tổng các bán kính r, $r_1$, $r_2$ theo thứ tự của ba đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB, AHC đúng bằng đường cao AH của $\Delta$ABC.

**6.** Cho $\Delta$ABC. Chứng minh rằng đường cao và bán kính đường tròn ngoại tiếp kẻ từ một đỉnh tạo với các cạnh kề đỉnh đó những góc bằng nhau.

*Áp dụng :* Từ một đỉnh kẻ một đường thẳng chia tam giác thành hai tam giác nhỏ. Có nhận xét gì về tâm của ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác tạo thành và đỉnh đó của tam giác ? Chứng minh điều nhận xét đó.

**7.** Cho M và N là giao điểm của hai đường tròn tâm $O_1$ và $O_2$. Đường thẳng $O_1M$ cắt đường tròn thứ nhất tại $A_1$, cắt đường tròn thứ hai tại $A_2$, còn $O_2M$ cắt đường tròn thứ nhất tại $B_1$, cắt đường tròn thứ hai tại $B_2$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $A_1B_1$, $A_2B_2$ và MN cắt nhau tại một điểm.

**8.** Hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau và ngược hướng cùng nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Các cạnh tương ứng của chúng cắt nhau ở P, Q và R. Chứng minh rằng :

a) Ba điểm P, Q, R nằm trên một đường thẳng d.

b) Khi các tam giác ABC và A'B'C' thay đổi (mà vẫn bằng nhau, ngược hướng và cùng nội tiếp trong đường tròn tâm O) thì đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

*Ghi chú :* Nối hai tam giác ABC và A'B'C' ngược hướng với nhau có nghĩa là : khi đi trên đường tròn tâm O từ A đến B, C rồi trở về A ta đi theo một hướng nào đó, còn khi đi trên đường tròn tâm O từ A' đến B', C' rồi trở về A' thì ta đi theo hướng ngược lại.

**9.** Cho $\Delta ABC$ cân tại A và một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh bên ở B và C. Từ điểm M trên đường tròn ta kẻ các đường $MD \perp BC$, $ME \perp AC$ và $MF \perp AB$. Chứng minh hai tứ giác BDMF và MDCE đồng dạng.

**10.** Chứng minh *định lí Ptôlêmê :*

"Trong một tứ giác nội tiếp, tích của các đường chéo bằng tổng các tích của các cạnh đối diện."

**11.** Trong đường tròn bán kính r cho hai cung có hai dây dài a và b. Tính độ dài các dây trương cung bằng tổng hoặc hiệu của hai cung đã cho. Có nhận xét gì ?

**12.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (O; R). Các đường cao AD, BE, CG cắt nhau tại H và kéo dài cắt (O) lần lượt tại D', E', G'. Chứng minh rằng :

a) Bán kính hai đường tròn qua H và hai trong ba đỉnh A, B, C đều bằng R.

b) H là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta D'E'G'$.

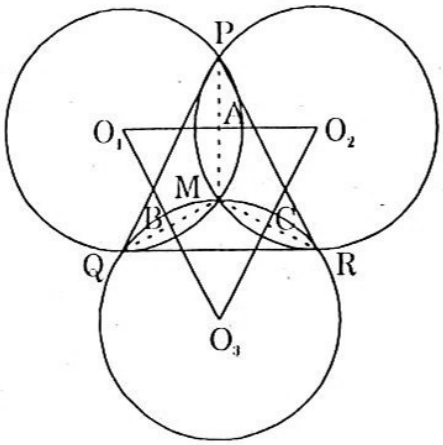
**13.** Cho $\Delta ABC$ đều và P là một điểm chạy trên đường tròn ngoại tiếp. Gọi M và N là giao điểm của AP và BP với CB và CA. Chứng minh rằng tích AN.BN không đổi.

**14.** Cho điểm S nằm trong $\Delta ABC$ ba góc nhọn sao cho $\widehat{ASB} = \widehat{ACB} + 60^o$, $\widehat{BSC} = \widehat{BAC} + 60^o$, $\widehat{CSA} = \widehat{CBA} + 60^o$. Chứng minh rằng AS, BS và CS kéo dài cắt đường tròn tại ba điểm M, N, P là ba đỉnh của một tam giác đều.

**15.** Cho hai đường kính AB và CD vuông góc trong đường tròn (O). Trên cung BD lấy điểm G và kẻ tiếp tuyến tại G cắt AB kéo dài ở H. Gọi K là giao điểm của AB và CG. Chứng minh rằng HK = HG.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Nối MP, MQ, MR (hình 134), chúng cắt $O_1O_2$, $O_1O_3$, $O_2O_3$ lần lượt tại các trung điểm A, B, C (vì $MO_1 = MO_2 = MO_3$) và $MP \perp O_1O_2$, $MQ \perp O_1O_3$, $MR \perp O_2O_3$.



H.134

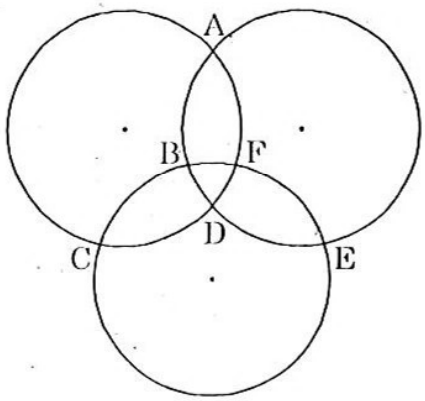
Các điểm A, B, C cũng là trung điểm của các đoạn thẳng MP, MQ, MR.

Xét hai tam giác đồng dạng ABC và PQR với tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$, rồi xét hai tam giác đồng dạng ABC và $O_1O_2O_3$ cũng với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{2}$, ta thấy rằng $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta PQR$. Điểm M cách đều $O_1$, $O_2$, $O_3$ một đoạn bằng bán kính các đường tròn đã cho.

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\Delta O_1O_2O_3$ bằng các đường tròn đã cho, do đó đường tròn ngoại tiếp $\Delta PQR$ cũng bằng các đường tròn đã cho.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho ba đường tròn bằng nhau cắt nhau từng đôi một tại A và D, B và E, C và F. Chứng minh rằng tổng số đo của ba cung AB, CD và EF bằng 180°."*

Cách giải như sau (hình 135) :



H.135

Trước hết để ý rằng hai cung ABD và AFD bằng nhau, hai cung CBF và CDF, hai cung EDB và EFB cũng vậy. Từ đó, ta chứng minh rằng tổng số đo ba cung AB, CD và EF bằng tổng số đo ba cung DE, BC và AF.

Thật vậy :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CDF} - \overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{EFB} - \overset{\frown}{BF}$$

$$= \overset{\frown}{AFD} - \overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{CBF} - \overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{EDB} - \overset{\frown}{BD}$$

$$= \overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}$$

Xét các góc của $\Delta AEC$ ta có :

$$\text{sđ}\widehat{CAE} = \text{sđ}(\overset{\frown}{CAD} + \overset{\frown}{DAE}) = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE})$$

Tương tự : $\text{sđ}\widehat{ACE} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{EF})$; $\text{sđ}\widehat{AEC} = \frac{1}{2}\text{sđ}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB})$

Do tổng các góc của tam giác bằng 180° nên số đo của tổng ba góc

CAE, ACE và AEC bằng $\frac{1}{2}$sđ$(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB})$

$$= \text{sđ}\frac{1}{2}\left[(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}) + (\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE})\right]$$

$$= \text{sđ}\frac{1}{2}.2(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}) = 180^\circ$$

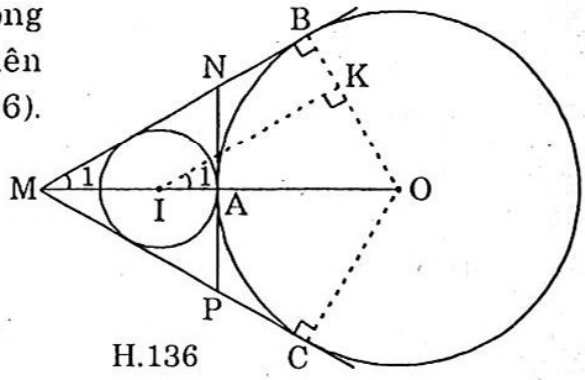
Vậy sđ$(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}) = 180^\circ$.

**2.** a) Do NP là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (O) và (I) nên NP ⊥ MO và AN = AP (hình 136). Suy ra ΔMNP cân.

Mặt khác do $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

nên $\widehat{NMP} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

do đó ΔMNP cân là tam giác đều.



H.136

b) Kẻ IK // MB ta có $\hat{I}_1 = \widehat{M}_1 = 30^\circ$

nên ΔIKO là nửa tam giác đều, suy ra OK = $\frac{1}{2}$IO.

Gọi r là bán kính của (I) ta có : OK = R – r, IO = R + r,

do đó R – r = $\frac{1}{2}$(R + r) hay 2R – 2r = R + r. Suy ra R = 3r.

- ***Lời bình :*** Có thể đặt thêm hai câu hỏi sau :

*"c) Tính MB và MC theo R.*

*d) Tính AB và AC và diện tích tứ giác OBAC theo R."*

Ta có cách giải sau :

c) Tam giác vuông MBO là nửa tam giác đều nên MO = 2R và MB = MO.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = R$\sqrt{3}$, mà MB = MC (tính chất hai tiếp tuyến xuất phát từ M) nên MC = R$\sqrt{3}$.

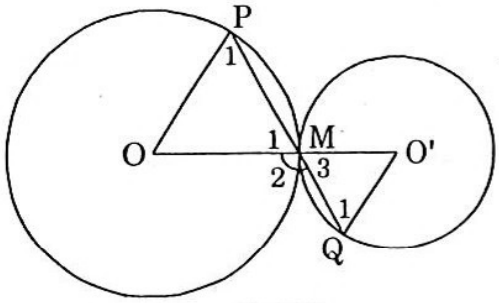
d) Các tam giác OAB và OAC là tam giác đều (vì là tam giác cân có góc ở đỉnh O bằng 60°), do đó AB = AC = R.

Diện tích tứ giác OBAC bằng tổng diện tích hai tam giác đều OAB và OAC, mỗi tam giác này có diện tích $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ nên tứ giác OBAC có diện tích bằng $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

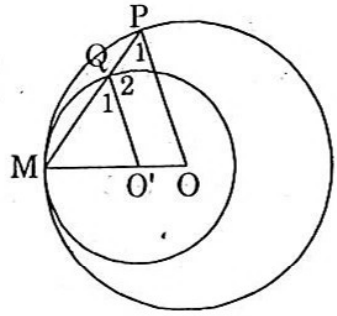
*Lưu ý :* Một tam giác đều cạnh a có đường cao h = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và diện tích

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (vì $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$). Cần nhớ điều này để tính nhanh đường cao và diện tích của một tam giác đều theo cạnh a của nó.

**3.** Đề bài cho hai đường tròn tiếp xúc nhau nhưng không nói rõ là tiếp xúc ngoài hay tiếp xúc trong nên phải xét cả hai trường hợp.



H.137



H.138

a) Trường hợp tiếp xúc ngoài (hình 137)

Do OP // O'Q nên $\widehat{P}_1 = \widehat{Q}_1$ (so le trong) mà $\widehat{P}_1 = \widehat{M}_1$, $\widehat{Q}_1 = \widehat{M}_3$ (vì $\Delta OPM$ và $\Delta O'QM$ cân). Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$.

Nhưng $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 180^o$ nên $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_3 = 180^o$ do đó ba điểm P, M, Q thẳng hàng.

b) Trường hợp tiếp xúc trong (hình 138)

Do OP // O'Q nên $\widehat{Q}_1 = \widehat{P}_1$ (đồng vị) và $\widehat{Q}_2 + \widehat{P}_1 = 180^o$ (góc trong cùng phía).

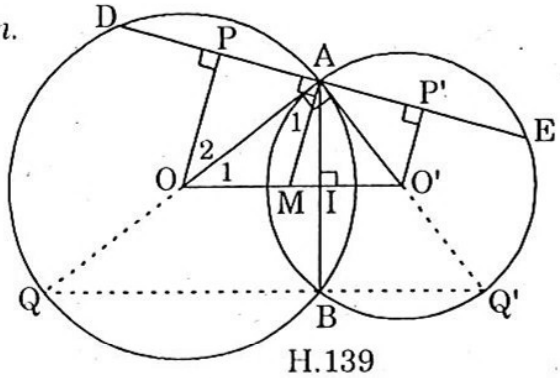
Suy ra $\widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2 = 180^o$, do đó ba điểm M, Q, P thẳng hàng.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} = 90^o$. Gọi M là trung điểm của OO'. Qua A kẻ cát tuyến DAE vuông góc với AM (điểm D trên (O) và điểm E trên (O')). Chứng minh rằng :*

*a) A là trung điểm của DE và ΔABD cân.*

*b) $\widehat{DBE} = 90^o$."*



H.139

Cách giải như sau (hình 139) :

a) Kẻ OP và O'P' cùng vuông góc với DE. Ta có P và P' là trung điểm của DA và AE.

Vì M là trung điểm của OO' mà OP // AM // O'P' (vì cùng vuông góc với DE) nên A là trung điểm của PP'.

Suy ra AD = AE (vì AD = 2AP, AE = 2AP'), tức là A là trung điểm của DA.

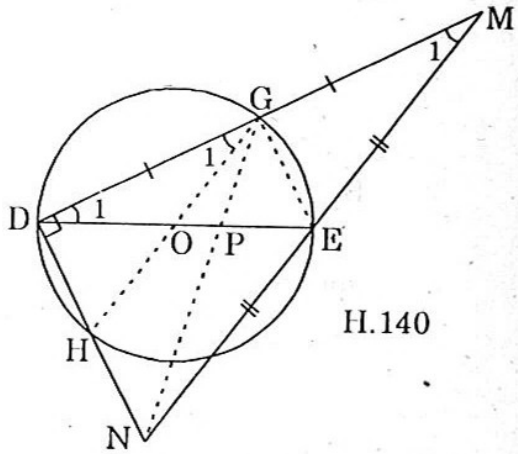
Tam giác vuông OAO' có trung tuyến AM bằng nửa cạnh huyền OO' nên MO = MA, hay $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_1$. Do OP // AM nên $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_2$ (so le trong). Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Xét hai tam giác vuông OPA và OAI có cạnh huyền OA chung và một góc nhọn bằng nhau nên chúng bằng nhau. Suy ra AP = AI, hay AD = AB. Vậy ΔABD cân tại A.

b) Chứng minh tương tự ta có AB = AE. Như vậy ΔBDE có trung tuyến BA bằng nửa cạnh tương ứng DE là tam giác vuông tại B. Suy ra $\widehat{DBE} = 90^o$.

**4.** a) ΔDMN vuông tại D vì có trung tuyến DE bằng nửa cạnh đối MN (hình 140), tam giác DGE vuông tại G vì $\widehat{DGE}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn, suy ra ΔEDM cân.

Do đó ΔDHG cũng vuông tại D nên HG là đường kính, vậy ba điểm G, O, H thẳng hàng.



H.140

b) Trong ΔDMN hai trung tuyến DE và NG cắt nhau tại P trên DE cố định, chỉ cần chứng minh MH là trung tuyến thứ ba.

Thật vậy, $\widehat{D}_1 = \widehat{G}_1$ (ΔODG cân) và $\widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$ (ΔDEM cân).

Suy ra $\widehat{G}_1 = \widehat{M}_1$ chiếm vị trí góc đồng vị, do đó GH // MN và là đường trung bình. Vậy MH là trung tuyến thứ ba nên luôn đi qua trọng tâm P cố định.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hai dây MN và PQ vuông góc tại I trong đường tròn tâm O với MI < IN. Kẻ đường kính PS và từ O kẻ OK ⊥ PN.*

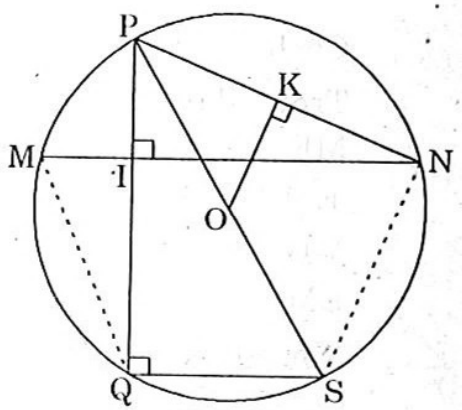
*a) Tứ giác MNSQ là hình gì ?* *b) Chứng minh MQ = 2OK."*

Cách giải như sau (hình 141) :

a) Ta có MN ⊥ PQ (gt) và SQ ⊥ PQ (vì $\widehat{PQS}$ chắn nửa đường tròn), do đó MN // QS vì cùng vuông góc với PQ.

Suy ra MNSQ là hình thang.

Do $\overset{\frown}{MQ} = \overset{\frown}{NS}$ (hai cung chắn giữa hai dây song song) nên MQ = NS, vậy MNSQ là hình thang cân.



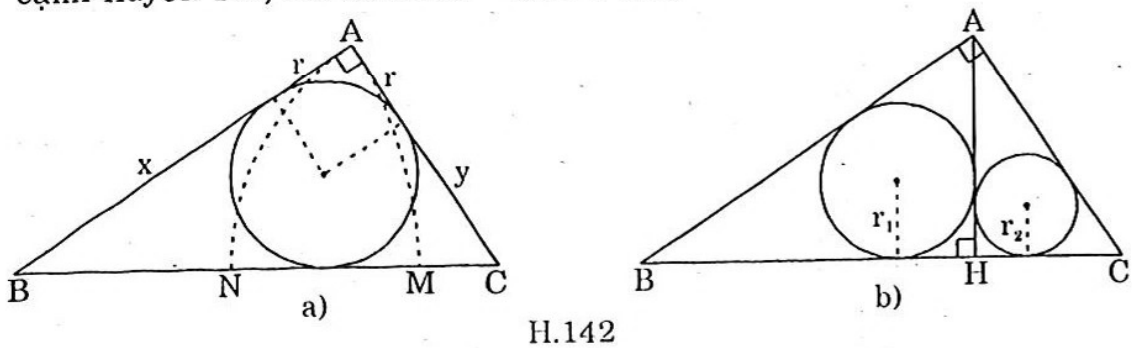
H.141

b) Trong $\Delta PNS$ ta có OK là đường trung bình nên $OK = \frac{1}{2}NS$, mà

$NS = MQ$, suy ra $OK = \frac{1}{2}MQ$ hay $MQ = 2OK$.

**5.** Bài toán này cho ta một tính chất bất ngờ của tam giác vuông, đó là : *"đường kính đường tròn nội tiếp = tổng hai cạnh góc vuông – cạnh huyền."*

a) Ở đây MN chính là hiệu giữa tổng hai cạnh góc vuông AB, AC và cạnh huyền BC, tức là : $MN = (AB + AC) - BC$




H.142

Thật vậy (hình 142a) nếu r là bán kính đường tròn nội tiếp thì

$BM = BA = x + r$

$CN = CA = y + r$

Nhưng $BM + CN - MN = BC = x + y$.

Vậy : $MN = BM + CN - BC = x + y + 2r - (x + y) = 2r$.

b) Ta có (hình 142b) :

$2r + 2r_1 + 2r_2 = (AB + AC - BC) + (BH + HA - AB) + (HC + HA - AC)$

$= (BH + HC) - BC + 2AH = 2AH$

Suy ra : $r + r_1 + r_2 = AH$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Lấy một điểm M trên cung EF của đường tròn ngoại tiếp ΔDEF đều. Gọi N là giao điểm của MD và EF. Chứng minh hệ thức :*

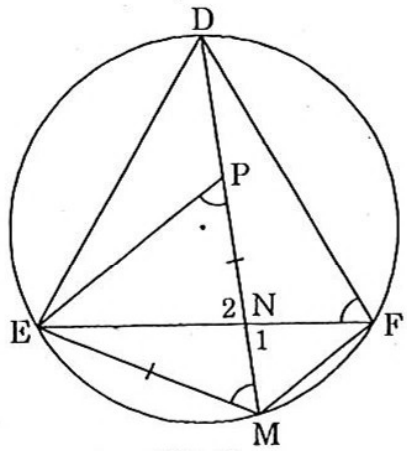
$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}."$$

Cách giải như sau (hình 143) :

Trên dây MD lấy điểm P sao cho ME = MP. Ta có ΔMEP cân có góc ở đỉnh $\widehat{EMP} = \widehat{EFD} = 60^\circ$ (cùng chắn cung DE). Vậy ΔMEP là tam giác đều, do đó EM = EP và $\widehat{EPM} = 60^\circ$.

Xét $\Delta FNM \backsim \Delta ENP$ (g.g)

(vì $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ đối đỉnh và $\widehat{FMN} = \widehat{EPN} = 60^\circ$)




H.143

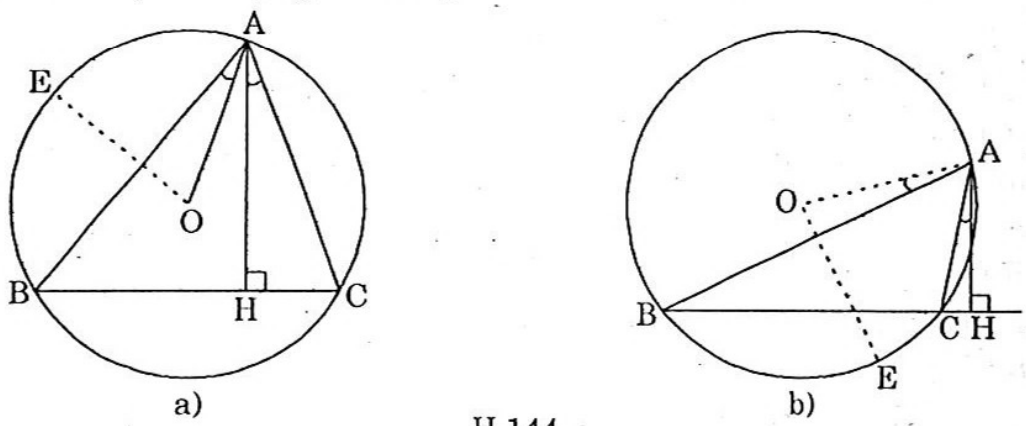
ta có : $\frac{MN}{PN} = \frac{FM}{EP}$ hay $\frac{MN}{FM} = \frac{PN}{EP}$

Thay PN = PM – MN = ME – MN và EP = EM,

ta có : $\frac{MN}{FM} = \frac{ME - MN}{ME} = 1 - \frac{MN}{ME}$

Chia hai vế cho MN được : $\frac{1}{MF} = \frac{1}{MN} - \frac{1}{ME}$ hay $\frac{1}{MN} = \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$.

**6.** Ta xét ba trường hợp hình vẽ, tùy theo ΔABC có ba góc nhọn, có một góc tù hoặc có một góc vuông.




H.144

a) Trường hợp ΔABC có ba góc nhọn (hình 144a).

Muốn chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$ chỉ cần chứng minh $\widehat{AOE} = \widehat{ACH}$ (góc phụ với hai góc trên). $\widehat{ACH}$ là góc nội tiếp chắn cung AEB, còn $\widehat{AOE}$ bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung AEB.

Suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{ACH}$.

b) Trường hợp ΔABC có góc tù, chẳng hạn góc C (hình 144b).

$\widehat{ACH}$ bù với $\widehat{ACB}$, mà $\widehat{ACB}$ lại chắn cung lớn AB nên

sđ$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$sđ cung lớn AB. Mà sđ$\widehat{AOE} = \frac{1}{2}$sđ cung nhỏ AB.

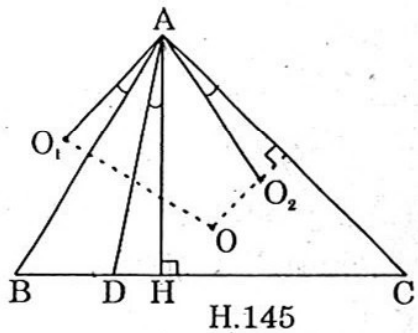
Vậy : $\widehat{ACH} = \widehat{AOE}$, suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$.

c) Trường hợp ΔABC có góc vuông, chẳng hạn góc C.

Khi đó AH trùng với AC, AO nằm trên AB. Do đó hai góc CAH và OAB đều bằng O, vậy chúng bằng nhau.

*Áp dụng :* Từ đỉnh A của ΔABC ta kẻ AD chia tam giác thành hai (hình 145). Gọi O, $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ΔABD, ΔADC. Theo kết quả của câu hỏi thứ nhất ở trên ta có :

$\widehat{O_1AB} = \widehat{DAH}$ và $\widehat{O_2AC} = \widehat{DAH}$.




H.145

Suy ra $\widehat{O_1AB} = \widehat{O_2AC}$, vậy $\widehat{O_1AO_2} = \widehat{BAC}$.

Lại có $OO_1 \perp AB$ và $OO_2 \perp AC$, do đó :

$$\widehat{O_1OO_2} + \widehat{BAC} = 180^o \quad \text{và} \quad \widehat{O_1OO_2} = \widehat{O_1AO_2} = 180^o.$$

Vậy tứ giác $O_1OO_2A$ có tổng hai góc đối bằng $180^o$ nên nội tiếp được trong đường tròn.

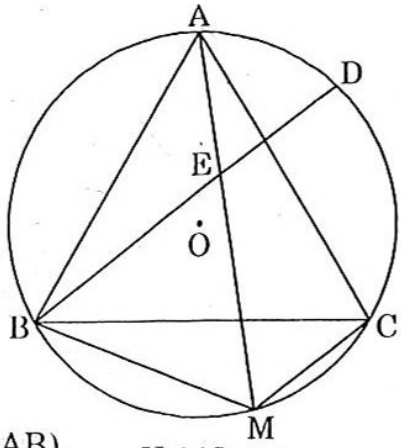
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm M bất kì trên đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều tới hai đỉnh gần thì bằng khoảng cách từ M đến đỉnh thứ ba của tam giác."*

Cách giải như sau (hình 146) :

Gọi tam giác đều đã cho là ABC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Cho M là một điểm tùy ý nằm trên cung BC, ta phải chứng minh tổng MB + MC = MA.

Kẻ BD // CM cắt AM tại E. Muốn chứng minh đẳng thức trên ta chứng minh MB = ME và MC = EA.



H.146

Thật vậy, $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^o$ (cùng chắn cung AB),

$\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^o$ (cùng chắn cung AC).

Mặt khác $\widehat{AMC} = \widehat{MEB}$ (so le trong). Xét $\Delta MBE$ cân có góc ở đáy $\widehat{AMC} = \widehat{MEB} = 60^o$ nên góc thứ ba $\widehat{MBE} = 60^o$ và $\Delta MBE$ là tam giác đều. Suy ra MB = ME.

Bây giờ ta chứng minh MC = EA. Nối A với D và chứng minh tương tự được $\Delta DEA$ đều, do đó ED = EA. Nối D với C và xét tứ giác EDCM trong đó $\widehat{EDC} = 60^o$ (chắn cung BC), suy ra DC // EM. Mặt khác do ED // CM nên tứ giác đã cho là hình bình hành, vậy ED = MC hay EA = MC. Tóm lại : MB + MC = ME + EA = MA.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho $\Delta DEF$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Tiếp tuyến tại D cắt cạnh FE ở M. Gọi E' là điểm đối xứng của E qua M. Chứng minh rằng :*

*a)* $\dfrac{1}{DE^2} + \dfrac{1}{DF^2} = \dfrac{1}{MD^2}$

*b)* $DE^2 + DF^2 = FG^2$ *(trong đó G là giao điểm của E'D với (O)).*"

Cách giải như sau (hình 148) :

a) Xét $\Delta DEE'$ cân tại D ta có :

$$\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{F_1} \text{ (cùng chắn cung DE)}$$

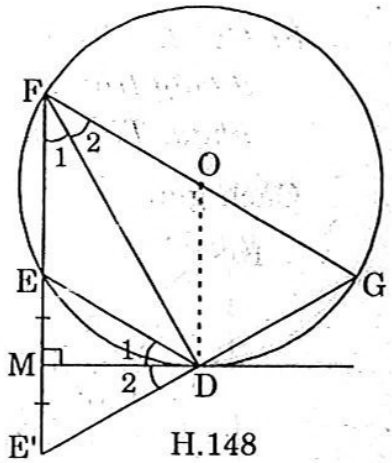
mà $\hat{F}_1 + \hat{E}' = \hat{D}_2 + \hat{E}' = 90^o$

Suy ra $\widehat{FDE'} = 90^o$.

Trong $\Delta FDE'$ vuông tại D theo hệ thức lượng $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ ta có :

$$\frac{1}{MD^2} = \frac{1}{DE'^2} + \frac{1}{DF^2}$$

hay $\frac{1}{MD^2} = \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}$.



H.148

b) Đường thẳng E'D cắt đường tròn (O) tại G. Do $\widehat{FDG} = 90^o$ nên FG chính là đường kính.

Ta có : $\hat{F}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{F}_1$. Suy ra $\overset{\frown}{DG} = \overset{\frown}{DE}$, do đó DG = DE.

Vậy trong tam giác vuông FDG ta có :

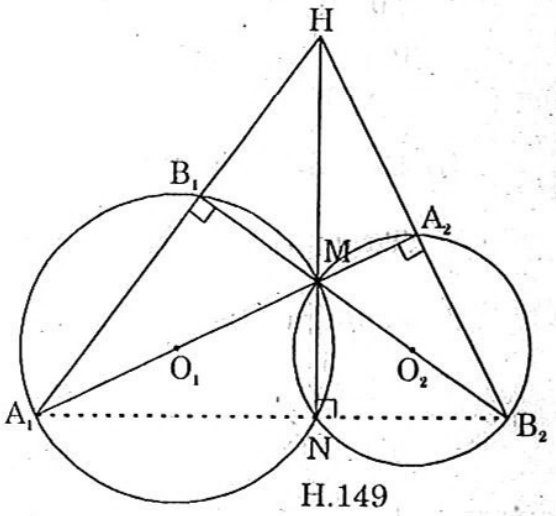
$$DG^2 + DF^2 = FG^2 \text{ hay } DE^2 + DF^2 = FG^2.$$

**7.** Trước tiên ta chứng minh rằng ba điểm $A_1$, N, $B_2$ thẳng hàng (hình 149).

Thật vậy $\widehat{A_1NB_2} = \widehat{A_1NM} + \widehat{B_2NM} = 90^o + 90^o$ (vì là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $\widehat{A_1NB_2} = 180^o$, tức là N nằm trên đoạn thẳng $A_1B_2$.

Bây giờ xét $\Delta A_1MB_2$. Các góc $A_1B_1M$ và $B_2A_2M$ đều vuông vì chắn nửa đường tròn và $\widehat{MNB_2}$ vuông (chứng minh trên), do đó các đường thẳng MN, $A_1B_1$ và $A_2B_2$ là các đường cao của $\Delta A_1MB_2$.

Vậy ba đường thẳng này phải cắt nhau tại một điểm (đó là trực tâm H của $\Delta A_1MB_2$).



H.149

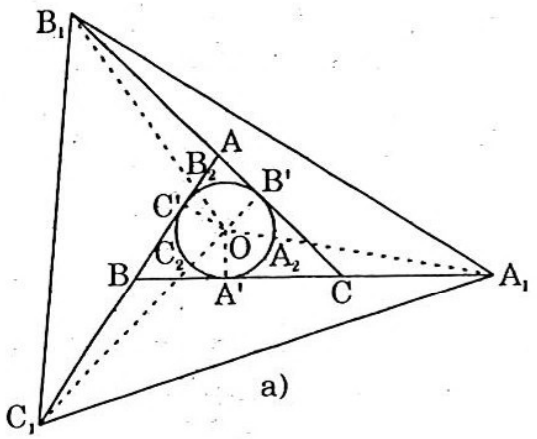
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

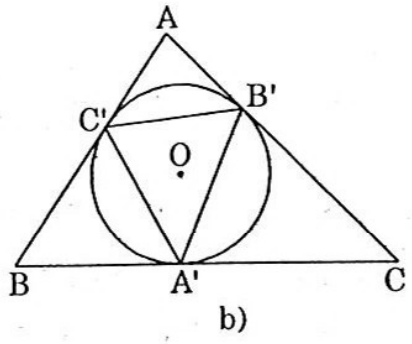
*"Đường tròn tâm O nội tiếp trong $\Delta ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự ở A', B', C'. Kéo dài BC về phía C ta đặt trên đó đoạn $CA_1 = AB$, kéo dài CA về phía A ta đặt trên đó đoạn $AB_1 = BC$, kéo dài AB về phía B ta đặt trên đó đoạn $BC_1 = CA$.*

*a) Tính các đoạn $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ theo các cạnh của $\Delta ABC$ (BC = a, CA = b, AB = c). Chứng minh tâm O của đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$.*

*b) Gọi $A_2$, $B_2$, $C_2$ theo thứ tự là các giao điểm của $OA_1$, $OB_1$, $OC_1$ với đường tròn tâm O. Chứng minh hai tam giác A'B'C' và $A_2B_2C_2$ bằng nhau. Tính các góc của $\Delta A_1B_1C_1$ theo các góc của $\Delta ABC$."*

Cách giải như sau (hình 150a) :




H.150

a) Ta có : $B'A + C'B + A'C = \dfrac{a+b+c}{2}$ hay $c + A'C = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Từ đó : $A'C = \dfrac{a+b-c}{2}$ và $A'A_1 = A'C + CA_1 = \dfrac{a+b-c}{2} + c$

hay $A'A_1 = \dfrac{a+b+c}{2}$. Tương tự : $B'B_1 = C'C_1 = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Từ đó suy ra ba tam giác vuông $OA'A_1$, $OB'B_1$, $OC'C_1$ bằng nhau (c.g.c). Vậy $OA_1 = OB_1 = OC_1$, tức là O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$.

b) Do $\Delta OB'B_1 = \Delta OC'C_1$ nên $\widehat{B_2OB'} = \widehat{C_2OC'}$ hay $\overset{\frown}{B_2B'} = \overset{\frown}{C_2C'}$.

Từ đó $\overset{\frown}{B_2C_2} = \overset{\frown}{B_2C'} + \overset{\frown}{C'C_2} = \overset{\frown}{B_2C'} + \overset{\frown}{B_2B'} = \overset{\frown}{B'C'}$, tức là $\overset{\frown}{B_2C_2} = \overset{\frown}{B'C'}$.

Tương tự ta có : $\overset{\frown}{C_2A_2} = \overset{\frown}{C'A'}$, $\overset{\frown}{A_2B_2} = \overset{\frown}{A'B'}$.

Như vậy $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A'B'C'$.

Từ $OB_1 = OC_1$, $OB_2 = OC_2$, suy ra $B_1B_2 = C_1C_2$.

Lại có $\widehat{B_2B_1C_1} = \widehat{C_2C_1B_1}$ (vì $\Delta OB_1C_1$ cân) nên tứ giác $A_2C_2C_1B_1$ là hình thang cân và $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

Tương tự $C_2A_2 \parallel C_1A_1$, $A_2B_2 \parallel A_1B_1$. Do đó các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ có các góc bằng nhau từng đôi một. Vậy ta chỉ cần tính các góc của $\Delta A_2B_2C_2$. Nhưng vì hai tam giác $A_2B_2C_2$ và A'B'C' bằng nhau nên việc tính này quy về tính các góc của $\Delta A'B'C'$ (hình 150b).

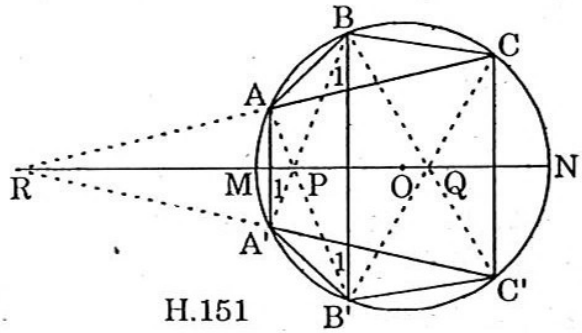
Ta có : $\widehat{B'A'C'} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

Tương tự : $\widehat{C'B'A} = \dfrac{\widehat{C} + \widehat{A}}{2}$, $\widehat{A'C'B'} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$

Vậy $\widehat{B_1A_1C_1} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$, $\widehat{C_1B_1A_1} = \dfrac{\widehat{C} + \widehat{A}}{2}$ và $\widehat{A_1C_1B_1} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

**8.** a) Ta có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ nên $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{A'B}$ (hình 151)

Suy ra $\widehat{A'_1} = \widehat{B_1}$, vì thế hai đường thẳng AA' và BB' song song (góc so le trong bằng nhau). Tương tự BB' // CC'.



H.151

Gọi MN là đường kính vuông góc với AA', BB', CC'. Thế thì A và A' đối xứng nhau qua MN, B và B' cũng vậy, C và C' cũng vậy. Do đó AB' và A'B đối xứng nhau qua MN nên giao điểm của chúng nằm trên MN. Tương tự các giao điểm của BC' và B'C, của CA' và C'A đều nằm trên MN.

Nói cách khác, các giao điểm P, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng d đi qua tâm O của đường tròn.

b) Khi các tam giác ABC và A'B'C' thay đổi thì đường thẳng d cũng thay đổi nhưng nó luôn đi qua điểm O cố định.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có cạnh BC cố định còn đỉnh A chạy trên đường tròn. Gọi H là trực tâm ΔABC và $O_1$, $O_2$, $O_3$ theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB.*

*a) Khi điểm A chạy trên (O) thì các điểm $O_1$, $O_2$, $O_3$ chạy trên những đường nào ?*

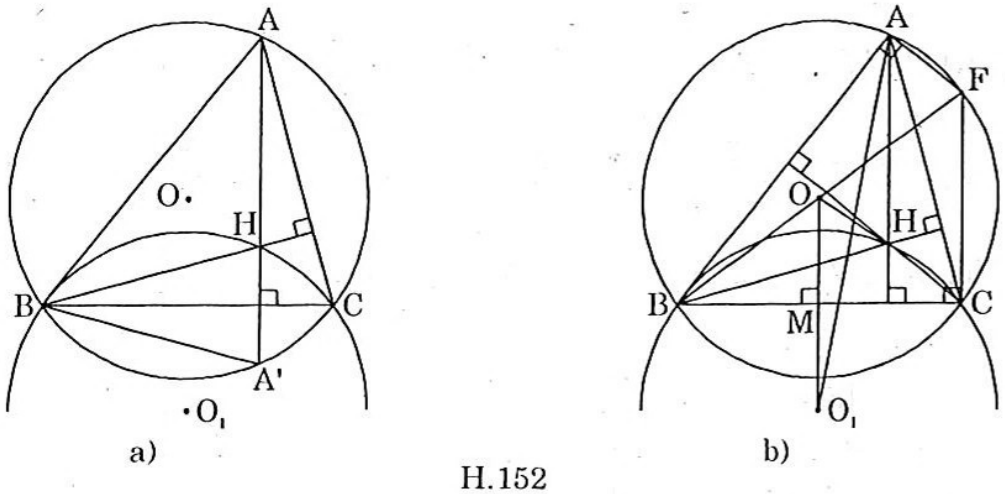
*b) Chứng minh rằng ba đường thẳng $AO_1$, $BO_2$, $CO_3$ cắt nhau tại một điểm."*

Cách giải như sau (hình 152a) :

a) Điểm A' đối xứng với trực tâm H qua cạnh BC nằm trên đường tròn O, nên ΔHBC đối xứng đối với ΔA'BC. Do đó hai đường tròn (O) và ($O_1$) đối xứng nhau qua BC, hai đường tròn (O) và ($O_2$) đối xứng nhau qua CA, hai đường tròn (O) và ($O_3$) đối xứng nhau qua AB.

Vậy $O_1$ là một điểm cố định.

Còn $O_2$ chạy trên đường tròn tâm C bán kính bằng bán kính đường tròn (O), $O_3$ chạy trên đường tròn tâm B bằng đường tròn (O).




H.152

b) Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ O xuống BC (hình 152b). Kẻ đường kính BF ta có AH // FC (vì cùng vuông góc với BC), AF // HC (vì cùng vuông góc với AB) nên tứ giác AFCH là hình bình hành, do OM song song và bằng $\frac{1}{2}$FC nên $OO_1$ cũng song song và bằng AH.

Do đó $AO_1$ đi qua trung điểm của OH. Chứng minh tương tự cho $BO_2$ và $CO_3$.

Vậy ba đường thẳng $AO_1$, $BO_2$ và $CO_3$ cùng đi qua trung điểm của OH.

**9.** Xét hai tứ giác MDBF và MECD (hình 153) ta thấy chúng có các góc tương ứng bằng nhau vì $\widehat{BFM} = \widehat{BDM} = \widehat{CDM} = \widehat{CEM} = 90^o$ (gt).

Lại có $\widehat{FBD} = \widehat{DCE}$ (vì cùng bù hai góc bằng nhau $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$).

Do đó $\widehat{FMD} = \widehat{DME}$.

Đường tròn (MBC) tiếp xúc với AB ở B và với AC ở C (gt) nên ta có :

$\widehat{FBM} = \widehat{BCM}$ (cùng chắn cung BM)

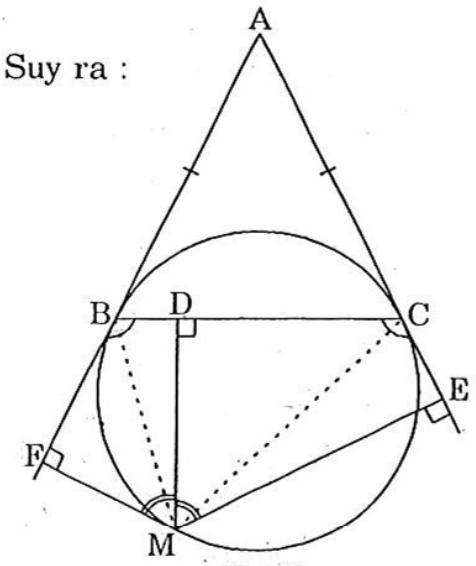
$\widehat{DBM} = \widehat{ECM}$ (cùng chắn cung CM). Suy ra :

$\Delta MBF \backsim \Delta MCD$ nên $\frac{MF}{MD} = \frac{BF}{CD} = \frac{MB}{MC}$

$\Delta MBD \backsim \Delta MCE$ nên $\frac{MD}{ME} = \frac{BD}{CE} = \frac{MB}{MC}$

Từ đó ta có : $\frac{MF}{MD} = \frac{BF}{CD} = \frac{MD}{ME} = \frac{BD}{CE}$.

Hai tứ giác MDBF và MECD có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ vậy chúng đồng dạng.



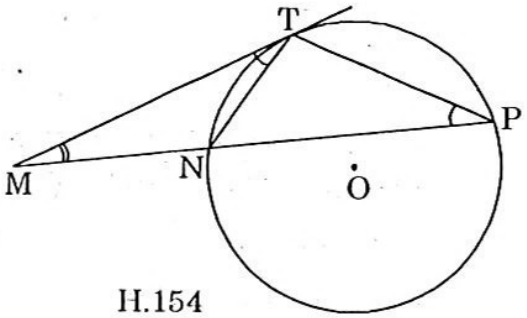

H.153

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Từ một điểm M ngoài đường tròn tâm O ta kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MNP. Chứng minh rằng $MT^2 = MN.MP$ và ngược lại nếu có hệ thức $MT^2 = MN.MP$ thì MT là tiếp tuyến của (O).*

Áp dụng : *Cho ΔABC, D và E là giao điểm của phân giác trong góc A với đường tròn ngoại tiếp (ABC) và với cạnh BC. Chứng minh rằng DB là tiếp tuyến của đường tròn (ABE) và DC là tiếp tuyến của đường tròn (ACE)."*

Cách giải như sau (hình 154) :



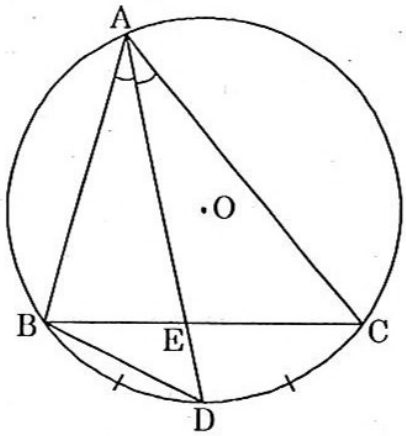
H.154

Xét hai tam giác MNT và MTP đồng dạng vì có hai góc nhọn bằng nhau $\hat{T} = \hat{P}$ (cùng chắn cung TN) và góc M chung. Do đó :

$$\frac{MT}{MP} = \frac{MN}{MT} \quad \text{hay } MT^2 = MN.MP$$

Ngược lại (bạn đọc tự chứng minh).

*Áp dụng* (hình 155)



H.155

AD là phân giác góc A nên $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$. Xét hai tam giác ABD và BED có góc D chung, $\widehat{BAD} = \widehat{EBD}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), vậy chúng đồng dạng (g.g). Do đó :

$$\frac{DB}{DE} = \frac{DA}{DB} \quad \text{hay } DB^2 = DA.DE$$

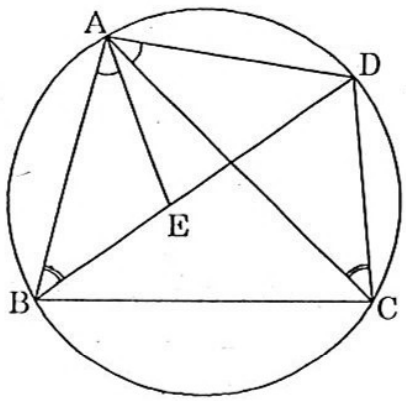
Hệ thức này chứng tỏ DB là tiếp tuyến của đường tròn (ABE).

Chứng minh tương tự với hai tam giác đồng dạng ACD và CED, ta được :

$$\frac{DC}{DE} = \frac{DA}{DC} \quad \text{hay } DC^2 = DA.DE$$

Hệ thức cuối này chứng tỏ DC là tiếp tuyến của đường tròn (ACE).

**10.** (Hình 156) Ta phải chứng minh hệ thức : AC.BD = AB.CD + BC.AD



H.156

Thật vậy, ΔABE ∽ ΔACD (g.g) vì có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$, $\hat{B} = \hat{C}$ (cùng chắn cung AD), do đó :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \quad \text{hay} \quad AB.CD = AC.BE \quad (1)$$

Lại xét ΔABC ∽ ΔAED ta có :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE} \quad \text{hay} \quad AD.BC = AC.DE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AB.CD + BC.AD = AC.BE + AC.DE = AC(BE + ED) = AC.BD$$

Vậy ta có hệ thức : AC.BD = AB.CD + BC.AD.

• ***Lời bình :*** Ta hãy vận dụng định lí Ptôlêmê để giải bài toán sau :

*"Cho phép biến đổi một – một sao cho mỗi bộ bốn điểm ($A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$) và bộ bốn điểm ($B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$) liên hệ với nhau bởi đẳng thức :*

$$\frac{A_1A_3}{A_3A_2} : \frac{A_1A_4}{A_4A_2} = \frac{B_1B_3}{B_3B_2} : \frac{B_1B_4}{B_4B_2}$$

*Chứng minh rằng phép biến đổi này là vòng quanh, tức là nó biến đổi đường thẳng và đường tròn thành đường thẳng và đường tròn."*

Cách giải như sau :

Giả sử bộ bốn điểm ($A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$) được sắp xếp trên đường tròn hoặc đường thẳng. Theo định lí Ptôlêmê ta có :

$$A_1A_2.A_3A_4 + A_2A_3.A_4A_1 = A_1A_3.A_4A_2.$$

Từ đó : $\dfrac{A_1A_2.A_3A_4}{A_2A_3.A_4A_1} + 1 = \dfrac{A_1A_3.A_4A_2}{A_2A_3.A_4A_1}$

hay $\dfrac{A_1A_3}{A_3A_2} : \dfrac{A_1A_4}{A_4A_2} = 1 + \dfrac{A_1A_2}{A_2A_3} : \dfrac{A_1A_4}{A_4A_2}$

Dựa vào giả thiết ta có thể viết : $\dfrac{B_1B_3}{B_3B_2} : \dfrac{B_1B_4}{B_4B_2} = 1 + \dfrac{B_1B_2}{B_2B_3} : \dfrac{B_1B_4}{B_4B_2}$ và theo định lí Ptôlêmê, ta kết luận rằng : bốn điểm $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ nằm trên đường thẳng hoặc đường tròn.

**11.** Đặt AB = a, BC = b (hình 157).

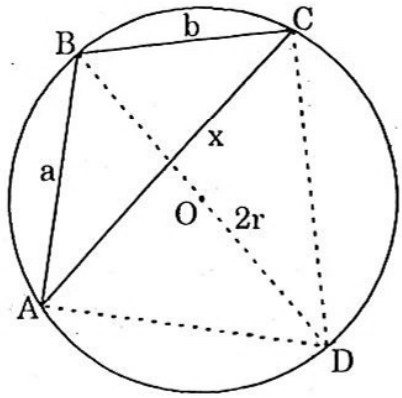
Kẻ đường kính DB = 2r, ta có :

$$CD = \sqrt{4r^2 - b^2}\ ;\ AD = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Đặt AC = x, theo định lí Ptôlêmê thì :

$$x.2r = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}$$

Từ đó $x = a\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{4r^2}}$



H.157

Tương tự nếu z là dây trương cung bằng hiệu của hai cung đã cho thì :

$$z = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} - b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} \qquad (a > b)$$

Biểu thức sẽ rất đơn giản nếu r = 1.

*Lưu ý :* Ta nhận thấy rằng : nếu a = b bằng cạnh của một đa giác đều 2n cạnh thì ta có thể tính được cạnh của đa giác đều n cạnh nội tiếp.

Nếu a và b là cạnh của hai đa giác đều nội tiếp, đồng thời hiệu của hai cung đã cho có dây là cạnh của một đa giác đều nội tiếp khác thì ta có thể tính cạnh của đa giác đều đó.

Chẳng hạn, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Như vậy biết cạnh $a_3$ của tam giác đều nội tiếp và cạnh $a_4$ của hình vuông nội tiếp thì có thể tính cạnh của hình 12 cạnh đều nội tiếp.

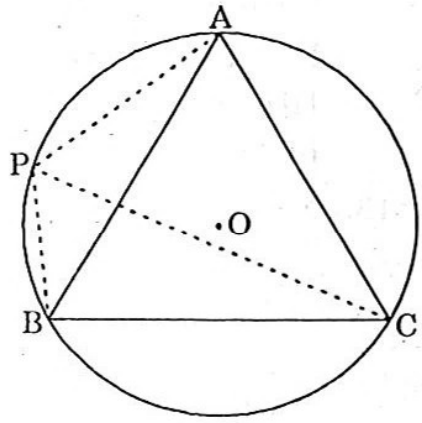
Cụ thể, với r = 1 thì $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = \sqrt{2}$, do đó $a_{12} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

- ***Lời bình :*** Ta vận dụng định lí Ptôlêmê để giải hai bài toán sau :

1. *Cho ΔABC đều và điểm P nằm trên cung AB (không chứa C) của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách PA + PB bằng khoảng cách PC.*

   Thật vậy (hình 158), do tứ giác APBC nội tiếp trong đường tròn nên theo định lí Ptôlêmê ta có : AB.PC = AC.PB + BC.PA

   Chia hai vế cho AB được : PC = PA + PB.



H.158

2. *Chứng minh rằng trong hình bảy cạnh đều (thất giác đều) ABCDEFG ta có hệ thức :* $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

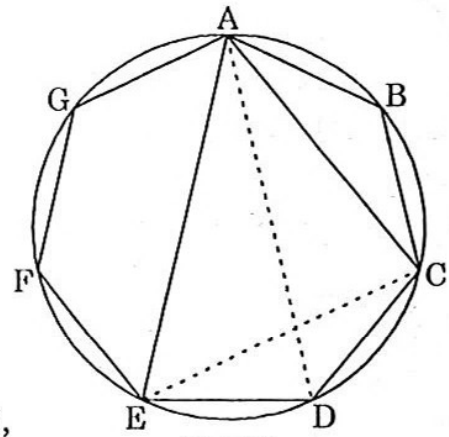
   Hình bảy cạnh đều có thể nội tiếp trong đường tròn (hình 159). Xét tứ giác ACDE, theo định lí Ptôlêmê ta có :

   AD.CE = AE.CD + AC.DE

   Nhưng AE = AD, CE = AC và CD = DE = AB,

   do đó : AD.AC = AD.AB + AC.AB.

   Chia hai vế cho tích AB.AC.AD ta có ngay hệ thức phải chứng minh.

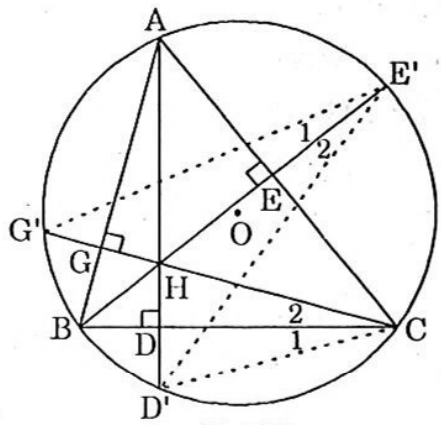


H.159

**12.** a) Các điểm D', E', G' đối xứng trực tâm H của ΔABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp (O), do đó DH = DD', EH = EE' (hình 160).

Suy ra ΔHBC = ΔD'BC (c.c.c), do đó đường tròn (H, B, C) bằng đường tròn (D', B, C) = đường tròn (O).

Tương tự, xét ΔHAC và ΔHAB ta cũng có đường tròn (H, A, C) = đường tròn (H, A, B) = đường tròn (O).



H.160

b) Các góc nội tiếp $\widehat{E'_2} = \widehat{C_1}$ (cùng chắn cung BD') và $\widehat{E'_1} = \widehat{E'_2}$, tức là E'B là tia phân giác góc G'E'D'.

Chứng minh tương tự D'A là tia phân giác góc G'D'E'. Hai tia phân giác này cắt nhau tại H, nên H là tâm đường tròn nội tiếp ΔD'E'G'.

- ***Lời bình :*** Có thể đặt thêm câu hỏi sau :

*"c) Cho trước đường tròn (O), điểm A trên (O) và điểm H trong (O), hãy dựng ΔABC nội tiếp (O) và nhận H làm trực tâm."*

Cách dựng như sau :

Nối A với H cắt (O) tại D'. Qua trung điểm D của HD' dựng trung trực của HD' cắt (O) tại B và C. Ta được ΔABC phải dựng. Thật vậy, ta chứng minh được BH ⊥ AC bằng cách so sánh hai tam giác BHD và AHE.

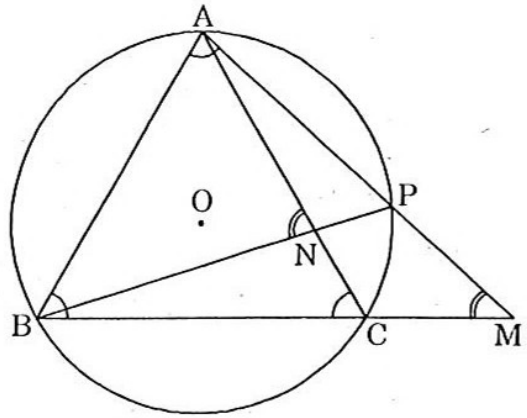
**13.** Xét hai tam giác ABM và NAB (hình 161), ta có :

$\widehat{ABM} = \widehat{BAN} = 60^o$ ; $\widehat{ABN} = sđ\dfrac{\overset{\frown}{AP}}{2}$

$\widehat{AMB} = sđ\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} - sđ\dfrac{\overset{\frown}{CP}}{2}$

$= sđ\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} - sđ\dfrac{\overset{\frown}{CP}}{2} = sđ\dfrac{\overset{\frown}{AP}}{2}$.

Do đó : $\widehat{ABN} = \widehat{AMB} = sđ\dfrac{\overset{\frown}{AP}}{2}$



H.161

Như vậy ΔABM ∽ ΔNAB (g.g).

Suy ra : $\dfrac{AB}{NA} = \dfrac{BM}{AB}$ hay $AN.BM = AB^2$ = không đổi.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

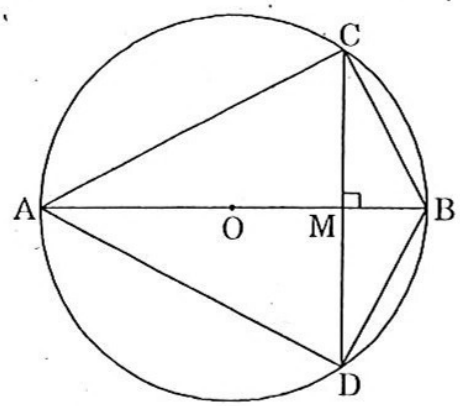
*"Từ điểm M trên đường kính AB của một đường tròn (O) ta kẻ đường vuông góc cắt đường tròn tại C và D. Chứng minh rằng tích các cạnh đối của tứ giác ABCD bằng nhau."*

Ta có : AC = AD và BC = BD (hình 162).

Vậy AC.BD = BC.AD

Có thể rút ra một số nhận xét sau :

*a) Định nghĩa :* Tứ giác nội tiếp một đường tròn mà tích các cạnh đối bằng nhau gọi là *tứ giác điều hòa*, các đỉnh của tứ giác gọi là các điểm điều hòa của đường tròn.



H.162

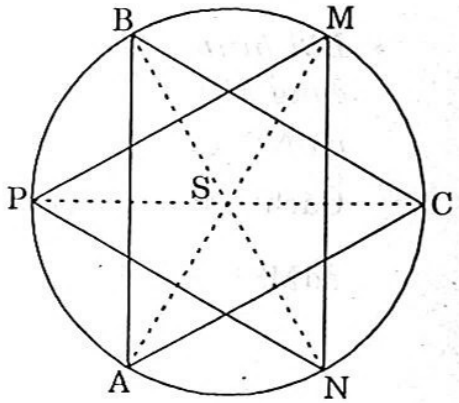
*b) Hệ quả :* Hai cạnh đối của một tứ giác điều hòa bằng nửa tích hai đường chéo của nó.

Thật vậy, theo định lí Ptôlêmê đối với tứ giác nội tiếp ABCD, ta có

AB.CD = AC.BD + BC.AD

và nếu tứ giác này lại là tứ giác điều hòa thì :

$$AC.BD = BC.AD = \frac{1}{2}AB.CD.$$



H.163

**14.** Xét các góc có đỉnh S ở trong đường tròn (hình 163) ta có số đo mỗi góc bằng nửa tổng số đo của hai cung bị chắn nên :

$$sđ\widehat{ASC} = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{ANC} + \overset{\frown}{PBM})$$

$$= sđ\widehat{ABC} + sđ\widehat{MNP}$$

(số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).

Lại có $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} + 60^o$ (gt) nên $\widehat{MNP} = 60^o$. Chứng minh tương tự ta được : $\widehat{MPN} = \widehat{PMN} = 60^o$. Vậy $\Delta MPN$ là tam giác đều.

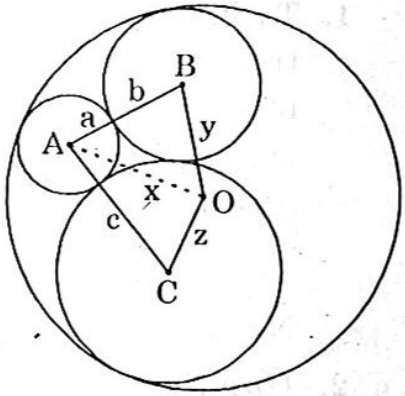
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau : *"Cho $\Delta ABC$. Tìm điểm M sao cho ba tam giác AMB, AMC và BMC có chu vi bằng nhau."*

Cách giải như sau (hình 164) :

Ta dựng ba đường tròn tâm A, B, C từng đôi tiếp xúc ngoài và có bán kính lần lượt là a, b, c.

Gọi O là tâm đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn trên và có bán kính m. Đặt OA = x, OB = y, OC = z ta có :

$$x + a = y + b = z + c.$$



H.164

Từ đó : $x + y + a + b = 2m$, tức là $x + y + AB = 2m$.

Tương tự $x + z + AC = y + z + BC = 2m$.

Các giá trị $x + y + AB$, $x + z + AC$ và $y + z + BC$ chính là chu vi của các tam giác AMB, AMC và BMC. Vậy O chính là điểm phải tìm.

*Lưu ý :* a) Điểm O là điểm duy nhất có tính chất của bài ra và nằm trong đường tròn lớn nhất của ba đường tròn tâm A, B, C.

b) Bài toán này còn được gọi là *bài toán về ba tam giác có chu vi bằng nhau.*

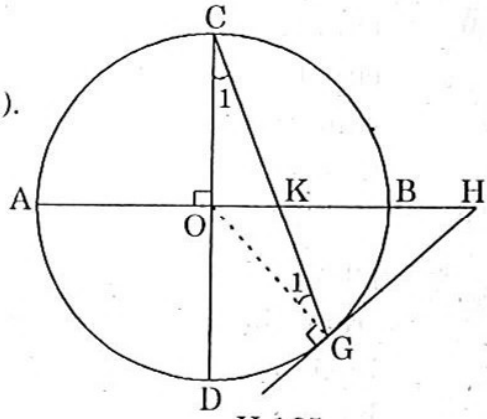
**15.** Ta có (hình 165) :

$\widehat{KGH} = 90^o - \hat{G}_1 = 90^o - \hat{C}_1$ (vì $\Delta OCG$ cân).

$$sđ\widehat{GKH} = sđ\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{GB})$$

$$= sđ\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{DG})$$

$$= sđ\overset{\frown}{AC} - \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{DG} = 90^o - \hat{C}_1.$$



H.165

Vậy $\widehat{KGH} = \widehat{GKH}$, tức là $\Delta HKG$ cân tại H. Suy ra HK = HG.

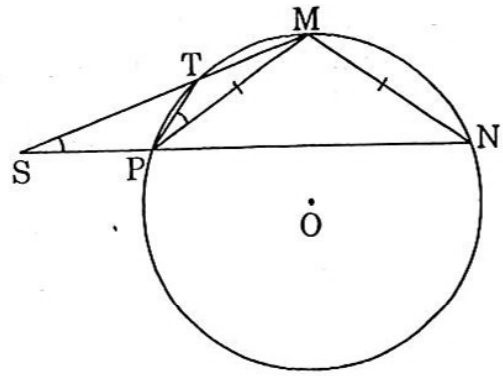
- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho đường tròn (O) và hai dây MN = MP. Trên cung MP lấy một điểm T. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng MT và NP. Chứng minh rằng $\widehat{MSP} = \widehat{MPT}$."*

Cách giải như sau (hình 166) :

$$sđ\widehat{MSP} = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{MN} - \overset{\frown}{PT}) = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{MP} - \overset{\frown}{PT})$$

$$= \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{TM} = sđ\widehat{MPT}.$$

Vậy $\widehat{MSP} = \widehat{MPT}$.



H.166

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

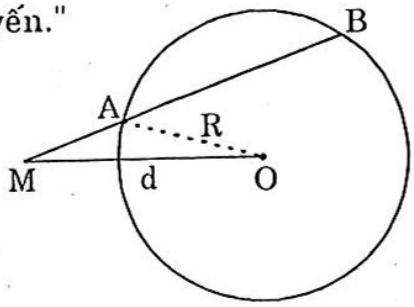
### I. HỆ THỨC ƠLE

**1.** Ta biết rằng : "Nếu từ một điểm M cố định không nằm trên đường tròn (O) ta kẻ một cát tuyến cắt (O) tại A và B thì tích MA.MB là một hằng số, tức không phụ thuộc vị trí của cát tuyến."

Nếu gọi khoảng cách từ M đến tâm O là d (hình 167) và bán kính (O) là R thì :

$$\boxed{MA.MB = d^2 - R^2 = \text{hằng số}}$$

Nếu điểm M ở trong (O) thì $MA.MB = R^2 - d^2$.



H.167

**2.** ***Ứng dụng :***

*a) Chứng minh bốn điểm cùng ở trên một đường tròn*

Do tích MA.MB là một hằng số không phụ thuộc vị trí của cát tuyến MAB nên ta có thêm một phương pháp để chứng minh một tứ giác nội tiếp sau đây :

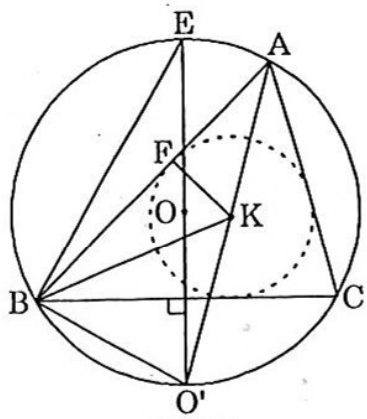
"Điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D cùng ở trên một đường tròn (tức là tứ giác ABCD nội tiếp được) là : MA.MB = MC.MD, với MAB và MCD là hai cát tuyến kẻ từ M tới đường tròn (O)."

*b) Hệ thức Ơle*

Cho $\Delta ABC$. Gọi O và K theo thứ tự là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác (hình 168), R và r là bán kính của chúng. Ta có hệ thức Ơle sau :

$$\boxed{R^2 - d^2 = 2Rr} \quad \text{(d là đoạn nối tâm OK)}$$

Chứng minh. Phân giác AK của góc A đi qua trung điểm O' của cung BC và đoạn $O'E \perp BC$ là một đường kính. Nối BO', BE, BK và kẻ $KF \perp AB$.



H.168

Trong $\Delta O'BK$ các góc ở B và K bằng nhau vì bằng $\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$.

Suy ra $O'K = O'B$. Ta có : $KA.KO' = R^2 - d^2$ (*)

Xét hai tam giác vuông đồng dạng BEO' và FAK ta có : $\frac{O'B}{r} = \frac{2R}{KA}$.

Từ đó $KA.O'B = KA.KO' = 2Rr$.

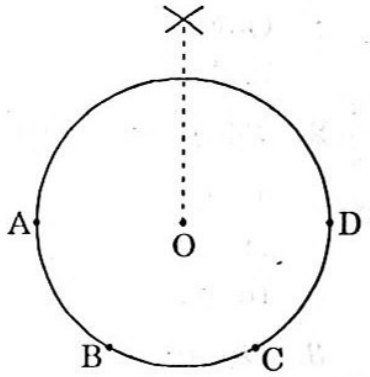
So sánh với (*) ta có hệ thức : $R^2 - d^2 = 2Rr$.

## II. BÀI TOÁN NAPÔLÊÔNG

**1.** Napôlêông (Napoléon) nhà vua nổi tiếng của nước Pháp đã quan tâm giải bài toán sau đây :

*"Chia một đường tròn tâm O cho trước thành bốn phần bằng nhau mà chỉ được dùng compa* (không dùng thước)."

Giả sử phải chia đường tròn (O) thành bốn phần bằng nhau (hình 169). Từ một điểm A tùy ý trên đường tròn dùng compa ta đặt 3 lần bán kính đường tròn, được ba điểm B, C, D.



H.169

Dễ thấy khoảng cách dây cung AC bằng cạnh của tam giác đều nội tiếp ($\frac{1}{3}$ đường tròn), tức là bằng $r\sqrt{3}$. Như thế AD là đường kính. Từ hai điểm A và D với bán kính bằng AC vẽ hai cung nhỏ cắt nhau tại M. Ta chứng minh rằng khoảng cách MO bằng cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn (O), tức là bằng $r\sqrt{2}$.

Xét $\Delta AMO$ vuông tại O ta có : $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$.

Bây giờ chỉ cần dùng compa với khẩu độ bằng MO ta đặt liên tiếp trên đường tròn bốn điểm để được hình vuông nội tiếp.

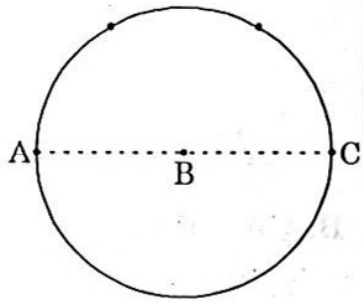
Vậy ta đã chia được đường tròn thành bốn phần bằng nhau.

**2.** ***Lưu ý***

Ta cũng có thể giải bài toán sau đây chỉ dùng compa :

*"Tăng khoảng cách giữa hai điểm A và B cho trước* (hình 170) *lên 5 lần và nói chung lên một số lần cho trước."*

Từ điểm B với bán kính AB vẽ đường tròn. Trên đường tròn này đặt 3 lần khoảng cách AB được điểm C, rõ ràng C đối tâm với A. Khoảng cách AC bằng 2 lần khoảng cách AB.



H.170

Từ C lại vẽ đường tròn bán kính BC, bằng cách này ta tìm được điểm đối tâm với B, cách A một khoảng bằng 3 lần khoảng cách AB, v.v...

# §15. TỪ CUNG CHỨA GÓC ĐẾN TỨ GIÁC NỘI TIẾP

## A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

***1. Cung chứa góc***

a) Số đo của góc có đỉnh :

– Ở trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

– Ở ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

b) Với đoạn thẳng AB và góc $\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn AB.

Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

***2. Tứ giác nội tiếp***

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng $180^\circ$.

Đảo lại, nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng $180^\circ$ thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

***3. Độ dài đường tròn, diện tích hình tròn***

a) Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

b) Độ dài đường tròn bán kính R (hoặc đường kính d) được tính theo công thức : $C = 2\pi R$ (hoặc $= \pi d$).

c) Độ dài $l$ của một cung $n^\circ$ trên đường tròn bán kính R được tính theo công thức : $l = \dfrac{\pi R n}{180}$.

d) Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức :

$$S = \pi R^2 \quad \left(\text{hoặc} = \frac{\pi d^2}{4}\right).$$

e) Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung $n^\circ$, được tính theo công thức :

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \quad \left(\text{hoặc} = \frac{lR}{2}\right),$$

$l$ là độ dài cung $n^\circ$ của hình quạt tròn.

## B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**1.** Đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ (0; 1) tiếp xúc với cạnh AB ở D, với cạnh AC ở E.

a) Tính khoảng cách từ O đến tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

b) Các phân giác trong của góc B và C cắt đường thẳng DE theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, M, N nằm trên một đường tròn.

**2.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Nối O với điểm C chính giữa nửa đường tròn và kéo dài OC trên lấy đoạn CD = OC. Từ D kẻ các tiếp tuyến DM và DN với (O) cắt AB tại E và F. Từ S bất kì trên cung MN kẻ tiếp tuyến với (O) cắt DE tại T và DF tại V.

a) Chứng minh ba tam giác DEF, OMC và DMN là những tam giác đều.

b) Gọi I và K là giao điểm của OT và OV với MN, chứng minh rằng bốn điểm O, T, V, N cùng nằm trên một đường tròn.

**3.** Cho đường tròn (O), một điểm A bất kì nằm trên và một điểm M nằm trong (O). Tìm hai điểm B và C trên đường tròn đó sao cho :

a) M là giao điểm các trung tuyến của $\Delta ABC$.

b) M là trực tâm của $\Delta ABC$.

**4.** Hai đường tròn tâm O và O' tiếp xúc ngoài tại A. Lấy trên mỗi đường tròn hai điểm B, C sao cho góc BAC luôn vuông.

a) Chứng minh OB // O'C.

b) Tìm quỹ tích hình chiếu H của điểm A trên BC và quỹ tích trung điểm I của BC.

c) Tìm quỹ tích của trọng tâm G của $\Delta ABC$.

**5.** Gọi E, F, G, H là chân các đường vuông góc hạ từ một điểm P của đường tròn đến các cạnh AB, BC, CD, BA của một tứ giác nội tiếp ABCD.

a) So sánh hai tam giác PEF và PGH.

b) Suy ra rằng : "Tích các khoảng cách từ một điểm trên đường tròn đến hai cạnh đối của một tứ giác nội tiếp bằng tích các khoảng cách từ điểm ấy đến hai cạnh kia."

**6.** Chứng minh *tính chất lí thú sau đây của tứ giác nội tiếp* : "Các cặp cạnh đối của tứ giác ABCD nội tiếp kéo dài cắt nhau tại P và Q. Chứng minh rằng tứ giác EFGH tạo bởi giao điểm các phân giác của các góc P và Q với các cạnh của tứ giác ABCD luôn là một hình thoi."

**7.** Cho một đoạn thẳng AB và một điểm M bất kì trên đoạn thẳng ấy. Từ M vẽ nửa đường thẳng vuông góc với AB trên đó lấy hai điểm C và D sao cho MC = MA và MD = MB. Đường tròn tâm $O_1$ đi qua ba điểm A, M, C và đường tròn tâm $O_2$ đi qua ba điểm B, M, D cắt nhau tại một điểm thứ hai N (ngoài điểm M ra).

a) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và ba điểm B, C, N cũng

thẳng hàng.

b) Có nhận xét gì về một trong bốn điểm A, B, C, D đối với ba điểm còn lại ?

c) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M chạy trên đoạn thẳng AB.

**8.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AD và có đường cao AA'.

a) So sánh hai góc ABC và ADC, hai góc BAA' và DAC.

b) Gọi BB' và CC' là hai đường cao cắt nhau tại H và E là giao điểm của B'C' với AD. Chứng minh các tứ giác BC'B'C và DEB'C nội tiếp được trong đường tròn.

**9.** Các đường phân giác trong và ngoài của góc C trong $\Delta ABC$ cắt đường thẳng AB tại M và N tương ứng. Chứng minh rằng nếu CM = CN thì $AC^2 + BC^2 = 4R^2$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

**10.** Cho đường tròn (O) có đường kính DE cố định còn đường kính FG thay đổi. Gọi M và N là giao điểm của DF và DG với tiếp tuyến tại E.

a) Chứng minh tứ giác FMNG nội tiếp.

b) Kẻ trung tuyến DK của $\Delta DMN$, chứng minh $DK \perp FG$.

c) Tâm S của đường tròn ngoại tiếp $\Delta FMG$ chạy trên đường nào khi đường kính FG thay đổi ?

**11.** Cho $\Delta ABC$ đều cạnh a. Vẽ hai đường tròn tâm A và B bán kính a cắt nhau ở C. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc hai cung AC, BC và cạnh AB.

a) Tính chu vi hình giới hạn bởi cạnh AB và hai cung AC, BC.

b) Tính độ dài đường tròn (O).

**12.** Cho $\Delta DEF$ đều cạnh c. Vẽ đường tròn tâm M đường kính DH là đường cao của $\Delta DEF$ và đường tròn tâm N nội tiếp $\Delta DEF$. Tính theo c diện tích của hình tạo thành bởi phần chung của $\Delta DEF$ với hình tròn tâm M nhưng không thuộc hình tròn tâm N.

**13.** Cho hai đường tròn tâm O và O' bán kính R và r với R = 3r tiếp xúc ngoài tại I và MN là tiếp tuyến chung ngoài của chúng.

a) Tính MN và tính bán kính của đường tròn nhỏ tâm K tiếp xúc với MN tại P và với hai đường tròn đã cho.

b) Tính diện tích của hình giới hạn bởi 3 đường tròn trên và MN.

**14.** Đường tròn có đường kính là đường cao AH của một tam giác vuông ABC cắt hai cạnh góc vuông AB và AC tại D và E. Các tiếp tuyến của đường tròn tại D và E cắt BC ở M và N.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của BH và N là trung điểm của CH.

b) Tính diện tích của tứ giác DENM biết các cạnh góc vuông của $\Delta ABC$ là 7cm và 5cm.

c) Tính diện tích phần giới hạn bởi đường tròn đã cho và tứ giác DENM.

**15.** Cho đường tròn (O, R) trên đó lấy điểm A cố định rồi vẽ đường tròn (A, R).

a) Hãy dựng $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho trực tâm của tam giác ấy là một điểm H cho trước nằm trên đường tròn (A).

b) Giả sử $\Delta ABC$ thỏa mãn các điều kiện trên đã dựng được. Hãy tính góc A của tam giác.

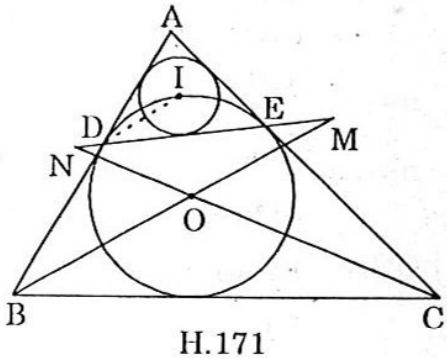
c) Cho H chạy trên đường tròn (A). Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh BC khi $\Delta ABC$ thỏa mãn điều kiện trong câu a.

**16.** Hãy chia một tam giác ABC thành bảy tam giác cân trong đó có ba tam giác bằng nhau.

## C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

**1.** a) Góc ADE có thể coi là góc có đỉnh ở trên đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ và chắn cung DE (hình 171). Vì thế phân giác của nó đi qua trung điểm I của cung DE. Tương tự, phân giác góc AED cũng đi qua I.

Như vậy I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ADE$ và ta có OI = 1.



H.171

b) $\widehat{BOC} = 180^o - \dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^o + \dfrac{\hat{A}}{2} = \widehat{BDO} + \widehat{ODM} = \widehat{BDM}$.

Lại có $\widehat{DMB} = 180^o - \dfrac{\hat{B}}{2} - \widehat{BDM} = 180^o - \dfrac{\hat{B}}{2} - \widehat{BOC} = \widehat{BCO}$,

tức là $\widehat{NMB} = \widehat{NCB}$.

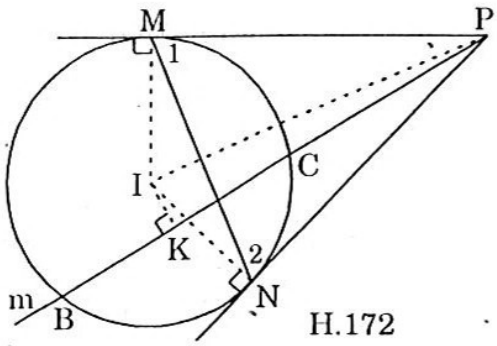
Như vậy từ hai điểm M và C ta đều nhìn đoạn BN dưới những góc bằng nhau, do đó bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho đường tròn (I) và đường thẳng m cắt (I) tại hai điểm cố định B và C. Từ một điểm P bất kì trên đường thẳng m nằm ngoài đoạn BC kẻ hai tiếp tuyến với (I) là PM và PN (M và N là tiếp điểm).*

*a) Tính các góc của $\Delta PMN$ biết góc giữa hai tiếp tuyến là $80^o$.*

*b) Gọi K là trung điểm của BC, chứng minh rằng năm điểm P, M, N, K, I cùng nằm trên một đường tròn."*

Cách giải như sau (hình 172) :



H.172

a) Do PM và PN là hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ P nên PM = PN và ΔPMN cân, suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$.

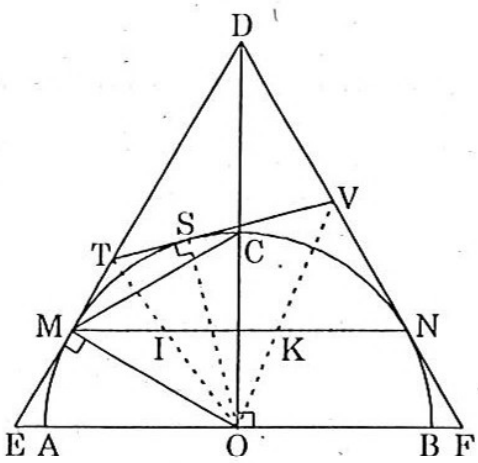
Biết $\widehat{MPN} = 80^o$ nên

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \frac{180^o - 80^o}{2} = 50^o.$$

b) Do K là trung điểm của BC nên IK ⊥ BC.

Các góc $\widehat{IMP} = \widehat{INP} = 90^o$. Vậy các điểm I, M, N nhìn đoạn IP dưới một góc vuông nên chúng phải nằm trên đường tròn đường kính IP. Vậy 5 điểm P, M, N, K, I cùng nằm trên đường tròn đường kính IP.

**2.** a) Ta có OM ⊥ DE vì DE là tiếp tuyến của (O) (hình 173). Tam giác DMO vuông có MC là trung tuyến (vì CO = CD theo gt) nên MC = CO = CD, vậy ΔOMC đều.



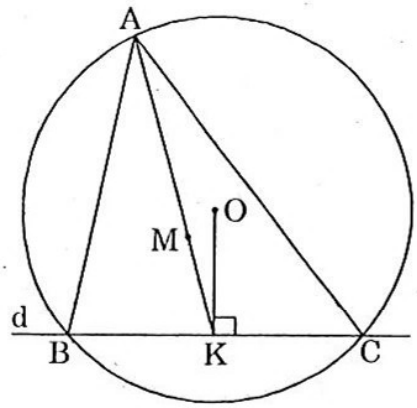
H.173

Xét ΔDEF cân có $\widehat{D} = 60^o$ (vì ΔOMC đều nên $\widehat{MOC} = 60^o$, suy ra $\widehat{MDO} = 30^o$, do đó $\widehat{D} = 60^o$), vậy ΔDEF đều.

Chứng minh tương tự như đối với ΔOMC ta có ΔDMN đều.

b) Ta có $\widehat{MND} = 60^o$. Lại có $\widehat{IOV}$ (= $\widehat{TOV} = 60^o$) và như vậy hai điểm O, N cùng nhìn đoạn TV dưới một góc bằng nhau nên bốn điểm O, T, V, N cùng nằm trên một đường tròn.

**3.** a) Giả sử B và C là hai điểm phải tìm (hình 175). Trung tuyến AK của ΔABC đi qua M nằm trong (O). Thế thì AM = 2MK. Mặt khác OK ⊥ BC. Vậy ta có cách dựng sau :

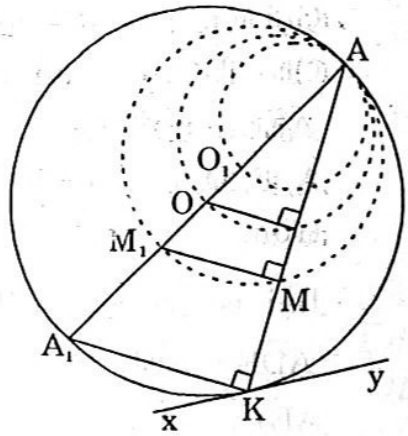


H.175

Kéo dài AM một đoạn MK = $\frac{1}{2}$AM, kẻ đường vuông góc d với OK tại K, cắt (O) ở B và C.

Bài toán có vô số nghiệm hình nếu K trùng với O vì lúc đó ΔABC

vuông ở A nên có vô số đường kính và có vô số tam giác vuông như thế.



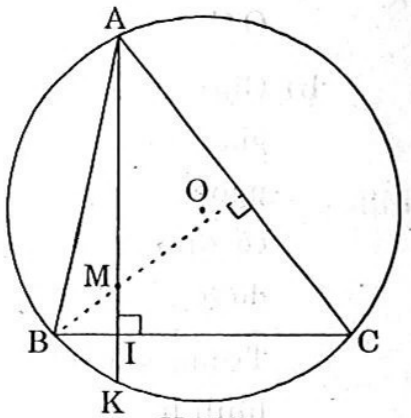
H.176

Nếu K nằm trên đường tròn (hình 176), ta kẻ $AOA_1$ và kẻ $MM_1$ // $A_1K$ ta có góc $AMM_1$ vuông vì góc $AKA_1$ vuông. Do A và M cố định nên $A_1$ và $M_1$ cũng cố định. Quỹ tích của M có tính chất khi nối AM và kéo dài một đoạn $MK = \frac{1}{2}AM$ thì K nằm trên đường tròn nhìn $AM_1$ dưới một góc vuông, tức là đường tròn (C) đường kính $AM_1 = \frac{2}{3}$ đường kính đường tròn (O).

Như thế, nếu M nằm trong cả hai đường tròn thì đường thẳng d cắt (O) tại B và C (một nghiệm hình). Nếu M nằm ngoài (C) thì K nằm ngoài (O) tại điểm trùng với K tức là ba điểm B, C, K trùng nhau và ΔABC trở thành đoạn thẳng AK.

Vậy M phải nằm trong đường tròn (O), giới hạn trong đường tròn đường kính $AM_1 = \frac{2}{3}$ đường kính của (O) và không được nằm trên đường tròn đường kính $AO_1 = \frac{2}{3}$ bán kính của (O), vì khi đó ΔABC sẽ trở thành đoạn thẳng.

b) Giả sử đã dựng được hai điểm B và C khi M là trực tâm ΔABC (hình 177). Khi đó điểm K đối xứng với M qua BC nằm trên (O) và MI = IK.



H.177

Để xác định B và C ta kéo dài AM cắt (O) tại K. Kẻ trung trực của MK cắt (O) ở hai điểm B và C phải tìm.

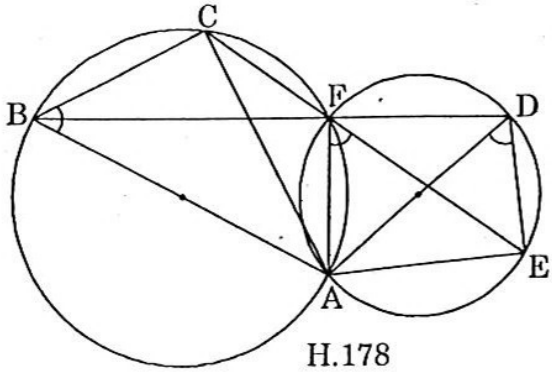
Bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi nếu $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ và $\widehat{AEC} = \widehat{ADB}$ thì $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$."*

Cái hay và cũng là cái khó của bài toán này là phải tìm cách vẽ cho được hình đáp ứng yêu cầu của các góc bằng nhau trong đề bài để thỏa mãn được giả thiết. Do đó ta có cách vẽ hình sau (hình 178).

Gọi F là giao điểm của BD và CE. Ta thấy ngay rằng do $\widehat{AEC} = \widehat{ADB}$ (gt) nên bốn điểm A, F, D, E nằm trên một đường tròn.



H.178

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (gt) mà $\widehat{ADE} = \widehat{AFE}$ (cùng chắn cung AE) và $\widehat{ABC} + \widehat{AFC} = 180^o$ vì $\widehat{AFC}$ là góc kề bù của $\widehat{AFE}$. Vậy ta có bốn điểm A, B, C, F cùng nằm trên một đường tròn khác có giao điểm là A và F với đường tròn thứ nhất.

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BFC}$ (cùng chắn cung BC) và $\widehat{DAE} = \widehat{DFE}$ (cùng chắn cung DE). Nhưng $\widehat{BFC} = \widehat{DFE}$ (đối đỉnh) vậy : $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$.

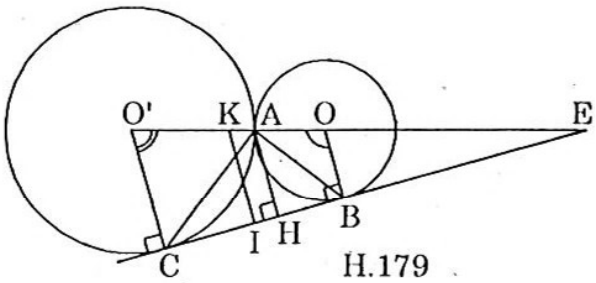
**4.** a) Xét hai tam giác cân AOB và AO'C (hình 179) ta có :

$$\widehat{OAB} + \widehat{O'AC} = 90^o \text{ (vì bằng } \widehat{O'AO} - \widehat{BAC} = 90^o)$$

Do đó : $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{O'AC} + \widehat{O'CA} = 180^o$.

Vì tổng các góc trong của hai tam giác trên bằng $360^o$ ta suy ra $\widehat{AOB} + \widehat{AO'C} = 180^o$.

Vậy OB phải song song với O'C.



H.179

b) Giả sử R ≠ R' và gọi E là giao điểm của OO' và BC. Vì OB // O'C nên E là tâm đồng dạng ngoài của hai đường tròn, do đó E cố định. Điểm H luôn nhìn đoạn cố định AE dưới một góc vuông vậy quỹ tích của H là đường tròn đường kính AE.

Trong trường hợp R = R' (hai đường tròn bằng nhau) thì OO'BC là hình bình hành, nên BC // OO', do đó AH ⊥ OO'. Mặt khác OA = O'A nên quỹ tích của H là một phần đường trung trực của OO' (giới hạn bởi hai tiếp tuyến chung ngoài). Do IK là đường trung bình của hình thang BOO'C nên :

$$IK = \frac{R + R'}{2}, \text{ do đó : } \frac{EI}{EC} = \frac{IK}{O'C} = \frac{R + R'}{2R'}.$$

Vậy quỹ tích của I là đường tròn tâm E, tỉ số $\frac{R + R'}{2R'}$.

c) Vì G là trọng tâm của $\Delta ABC$ nên ta có : $\frac{AG}{AI} = \frac{2}{3}$. Do đó G là điểm đối xứng của I trong phép biến đổi đồng dạng tâm A, tỉ số $\frac{2}{3}$.

Vậy quỹ tích của G là đường tròn tâm A, tỉ số $\frac{2}{3}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho một điểm A cố định và một điểm B di động trên một đường tròn (O) cố định. Phân giác trong của góc AOB cắt AB ở M.*

*a) Chứng minh đường thẳng song song với OB kẻ từ M luôn đi qua một điểm cố định.*

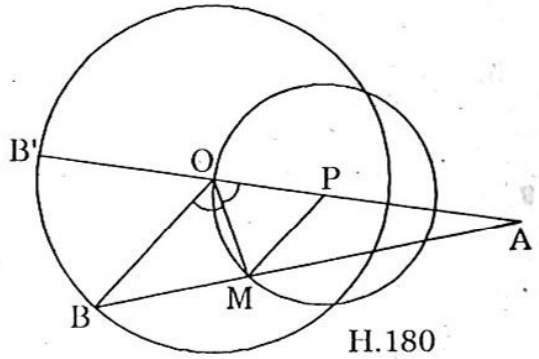
*b) Tìm quỹ tích của điểm M.*

*c) Hãy giải bài toán này khi phân giác ngoài của góc AOB cắt AB tại N."*

Cách giải như sau (hình 180) :

a) OM là phân giác trong của $\Delta AOB$ nên $\frac{MB}{MA} = \frac{OB}{OA}$ (1)

Gọi P là giao điểm của đường thẳng song song với OB kẻ từ M tới OA (P phải ở trong đoạn OA vì M ở trong đoạn AB).



H.180

Ta có : $\frac{PO}{PA} = \frac{MB}{MA}$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\frac{PO}{PA} = \frac{OB}{OA}$.

Tỉ lệ thức này chứng tỏ rằng điểm P chia trong đoạn OA cố định theo tỉ số không đổi $\frac{OB}{OA}$ nên P phải là một điểm cố định.

b) Từ tỉ lệ thức (1) suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{OA}{OA + OB}$ = không đổi. Thành thử P là điểm đồng dạng phối cảnh của B trong phép biến đổi đồng dạng tâm A tỉ số $\frac{OA}{OA + OB}$. Do đó :

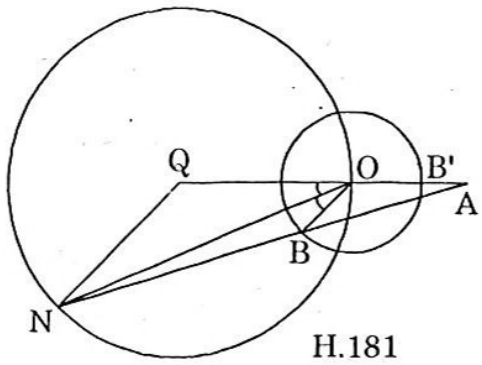
Khi B di động trên đường tròn (O) thì quỹ tích của M là đường tròn (đồng dạng phối cảnh với (O)) trong phép biến đổi đồng dạng nói trên, có tâm là P và đi qua O.

c) Khi ON là phân giác ngoài của góc AOB thì ta có (hình 181)

$$\frac{NB}{NA} = \frac{OB}{OA} \quad (3)$$

Đường thẳng song song với OB kẻ từ N cắt AO kéo dài tại Q (Q nằm ngoài đoạn OA), ta có :

$$\frac{QO}{QA} = \frac{NB}{NA} \quad (4)$$



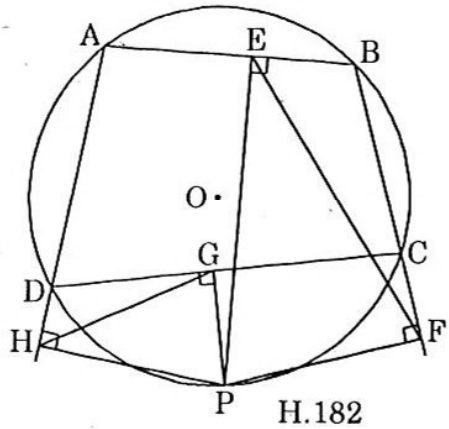
H.181

Từ (3) và (4) có : $\frac{QO}{QA} = \frac{OB}{OA}$. Tỉ lệ thức này chứng tỏ Q là điểm chia ngoài OA cố định theo tỉ số không đổi $\frac{OB}{OA}$ nên Q phải là điểm cố định.

Từ (4) ta suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{OA}{OA - OB} = k$ (không đổi), nên N là điểm đồng dạng phối cảnh của B trong phép biến đổi đồng dạng tâm A, tỉ số k.

Vậy quỹ tích của N là đường tròn (đồng dạng phối cảnh với (O)) tâm Q và đi qua O.

**5.** a) Các tứ giác PEBF và PGDH đều có hai góc đối vuông (hình 182). Trong tứ giác PEBF ta có : $\widehat{EPF}$ bù với $\widehat{EBF}$ (tức là $\widehat{ABC}$). Trong tứ giác PGDH ta có : $\widehat{HPG} = \widehat{ADC}$.



H.182

Biết $\widehat{ABC}$ bù với $\widehat{ADC}$ (trong tứ giác ABCD) ta rút ra :

$$\widehat{HPG} = \widehat{EPF} \quad (1)$$

Mặt khác, các tứ giác PEBF và PGDH đều nội tiếp được trong một đường tròn nên : $\widehat{PEF} = \widehat{PBF}$ (cùng chắn cung PF) và $\widehat{PHG} = \widehat{PDG}$ (cùng chắn cung PG). Nhưng trong đường tròn (ABCD) lại có : $\widehat{PBF} = \widehat{PDG}$ (cùng chắn cung PC), do đó : $\widehat{PEF} = \widehat{PHG}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ngay : $\Delta PEF \backsim \Delta PHG$ (g.g).

b) Từ hai tam giác đồng dạng trên, ta có :

$$\frac{PE}{PH} = \frac{PF}{PG} \quad \text{hay} \quad PE.PG = PF.PH$$

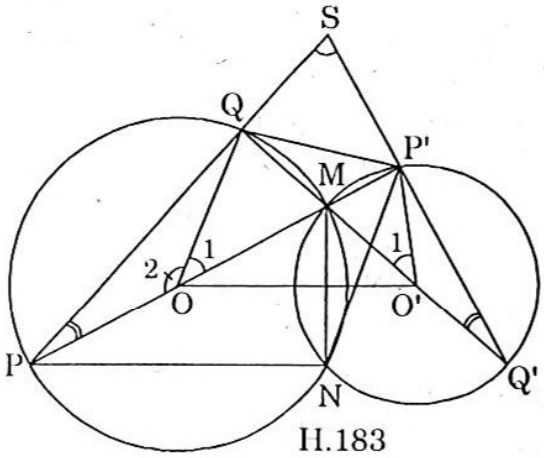
Vậy : tích các khoảng cách từ P đến các cạnh đối của tứ giác nội tiếp ABCD bằng tích các khoảng cách từ P đến hai cạnh kia.

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M và N. Đường thẳng MO cắt (O) và (O') theo thứ tự tại P và P', đường thẳng MO' cắt (O) và (O') theo thứ tự tại Q và Q'. Chứng minh rằng :*

*a) Tứ giác OQP'O' nội tiếp.*

*b) Tứ giác SPNP' nội tiếp, trong đó S là giao điểm của PQ và P'Q'."*



H.183

Cách giải như sau (hình 183) :

a) Ta hãy chứng minh $\widehat{O}_1 = \widehat{O'}_1$.

Thật vậy, $\widehat{O}_1$ là góc ngoài ở đỉnh O của $\Delta OPQ$ cân nên $\widehat{O}_2 = 2\widehat{P}$ và $\widehat{O'}_1 = 2\widehat{Q'}$.

Mà $\widehat{P} = \widehat{Q'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc $PQ \perp QQ'$, $PP' \perp P'Q'$).

Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{O'}_1$, vậy tứ giác OQP'O' nội tiếp.

b) Ta hãy chứng minh $\widehat{S} + \widehat{PNP'} = 180^o$.

Thật vậy, $\Delta QSQ'$ có $\widehat{SQQ'} = 90^o$, suy ra $\widehat{S} + \widehat{Q'} = 90^o$.

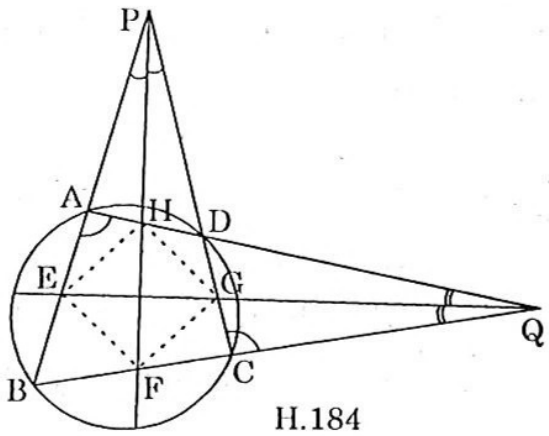
Mà $\widehat{Q'} = \widehat{MNP'}$ (cùng chắn cung MP' của đường tròn (O')).

Do đó : $\widehat{S} + \widehat{MNP'} = 90^o$ mà $\widehat{MNP} = 90^o$, suy ra :

$$\widehat{PSP'} + \widehat{MNP} + \widehat{MNP'} = 90^o + 90^o.$$

Vậy ta có : $\widehat{S} + \widehat{PNP'} = 180^o$, suy ra tứ giác SPNP' nội tiếp.

**6.** Do tứ giác ABCD nội tiếp nên góc ngoài DCQ tại đỉnh C bằng góc trong BAQ tại đỉnh đối diện A (hình 184). Vì QE là phân giác góc Q nên các góc của $\Delta AQE$ theo thứ tự bằng các góc của $\Delta CQG$. Do đó $\widehat{CGQ} = \widehat{AEQ}$.



H.184

Nhưng $\widehat{CGQ} = \widehat{PGE}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{PEG} = \widehat{PGE}$ và $\Delta PEG$ cân.

Phân giác góc P là trung trực của đáy EG nên H và F nằm trên trung trực đó sẽ cách đều E và G. Tương tự E và G cũng cách đều H và F. Vậy tứ giác EFGH là hình thoi.

**7.** a) Ta có $\widehat{ACN} = \widehat{AMN}$ (cùng chắn cung AN) (hình 186).

Tứ giác NMBD nội tiếp trong đường tròn $(O_2)$ nên

$$\widehat{NDB} + \widehat{NMB} = 180^o.$$

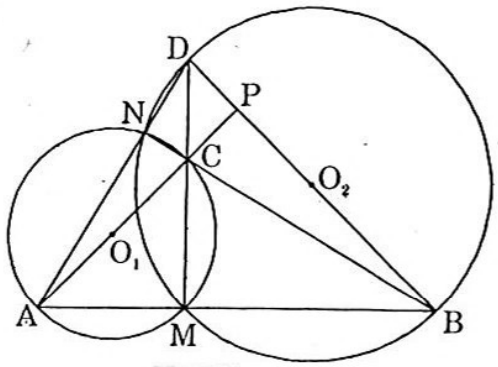
Nhưng $\widehat{AMN} + \widehat{NMB} = 180^o$, suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{NDB}$ (vì cùng bù với $\widehat{NMB}$).

Như vậy ta có $\widehat{NCA} = \widehat{NDB}$ (cùng bằng góc AMN).

Kéo dài AC cắt BD ở P ta có :

$$\widehat{NCP} + \widehat{NCA} = 180^o,$$

suy ra $\widehat{NCP} + \widehat{NDP} = 180^o$.



H.186

Vậy $\Delta CAM$ vuông cân, nên $\widehat{CAM} = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$. Chứng minh tương tự $\widehat{ABP} = 45^o$. Trong $\Delta APB$ tổng hai góc PAB và PBA bằng $90^o$ nên $\widehat{APB} = 90^o$. Từ đó $\widehat{DPC} = 90^o$.

Tứ giác NCPD đã có tổng ba góc NCP, NDP và DPC bằng $270^o$ nên $\widehat{CND} = 90^o$. Đoạn AC là đường kính của đường tròn (A, M, C) vì $\widehat{AMC} = 90^o$ (gt) nên $\widehat{ANC} = 90^o$. Do đó $\widehat{ANC} + \widehat{CND} = 180^o$, vậy ba điểm A, N, D thẳng hàng.

Vì $\widehat{DMB} = 90^o$ (gt) nên BD là đường kính của đường tròn (D, M, B) và $\widehat{DNB} = 90^o$. Mà $\widehat{DNC} = 90^o$ (chứng minh trên), suy ra NC trùng với NB, vì từ N chỉ có thể vẽ một đường vuông góc với AD, tức là ba điểm B, C, N phải thẳng hàng.

b) $\Delta ADB$ có $DM \perp AB$, $BN \perp AD$ nên C là trực tâm của tam giác. $\Delta ACB$ có $CM \perp AB$, $AD \perp BC$ nên D là trực tâm của tam giác. Tương tự A là trực tâm của $\Delta BCD$ và B là trực tâm của $\Delta ACD$.

Như vậy một trong bốn điểm A, B, C, D là trực tâm của tam giác do ba điểm còn lại tạo thành.

c) Dựa vào kết quả của câu a, ta có $\widehat{ANB} = 90^o$, $\widehat{NMB} = 45^o$. Suy ra $\widehat{ANM} = 90^o - 45^o = 45^o$, tức là MN là phân giác của góc ANB.

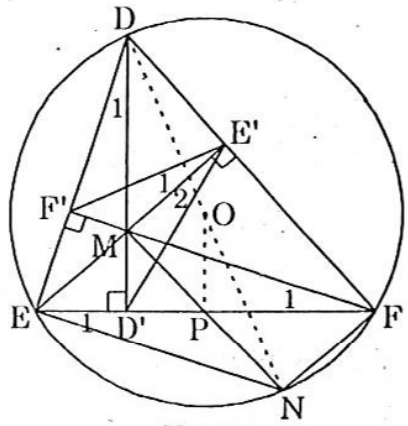
Vì $\widehat{ANB} = 90^o$ nên N sẽ chạy trên đường tròn đường kính AB. Do MN là phân giác góc ANB nên MN sẽ đi qua trung điểm E của cung AB cố định (vì $\widehat{ANM} = \widehat{MNB}$ chắn hai cung bằng nhau AE và BE).

• ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho ΔDEF nội tiếp trong đường tròn (O). Ba đường cao DD', EE', FF' cắt nhau tại M và N là điểm đối xứng của M qua trung điểm P của cạnh EF. Chứng minh rằng :*

*a) Ba góc EE'F', EE'D' và FEN bằng nhau.*

*b) Điểm N nằm trên đường tròn (O)."*



H.187

Cách giải như sau (hình 187) :

a) Tứ giác MF'DE có $\widehat{F'} = \widehat{E} = 90^o$ nên nội tiếp được, suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{E'}_1$.

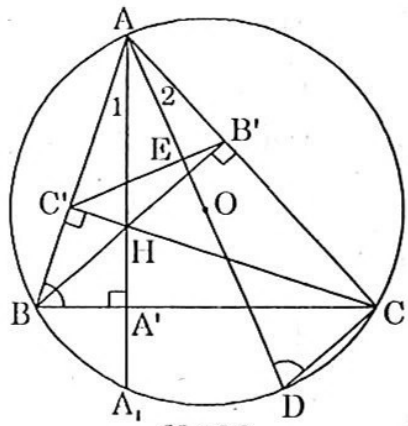
Tương tự, tứ giác MD'FE' nội tiếp được, suy ra $\widehat{F}_1 = \widehat{E'}_2$.

Tứ giác EMFN là hình bình hành (vì EM // NF do cùng vuông góc với DF và EN // MF do cùng vuông góc với DE), suy ra $\widehat{F}_1 = \widehat{E}_1$. Nhưng $\widehat{D}_1 = \widehat{F}_1$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{E'}_1 = \widehat{E'}_2 = \widehat{E}_1$, tức là ba góc EE'F', EE'D' và FEN bằng nhau.

b) Do EMFN là hình bình hành nên $\widehat{ENF} = \widehat{EMF} = \widehat{F'ME'}$ (đối đỉnh). Mà $\widehat{F'ME'} + \widehat{F'DE'} = 180^o$ (tứ giác MF'DE nội tiếp theo câu a) nên suy ra $\widehat{F'DE'} + \widehat{ENF} = 180^o$. Do đó tứ giác DENF nội tiếp được đường tròn (O), vậy điểm N nằm trên (O).

**8.** a) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (cùng chắn cung AC) (hình 188). Mà $\widehat{A}_1 + \widehat{B} = 90^o$, $\widehat{A}_2 + \widehat{D} = 90^o$ (vì $\widehat{ACD} = 90^o$).

Suy ra : $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, tức là $\widehat{BAA'} = \widehat{DAC}$.



H.188

b) Tứ giác BC'B'C có các góc tại C' và B' vuông nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính BC. Suy ra tổng hai góc đối $\widehat{C'B'C} + \widehat{B} = 180^o$, mà $\widehat{B} = \widehat{D}$ và $\widehat{C'B'C}$ chính là $\widehat{EB'C}$.

Do đó $\widehat{EB'C} + \widehat{EDC} = 180^o$. Vậy tứ giác DEB'C nội tiếp được.

• ***Lời bình :*** Có thể xét thêm hai câu hỏi nữa :

*"c) Chứng minh B'C' ⊥ AD.*

*d) Các đường cao AA', BB', CC' cắt đường tròn theo thứ tự tại $A_1$, $B_1$, $C_1$. Chứng minh rằng HA' = A'$A_1$, HB' = B'$B_1$, HC' = C'$C_1$ và rút ra nhận xét về các điểm H và $A_1$, H và $B_1$, H và $C_1$ đối với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC."*

Cách giải như sau :

c) Do tứ giác DEB'C nội tiếp nên ta có tổng hai góc đối

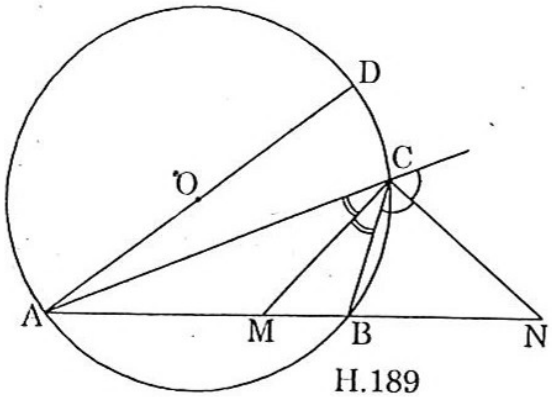
$\widehat{B'ED} + \widehat{B'CD} = 180^o$, mà $\widehat{B'CD} = 90^o$, suy ra $\widehat{B'ED} = 90^o$, tức là $B'C' \perp AD$.

d) Để chứng minh $HA' = A'A_1$, ta có $\hat{B}_2 = \widehat{A_1AC}$ (cùng chắn cung $A_1C$) và $\hat{B}_1 = \widehat{A_1AC}$ (cạnh tương ứng vuông góc), Suy ra $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Do đó $\Delta HBA_1$ cân nên $HA' = A'A_1$.

Chứng minh tương tự ta có : $HB' = B'B_1$ và $HC' = C'C_1$.

***Nhận xét :*** *Trong ΔABC nội tiếp đường tròn (O), các điểm đối xứng của trực tâm H qua ba cạnh luôn nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác.*

**9.** Giả sử A, M, B, N ở trên đường thẳng AB theo thứ tự này (hình 189). (Nếu bốn điểm trên xếp theo thứ tự N, A, M, B thì cũng xét tương tự).



H.189

Ta có : $\widehat{MCN} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

và $\widehat{CMN} = 45^o$ (vì CM = CN).

Do đó : $2\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 2(\widehat{MAC} + \widehat{MCA}) = 2\widehat{CMN} = 90^o$

Mặt khác $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180^o - \widehat{ABC}$. Từ đó $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} - 90^o$.

Do góc B tù nên đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC nằm ngoài tam giác vậy :

$$\widehat{DAC} = (180^o - \widehat{ADC}) - \widehat{ACD} = \widehat{ABC} - 90^o = \widehat{BAC}$$

(vì hai góc ABC và ADC là hai góc đối của tứ giác nội tiếp ABCD).

Thành thử DC = BC và $4R^2 = AD^2 = AC^2 + DC^2 = AC^2 + BC^2$.

- ***Lời bình :*** Tương tự :

*"Cho tứ giác ABCD trong đó AB = AD và CB = CD. Chứng minh rằng :*

*a) Có thể nội tiếp một đường tròn trong tứ giác.*

*b) Có thể ngoại tiếp một đường tròn khi và chỉ khi AB ⊥ BC."*

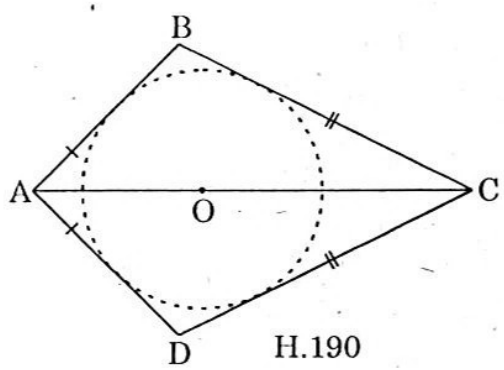
Cách giải như sau (hình 190) :

a) Theo đề bài ta có AB + CD = AD + BC. Vậy trong tứ giác ABCD có thể nội tiếp một đường tròn.

b) Xét hai tam giác bằng nhau ABC và ADC (c.c.c) ta có $\widehat{B} = \widehat{D}$. Vì thế ta có thể ngoại tiếp một đường tròn khi và chỉ khi :

$$\widehat{B} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{D}) = \frac{180^o}{2} = 90^o,$$

tức là khi $\widehat{B} = 90^o$ và $AB \perp BC$.



H.190

**10.** (Hình 191). a) Ta có : $sđ\widehat{G}_2 = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{DF}$;

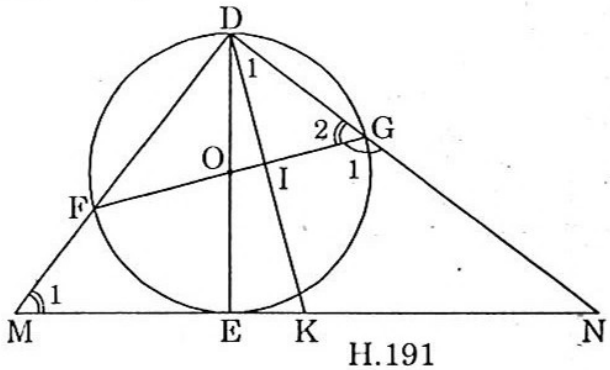
$$sđ\widehat{M}_1 = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{DGE} - \overset{\frown}{EF}) = \frac{1}{2}sđ(\overset{\frown}{DFE} - \overset{\frown}{EF})$$

$$= \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{DF}.$$

Suy ra $\widehat{G}_2 = \widehat{M}_1$.

Nhưng $\widehat{G}_1 + \widehat{G}_2 = 180^o$

nên $\widehat{M}_1 + \widehat{G}_1 = 180^o$.



H.191

Vậy tứ giác FMNG nội tiếp được.

b) Góc FDG vuông (chắn nửa đường tròn (O)), DK là trung tuyến của tam giác vuông MDN nên DK = KM = KN. Suy ra ΔDKN cân, do đó $\widehat{D}_1 = \widehat{N}$, mà $\widehat{G}_2 = \widehat{M}_1$ nên $\widehat{D}_1 + \widehat{G}_2 = \widehat{N} + \widehat{M}_1 = 90^o$.

Vậy $\widehat{DIG} = 90^o$, tức là $DK \perp FG$.

c) Do tứ giác FMNG nội tiếp được nên đường tròn ngoại tiếp nó chính là đường tròn ngoại tiếp (MFG). Qua O kẻ trung trực của FG và qua K kẻ trung trực của MN, chúng cắt nhau tại S và S là tâm đường tròn ngoại tiếp (MFG).

Ta có KS // OD (cùng vuông góc với MN), OS // IK (cùng vuông góc với FG). Suy ra ODKS là hình bình hành, do đó KS = OD không đổi.

Như thế, S luôn cách tiếp tuyến tại E cố định một khoảng bằng bán kính của (O) nên tâm S của đường tròn ngoại tiếp ΔFMG chạy trên một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại E một khoảng bằng bán kính của (O).

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Từ điểm D ngoài đường tròn (O) ta kẻ hai tiếp tuyến DE và DF. Lấy điểm P trên cung EF nằm trong ΔDEF và kẻ PI ⊥ EF, PH ⊥ DE, PK ⊥ DF. Gọi M là giao điểm của PE và HI, N là giao điểm của PF và KI.*

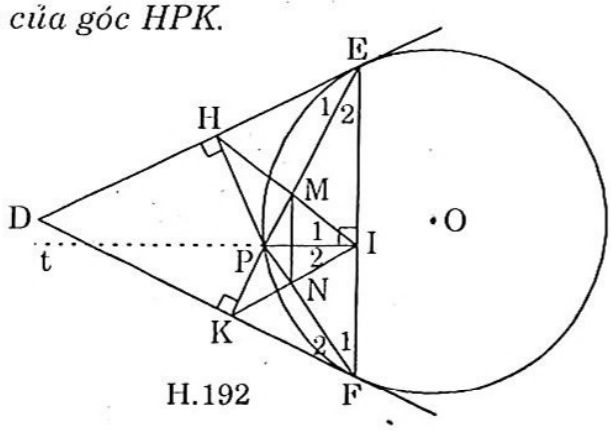
*Chứng minh rằng :*

*a) Các tứ giác PIEH và PIFK nội tiếp được.*

*b) Tia đối của tia PI là phân giác của góc HPK.*

*c) Tứ giác PMIN nội tiếp được.*

*Suy ra MN // EF."*



H.192

Cách giải như sau (hình 192) :

a) Do PI ⊥ EF, PH ⊥ HE (gt) nên các góc tại H và I đều vuông, do đó tứ giác PIEH nội tiếp được.

Tương tự tứ giác PIFK nội tiếp được.

b) Gọi Pt là tia đối của tia PI. Xét ΔDEF cân (vì DE = DF là tiếp tuyến của (O)) ta có hai góc ở đáy $\widehat{DEF} = \widehat{DFE}$. Do hai tứ giác PIEH và PIFK nội tiếp được (câu a)

nên $\widehat{HPI} = 180^o - \widehat{DEF} = 180^o - \widehat{DFE} = \widehat{KPI}$.

Từ đó $\widehat{HPt} = 180^o - \widehat{HPI} = 180^o - \widehat{KPI} = \widehat{KPt}$.

Vậy Pt là phân giác góc HPK.

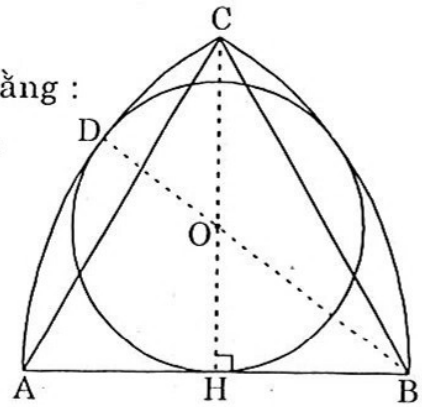
c) Theo câu a ta có $\hat{E}_1 = \hat{I}_1$ (tứ giác PIEH nội tiếp), $\hat{F}_2 = \hat{I}_2$ (tứ giác PIFK nội tiếp). Suy ra $\widehat{HIK} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$.

Lại có $\hat{F}_1 = \hat{E}_1$ (cùng chắn cung PE), $\hat{F}_2 = \hat{E}_2$ (cùng chắn cung PF). Suy ra $\widehat{HIK} = \hat{E}_2 + \hat{F}_1$.

Xét ΔPEF ta có : $\widehat{EPF} + \widehat{HIK} = 180^o - (E_2 + F_1) + E_2 + F_1 = 180^o$. Vậy tứ giác PMIN nội tiếp được.

Từ đó suy ra $\widehat{PMN} = \hat{I}_2$, mà $\hat{I}_2 = \hat{F}_2 = \hat{E}_2$ nên $\widehat{PMN} = \hat{E}_2$ chiếm vị trí góc đồng vị, do đó MN // EF.

**11.** a) Chu vi hình giới hạn cần tìm (hình 193) bằng : độ dài $\overset{\frown}{AC}$ + độ dài $\overset{\frown}{BC}$ + độ dài cạnh AB.



H.193

Ta có : độ dài $\overset{\frown}{AC} = \dfrac{2\pi.a.60}{360} = \dfrac{\pi a}{3}$.

Vậy chu vi cần tìm là :

$$2.\frac{\pi a}{3} + a = \frac{a}{3}(2\pi + 3).$$

b) Theo tính chất của hai đường tròn tiếp xúc thì B, O, D thẳng hàng. Ta lại có C, O, H thẳng hàng vì (O) tiếp xúc với AB.

Gọi R là bán kính của (O), trong $\Delta HOB$ vuông ta có : $OB^2 = OH^2 + HB^2$,

hay $(a - R)^2 = R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, tức là $a^2 - 2aR + R^2 = R^2 + \frac{a^2}{4}$.

Từ đó : $a^2 - \frac{a^2}{4} = 2aR$. Suy ra $R = \frac{3a}{8}$.

Vậy độ dài đường tròn (O) là : $2\pi.\frac{3a}{8} = \frac{3\pi a}{4}$.

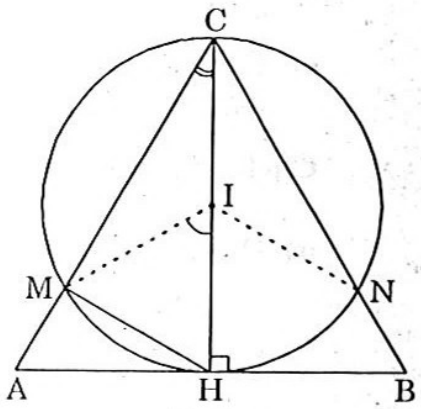
- ***Lời bình :*** Nếu bài ra vẫn cho $\Delta ABC$ đều có đường cao CH nhưng vẽ đường tròn (I) đường kính CH cắt CA và CB tại M và N, thì ta có thể tính độ dài các cung CM, CN và MHN như sau (hình 194) :

Đường cao tam giác đều là $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

do đó bán kính của (I) là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Ta có góc ở tâm MIH bằng $60^o$ (vì bằng $2\hat{C}$ mà $\hat{C} = 30^o$), do đó $\widehat{CIM} = \widehat{CIN} = \widehat{MIN}$.

Suy ra ba cung CM, CN và MHN bằng nhau.

Độ dài $\overset{\frown}{CM} = \frac{2\pi.IH.120}{360} = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\pi a\sqrt{3}}{6}$.



H.194

Vậy độ dài $\overset{\frown}{CM}$ = độ dài $\overset{\frown}{CN}$ = độ dài $\overset{\frown}{MHN} = \frac{\pi a\sqrt{3}}{6}$.

**12.** Diện tích phải tìm là diện tích phần tô đậm (hình 195), tức là :

$$2S_{\Delta DIM} + S_{\text{quạt MIHK}} - S_{\text{hình tròn (M)}}, \text{ với } 2S_{\Delta DIM} = DM.IP$$

Để tính DI là đường cao của nửa tam giác đều DIH cạnh là DH ta có :

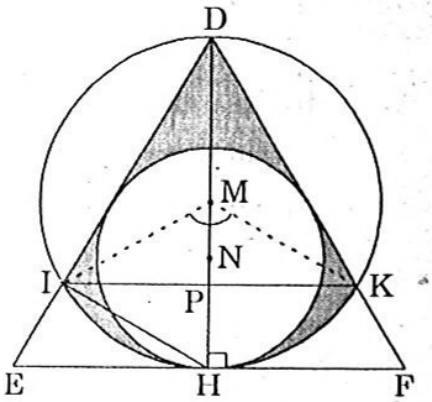
$$DI = \frac{DH\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3c}{4},$$

do đó $IN = \frac{1}{2}DI = \frac{3c}{8}$.

$$2S_{\Delta DIM} = DM.IP = \frac{c\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3c}{8} = \frac{3c^2\sqrt{3}}{32}.$$

Diện tích hình quạt MIHK là :

$$\frac{\pi.DH^2}{4}\cdot\frac{120}{360} = \frac{\pi.3c^2}{16}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi c^2}{16}.$$



H.195

Diện tích hình tròn (N) có bán kính NH bằng $\frac{1}{3}DH$ (tức là $NH = \frac{c\sqrt{3}}{6}$)

là : $\pi\left(\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{12}$.

Vậy diện tích phần tô đậm là : $\frac{3c^2\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi c^2}{16} - \frac{\pi c^2}{12} = \frac{c^2}{96}(9\sqrt{3} - 2\pi)$.

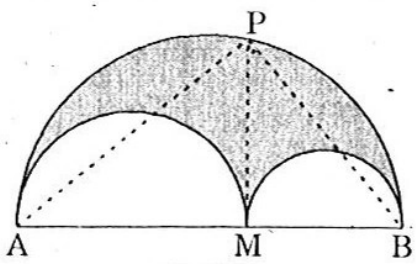
- ***Lời bình :*** Tương tự : *"Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M bất kì trên AB. Vẽ các nửa đường tròn cùng phía với nó có đường kính AM và MB.*

  *a) Tính diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn theo bán kính R của nửa đường tròn lớn nếu AM = 2MB.*

  *b) Kẻ đường vuông góc từ M với AB cắt nửa đường tròn lớn ở P, chứng minh rằng $MP^2 = AM.MB$.*

  *c) Chứng minh diện tích phần giới hạn ở câu a bằng diện tích hình tròn đường kính MP."*

Cách giải như sau (hình 196) :



H.196

a) Diện tích nửa hình tròn lớn là $\frac{\pi AB^2}{8}$,

nửa hình tròn nhỏ bên trái là $\frac{\pi AM^2}{8}$ và

nửa hình tròn nhỏ bên phải là $\frac{\pi MB^2}{8}$.

Thay AB = 2R, AM = $\frac{4R}{3}$, MB = $\frac{2R}{3}$, ta được : S phần tô đậm bằng

$$\frac{\pi}{8}.4R^2 - \left(\frac{\pi}{8}\cdot\frac{16R^2}{9} + \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi R^2}{9}\right) = \frac{\pi R^2}{8}\left(4 - \frac{16}{9} - \frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2}\left(1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2\pi R^2}{9}.$$

b) Xét tam giác vuông APB (vì $\widehat{APB} = 90^o$ do chắn nửa đường tròn) với đường cao PM ta có ngay hệ thức ($h^2 = b'c'$) : $MP^2 = AM.MB$.

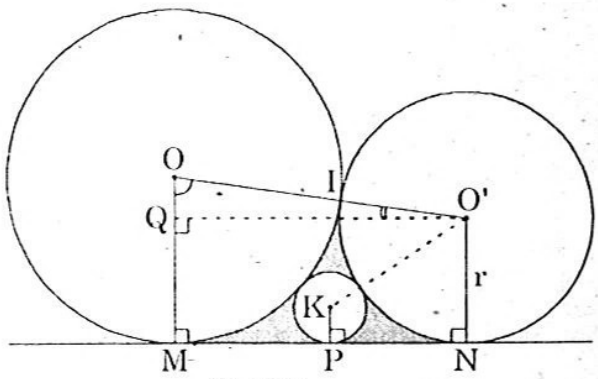
c) Diện tích hình tô đậm là :

$$\frac{\pi}{8}(AB^2 - AM^2 - MB^2) = \frac{\pi}{8}[(AM + MB)^2 - AM^2 - MB^2]$$

$$= \frac{\pi}{8}.2AM.MB,$$

mà 2AM.MB theo câu b) bằng $2MP^2$, nên diện tích hình tô đậm trở thành $\frac{\pi}{4}.MP^2$, đó chính là diện tích hình tròn đường kính MP.

**13.** a) Kẻ $O'Q \perp OM$ (hình 197).



H.197

Xét $\Delta OQO'$ vuông ta có :

$$O'Q^2 = OO'^2 - OQ^2$$
$$= (3r + r)^2 - (3r - r)^2$$
$$= (4r)^2 - (2r)^2 = 12r^2$$

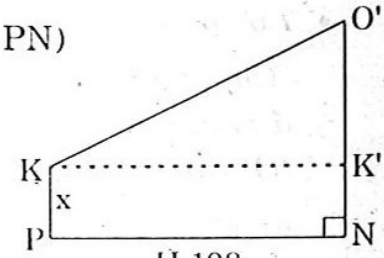
$$O'Q = 2r\sqrt{3} = MN$$

(vì OMNO' là hình chữ nhật).

Gọi x là bán kính đường tròn nhỏ (K) ta có :

$$MP + PN = MN = 2r\sqrt{3} \quad (*)$$

Ta tính PN (hình 198) bằng cách tính KK' (= PN) trong $\Delta O'K'K$ vuông :



H.198

$$KK'^2 = KO'^2 - O'K'^2$$
$$= (x + r)^2 - (r - x)^2 = 4rx.$$

Từ đó $\quad PN = 2\sqrt{rx}$.

Tương tự ta có $MP = 2\sqrt{3rx}$. Thay vào (*) được :

$$2\sqrt{rx} + 2\sqrt{3rx} = 2r\sqrt{3} \quad \text{hay} \quad \sqrt{x}(\sqrt{r} + \sqrt{3r}) = r\sqrt{3}$$

Từ đó tính được $x = \dfrac{3r^2}{(\sqrt{r} + \sqrt{3r})^2}$.

b) Diện tích hình gạch sọc bằng diện tích hình thang trừ đi diện tích một hình tròn và diện tích hai hình quạt tròn.

Để tính diện tích hình quạt tròn ta tính góc ở tâm QOO'. Xét $\Delta OQO'$ vuông tại Q ta có :

$$\sin QO'O = \frac{OQ}{OO'} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}, \text{ suy ra } \widehat{QO'O} = 30^\circ \text{ và } \widehat{QOO'} = 60^\circ.$$

$$S_{\text{quạt NOI}} = \frac{1}{3}\pi r^2; \qquad S_{\text{quạt MOI}} = \frac{1}{6}\pi(3r)^2 = \frac{3\pi r^2}{2}$$

$$S_{\text{hình thang vuông OMNO'}} = (r + 3r).\sqrt{3r^2} = 4r^2\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{hình tròn (K)}} = \pi x^2 = \left[\frac{3r^2}{(\sqrt{r} + \sqrt{3r})^2}\right]^2 = \pi\left(\frac{3r^2}{4r + 2r\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \pi\left[\frac{3r^2}{2r(2 + \sqrt{3})}\right]^2 = \pi\left[\frac{3r}{2(2 + \sqrt{3})}\right]^2 = \pi\left[\frac{3r(2 - \sqrt{3})}{2}\right]^2 = \frac{9\pi r^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2.$$

Vậy diện tích hình tô đậm phải tìm là :

$$S = S_{OMNO} - (S_{quạt\ NOI} + S_{quạt\ MOI} + S_{(K)})$$

$$= 4r^2\sqrt{3} - \left[\frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{3\pi r^2}{2} + \frac{9\pi r^2}{4}(2-\sqrt{3})^2\right]$$

$$= 4r^2\sqrt{3} - \left[\frac{11\pi r^2}{6} + \frac{63\pi r^2}{4} - 9\pi r^2\sqrt{3}\right]$$

$$= 4r^2\sqrt{3} - \frac{211\pi r^2}{12} + 9\pi r^2\sqrt{3}$$

Cuối cùng $S = \frac{r^2}{12}(48\sqrt{3} - 211\pi + 108\pi\sqrt{3})$.

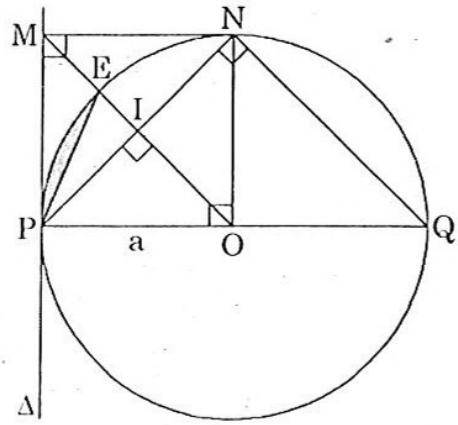
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau về tính diện tích hình viên phân :

*"Cho đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O, a) tại P và PQ là đường kính. Từ trung điểm N của nửa đường tròn ta kẻ tiếp tuyến với (O) cắt Δ ở M.*

*a) Chứng minh OM // NQ và tính OM, NQ theo a.*

*b) Gọi E là giao điểm của MO với (O), tính diện tích của viên phân giới hạn bởi cung PE và dây PE."*

Cách giải như sau (hình 199) :



H.199

a) Ta có MP = MN (tính chất hai tiếp tuyến xuất phát từ M), $\widehat{OPM} = 90^o$ vì Δ là tiếp tuyến. Từ đó tứ giác PMNO là hình thoi có góc P vuông nên là hình vuông.

Do đó hai đường chéo vuông góc tại I, suy ra MO ⊥ PN.

Lại có QN ⊥ PN (vì $\widehat{PNQ} = 90^o$). Suy ra tứ giác MOQN là hình bình hành nên hai cạnh đối MO = NQ, mà MO là đường chéo của hình vuông cạnh a bằng $a\sqrt{2}$.

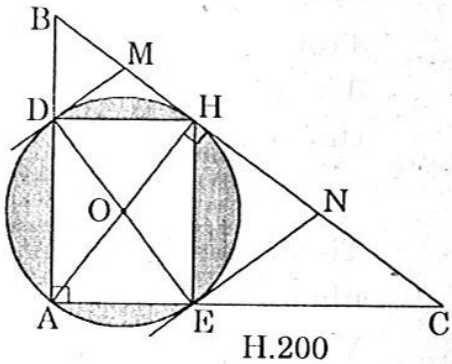
Vậy $MO = NQ = a\sqrt{2}$.

b) Diện tích viên phân tô đậm = diện tích hình quạt EOP – diện tích ΔOEP nên diện tích viên phân bằng :

$$\frac{\pi a^2.45}{360} - \frac{1}{2}IP.OE = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}).$$

**14.** a) Theo giả thiết thì BC cũng là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AH tại H (hình 200). Do đó MD = MH, NE = NH. Nối HD, HE ta được các tam giác vuông DBH và EHC mà các cạnh huyền là BH và HC.

Suy ra : MB = MH, NC = NH, tức là M là trung điểm của BH và N là trung điểm của CH.



H.200

b) DE là đường kính của đường tròn đã cho nên DM // EN, như vậy tứ giác DENM là hình thang vuông có đường cao DE = AH và tổng hai đáy

$$DM + EN = HM + HN = \frac{1}{2}BC.$$

Ta tính AH biết $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{5^2} = \frac{74}{7^2.5^2}$

từ đó $AH = \frac{35}{\sqrt{74}} = \frac{35\sqrt{74}}{74} = DE.$

Tính tiếp BC biết $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 7^2 + 5^2 = 74$

từ đó $BC = \sqrt{74} = 2(DM + EN).$

Vậy $S_{DEMN} = \frac{1}{2}DE(DM + EN) = \frac{35\sqrt{74}.\sqrt{74}}{4.74} = \frac{35}{4} = 8,75\ (cm^2).$

(*Lưu ý* : Có thể tính diện tích tứ giác DEMN bằng cách khác như sau :

Phân tích tứ giác DEMN thành : ΔDHE tương đương với ΔDAE, ΔDMH tương đương với ΔDMB và ΔENH tương đương với ΔENC. Sáu tam giác trên hợp thành ΔABC vuông tại A.

Vậy $S_{DEMN} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7.5}{2} = \frac{35}{4} = 8,75\ (cm^2).$)

c) Diện tích phần tô đậm = diện tích hình tròn (O) – diện tích tứ giác DEMN tức là :

$$S_{tô\ đậm} = S_{(O)} - S_{DEMN} = \frac{\pi AH^2}{4} - 8,75 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{7^2.5^2}{74} - 8,75$$

$$= 13 - 8,75 = 4,25\ (cm^2).$$

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Các cạnh bên của hình thang cân ABCD kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAC và PBD cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp hình thang ABCD."*

Cách giải như sau (hình 201) :

ΔAPB cân có đường cao PH là trục đối xứng của nó. Đường tròn ngoại tiếp ΔPAC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔPBD qua trục đối xứng PH.

Điểm P, giao điểm của đường tròn (PAC) với trục đối xứng, có điểm đối

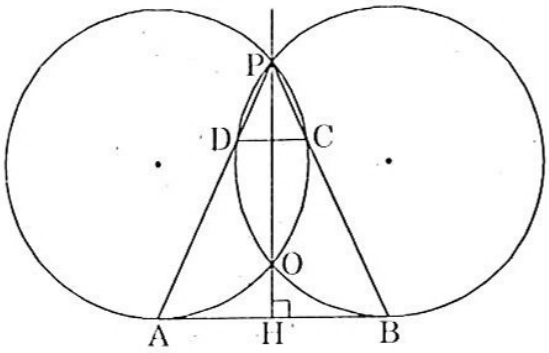
xứng là chính nó, tức là giao điểm của đường tròn (PBD) với trục đối xứng.

Trong phép đối xứng này cung OC đối xứng với cung BO. Ngoài ra cung OA bằng cung OC nên suy ra :

$$\overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{OD} = \overset{\frown}{OA} = \overset{\frown}{OB}.$$

Từ đó bốn dây tương ứng cũng bằng nhau.

Vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình thang ABCD.

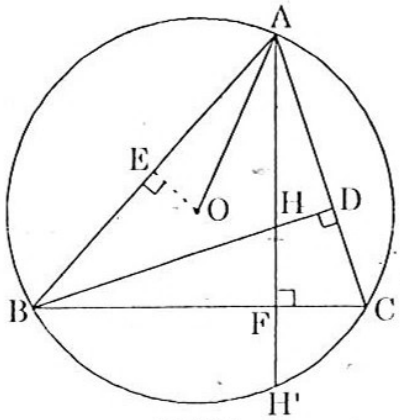


H.201

**15.** a) Ta đã biết rằng : điểm đối xứng của trực tâm một tam giác qua một cạnh nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Dựa vào điều này ta suy ra cách dựng $\Delta ABC$ như sau (hình 202) :

Gọi H' là giao điểm của AH với đường tròn (O), ta dựng trung trực của HH' cắt đường tròn tại hai điểm B và C. Ta có $\Delta ABC$ là tam giác phải dựng. Bài toán có một nghiệm hình duy nhất.



H.202

b) Kẻ đường cao BD. Từ O kẻ $OE \perp AB$. Các tam giác vuông AEO và AFC có $\widehat{EOA} = \widehat{FCA}$ (có cùng số đo bằng nửa số đo của cung AB).

Vậy $\widehat{EAO} = \widehat{DAH}$, $AO = AH = R$.

Suy ra hai tam giác vuông AEO và ADH bằng nhau.

Từ đó $AD = AE = \frac{1}{2}AB$. $\Delta ABD$ vuông có cạnh góc vuông AD bằng nửa cạnh AB nên $\widehat{A} = 60^o$. Khi H nằm ngoài đường tròn (O) thì bằng cách chứng minh tương tự ta có $\widehat{A} = 120^o$.

c) Vì $\widehat{A} = 60^o$ hoặc $120^o$ nên cạnh BC của $\Delta ABC$ có độ dài không đổi và M cách O một đoạn bằng $\frac{R}{2}$. Với mỗi điểm H thuộc đường tròn (A) có một tam giác duy nhất ABC và với mỗi tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$ hoặc $120^o$ nội tiếp trong đường tròn (O) đều có trực tâm H cách A một đoạn $OA = R$. Do đó quỹ tích của M là đường tròn tâm O, bán kính bằng $\frac{R}{2}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Cho $\Delta ABC$ có ba góc nhọn. Các đường cao xuất phát từ A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự ở $A_1$, $B_1$, $C_1$.*

*a) Qua trực tâm H kẻ đường thẳng d. Chứng minh rằng các đường*

*thẳng đối xứng của d qua các cạnh của ΔABC cắt nhau tại một điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp.*

*b) Chứng minh rằng khi đường thẳng d quay xung quanh H một góc α thì điểm M chạy trên một cung bằng 2α của đường tròn ngoại tiếp.*

*c) Tính góc BAC trong trường hợp $B_1C_1$ là một đường kính của đường tròn ngoại tiếp."*

Cách giải như sau (hình 203a) :

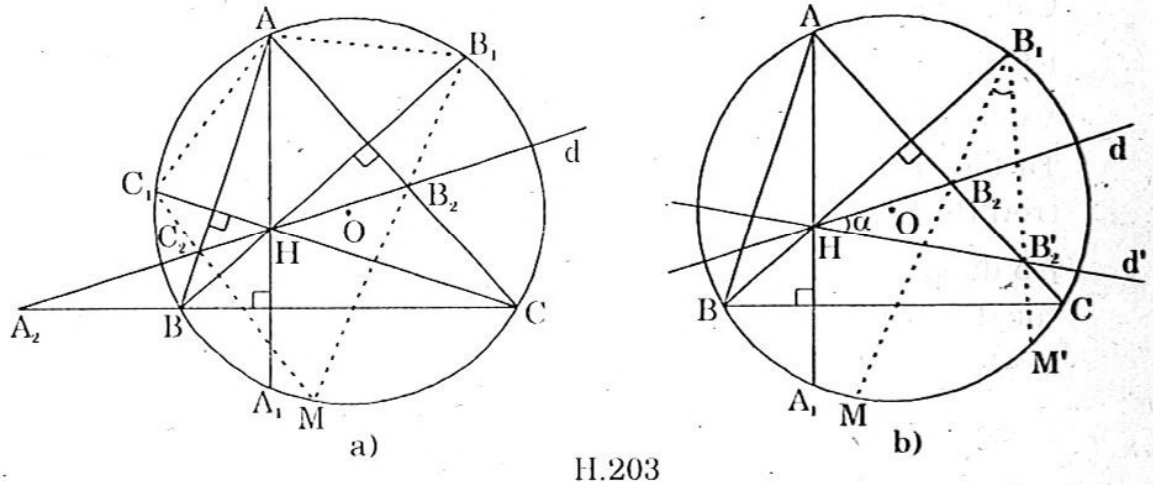
a) Gọi $A_2$, $B_2$, $C_2$ là các giao điểm của d với BC, CA, AB (hình 203a). Vì $A_1$, $B_1$, $C_1$ đối xứng với H qua BC, CA, AB nên các đường thẳng đối xứng với d trong bài ra là $B_1B_2$, $C_1C_2$, $A_1A_2$. Giả sử $B_1B_2$ và $C_1C_2$ cắt nhau tại M. Ta chứng minh rằng M nằm trên đường tròn (O).

Ta có : $\widehat{AC_1M} = \widehat{AC_1C_2} = \widehat{AHC_2}$ (đối xứng qua AB),

$\widehat{AB_1M} = \widehat{AB_1B_2} = \widehat{AHB_2}$ (đối xứng qua AC).

Vậy $\widehat{AC_1M} + \widehat{AB_1M} = \widehat{AHC_2} + \widehat{AHB_2} = 180^o$. Do đó tứ giác $C_1AB_1M$ nội tiếp được, tức là M nằm trên đường tròn (O).

Tương tự ta chứng minh được $A_1A_2$ và $B_1B_2$ cắt nhau tại một điểm M trên đường tròn ngoại tiếp tam giác.




H.203

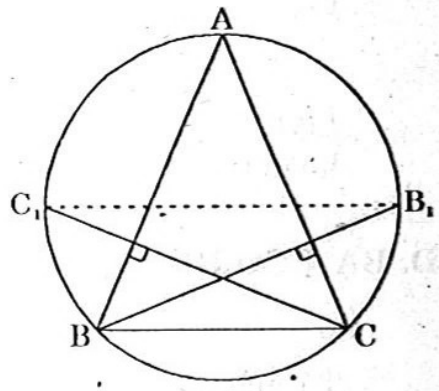
b) Lấy đường thẳng d' tạo với d một góc α (hình 203b). Gọi $B'_2$ là giao điểm của d' với AC. Giao điểm của $B_1B'_2$ với đường tròn (O) chính là điểm cắt nhau M' ứng với đường thẳng d'.

Ta có $\alpha = \widehat{B_2HB'_2} = \widehat{B_2B_1B'_2}$ (đối xứng qua AC). Vậy số đo của cung MM' bằng 2α.

c) Ta có $\widehat{ABB_1} = \widehat{ACC_1}$ (hình 204) vì cùng phụ góc A,

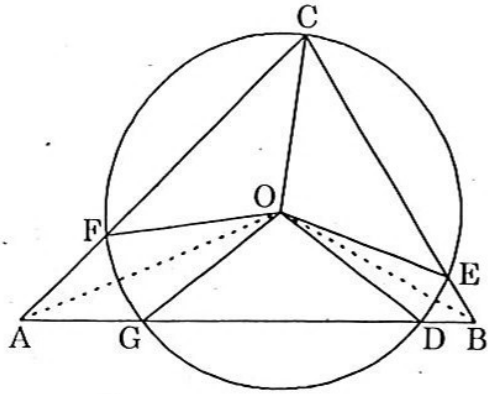
do đó $\widehat{C_1A} = \widehat{AB_1}$ và có số đo bằng $90^o$ vì $C_1B_1$ là đường kính.

Vậy $\widehat{ABB_1} = 45^o$, suy ra $\widehat{BAC} = 45^o$.




H.204

**16.** Giả sử AB là cạnh lớn nhất của ΔABC (hình 205). Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt cạnh AB tại D. Tiếp đó vẽ cung tròn tâm B bán kính BD cắt cạnh BC tại E và cung tròn tâm C bán kính CE cắt cạnh AC tại F. Cuối cùng vẽ cung tròn bán kính AF cắt AB tại G.



H.205

Ta thấy rằng năm điểm C, D, E, F, G nằm trên một đường tròn có tâm O trùng với tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Nối năm điểm này với O, rồi nối F với G, D với E ta sẽ được bảy tam giác cân, trong đó có ba tam giác bằng nhau là ΔOFC, ΔOCE và ΔOGD.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

*"Ở trong đường tròn có ngũ giác ABCDE mà tất cả các cạnh bằng nhau. Mỗi cạnh ngũ giác được kéo dài hai bên cho đến khi cắt đường tròn. Các đoạn kéo dài của các cạnh AB, BC, CD, DE, EA đó từ các điểm A, B, C, D, E được tô màu xanh. Chứng minh rằng tổng độ dài tất cả đoạn màu đỏ bằng tổng độ dài các đoạn màu xanh."*

Cách giải như sau (hình 206) :

Kí hiệu $đ_i$ là các đoạn màu đỏ, $x_i$ là các đoạn màu xanh (i = 1, 2, 3, 4, 5) và a là cạnh ngũ giác.

Ta biết rằng nếu hai dây MN và QP cắt nhau tại điểm S trong đường tròn thì SM.SN = SP.SQ.

Áp dụng vào hình vẽ, ta có thể viết dãy các đẳng thức sau :

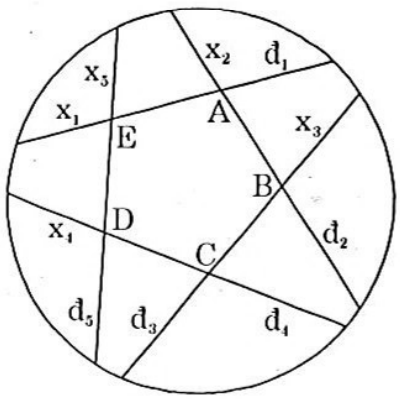
$đ_1(a + x_1) = x_2(a + đ_2)$ (đỉnh A)

$đ_2(a + x_2) = x_3(a + đ_3)$ (đỉnh B)

$đ_3(a + x_3) = x_4(a + đ_4)$ (đỉnh C)

$đ_4(a + x_4) = x_5(a + đ_5)$ (đỉnh D)

$đ_5(a + x_5) = x_1(a + đ_1)$ (đỉnh E).



H.206

Cộng từng vế 5 đẳng thức này được :

$$đ_1 + đ_2 + đ_3 + đ_4 + đ_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

*Lưu ý* : Ngũ giác có thể không lồi, một số cạnh của nó có thể cắt nhau hoặc trùng nhau.

## D. BẠN CÓ BIẾT ?

### I. TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐẶC BIỆT

Tứ giác nội tiếp đặc biệt là *tứ giác có tích các cặp cạnh đối bằng nhau.*

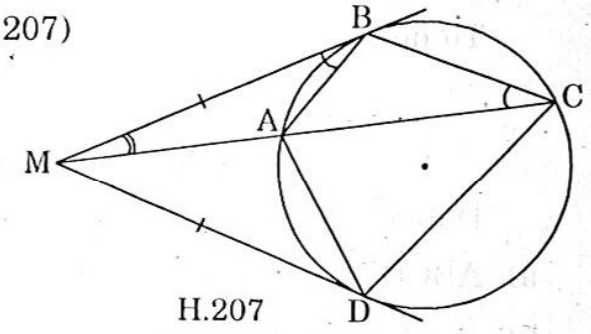
Chẳng hạn tứ giác nội tiếp ABCD mà AB.CD = AD.BC là tứ giác nội tiếp đặc biệt.

**1. *Bài toán***

Từ một điểm M ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến MB, MD và cát tuyến qua M cắt đường tròn tại A và C.

Chứng minh rằng : AB.CD = AD.BC.

**Giải** (hình 207)



H.207

Ta có $\Delta MAB \backsim \Delta MBC$

$\frac{AB}{BC} = \frac{MA}{MB}$. Tương tự $\frac{DA}{DC} = \frac{MA}{MD}$

mà MB = MD nên $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}$,

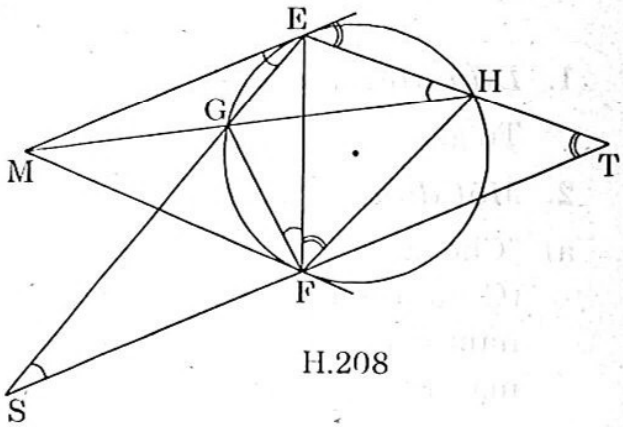
hay AB.CD = AD.BC.

Tứ giác ABCD nội tiếp này là tứ giác nội tiếp đặc biệt.

**2. *Ứng dụng***

**Ví dụ 1 :** Từ điểm M ngoài một đường tròn kẻ các tiếp tuyến ME, MF và cát tuyến MGH đến đường tròn. Qua F kẻ đường thẳng song song với ME cắt các đường thẳng EG tại S và EH tại T. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của ST.

Cách giải như sau (hình 208) :



H.208

Xét các cặp tam giác đồng dạng :

$\Delta EFS \backsim \Delta EGF$ ta có : $\frac{SF}{FE} = \frac{FG}{GE}$

$\Delta EFT \backsim \Delta EHF$ ta có : $\frac{TF}{FE} = \frac{FH}{HE}$.

Nhưng theo bài toán trên thì :

$$\frac{FG}{GE} = \frac{FH}{HE}.$$

Từ ba đẳng thức trên suy ra : $\frac{SF}{FE} = \frac{TF}{FE}$, hay SF = TF.

**Ví dụ 2 :** Cho $\Delta DEF$ nội tiếp trong đường tròn, hai tiếp tuyến tại E và F cắt nhau tại K. Kẻ dây DM // EF, đường thẳng KM cắt đường tròn tại N. Chứng minh rằng đường thẳng DN đi qua trung điểm I của EF.

Cách giải như sau (hình 209) :

Rõ ràng tứ giác DEFM là hình thang cân.

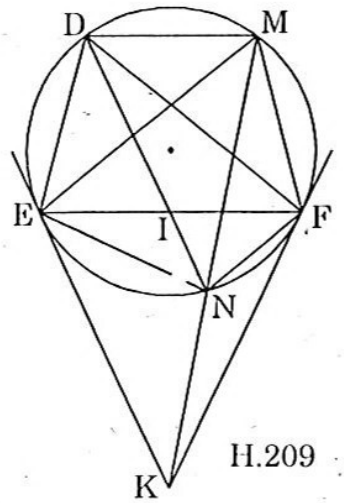
Xét cát tuyến MNK theo bài toán trên có :

$$\frac{FN}{FM} = \frac{EN}{EM} \text{ hay } \frac{FN}{DE} = \frac{EN}{DF} \quad (*)$$

$\Delta FNI \backsim \Delta DEI$ nên $\frac{IN}{IE} = \frac{FN}{DE}$

$\Delta FDI \backsim \Delta NEI$ nên $\frac{EN}{DF} = \frac{IN}{IF}$.

Từ đó cùng với (*) suy ra : $\frac{IN}{IE} = \frac{IN}{IF}$ hay IE = IF.



H.209

## II. XUNG QUANH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Đối với tứ giác ABCD cho trước, các khẳng định sau là tương đương :

a) ABCD là tứ giác nội tiếp

b) $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^o$

c) $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$

d) AC.BD = AB.CD + AD.BC (định lí Ptôlêmê)

e) MA.MC = MB.MD, trong đó M là giao điểm của AC và BD

f) H, I, K thẳng hàng, trong đó H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ D theo thứ tự xuống AB, BC, CA (đường thẳng Simson).

## III. XUNG QUANH TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP

**1. *Dấu hiệu nhận biết***

Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi AB + CD = AD + BC.

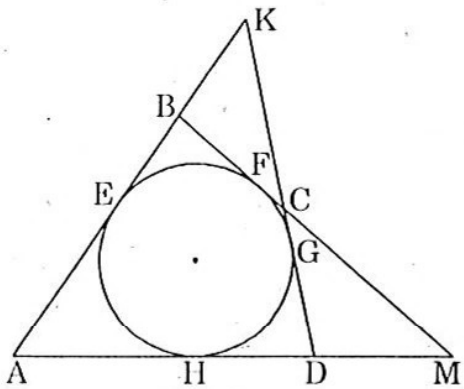
**2. *Một dấu hiệu khác***

a) "Cho tứ giác lồi ABCD mà các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại K (C nằm giữa D và K), các đường thẳng BC và AD cắt nhau tại M (C nằm giữa B và M). Khi đó tứ giác ABCD ngoại tiếp khi và chỉ khi thỏa mãn một trong hai điều kiện sau :

BK + BM = DK + DM (*)

CK + AK = AK + CD (**)."

Chứng minh : Ta chứng minh cho trường hợp (*) còn trường hợp (**) được suy ra từ (*) hoặc chứng minh tương tự.



H.210

Giả sử tứ giác ABCD ngoại tiếp và E, F, G là các tiếp điểm (hình 210) ta có

$$BK + BM = (EK - BE) + (BF + FM) = (KG - BE) + (BF + HM)$$

$$= KG + HD + DM = KG + GD + DM = DK + DM.$$

(Bạn đọc tự chứng minh điều ngược lại : giả sử có (*) thì tứ giác ABCD ngoại tiếp).

b) Ta vận dụng dấu hiệu mới này để giải bài toán sau :

"Cho D là một điểm nằm trong $\Delta ABC$. Các đường thẳng AD, BD, CD cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại X, Y, Z. Chứng minh rằng nếu hai trong ba tứ giác DYAZ, DZBX, DXCY ngoại tiếp đường tròn thì tứ giác thứ ba cũng thế."

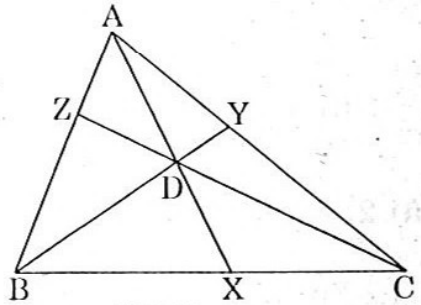
**Giải**

Giả sử hai tứ giác DZBX và DXCY ngoại tiếp (hình 211). Theo dấu hiệu mới ta có :

$$\begin{cases} AB + CD = BC + AD \\ BC + AD = AC + BD \end{cases}$$

Từ đó $AB + CD = AC + BD$.

Suy ra tứ giác DYAZ ngoại tiếp.



H.211

# §16. PHẤN ĐẤU GIẢI NHANH 10 BÀI TOÁN ÔN TẬP ĐẠI VÀ HÌNH

## A. ĐỀ BÀI

### ĐẠI SỐ

**Bài 1.** Chứng tỏ các biểu thức sau không phụ thuộc các ẩn x hoặc y :

a) $\left[\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x}{x^2+2x+1}\right):\dfrac{2x^2+3x}{x+1}+\dfrac{3}{x+1}\right]\cdot\dfrac{x^2+x}{3x+1}$

b) $\left(\dfrac{1+y}{y}+\dfrac{1}{4y^2}\right)\left(\dfrac{1-2y}{1+2y}-\dfrac{1}{1-4y^2}\cdot\dfrac{1-4y+4y^2}{1+2y}\right)-\dfrac{1}{2y}$.

**Bài 2.**

1. Xét biểu thức : $M=\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}+1}-\dfrac{2\sqrt{t}-2}{t\sqrt{t}-\sqrt{t}+t-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}-1}-\dfrac{2}{t-1}\right)$.

   a) Rút gọn M.

   b) Với giá trị nào của t thì M đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

2. Cho hai bất phương trình $3az-2a>z+1$ và $a-2z<0$. Tìm a để hai bất phương trình trên có cùng một tập nghiệm.

**Bài 3.**

1. a) Tính $\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{108}$.

   b) Cho $A=\dfrac{\sqrt{(y-1)^2}-1}{y-2}$. Rút gọn A và tìm giá trị của A khi $y=5\sqrt{2}$.

2. Cho parabol $y=x^2$ và đường thẳng $y=2(a+1)x-2a+4$.

   a) Chứng minh rằng parabol và đường thẳng luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi a.

   b) Chứng minh biểu thức $P=x_1\left(1-\dfrac{x_2}{2}\right)+x_2\left(1-\dfrac{x_1}{2}\right)$ không phụ thuộc vào a, trong đó $x_1$, $x_2$ là hoành độ các giao điểm của parabol và đường thẳng đã cho.

**Bài 4.**

1. Cho biểu thức $P=\dfrac{|p|}{1+\sqrt{1-|p|}}$.

   a) Tìm p để P có nghĩa.

   b) Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P.

2. Một người dự định sản xuất 120 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do tăng năng suất 4 sản phẩm mỗi giờ, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 1 giờ. Tính năng suất dự kiến của người đó.

3. Tìm giá trị của z sao cho $\sqrt{z+2\sqrt{z-1}}+\sqrt{z-2\sqrt{z-1}}=2$.

**Bài 5.**

1. Cho biểu thức : $P=\left(\dfrac{p-3\sqrt{p}}{p-9}-1\right):\left[\dfrac{9-p}{(\sqrt{p}+3)(\sqrt{p}-2)}+\dfrac{\sqrt{p}-3}{\sqrt{p}-2}-\dfrac{\sqrt{p}+2}{\sqrt{p}+3}\right]$.

   a) Rút gọn P.

   b) Tìm giá trị của p để hiệu $P-1<0$.

2. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\dfrac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc thêm 10km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

3. Tìm cặp số (a, b) thỏa mãn đẳng thức $a^2b+2ab-4a+b=0$ sao cho b đạt giá trị lớn nhất.

## HÌNH HỌC

**Bài 1.** Cho hình vuông ABCD cố định cạnh a. Gọi E là điểm chuyển động trên đoạn CD (E khác D), đường thẳng AE cắt BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a) Chứng minh $\Delta ABF=\Delta ADK$, suy ra $\Delta AFK$ vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của FK, chứng minh I là tâm đường tròn qua A, C, F, K và I chuyển động trên một đường thẳng cố định khi E chuyển động trên CD.

c) Tính số đo góc AIF, suy ra 4 điểm A, B, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

d) Đặt $DE=x$ $(a\geq x>0)$, tính độ dài các cạnh của $\Delta AEK$ theo a và x.

e) Hãy chỉ ra vị trí của E sao cho độ dài EK ngắn nhất và chứng minh điều đó.

**Bài 2.** Cho đường tròn (O, r) đường kính AB và dây $CD\perp AB$ $(AC<CB)$. Hai tia BC và DA cắt nhau tại E. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ E tới đường thẳng AB. Chứng minh :

a) Tứ giác AHEC nội tiếp trong một đường tròn, tìm tâm I và bán kính đường tròn đó.

b) HC = HF, trong đó F là giao điểm của hai tia EH và CA.

c) HC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) BC.BE = BA.BH. Tính BC.BE theo r biết $\widehat{ABC}=30^\circ$.

**Bài 3.** Cho đường tròn (O, r) và dây cung AB (AB < 2r). Trên AB lấy điểm C sao cho AC > AB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại P và K. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác CPIK nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh hai tam giác ACP và PCB là đồng dạng. Từ đó suy ra $CP^2 = CB.CA$.

c) Gọi H là trực tâm của ΔCPK, tính PH theo r.

d) Giả sử PA // CK, chứng minh tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP.

**Bài 4.** Cho M là điểm bất kì trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R (M không trùng với A, B). Vẽ các tiếp tuyến Ax, By, Mz của nửa đường tròn đó. Đường Mz cắt Ax và By lần lượt tại N và P. Đường thẳng AM cắt By tại C và đường thẳng BM cắt Ax tại D. Chứng minh :

a) Tứ giác AOMN nội tiếp một đường tròn và NP = AN + BP.

b) N và P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD và BC.

c) $AD.BC = 4R^2$.

d) Xác định vị trí của M để tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất.

**Bài 5.** Cho đường tròn (O, R) và một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

a) Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác $\widehat{BMD}$.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vị trí điểm M.

c) Tia DA cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

d) Chứng minh tích P = AE.AF không đổi khi M di động. Tính P theo bán kính R và $\widehat{ABC} = \alpha$.

## B. GIẢI

### ĐẠI SỐ

**Bài 1.**

a) Biểu thức có dạng $[A].\dfrac{x^2 + x}{3x + 1}$. Ta tính A :

$$A = \frac{3(x+1) - x}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x(2x+3)} + \frac{3}{x+1} = \frac{2x+3}{(x+1)x(2x+3)} + \frac{3}{x+1}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{3x}{x(x+1)} = \frac{1+3x}{x(x+1)}$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành :

$$\frac{1+3x}{x(x+1)}\cdot\frac{x^2+x}{3x+1}=\frac{x^2+x}{x^2+1}=1,$$ không phụ thuộc ẩn x.

b) Biểu thức có dạng (M).(N) – $\frac{1}{2y}$. Ta tính M và N :

$$M=\frac{4y(1+y)+1}{4y^2}=\frac{4y+4y^2+1}{4y^2}=\frac{(2y+1)^2}{4y^2}$$

$$N=\frac{1-2y}{1+2y}-\frac{(1-2y)^2}{1+2y}\cdot\frac{1}{(1+2y)(1-2y)}=\frac{1-2y}{1+2y}-\frac{1-2y}{(1+2y)^2}$$

$$=\frac{(1-2y)(1+2y)-(1-2y)}{(1+2y)^2}=\frac{(1-2y)(1+2y-1)}{(1+2y)^2}=\frac{2y(1-2y)}{(1+2y)^2}$$

$$M.N=\frac{(2y+1)^2}{4y^2}\cdot\frac{2y(1-2y)}{(1+2y)^2}=\frac{1-2y}{2y}.$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành :

$$\frac{1-2y}{2y}-\frac{1}{2y}=\frac{-2y}{2y}=-1,$$ không phụ thuộc ẩn y.

**Bài 2.**

1.a) Điều kiện tồn tại của M : $t \geq 0$, $t \neq 1$. Ta có :

$$M=\left[\frac{1}{\sqrt{t}+1}-\frac{2\sqrt{t}-2}{(\sqrt{t}+1)(t-1)}\right]:\frac{\sqrt{t}+1-2}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}$$

$$=\frac{t-1-2\sqrt{t}+2}{(\sqrt{t}+1)(t-1)}\cdot\frac{t-1}{\sqrt{t}-1}=\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{(\sqrt{t}+1)(\sqrt{t}-1)}=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}.$$

b) $$M=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}=\frac{\sqrt{t}+1-1-1}{\sqrt{t}+1}=\frac{\sqrt{t}+1-2}{\sqrt{t}+1}=1-\frac{2}{\sqrt{t}+1}.$$

M có giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{t}+1$ nhỏ nhất. Do $t \geq 0$ nên $\sqrt{t} \geq 0$, từ đó $\sqrt{t}+1 \geq 1$, giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{t}+1=1$ khi đó $t=0$.

Vậy khi $t=0$ thì M có giá trị nhỏ nhất bằng –1.

2. Ta giải từng bất phương trình :

Với $3az-2a>z+1$ (1), khi $a>\frac{1}{3}$ thì $z>\frac{2a+1}{3a-1}$.

Với $a-2z<0$ (2) thì $z>\frac{a}{2}$.

(Lưu ý rằng nếu $a<\frac{1}{3}$ thì nghiệm của (1) là $z<\frac{2a+1}{3a-1}$, do đó (1) và (2) không thể có cùng tập nghiệm).

Hai bất phương trình đã cho có cùng tập nghiệm khi và chỉ khi $a > \frac{1}{3}$

và $\frac{a}{2} = \frac{2a+1}{3a-1}$ (*). Giải (*) được $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{1}{3}$ (loại).

Vậy với a = 2 thì hai bất phương trình đã cho có cùng một tập nghiệm.

**Bài 3.**

1.a) Ta có $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{108} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b) $A = \frac{\sqrt{(y-1)^2} - 1}{y-2} = \frac{|y-1| - 1}{y-2}$.

Nếu $y \geq 1$ và $y \neq 2$ thì A = 1.

Nếu $y < 1$ thì $A = \frac{y}{2-y}$.

Do $y = 5\sqrt{2} > 1$ nên ta có ngay giá trị của A bằng 1.

2.a) Parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi a nếu phương trình $x^2 - 2(a+1)x + 2a - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt với mọi a. Rõ ràng $\Delta' = a^2 + 5 > 0$ với mọi a.

b) Biểu thức P có thể viết :

$$P = x_1 - \frac{x_1x_2}{2} + x_2 - \frac{x_1x_2}{2} = x_1 + x_2 - x_1x_2$$

$$= 2(a+1) - 2a + 4 = 6, \text{ không phụ thuộc vào a.}$$

**Bài 4.**

1.a) Điều kiện để biểu thức P có nghĩa là $\begin{cases} 1 + \sqrt{1-|p|} \neq 0 \\ 1 - |p| \geq 0 \end{cases}$.

Giải ra được $-1 \leq p \leq 1$.

b) Ta biến đổi P như sau :

$$P = \frac{|p|}{1+\sqrt{1-|p|}} = \frac{|p|.(1-\sqrt{1-|p|})}{1-(1-|p|)} = 1 - \sqrt{1-|p|}, \text{ với } |p| \geq 0.$$

Do $0 \leq |p| \leq 1$ hay $0 \geq -|p| \geq -1$ nên $1 \geq 1 - |p| \geq 0$.

Suy ra $1 \geq \sqrt{1-|p|} \geq 0$, từ đó $-1 \leq -\sqrt{1-|p|} \leq 0$, hay $0 \leq 1 - \sqrt{1-|p|} \leq 1$, tức là $0 \leq P \leq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0 khi $1 = \sqrt{-1|p|}$, hay p = 0, giá trị lớn nhất của P là 1 khi $1 - \sqrt{1-|p|} = 1$ hay $|p| = 1$, $p = \pm 1$.

2. Gọi x là năng suất dự kiến của người đó (x > 0).

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} = 1$.

Sau khi quy đồng mẫu rồi khử mẫu được : $120(x + 4) - 120x = x(x + 4)$

Từ đó ta được phương trình bậc hai $x^2 + 4x - 480 = 0$ mà nghiệm là $x = 20$ và $x = -24$ (loại nghiệm âm).

Vậy năng suất dự kiến là 20 sản phẩm.

3. Với điều kiện $z \geq 1$, phương trình đã cho có thể viết :

$$\sqrt{z-1} + 1 + \left|\sqrt{z-1} - 1\right| = 2, \text{ hay } \sqrt{z-1} + \left|\sqrt{z-1} - 1\right| = 1.$$

Từ đó : $\left|\sqrt{z-1} - 1\right| = 1 - \sqrt{z-1} = -(\sqrt{z-1} - 1)$ (*)

Ta biết rằng vì $|A| = -A$ khi và chỉ khi $A \leq 0$ nên từ (*) ta có :

$$\sqrt{z-1} - 1 \leq 0 \text{ hay } \sqrt{z-1} \leq 1.$$

Từ đó $0 \leq z - 1 \leq 1$, hay $1 \leq z \leq 2$. Vậy giá trị của z cần tìm là $1 \leq z \leq 2$.

**Bài 5.**

1.a) Điều kiện : $p > 0$, $p \neq 4$, $p \neq 9$. Ta có :

$$P = \frac{p - 3\sqrt{p} - p + 9}{p - 9} : \frac{9 - p + (\sqrt{p} - 3)(\sqrt{p} + 3) - (\sqrt{p} + 2)(\sqrt{p} - 2)}{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}$$

$$= \frac{9 - 3\sqrt{p}}{p - 9} \cdot \frac{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}{9 - p + p - 9 - p + 4} = \frac{9 - 3\sqrt{p}}{p - 9} \cdot \frac{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}{4 - p}$$

$$= \frac{3(3 - \sqrt{p})}{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 3)} \cdot \frac{(\sqrt{p} + 3)(\sqrt{p} - 2)}{(2 + \sqrt{p})(2 - \sqrt{p})} = \frac{3}{2 + \sqrt{p}}.$$

b) Hiệu $P - 1 = \frac{3}{2 + \sqrt{p}} - 1 < 0$,

hay $\frac{3}{2 + \sqrt{p}} < 1$; $2 + \sqrt{p} > 3$ (vì $2 + \sqrt{p} > 0$). Suy ra $\sqrt{p} > 1$, tức là $p > 1$ (trừ các giá trị $p = 4$ và $p = 9$).

Vậy để hiệu $P - 1 < 0$ thì $p > 1$ (trừ $p = 4$, $p = 9$).

2. Gọi vận tốc dự định là x km/h ($x > 0$).

Thời gian dự định là $\frac{120}{x}$, thời gian đi $\frac{1}{3}$ quãng đường đầu là $\frac{40}{x}$, thời gian đi $\frac{2}{3}$ quãng đường cuối là $\frac{80}{x + 10}$.

Theo bài ra ta có phương trình :

$$\frac{120}{x} - \frac{2}{5} = \frac{40}{x} + \frac{80}{x + 10} \quad \text{(đổi 24 phút} = \frac{2}{5} \text{ giờ).}$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu và làm phép tính được phương trình bậc hai

$$x^2 + 10x - 2000 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 40$, $x_2 = -50$ (loại).

Vậy vận tốc dự định là 40km/h và thời gian thực đi là $2\frac{3}{5}$h, tức là 2 giờ 36 phút.

3. Coi a là ẩn, đẳng thức đã cho trở thành một phương trình bậc hai ẩn a :

$$ba^2 - 2(2 - b)a + b = 0 \qquad (*)$$

Nếu b = 0 thì a = 0, ta có cặp số (0; 0) thỏa mãn (*).

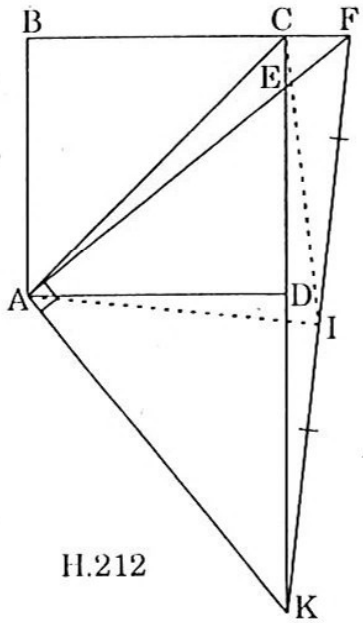
Nếu $b \neq 0$ thì muốn phương trình bậc hai (*) có nghiệm ta phải có $\Delta' \geq 0$, tức là $(2 - b)^2 - b^2 = 4 - 4b \geq 0$, từ đó $b \leq 1$.

Suy ra giá trị lớn nhất của b bằng 1 khi phương trình (*) có nghiệm kép a = 1. Cặp số cần tìm là (1; 1).

Vậy chỉ có một cặp số (1; 1) thỏa mãn bài ra.

## HÌNH HỌC

**Bài 1.**



H.212

a) Ta có $\Delta ABF = \Delta ADK$ (g.c.g) (hình 212) vì có $\hat{B} = \hat{D} = 90^o$, AB = AD, $\widehat{BAF} = \widehat{DAK}$ (vì cùng phụ với $\widehat{FAD}$). Suy ra AF = AK.

$\Delta AFK$ có $\widehat{FAK} = 90^o$ (vì $EA \perp AK$) và AF = AK nên là tam giác vuông cân.

b) I là trung điểm của FK nên AI là trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông AFK, suy ra IA = IF = IK.

Tương tự CI là trung tuyến của tam giác vuông CFK nên IC = IF = IK. Như vậy IF = IK = IA = IC, chứng tỏ rằng I là tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, C, F, K.

Điểm I có tính chất là cách đều hai điểm cố định A và C của hình vuông ABCD nên I phải nằm trên trung trực đoạn AC, chính là nằm trên BD. Vậy khi E chuyển động trên CD (E khác D) thì I chuyển động trên đường thẳng cố định BD.

c) $\Delta AFK$ vuông cân có AI là trung tuyến nên cũng là đường cao, suy ra $\widehat{AIF} = 90^o$. Tứ giác ABFI có $\widehat{ABF} + \widehat{AIF} = 180^o$ nên nội tiếp được. Vậy bốn điểm A, B, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

d) Tam giác vuông AEK có AD là đường cao nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông có :

$$AD^2 = DE.DK, \text{ suy ra } DK = \frac{AD^2}{DE} = \frac{a^2}{x}$$

$$EK = DE + DK = x + \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

Từ đó : $AE^2 = AD^2 + DE^2 = a^2 + x^2$, suy ra $AE = \sqrt{x^2 + a^2}$

$$AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2} = \frac{a^2(x^2 + a^2)}{x^2},$$

suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$.

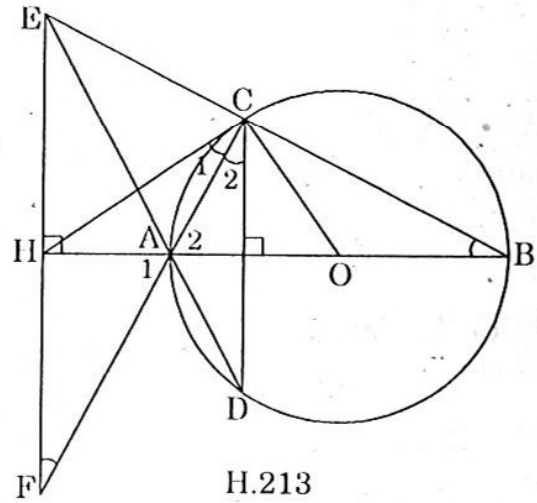
e) Biết $EK = \dfrac{x^2 + a^2}{x}$ với $0 < x \le a$, ta gọi $a = x + b$ $(b \ge 0)$ thì :

$$EK = \frac{x^2 + (x + b)^2}{x} = \frac{x^2 + x^2 + 2bx + b^2}{x} = \frac{2x^2 + 2bx + b^2}{x}$$

$$= \frac{2x(x + b)}{x} + \frac{b^2}{x} = 2a + \frac{b^2}{x}.$$

Vậy EK nhỏ nhất khi $\dfrac{b^2}{x} = 0$, hay $b = 0$, tức là $x = a$ và $ED = CD$ hay E trùng với C.

**Bài 2.**



H.213

a) Ta có $\widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (hình 213). Tứ giác AHEC có :

$$\widehat{EHA} + \widehat{ECA} = 90^o + 90^o = 180^o$$

nên nội tiếp được trong một đường tròn có tâm I là trung điểm của EA và bán kính bằng $\dfrac{1}{2}EA$.

b) Ta có EH // EF vì cùng vuông góc với AB, do đó $\widehat{C}_2 = \widehat{F}$ (so le trong). Lại có $\widehat{B} = \widehat{C}_1$ (cùng chắn cung AC) và $\widehat{B} = \widehat{C}_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Suy ra $\widehat{F} = \widehat{C}_1$. Vậy $\Delta HFC$ cân, do đó HC = HF.

c) Do $\Delta OAC$ cân nên $\widehat{A}_2 = \widehat{ACO}$, mà $\widehat{A}_2 + \widehat{B} = 90^o$. Suy ra :

$\widehat{ACO} + \widehat{B} = 90^o$, nhưng $\widehat{B} = \widehat{C}_1$ (câu b), do đó $\widehat{C}_1 + \widehat{ACO} = 90^o$, tức là $\widehat{HCO} = 90^o$. Vậy HC là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C.

d) Hai tam giác vuông BCA và BHE có $\widehat{B}$ chung nên đồng dạng.

Suy ra : $\frac{BC}{BA} = \frac{BH}{BE}$, hay BC.BE = BA.BH.

Ta có $\hat{B}_1 = 30^o$ (gt) nên $\widehat{AOC} = 60^o$, suy ra $\widehat{CHA} = 30^o = \hat{C}_1$ và $\Delta AHC$ cân tại A.

Xét $\Delta AHC$ cân ta có AH = AC = r.

Suy ra BH = 3r và BE = $2r\sqrt{3}$, mà BC = $r\sqrt{3}$.

Vậy tích BC.BE = $2r\sqrt{3}.r\sqrt{3} = 6r^2$.

*Lưu ý :* Có thể tính trực tiếp

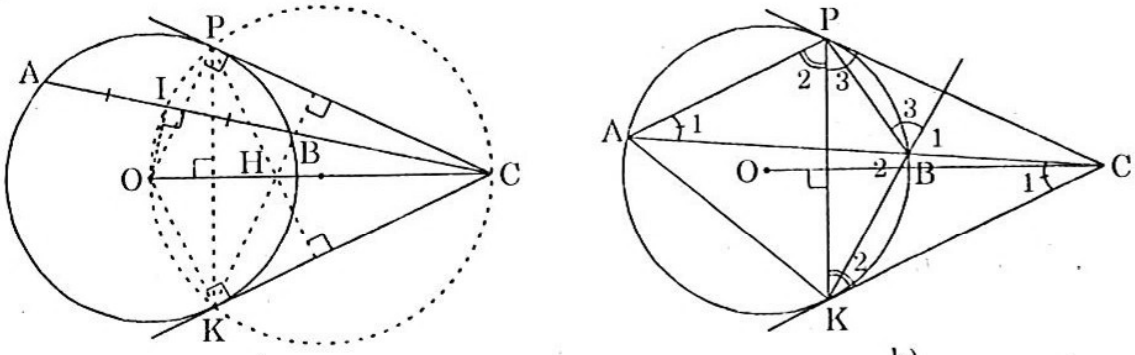
BA = 2r, BH = 3r $\Rightarrow$ BA.BH = BC.BE = $6r^2$.

**Bài 3.**

a) Các góc tại P, K đều vuông góc nên tứ giác CPIK nội tiếp được trong đường tròn (hình 214a).

b) Ta có $\Delta ACP \backsim \Delta PCB$ vì có góc C chung và $\widehat{PAC} = \widehat{BPC}$ (cùng chắn cung PB).

Suy ra : $\frac{CP}{CB} = \frac{CA}{CP}$, hay $CP^2$ = CB.CA.




H.214

c) Xét đường tròn đường kính OC đi qua P, K, I.

Ta có KH ⊥ PC, OP ⊥ PC, suy ra OP // KH.

Tương tự : PH ⊥ KC, OK ⊥ KC, suy ra OK // PH.

Vậy OPHK là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi. Do đó OP = OK = KH = PH = r.

d) Ta có AP // CK (gt) suy ra $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$.

Lại có $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (đối đỉnh) = $\hat{P}_2$ (góc nội tiếp),

mà $\hat{P}_2 + \hat{P}_3 = \widehat{APC} = \widehat{PBC}$ (do câu b) = $\hat{B}_1 + \hat{B}_3$.

Suy ra $\hat{P}_3 = \hat{B}_3$. Chỉ còn phải chứng minh $\hat{P}_2 = \hat{P}_3$ (tức là $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$)

Thật vậy (hình 214b), AP // CK nên $\hat{P}_2 = \hat{K}_2$ (so le trong) mà $\hat{K}_2 = \hat{P}_3$ ($\Delta CPK$ cân). Suy ra $\hat{P}_2 = \hat{P}_3$.

**Bài 4.**

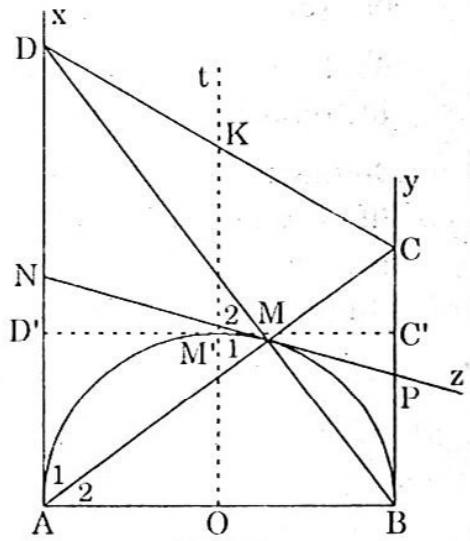
a) Ta có OA ⊥ Ax, OM ⊥ Mz vì Ax và Mz là tiếp tuyến (hình 215).

Suy ra $\widehat{NAO} + \widehat{NMO} = 180^o$. Vậy tứ giác AOMN nội tiếp được đường tròn.

Ngoài ra NA = NM, PB = MP (tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm) nên :

$$NA + PB = NM + MP$$

hay $NP = AN + BP$.



H.215

b) Theo câu a thì MN = NA (1)

Vì $\widehat{AMB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{AMD} = 90^o$.

Trong tam giác vuông MDA ta có :

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 90^o,\ \widehat{D} + \widehat{A}_1 = 90^o \text{ mà } \widehat{A}_1 = \widehat{M}_1 \text{ suy ra } \widehat{D} = \widehat{M}_2,$$

do đó ΔNMD cân, do đó MN = ND (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN = NA = ND hay N là trung điểm của AD.

Chứng minh tương tự có P là trung điểm của BC.

c) ΔABD ∽ ΔBCA (vì là tam giác vuông có $\widehat{D} = \widehat{A}_2$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Từ đó : $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BA}$, hay $AB^2 = 4R^2 = AD.BC$.

d) Ta có ABCD là hình thang vuông. Qua O kẻ Ot ⊥ AB cắt (O) tại M' là điểm chính giữa cung AB và cắt DC tại K. Diện tích hình thang vuông là : $S = \frac{AD + BC}{2}.AB = OK.AB$ (3)

Qua M' kẻ tiếp tuyến M'z' với (O), cắt Ax, By tại D', C'. Khi đó hình thang vuông trở thành hình chữ nhật ABC'D' và S' = OM'.AB (4)

Ta thấy ngay rằng : với mọi điểm M ≠ M' thì K luôn nằm ngoài (O), do đó OM' = R < OK nên từ (3) và (4) có S' < S.

Trên (O) thì điểm M' là duy nhất. Vậy khi M là điểm chính giữa nửa đường tròn (O) thì hình thang vuông ABCD sẽ trở thành hình chữ nhật và khi đó nó có diện tích nhỏ nhất.

**Bài 5.**

a) Tứ giác AMCB nội tiếp (O) nên $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (1) vì cùng bù với $\widehat{AMC}$ (hình 216). Do A là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$, suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ (2)

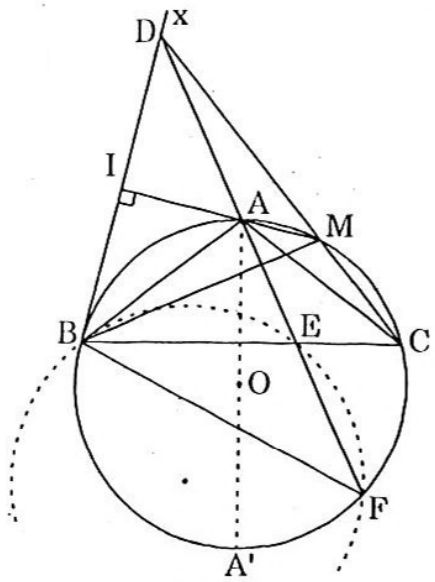
Từ (1) và (2) có $\widehat{AMD} = \widehat{AMB}$, do đó MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.

b) $\Delta BMD$ có MI là đường cao vừa là phân giác nên $\Delta BMD$ cân, do đó MI là trung trực của BD, suy ra AD = AB (3)

Vì $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ nên AB = AC (4)

Từ (3) và (4) suy ra AB = AC = AD nên A là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta DBC$.

Đường tròn ngoại tiếp $\Delta DBC$ cố định vì điểm A cố định và có bán kính AB không đổi, do đó góc BDC có độ lớn không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cung nhỏ AC.



H.216

c) Ta có : $sd\widehat{ABC} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC}$, $sd\widehat{BFA} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB}$

mà $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$, vậy $\widehat{ABC} = \widehat{BFA}$, suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BEF$.

d) $\Delta ABE \backsim \Delta AFB$ (vì có $\widehat{BAE}$ chung và $\widehat{ABE} = \widehat{BFA}$), suy ra :

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} \text{ hay } AE.AF = AB^2.$$

Do AB có độ dài không đổi nên $AB^2$ cũng không đổi, do đó $P = AE.AF = AB^2$ không đổi khi M di động trên cung nhỏ AC.

Kẻ đường kính AA', trong $\Delta ABA'$ vuông tại B ta có :

$\widehat{BA'A} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\widehat{ABC} = \alpha = \widehat{BFA}$ (gt và chứng minh trên)

do đó $\widehat{BA'A} = \alpha$.

Vậy $AB = AA'\sin\alpha$ nên $P = AB^2 = (2R)^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\alpha$.

# MỤC LỤC