

LÊ HẢI CHÂU
NGUYỄN XUÂN QUỲ

Cách tìm lời giải CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP I

SỐ HỌC



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU – NGUYỄN XUÂN QUỲ

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP 1
SỐ HỌC

In lần thứ hai

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI-2001

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc NGUYỄN VĂN THỎA

Tổng biên tập NGUYỄN THIÊN GIÁP

Biên tập và sửa bản in: TUÔNG GIANG – LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: TRẦN TIỂU LÂM

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS. TẬP 1: SỐ HỌC

Mã số : 01.106.ĐH2000 - 746.2000

In 1000 cuốn, tại Nhà in Khoa học Kỹ thuật

Số xuất bản: 42/746/CXB. Số trích ngang 47 KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý I/2001

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là bộ sách về *phương pháp học giải toán* nhằm mục đích hình thành cho học sinh thói quen suy nghĩ và tìm tòi lời giải của một bài toán trên cơ sở các kiến thức đã học. Bộ sách này là cầu nối giữa lí thuyết và thực hành toán học.

Học giải toán là một cách tư duy sáng tạo về toán, đồng thời là một vấn đề trừu tượng và khá khó đối với học sinh, nhưng đó lại là điều rất cần thiết cho mỗi học sinh trong quá trình học toán ở trường THCS.

Bộ sách "Cách tìm lời giải các bài toán" gồm 3 tập SỐ HỌC, ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC. Đây là tập đầu tiên về số học trong bộ sách này.

Mỗi tập giới thiệu các trọng điểm về toán đều có hai nội dung chính:

1) Các bài toán điển hình, mỗi bài toán đều gồm :

- Đề bài
- Tìm hiểu đề bài
- Hướng dẫn cách tìm lời giải
- Cách giải
- Khai thác bài toán

2) Các bài toán tự giải

*

* *

Các vị phụ huynh học sinh, các thầy cô giáo có thể dùng bộ sách này làm tài liệu hướng dẫn con em mình học tập. Hy vọng rằng bộ sách sẽ giúp ích nhiều cho học sinh để có thể phát huy nội lực trong giải toán nói riêng và học toán nói chung.

CÁC TÁC GIẢ

I. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

(TẬP HỢP N)

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Cho ba tập hợp $P = \{p, q, r\}$, $Q = \{r, u, v\}$ và $R = \{p, s, t\}$. Dùng kí hiệu $\in$ và $\notin$ để ghi các phần tử :

- a) thuộc P mà không thuộc Q , thuộc Q mà không thuộc P ;
- b) thuộc P mà không thuộc R , thuộc R mà không thuộc P ;
- c) thuộc Q mà không thuộc R , thuộc R mà không thuộc Q .

• Tìm hiểu đề bài

Kí hiệu $\in$ đọc là "thuộc" và kí hiệu $\notin$ đọc là "không thuộc". Bài ra có 3 câu hỏi, mỗi câu hỏi có hai phần, phần sau ngược với phần trước, chẳng hạn $\in P$ mà $\notin Q$ (phần đầu), $\in Q$ mà $\notin P$ (phần sau).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Mỗi tập hợp đã cho đều có ba phần tử, để trả lời câu hỏi a chẳng hạn cần xem các phần tử của P và của Q là những phần tử nào, từ đó viết được những phần tử nào thuộc P mà không thuộc Q , rồi đến những phần tử nào thuộc Q mà không thuộc P . Cũng làm như vậy đối với hai câu hỏi b và c.

• Cách giải

- a) Các phần tử thuộc P mà không thuộc Q là :

$$p \in P, q \in P \text{ và } p \notin Q, q \notin Q$$

Các phần tử thuộc Q mà không thuộc P là :

$$u \in Q, v \in Q \text{ và } u \notin P, v \notin P.$$

b) Các phần tử thuộc P mà không thuộc R là :

$$q \in P, r \in P \text{ và } q \notin R, r \notin R.$$

Các phần tử thuộc R mà không thuộc P là :

$$s \in R, t \in R \text{ và } s \notin P, t \notin P.$$

c) Các phần tử thuộc Q mà không thuộc R là :

$$r \in Q, u \in Q, v \in Q \text{ và } r \notin R, u \notin R, v \notin R.$$

Các phần tử thuộc R mà không thuộc Q là :

$$p \in R, s \in R, t \in R \text{ và } p \notin Q, s \notin Q, t \notin Q.$$

● Khai thác bài toán

Ta có thể đổi đề bài như sau :

Dùng các kí hiệu $\in$ và $\notin$ để ghi các phần tử :

- vừa thuộc P , vừa thuộc Q
- vừa thuộc P vừa thuộc R
- vừa thuộc Q vừa thuộc R .

Nếu thế thì cách giải như sau :

- $r \in P, r \in Q$, tức là r vừa thuộc P vừa thuộc Q ;
- $p \in P, p \in R$, tức là p vừa thuộc P vừa thuộc R ;
- không có phần tử nào vừa thuộc Q vừa thuộc R .

Ngoài ra cũng không có phần tử nào thuộc cả ba tập hợp P, Q, R .

Bài 2

Viết tập hợp các số tự nhiên lẻ lớn hơn 8 nhưng bé hơn 16 theo hai cách và minh họa bằng hình vẽ.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra có hai yêu cầu : viết tập hợp các số và minh họa bằng hình vẽ. Yêu cầu thứ nhất nêu rõ là viết tập hợp các số lẻ từ 8 đến 16 theo hai cách, yêu cầu thứ hai là minh họa kết quả tìm được.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Để viết một tập hợp theo hai cách ta có thể :

- hoặc liệt kê các phần tử của nó nếu số phần tử ít (cách 1)
- hoặc chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó (cách 2).

Để minh họa bằng hình vẽ ta có thể dùng một đường cong khép kín (gọi là sơ đồ Ven mang tên nhà toán học Ven người Anh, người đầu tiên đưa ra cách minh họa bằng hình vẽ này), trong đó mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bằng một điểm nằm trong đường cong khép kín đó.

● *Cách giải*

- Các số tự nhiên lẻ lớn hơn 8 nhưng bé hơn 16 là 9 ; 11 ; 13 ; 15. Do đó ta có hai cách viết tập hợp M các số tự nhiên lẻ này như sau :

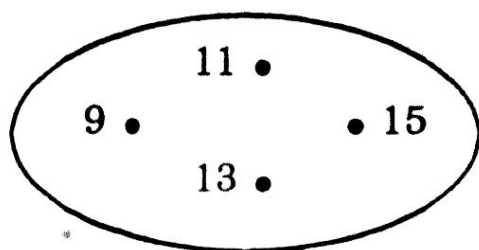
Cách 1. Liệt kê các phần tử của nó

$$M = \{9 ; 11 ; 13 ; 15\}$$

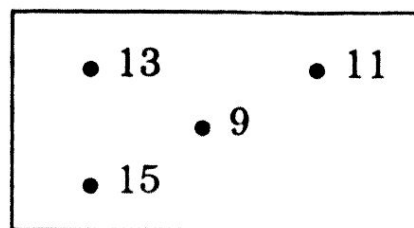
Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

$$M = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 2k + 1 ; 8 < n < 16\}.$$

- Minh họa bằng hình vẽ (sơ đồ Ven)



hoặc



● *Khai thác bài toán*

- Nếu trong đề bài ta đổi từ "lẻ" thành từ "chẵn" thì cách giải thay đổi như thế nào ?

Ta tìm các số chẵn lớn hơn 8 nhưng bé hơn 16, đó là các số 10 ; 12 ; 14. Vậy tập hợp các số phải tìm là $P = \{10 ; 12 ; 14\}$ hoặc $P = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 2k ; 8 < n < 16\}$.

- Nếu đổi bài ra là : "Tìm tập hợp các số tự nhiên chẵn chia hết cho 3, cho 4, cho cả 3 và 4" thì cách giải sẽ là :

Từ $P = \{10 ; 12 ; 14\}$ chỉ có số 12 là chia hết cho 3, chia hết cho 4, chia hết cho cả 3 và 4. Vậy tập hợp phải tìm là $Q = \{12\}$.

Bài 3

Cho ba tập hợp

$$A = \{ k \in \mathbf{N} \mid k \leq 50 \}$$

$$B = \{ k \in \mathbf{N} \mid 5k = 2 \}$$

$$C = \{ m \mid m = 2k, k \in \mathbf{N} \}.$$

Mỗi tập hợp trên có bao nhiêu phần tử ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Cách viết ba tập hợp đã cho cần hiểu như sau :

A là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng (không vượt quá) 50 ; B là tập hợp các số tự nhiên k sao cho $k = \frac{2}{5}$; còn C là tập hợp các số tự nhiên chẵn m. Từ đó mà tìm được số phần tử của mỗi tập hợp.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước tiên hãy liệt kê các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 50 rồi dùng cách viết các phần tử trong hai dấu ngoặc nhọn { } cách nhau bởi dấu phẩy.

Với tập hợp B lưu ý $k = \frac{2}{5}$ không phải là số tự nhiên, còn với tập hợp C thì phải tìm số phần tử của tập hợp các số chẵn trong $\mathbf{N}$.

● *Lời giải*

- Các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 50 là :

$$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 47 ; 48 ; 49 ; 50$$

do đó $A = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 49 ; 50\}$ và có 51 phần tử.

- Vì $k = \frac{2}{5}$ không phải là số tự nhiên nên tập hợp B không có phần tử nào, tức là $B = \emptyset$ (tập hợp rỗng).

- Do có vô số số chẵn trong tập hợp $\mathbf{N}$ vì vậy tập hợp C có vô số phần tử.

● *Khai thác bài toán*

Nếu cho D là tập hợp các số tự nhiên lẻ p thì tập hợp D viết như thế nào và có bao nhiêu phần tử ?

Khi đó ta viết như sau :

$$D = \{p \in \mathbf{N} \mid p = 2k + 1, k \in \mathbf{N}\}$$

và D có vô số phần tử.

Bài 4

a) Hai tập hợp $R = \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq 6\}$ và $S = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ có bằng nhau không, tại sao ?

b) Tìm số phần tử của ba tập hợp sau :

$$A = \emptyset, B = \{0\}, C = \{\emptyset\}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Nếu hai tập hợp R và S mà bằng nhau thì mọi phần tử của R đều thuộc S và mọi phần tử của S đều thuộc R và ta viết $R = S$.

Khi viết $R = \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq 6\}$ thì hiểu đó là tập hợp các số tự nhiên không lớn hơn 6 (nhỏ hơn hoặc bằng 6).

b) Kí hiệu $\emptyset$ chỉ tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử nào. Tập hợp $\{a\}$ là tập hợp có 1 phần tử là a .

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Trước hết hãy liệt kê các phần tử của tập hợp R dựa vào cách viết của bài ra là cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó. R là tập hợp các số tự nhiên không lớn hơn 6, tức là $R = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

b) Lưu ý B và C đều là tập hợp có 1 phần tử.

● *Cách giải*

a) Tập $R = \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq 6\}$ có thể viết dưới dạng liệt kê các phần tử của nó như sau :

$$R = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

Như thế nó bằng tập hợp S , tức là $R = S$.

b) Tập hợp $A = \emptyset$ không có phần tử nào

Tập hợp $B = \{0\}$ có 1 phần tử là 0

Tập hợp $C = \{\emptyset\}$ có 1 phần tử là $\emptyset$.

● *Khai thác bài toán*

Có thể thay đổi bài toán trên như sau :

"Cho hai tập hợp :

$$M = \{m \in \mathbf{N} \mid m : 2 \text{ và } m < 19\}$$

$$N = \{m \in \mathbf{N} \mid m \text{ chẵn } < 19\}.$$

a) Mỗi tập hợp trên có bao nhiêu phần tử ?

b) Hai tập hợp M và N có bằng nhau không ?

c) Viết $M \in N$ và $M \subset N$ thì cách viết nào đúng, cách viết nào sai ?".

Cách giải sẽ là :

a) $M = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18\}$

$N = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18\}$. Mỗi tập hợp đều chứa 10 phần tử.

b) Ta thấy ngay rằng $M = N$.

c) Viết $M \in N$ là sai vì M là một tập hợp không phải là một phần tử của tập hợp. Viết $M \subset N$ là đúng vì cả hai đều là tập hợp và do $M = N$ nên mỗi tập hợp là một tập hợp con của chính nó.

Bài 5

a) Viết tập hợp E các số có hai chữ số lớn hơn 88. Tập hợp này có bao nhiêu phần tử ?

b) Cho tập hợp $G = \{a, b, c\}$. Viết tất cả các tập hợp con của G gồm 1 phần tử, 2 phần tử, 3 phần tử.

● Tìm hiểu đề bài

a) E là tập hợp các số có hai chữ số lớn hơn 88 nên phải liệt kê tất cả các phần tử của E từ phần tử nhỏ nhất đến phần tử lớn nhất.

b) Tập hợp con của G là tập hợp mà mọi phần tử của nó đều thuộc G , bài ra yêu cầu viết lần lượt các tập hợp con có 1 phần tử, rồi đến có 2 phần tử và cuối cùng là có 3 phần tử.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy tìm số có hai chữ số liền sau số 88 rồi viết tất cả các số tiếp theo cho đến số 99 là số lớn nhất có hai chữ số, sau đó dùng hai dấu ngoặc $\{ \}$ để viết tất cả phần tử tìm được của E .

b) Khi viết tất cả tập hợp con của G , cần lưu ý đến hai nhận xét :

- Mỗi tập hợp đều là một tập hợp con của chính nó .

- Người ta coi tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp.

● *Cách giải*

a) Tập hợp E các số có hai chữ số lớn hơn 88 là :

$$E = \{89 ; 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 ; 99\}.$$

Tập hợp này có 11 phần tử.

b) Các tập hợp con của G gồm 1 phần tử là :

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

Các tập hợp con của G gồm 2 phần tử là :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

Các tập hợp con của G gồm 3 phần tử là :

$$\{a, b, c\}.$$

Ngoài ra còn có $\emptyset \subset G$ (tập hợp con của G không có phần tử nào).

● *Khai thác bài toán*

- Nếu ở câu a đổi là : "Tìm số phần tử của tập hợp F các số có hai chữ số" thì đáp số sẽ như thế nào ?

Khi đó $F = \{10 ; 11 ; 12 ; \dots ; 98 ; 99\}$

và tập hợp này có $(99 - 10) + 1 = 90$ (phần tử).

Cũng có thể đặt câu hỏi khác như sau :

Tìm số phần tử của tập hợp G các số lẻ (hoặc các số chẵn) có hai chữ số. Nếu thế thì :

$$G_1 = \{11 ; 13 ; 15 ; \dots ; 97 ; 99\} \text{ hoặc } G_2 = \{10 ; 12 ; 14 ; \dots ; 96 ; 98\}.$$

Từ đó tìm được số phần tử của G_1 hoặc G_2 .

- Nếu ở câu b tập hợp G được thay bằng tập hợp

$H = \{a, b, c, d\}$ gồm 4 phần tử thì đáp số sẽ thay đổi như sau :

Tập hợp con gồm 1 phần tử : $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.

Tập hợp con gồm 2 phần tử : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

Tập hợp con gồm 3 phần tử : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Tập hợp con gồm 4 phần tử : $\{a, b, c, d\}$.

Ngoài ra còn có $\emptyset \subset H$ (tập hợp con của H không có phần tử nào).

Bài 6

a) Cho biết sự khác nhau giữa hai kí hiệu $\in$ và $\subset$. Cho ví dụ.

b) Cho M là tập hợp con của N . Khi nào thì số phần tử của M nhỏ hơn số phần tử của N . Khi nào thì không thể so sánh số phần tử của M và của N . Cho ví dụ minh họa.

• Tìm hiểu đề bài

a) Khi học về phần tử của một tập hợp thì có kí hiệu $\in$, khi học về tập hợp con thì lại có thêm kí hiệu $\subset$. Hai kí hiệu này khác nhau như thế nào, hãy minh họa bằng ví dụ cụ thể.

b) Khi nói M là tập hợp con của N ($M \subset N$) thì thường nghĩ rằng số phần tử của M phải nhỏ hơn số phần tử của N . Đề bài yêu cầu nói rõ khi nào thì số phần tử của M nhỏ hơn của N , khi nào thì lại không thể nói đến từ "nhỏ hơn".

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý nếu A và B là hai tập hợp có các phần tử là a và b thì khi viết $A \in B$ là sai mà phải viết $A \subset B$ hoặc khi viết $a \subset A$ là sai mà phải viết $a \in A$. Hãy giải thích tại sao.

b) Xét trường hợp hai tập hợp M và N đều hữu hạn hoặc đều vô hạn phần tử rồi lấy ví dụ cụ thể để minh họa.

• Cách giải

a) Kí hiệu $\in$ chỉ một phần tử của một tập hợp, còn kí hiệu $\subset$ chỉ một tập hợp là tập hợp con của một tập hợp khác.

Ví dụ $A = \{a, x\}$, $B = \{a, b, x\}$.

Nếu viết $a \subset A$, $b \subset B$ là sai mà phải viết $a \in A$, $b \in B$.
Nếu viết $A \in B$ là sai mà phải viết $A \subset B$.

b) – Trường hợp M và N là hai tập hợp hữu hạn.

Nếu $M \subset N$ thì số phần tử của M nhỏ hơn số phần tử của N khi $M \neq N$. Nếu $M = N$ thì số phần tử của M bằng số phần tử của N .

– Trường hợp M và N là hai tập hợp vô hạn.

Mặc dầu $M \neq N$ nhưng vì chúng là hai tập hợp vô hạn tức là số phần tử của chúng là vô hạn nên không thể so sánh được.

Ví dụ cụ thể về hai tập hợp hữu hạn.

$M = \{2 ; 4 ; 6\}$ và $N = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ thì số phần tử của M nhỏ hơn số phần tử của N .

Nếu là $M = \{a, b, c, d\}$ và $N = \{d, a, c, b\}$ thì $M = N$, do đó số phần tử của chúng bằng nhau.

Ví dụ cụ thể về hai tập hợp vô hạn :

Tập hợp M là tập hợp các số lẻ, còn N là tập hợp các số tự nhiên. Rõ ràng cả hai tập hợp đều có số phần tử vô hạn, do đó không thể so sánh được (không thể nói vô hạn này nhỏ hơn vô hạn kia).

● Khai thác bài toán

– Nếu $M = \{2 ; 4 ; 6\}$ và N là tập hợp các số tự nhiên thì cách viết nào đúng trong hai cách viết sau :

$$M \in N \text{ và } M \subset N ?$$

Rõ ràng viết $M \in N$ là sai, vì M không phải là một phần tử của tập hợp N , cách viết $M \subset N$ là đúng.

– Nếu câu hỏi là : tìm tất cả những tập hợp con của M thì ta có :

$\emptyset$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2 ; 4\}$, $\{2 ; 6\}$, $\{4 ; 6\}$ và $\{2 ; 4 ; 6\}$ (cả thảy có 8 tập hợp con của M khi M có 3 phần tử).

- Nếu M có 4 phần tử chẳng hạn $M = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ thì số tập hợp con của M sẽ là bao nhiêu ?

Khi đó số tập hợp con của M sẽ là :

$\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{2 ; 4\}, \{2 ; 6\}, \{2 ; 8\}, \{4 ; 6\}, \{4 ; 8\}, \{6 ; 8\}, \{2 ; 4 ; 6\}, \{2 ; 4 ; 8\}, \{2 ; 6 ; 8\}, \{4 ; 6 ; 8\}$ và $\{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ (cả thảy có $16 = 2^4$ tập hợp con của M khi M có 4 phần tử).

Một cách tổng quát khi tập hợp M có n phần tử thì số tập hợp con của M là 2^n .

Bài 7

Cho ba chữ số 5 ; 6 ; 7 có thể lập được :

- a) bao nhiêu số có ba chữ số ?
- b) bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau ?

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài có hai câu hỏi : câu thứ nhất đòi hỏi phải tìm xem có bao nhiêu số có ba chữ số, còn câu thứ hai thì hỏi rõ hơn là có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau. Như thế câu thứ nhất có tính chất tổng quát vì số có ba chữ số bất kì gồm cả số có ba chữ số khác nhau.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Số có ba chữ số bao gồm : các số có ba chữ số giống nhau như 555, các số có ba chữ số trong đó có hai chữ số giống nhau như 552 hoặc 525, các số có ba chữ số khác nhau như 567.

b) Số có ba chữ số khác nhau phải gồm ba chữ số 5 ; 6 ; 7 sắp xếp theo thứ tự khác nhau, trong đó chữ số hàng trăm phải lần lượt là 5 ; 6 ; 7.

● Cách giải

a) Số có ba chữ số giống nhau là :

555 ; 666 ; 777.

Số có ba chữ số trong đó có hai chữ số giống nhau là :

556 ; 557 ; 565 ; 575 ; 566 ; 577 ;

665 ; 667 ; 656 ; 676 ; 655 ; 677 ;

775 ; 776 ; 757 ; 767 ; 755 ; 766.

Số có ba chữ số khác nhau là :

567 ; 576 ; 657 ; 675 ; 756 ; 765.

Vậy có cả thảy 27 số có ba chữ số.

b) Số có ba chữ số khác nhau gồm 6 số như đã tìm ở câu a.

● *Khai thác bài toán*

Có thể xét thêm các trường hợp sau :

a) Lập tất cả các số có hai chữ số, có hai chữ số khác nhau với hai chữ số 4 và 5.

b) Lập tất cả các số có bốn chữ số khác nhau với bốn chữ số 1 ; 2 ; 8 và 9. Cách giải sẽ như sau :

a) Số có hai chữ số lập được với hai chữ số 4 và 5 là :

44 ; 45 ; 55 ; 54

trong đó có hai số có hai chữ số khác nhau là 45 và 54.

b) Lần lượt xét chữ số hàng nghìn là 1 ; 2 ; 8 ; 9

– nếu 1 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

1289 ; 1298 ; 1829 ; 1892 ; 1928 ; 1982

– nếu 2 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

2189 ; 2198 ; 2819 ; 2891 ; 2918 ; 2981

– nếu 8 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

8129 ; 8192 ; 8219 ; 8291 ; 8912 ; 8921

– nếu 9 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

9128 ; 9182 ; 9218 ; 9281 ; 9812 ; 9821.

Bài 8

a) Biểu diễn trên tia số các số tự nhiên y sao cho :

$$25 < y \leq 30.$$

b) Từ 1 đến 100, tổng các chữ số của nhóm các số chẵn lớn hơn hay nhỏ hơn tổng các chữ số của nhóm số lẻ là bao nhiêu ?

• Tìm hiểu đề bài

a) Bài ra yêu cầu biểu diễn trên tia số các số tự nhiên y lớn hơn 25 nhưng không lớn hơn 30, do đó giá trị $y = 30$ cũng được biểu diễn trên tia số.

b) Yêu cầu của đề bài là so sánh tổng các chữ số của hai nhóm : nhóm các số chẵn và nhóm các số lẻ trong dãy số tự nhiên từ 1 đến 100. Tổng nào lớn hơn thì phải tìm xem lớn hơn bao nhiêu ?

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

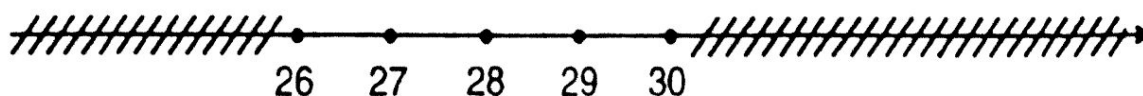
a) Trước hết cần tìm các số tự nhiên y thỏa mãn điều kiện $25 < y \leq 30$, sau đó mới biểu diễn trên tia số.

b) Hãy tìm xem mỗi nhóm số chẵn và số lẻ có bao nhiêu số. Lưu ý trừ cặp số cuối cùng (số 1 và số 100) có tổng các chữ số bằng nhau, còn với các cặp số còn lại tổng các chữ số của mỗi cặp số chẵn và số lẻ hơn nhau là bao nhiêu. Từ đó mà tìm được kết quả.

• Cách giải

a) Các số tự nhiên y thỏa mãn điều kiện $25 < y \leq 30$ là $y = 26 ; 27 ; 28 ; 29$ và 30 .

Biểu diễn trên tia số :



b) Từ 1 đến 100 có 50 số chẵn là $2 ; 4 ; 6 ; \dots ; 98 ; 100$ và 50 số lẻ là $1 ; 3 ; 5 ; \dots ; 97 ; 99$.

Nếu ta sắp xếp 50 cặp như sau :

Số lẻ 3 5 7 9 ... 99 1

Số chẵn 2 4 6 8 ... 98 100

thì ở 49 cặp số đầu mỗi số lẻ đều lớn hơn mỗi số chẵn là 1 (3 lớn hơn 2 là 1, 5 lớn hơn 4 là 1, ..., 99 lớn hơn 98 là 1). Riêng cặp cuối cùng thì tổng các chữ số của 1 và của 100 đều bằng nhau (vì bằng 1).

Do có 49 cặp số hơn kém nhau 1 nên với 49 cặp số thì hơn kém nhau $49.1 = 49$. Vậy tổng các chữ số của nhóm các số lẻ lớn hơn tổng các chữ số của nhóm các số chẵn là 49.

● *Khai thác bài toán*

Nếu cho dãy số tự nhiên từ 9 đến 900 thì đáp số sẽ thay đổi như thế nào ?

Cách giải cũng tương tự. Từ 9 đến 900 có $(900 - 9) + 1 = 892$ (số) với 446 số chẵn và 446 số lẻ. Với 445 cặp đầu thì mỗi số lẻ hơn mỗi số chẵn là 1, riêng cặp cuối cùng thì tổng các chữ số của số 9 và số 900 bằng nhau. Do đó tổng các chữ số của nhóm số lẻ lớn hơn tổng các chữ số của nhóm số chẵn là $445.1 = 445$.

Bài 9

Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 1000, ta được dãy số 123456 ... 9991000.

a) Phải viết tất cả bao nhiêu chữ số ?

b) Chữ số 0 của số 550 ở vị trí thứ bao nhiêu ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Dãy số 123456...9991000 là một số có nhiều chữ số. Bài ra yêu cầu phải dùng bao nhiêu chữ số để viết số có nhiều chữ số này, chẳng hạn muốn viết dãy số 123456 phải dùng 6 chữ số.

Đối với câu b ở dãy số 123456...549550... thì chữ số 0 ở vị trí thứ bao nhiêu.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Trước hết phải tìm số chữ số cần để viết các số tự nhiên có một chữ số (từ 1 đến 9), để viết các số tự nhiên có hai chữ số (từ 10 đến 99), để viết các số tự nhiên có ba chữ số (từ 100 đến 999). Riêng số 1000 phải viết với 4 chữ số.

b) Hãy xét số chữ số để viết từ 1 đến 550. Từ đó mà suy ra vị trí của chữ số 0 trong số 550.

● *Lời giải*

a) Để viết các số tự nhiên có một chữ số ta phải dùng 9 chữ số. Từ 10 đến 99 có 90 số có hai chữ số nên để viết 90 số này phải dùng $90.2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số có ba chữ số nên để viết 900 số này phải dùng $900.3 = 2700$ (chữ số)

Riêng số 1000 phải dùng 4 chữ số để viết.

Vậy muốn viết dãy số 123456...9991000 phải dùng cả thảy :

$$9 + 180 + 2700 + 4 = 2893 \text{ (chữ số).}$$

b) Từ số 1 đến số 550 ta phải dùng số chữ số là :

$$9.1 + 90.2 + (550 - 99).3 = 9 + 180 + 1353 = 1542 \text{ (chữ số).}$$

Như vậy chữ số 0 của số 550 là chữ số thứ 1542.

● *Khai thác bài toán*

Nếu đổi bài toán thành :

"Viết liên tiếp các số tự nhiên chẵn từ 2 đến 1000 thì số chữ số phải dùng là bao nhiêu ? chữ số ở vị trí thứ 1500 là chữ số gì ?"

Ta giải bài toán này như sau :

Dãy số là 24681012...9981000.

Từ số 2 đến số 1000 (không kể số 1000) có : 4 số chẵn có một chữ số (2 ; 4 ; 6 ; 8), 45 số chẵn có hai chữ số (10 ; 12 ; ... ; 98) và 450 số chẵn có ba chữ số (100 ; 102 ; ... ; 998).

Vậy số chữ số phải dùng để viết các số chẵn từ 2 đến 1000 (không kể 1000) là :

$$4 + 2.45 + 3.450 = 1444 \text{ (chữ số)}$$

Do $1444 < 1500$ nên chữ số thứ 1500 thuộc một số chẵn có bốn chữ số. Ta có số chữ số còn lại để viết các số chẵn có bốn chữ số là :

$$1500 - 1444 = 56 \text{ (chữ số)}$$

Với 56 chữ số này ta có thể viết được $56 : 4 = 14$ số chẵn có bốn chữ số bắt đầu từ số 1000. Suy ra số chẵn thứ 14 có bốn chữ số là :

$$1000 + 14.2 - 2 = 1026$$

(hoặc tính như sau : 1000 ; 1002 ; 1004 ; 1006 ; 1008 ; 1010 ; 1012 ; 1014 ; 1016 ; 1018 ; 1020 ; 1022 ; 1024 ; 1026).

Vậy chữ số thứ 1500 là chữ số 6 của số 1026.

Bài 10

a) Với hai chữ số La Mã I và X được dùng cùng một lúc có thể viết được bao nhiêu số La Mã ?

b) Với hai que diêm thì ghi được những số La Mã nào ?

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Đề bài chỉ cho hai chữ số I và X nên khi viết thành số La Mã thì có thể dùng nhiều chữ số I kết hợp với chữ số X, chẳng hạn XIII (ba chữ số I) hoặc XXXI (ba chữ số X).

b) Với hai que diêm có thể xếp như thế nào để được những số La Mã, chẳng hạn II hoặc V.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết lưu ý cách viết các số trong hệ La Mã :

- Nếu viết I bên trái V (năm), X (mười)

X bên trái L (năm mươi), C (một trăm)

C bên trái D (năm trăm), M (một nghìn)
thì làm giảm giá trị mỗi số V ; X ; L ; C ; D ; M đi ;
10 ; 100.

- Nếu viết về bên phải thì làm tăng giá trị mỗi số trên
thêm 1 ; 10 ; 100.

a) Để khỏi trùng, khỏi sót nên viết theo thứ tự sau :

Viết số nhỏ nhất với cả hai chữ số I và X

Viết số lớn nhất với cả hai chữ số này

Viết các số trung gian với cả hai chữ số từ nhỏ đến lớn.

b) Dựa vào 7 kí hiệu chữ số La Mã để sắp xếp hai que diên.

● Cách giải

a) Số nhỏ nhất là IX (9), số lớn nhất là XXXIX (39), các số
trung gian là (từ nhỏ đến lớn) :

XI (11), XII (12), XIII (13), XIX (19), XXI (21), XXII (22),
XXIII (23), XXIX (29), XXXI (31), XXXII (32), XXXIII (33).

Cả thầy có thể viết 13 số.

b) Với hai que diên ta có thể sắp xếp thành một trong 4 chữ
số La Mã sau : II (2), V (5), X (10), L (50).

● Khai thác bài toán

a) Có thể giải câu này theo cách khác : viết các số chứa chữ
số X theo thứ tự chứa một, hai, ba, bốn chữ số X.

Các số chứa một chữ số X là : IX, XI, XII, XIII

Các số chứa hai chữ số X là : XIX, XXI, XXII, XXIII

Các số chứa ba chữ số X là : XXIX, XXXI, XXXII, XXXIII

Các số chứa bốn chữ số X là : XXXIX.

Cả thầy có 13 số.

Ngoài ra có thể đổi các số đã cho như sau : Cũng hỏi như trên với hai chữ số X và C. Với câu hỏi này ta tìm được :

Số nhỏ nhất là XC (90), số lớn nhất là CCCXC (390), các số trung gian từ nhỏ đến lớn là :

CX (110), CXX (120), CXXX (130), CXC (190), CCX (210), CCXX (220), CCXXX (230), CCXC (290), CCCX (310), CCCXX (320), CCCXXX (330).

Cả thầy có 13 số.

Bài 11

Các que diêm sau đây đã bị xếp nhầm :

$$XII + IX = II$$

$$X = VII - III$$

$$VI + VI = XI$$

Ở mỗi dòng hãy chuyển chỗ hoặc bỏ bớt 1 que diêm để được những kết quả đúng.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho 3 cách viết sai :

$$12 + 9 = 2 (!) ;$$

$$10 = 7 - 3 (!) ;$$

$$6 + 6 = 11 (!)$$

và yêu cầu chỉ chuyển hoặc bỏ bớt 1 que diêm ở mỗi cách viết để có cách viết đúng, vấn đề cần suy nghĩ là chuyển như thế nào.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần xem xét kĩ từng cách viết để có thể chuyển 1 que diêm lấy từ dấu +, từ dấu = hoặc từ số đã cho (cần nhớ cách viết các số La Mã từ 1 đến 12).

• *Cách giải*

Chuyển 1 que diêm từ dấu + sang số bên phải dấu = ta có :

$$\text{XII} - \text{IX} = \text{III} \quad 12 - 9 = 3 ;$$

Chuyển 1 que diêm từ dấu = sang dấu - :

$$\text{X} - \text{VII} = \text{III} \quad 10 - 7 = 3 ;$$

Bỏ bớt 1 que diêm từ chữ số VI :

$$\text{VI} + \text{V} = \text{XI} \quad 6 + 5 = 11.$$

• *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài ra như sau :

Trên bàn có 3 que diêm :

a) Không thêm hoặc bớt 1 que nào hãy xếp sao cho từ 3 lại được 4 ?

b) Làm sao chỉ cần thêm 2 que diêm nữa là có ngay 8 ?

Nếu thế, ta có thể giải như sau :

a) III (3) chuyển thành IV (4)

b) III (3) thêm 2 que thành VIII (8).

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 12

Cho tập hợp P các chữ số và tập hợp Q các số tự nhiên có một chữ số.

a) P và Q có bằng nhau không, tại sao ?

b) Tìm tất cả các tập hợp con có 1 ; 2 phần tử của P.

Bài 13

Cho tập hợp $E = \{x, y, z\}$ và tập hợp $F = \{y, t\}$. Viết tất cả các tập hợp con :

- a) của E mà không phải tập hợp con của F ;
- b) của F mà không phải tập hợp con của E .

Bài 14

Cho tập hợp G gồm các số g sao cho $72 < g \leq 83$ và tập hợp H gồm các số h sao cho $74 \leq h \leq 81$.

- a) Mỗi tập hợp G và H có mấy phần tử ?
- b) So sánh hai tập hợp G và H .
- c) Tìm tất cả các tập hợp có 3 phần tử vừa là tập hợp con của G vừa là tập hợp con của H .

Bài 15

Trong tập hợp các số có hai chữ số thì :

- a) chữ số 0, chữ số 1 được viết bao nhiêu lần ?
- b) tập hợp các số lẻ không vượt quá 30 gồm bao nhiêu phần tử ?

Bài 16

Có bao nhiêu :

- a) số tự nhiên chẵn có 4 chữ số ?
- b) số tự nhiên lẻ có 5 chữ số ?

Bài 17

Viết liên tiếp các số tự nhiên thành dãy số 123456... Hỏi chữ số 9 cuối cùng của số 1999 ở vị trí thứ bao nhiêu ?

Bài 18*

Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 30 thành số có nhiều chữ số 12345...282930. Hãy xóa đi 45 chữ số để còn lại (theo thứ tự đã viết) số nhỏ nhất.

Bài 19

Chuyển chỗ 1 que diêm để được kết quả đúng :

a) Trường hợp có 9 que diêm

$$VI \equiv V - I \quad \text{và} \quad IX \equiv V - I$$

b) Trường hợp có 11 que diêm

$$XI + V \equiv V \quad \text{và} \quad IX - V \equiv VI$$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 12

Hướng dẫn. Viết các phần tử của P và của Q. Từ đó viết được các tập hợp con có 1 ; 2 phần tử của P.

Cách giải.

a) Tập hợp P các chữ số là $P = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 ; 9\}$, tập hợp Q các số tự nhiên có 1 chữ số là $Q = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 ; 9\}$. Vậy $P = Q$ vì mọi phần tử của P đều thuộc Q và mọi phần tử của Q đều thuộc P.

b) Tất cả các tập hợp con của P là :

$\emptyset$; 1 phần tử $\{0\} ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{4\} ; \{5\} ; \{6\} ; \{7\} ; \{8\} ; \{9\}$.

2 phần tử $\{0 ; 1\} ; \{0 ; 2\} ; \{0 ; 3\} ; \dots ; \{0 ; 8\} ; \{0 ; 9\}$

$\{1 ; 2\} ; \{1 ; 3\} ; \{1 ; 4\} ; \dots ; \{1 ; 8\} ; \{1 ; 9\}$

$\{2 ; 3\} ; \{2 ; 4\} ; \{2 ; 5\} ; \dots ; \{2 ; 8\} ; \{2 ; 9\}$

$\{3 ; 4\} ; \{3 ; 5\} ; \{3 ; 6\} ; \{3 ; 7\} ; \{3 ; 8\} ; \{3 ; 9\}$

$\{4 ; 5\} ; \{4 ; 6\} ; \{4 ; 7\} ; \{4 ; 8\} ; \{4 ; 9\}$

$\{5 ; 6\} ; \{5 ; 7\} ; \{5 ; 8\} ; \{5 ; 9\}$

$\{6 ; 7\} ; \{6 ; 8\} ; \{6 ; 9\}$

$\{7 ; 8\} ; \{7 ; 9\}$ và $\{8 ; 9\}$.

Bài 13

Hướng dẫn. Trước hết viết tất cả tập hợp con của E, rồi của F. Từ đó giải được các câu hỏi.

Cách giải. a) Tất cả tập hợp con của E mà không phải tập hợp con của F là :

$$\{x\} ; \{z\} ; \{x, z\} ; \{x, y\} ; \{x, y, z\} ; \{y, z\}$$

b) Tất cả tập hợp con của F mà không phải tập hợp con của E là :

$$\{t\} ; \{y, t\}.$$

Bài 14

Hướng dẫn. Viết tất cả phần tử của G và của H để thấy H là tập hợp con của G. Từ đó giải được câu c.

Cách giải. a) $G = \{73 ; 74 ; 75 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 81 ; 82 ; 83\}$, tập hợp G gồm 11 phần tử.

$H = \{74 ; 75 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 81\}$, tập hợp H gồm 8 phần tử.

b) H là tập hợp con của G ($H \subset G$)

c) $\{74 ; 75 ; 76\}$, $\{74 ; 76 ; 77\}$, $\{74 ; 77 ; 78\}$, $\{74 ; 78 ; 79\}$, $\{74 ; 79 ; 80\}$, $\{74 ; 80 ; 81\}$

$\{75 ; 76 ; 77\}$, $\{75 ; 77 ; 78\}$, $\{75 ; 78 ; 79\}$, $\{75 ; 79 ; 80\}$, $\{75 ; 80 ; 81\}$

$\{76 ; 77 ; 78\}$, $\{76 ; 78 ; 79\}$, $\{76 ; 79 ; 80\}$, $\{76 ; 80 ; 81\}$

$\{77 ; 78 ; 79\}$, $\{77 ; 79 ; 80\}$, $\{77 ; 80 ; 81\}$

$\{78 ; 79 ; 80\}$, $\{78 ; 80 ; 81\}$

$\{79 ; 80 ; 81\}$.

Bài 15

Hướng dẫn. Tìm xem chữ số 0, chữ số 1 có mặt ở những số có hai chữ số nào ?

Cách giải. a) Tập hợp các số có hai chữ số là :

$$\{10 ; 11 ; 12 ; \dots ; 97 ; 98 ; 99\}$$

– chữ số 0 có mặt ở các số 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, tức là có mặt 10 lần

– chữ số 1 có mặt ở các số 10, 11, 12, ..., 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, tức là có mặt 19 lần.

b) Tập hợp các số lẻ không vượt quá 30 là $\{11 ; 13 ; \dots ; 27 ; 29\}$, tập hợp này gồm 10 phần tử.

Bài 16

Hướng dẫn. Viết tất cả các số chẵn có bốn chữ số từ 1000 đến 9998 và tất cả số lẻ có năm chữ số từ 10 001 đến 99 999.

Cách giải. a) Các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số là :

1000 ; 1002 ; 1004 ; ... ; 9994 ; 9996 ; 9998

với số lượng là $(9998 - 1000) : 2 + 1 = 4500$ (số).

b) Các số tự nhiên lẻ có 5 chữ số là :

10001 ; 10003 ; 10005 ; ... ; 99995 ; 99997 ; 99999

với số lượng là : $(99999 - 10001) : 2 + 1 = 45000$ (số).

Bài 17

Hướng dẫn. Tính xem từ 1 đến 1999 có bao nhiêu số có một, hai, ba, bốn chữ số. Từ đó tìm được vị trí chữ số 9 cuối cùng của 1999.

Cách giải. Từ số 1 đến số 1999 có cả thấy :

9 số có một chữ số

90 số có hai chữ số

900 số có ba chữ số

$1999 - 1000 + 1 = 1000$ (số có bốn chữ số).

Do đó số chữ số phải dùng để viết các số từ 1 đến 1999 là :

$9 + 2.90 + 3.900 + 4.1000 = 6889$ (chữ số)

Vậy chữ số 9 cuối cùng của số 1999 ở vị trí thứ 6889 trong dãy số đã viết.

Bài 18*

Hướng dẫn. Tính xem từ 1 đến 30 có bao nhiêu chữ số để thấy trong đó có ba chữ số 0. Xóa 45 chữ số thì còn lại 6 chữ

số trong đó đã có ba chữ số 0 rồi, từ đó tìm được 3 chữ số khác 0 nhỏ nhất để lại.

Cách giải. Từ 1 đến 30 có tất cả 9 chữ số (từ 1 đến 9) và $2 \cdot 21 = 42$ chữ số (từ 10 đến 30), tức là có 51 chữ số, trong đó có hai chữ số 0 (ở 10 và 20) và một chữ số 0 (ở 30).

Xóa 45 chữ số thì còn lại 6 chữ số trong đó đã có ba chữ số 0 nên chỉ cần để lại ba chữ số khác 0 nhỏ nhất (theo thứ tự đã viết) đó là ba chữ số 122 (ở số 2122).

Vậy số còn lại nhỏ nhất là 001220.

Bài 19

Cách giải. Có nhiều cách chuyển. a) Trường hợp có 9 que diêm

Có nhiều cách chuyển chỗ 1 que diêm như sau :

- $V \equiv V| - |$ hoặc $|V \equiv V - |$,

hoặc $V| - V \equiv |$

- $|V \equiv V - |$ hoặc $|X \equiv X - |$

b) Trường hợp có 11 que diêm. Ta có cách viết đúng là :

$$X| - V \equiv V|$$

Với cách viết sai $|X - V \equiv V|$ có thể chuyển chỗ 1 que diêm bằng 4 cách như sau :

- $|X - |V \equiv V$ hoặc $|X - V \equiv |V$

hoặc $X - |V \equiv V|$ hoặc $X| - V \equiv V|$

II. CÁC PHÉP TÍNH TRONG N

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Có bao nhiêu số có hai chữ số mà :

- a) chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị ;
- b) chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra chỉ đề cập đến những số có hai chữ số và chỉ hỏi có bao nhiêu số (chứ không hỏi tổng các số) mà chữ số hàng chục nhỏ hơn (lớn hơn) chữ số hàng đơn vị, vì thế phải loại các số có hai chữ số giống nhau như 11, 22, v.v...

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy hình dung cho hết tất cả các số có hai chữ số bắt đầu từ số nhỏ nhất là 10 đến số lớn nhất là 99. Từ đó mà suy nghĩ để giải đáp các câu hỏi của đề bài.

Để dễ suy nghĩ tìm lời giải, hãy lần lượt xét chữ số hàng chục là 1 (bắt đầu từ 12), là 2 (bắt đầu từ 23), là 3 (bắt đầu từ 34), v.v... nếu chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị.

● *Cách giải*

- a) Lần lượt xét chữ số hàng chục :

là 1 ta có : 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 (8 số)

là 2 ta có : 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29 (7 số)

là 3 ta có : 34 ; 35 ; 36 ; 37 ; 38 ; 39 (6 số)

là 4 : 45 ; 46 ; 47 ; 48 ; 49 (5 số)

là 5 : 56 ; 57 ; 58 ; 59 (4 số)

là 6 : 67 ; 68 ; 69 (3 số)

là 7 : 78 ; 79 (2 số)

là 8 : 89 (1 số).

Vậy cả thầy có :

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 \text{ (số).}$$

b) Lần lượt xét chữ số hàng chục :

là 1 ta có : 10 (1 số)

là 2 : 20 ; 21 (2 số)

là 3 : 30 ; 31 ; 32 (3 số)

là 4 : 40 ; 41 ; 42 ; 43 (4 số)

là 5 : 50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 (5 số)

là 6 : 60 ; 61 ; 62 ; 63 ; 64 ; 65 (6 số)

là 7 : 70 ; 71 ; 72 ; 73 ; 74 ; 75 ; 76 (7 số)

là 8 : 80 ; 81 ; 82 ; 83 ; 84 ; 85 ; 86 ; 87 (8 số)

là 9 : 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 (9 số).

Vậy cả thầy có :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \text{ (số).}$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu đề bài hỏi : có bao nhiêu số có hai chữ số giống nhau thì đáp số sẽ là :

$$11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55 ; 66 ; 77 ; 88 ; 99 \text{ (9 số).}$$

Lại có thể đặt câu hỏi : có bao nhiêu số có hai chữ số mà :

- chữ số hàng chục gấp đôi, gấp 3, gấp 4, gấp 5 chữ số hàng đơn vị ?

- chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ chữ số hàng đơn vị.

Như thế đáp số sẽ là :

21 ; 42 ; 63 ; 84 (gấp đôi)

31 ; 62 ; 93 (gấp 3)

41 ; 82 (gấp 4)

51 (gấp 5).

Tương tự ta có : 12 ; 24 ; 36 ; 48 (bằng $\frac{1}{2}$) ; 13 ; 26 ; 39
(bằng $\frac{1}{3}$) ; 14 ; 28 (bằng $\frac{1}{4}$) ; 15 (bằng $\frac{1}{5}$).

Bài 2

a) Tìm tổng của số lớn nhất có 7 chữ số và số nhỏ nhất có 9 chữ số.

b) Tìm hiệu của số lớn nhất có 8 chữ số và số nhỏ nhất có 6 chữ số.

• Tìm hiểu đề bài

Ở cả hai câu hỏi số đầu tiên đều là số lớn nhất (có 7 ; 8 chữ số) số thứ hai là số nhỏ nhất (có 9 ; 6 chữ số), chỉ khác nhau là phải tìm tổng (câu a) và tìm hiệu (câu b) của hai số.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy tìm số lớn nhất có 7 chữ số và số nhỏ nhất có 9 chữ số rồi làm phép cộng số nhỏ với số lớn.

b) Tìm số lớn nhất có 8 chữ số và số nhỏ nhất có 6 chữ số rồi lấy số lớn trừ đi số nhỏ.

• Cách giải

a) Số lớn nhất có 7 chữ số là 9 999 999, số nhỏ nhất có 9 chữ số là 100 000 000.

Tổng của chúng là :

$$9\,999\,999 + 100\,000\,000 = 109\,999\,999.$$

b) Số lớn nhất có 8 chữ số là 99 999 999, số nhỏ nhất có 6 chữ số là 100 000.

Hiệu của chúng là :

$$99\,999\,999 - 100\,000 = 99\,899\,999.$$

● *Khai thác bài toán*

Do đã học đến lớp tí nên có thể đổi bài toán như sau : Tìm tổng của số lớn nhất có 12 chữ số và số nhỏ nhất có 10 chữ số hoặc tìm hiệu của số lớn nhất có 11 chữ số và số nhỏ nhất có 9 chữ số.

Khi đó đáp số sẽ là :

$$999\,999\,999\,999 + 1\,000\,000\,000 = 1\,000\,999\,999\,999 ;$$

$$99\,999\,999\,999 - 100\,000\,000 = 99\,899\,999\,999.$$

Bài 3

Cho tập hợp {3 ; 4 ; 5}. Tìm tổng của tất cả các số có ba chữ số khác nhau lập được từ tập hợp ba chữ số này.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra yêu cầu tìm tổng của các số có ba chữ số khác nhau lập được chứ không phải tìm tất cả các số có ba chữ số khác nhau.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tìm tất cả các số lập được theo yêu cầu bài ra bằng cách lần lượt xét chữ số hàng trăm là 3, là 4, là 5. Sau đó mới tìm tổng của chúng.

● *Cách giải*

Với chữ số hàng trăm là 3 ta có các số sau :

345 và 354

Với chữ số hàng trăm là 4 ta có : 435 và 453

Với chữ số hàng trăm là 5 ta có : 534 và 543.

Tổng của 6 số lập được này là :

$$\begin{aligned} & 345 + 354 + 435 + 453 + 534 + 543 = \\ & = 699 + 888 + 1077 = 2664. \end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Ta có thể giải cách khác như sau :

Mỗi chữ số đều được viết 2 lần ở hàng trăm, 2 lần ở hàng chục và 2 lần ở hàng đơn vị. Do đó tổng của sáu số lập được là :

$$222(3 + 4 + 5) = 222.12 = 2664$$

Cũng có thể đổi bài ra bằng cách cho tập hợp $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ gồm 4 phần tử và tìm tổng của tất cả các số có bốn chữ số khác nhau lập được.

Nếu thế thì cách giải như sau :

Với 1 là chữ số hàng nghìn ta có các số :

$$1234 ; 1243 ; 1324 ; 1342 ; 1423 ; 1432$$

Với 2 là chữ số hàng nghìn ta có :

$$2134 ; 2143 ; 2314 ; 2341 ; 2413 ; 2431$$

Với 3 là chữ số hàng nghìn ta có :

$$3124 ; 3142 ; 3214 ; 3241 ; 3412 ; 3421$$

Với 4 là chữ số hàng nghìn ta có :

$$4123 ; 4132 ; 4213 ; 4231 ; 4312 ; 4321.$$

Mỗi chữ số đều được viết 6 lần ở hàng nghìn, 6 lần ở hàng trăm, 6 lần ở hàng chục và 6 lần ở hàng đơn vị, do đó tổng của 24 số lập được là :

$$6666.(1 + 2 + 3 + 4) = 6666.10 = 66\,660.$$

Bài 4

Tính nhanh :

a) tổng các số lẻ từ 1 đến 1999 ;

b) tổng các số chẵn từ 2 đến 2000.

● *Tìm hiểu đề bài*

Hãy hình dung tất cả các số lẻ từ 1 đến 1999 gồm 1 ; 3 ; 5 ; ... ; 1995 ; 1997 ; 1999 và tất cả các số chẵn từ 2 đến 2000 gồm 2 ; 4 ; 6 ; ... ; 1996 ; 1998 ; 2000. Vấn đề đặt ra là tìm nhanh tổng $1 + 3 + 5 + \dots + 1995 + 1997 + 1999$ và tổng $2 + 4 + 6 + \dots + 1996 + 1998 + 2000$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Nếu nhận xét $1 + 1999 = 3 + 1997 = 5 + 1995 = \dots = 2000$ và cả thấy có bao nhiêu cặp số như vậy thì sẽ tìm được nhanh tổng $1 + 3 + \dots + 1997 + 1999$.

b) Tương tự ta nhận xét rằng :

$2 + 2000 = 4 + 1998 = 6 + 1996 = \dots = 2002$ và cũng tính nhanh được như trên.

● *Cách giải*

a) Tổng phải tìm có thể viết :

$$(1 + 1999) + (3 + 1997) + (5 + 1995) + \dots + (999 + 1001).$$

Mỗi tổng trong dấu ngoặc bằng 2000 mà từ 1 đến 1999 có cả thảy 1000 số lẻ nên tổng phải tìm là :

$$2000.1000 = 2\,000\,000$$

b) Ta cũng có thể viết tổng các số chẵn như sau :

$$(2 + 2000) + (4 + 1998) + (6 + 1996) + \dots + (1000 + 1002).$$

Mỗi tổng trong dấu ngoặc bằng 2002 mà từ 2 đến 2000 có cả thảy 1000 số chẵn nên tổng phải tìm là :

$$2002.1000 = 2\,002\,000.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán như sau :

"Tính tổng các số hạng từ 1 đến 1999 và rút ra quy tắc tính tổng đó."

Muốn thể trước tiên ta phải tính số số hạng từ 1 đến 1999. Số số hạng đó bằng : $9 + 90 + 900 + 1000 = 1999$ (số hạng). Để tính tổng đã cho ta viết như sau :

$$T = 1 + 2 + 3 + \dots + 1997 + 1998 + 1999 \quad (1)$$

$$T = 1999 + 1998 + 1997 + \dots + 3 + 2 + 1 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) được :

$$\begin{aligned} 2T &= (1 + 1999) + (2 + 1998) + (3 + 1997) + \dots + \\ &\quad + (1997 + 3) + (1998 + 2) + (1999 + 1) \end{aligned}$$

Tất cả có 1999 biểu thức trong ngoặc, mỗi biểu thức đó đều bằng 2000. Thành thử $2T = 2000.1999$, từ đó $T = 1\,999\,000$.

Ta rút ra quy tắc tính tổng như sau : lấy số hạng đầu (số 1) cộng với số hạng cuối (số 1999), sau đó chia đôi và nhân với số số hạng (số 1999), tức là : $T = \frac{1 + 1999}{2} \cdot 1999 = 1000.1999 = 1\,999\,000$.

Quy tắc tính trong dân gian ta : "đĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi".

Bài 5

Viết tất cả các số có ba chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 5.

● *Tìm hiểu đề bài*

Số có ba chữ số $\overline{abc}$ phải tìm có tổng $a + b + c = 5$ với điều kiện $a \neq 0$, còn b và c có thể là $0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy tìm cách phân tích 5 thành một tổng ba chữ số, có nhiều cách phân tích. Từ đó khi ghép lại thành số có ba chữ số thì lưu ý, chữ số hàng trăm phải khác 0.

● *Cách giải*

Số 5 có thể phân tích thành tổng của ba chữ số như sau :

$$5 = 5 + 0 + 0, \text{ từ đó ta có số } 500 \text{ (1 số)}$$

$5 = 4 + 1 + 0$, từ đó ta có các số :

$$410 ; 401 ; 140 ; 104 \quad (4 \text{ số})$$

$5 = 3 + 1 + 1$, từ đó có :

$$311 ; 131 ; 113 \quad (3 \text{ số})$$

$5 = 3 + 2 + 0$, từ đó có :

$$320 ; 302 ; 203 ; 230 \quad (4 \text{ số})$$

$5 = 2 + 2 + 1$, từ đó có :

$$221 ; 212 ; 122 \quad (3 \text{ số})$$

Vậy cả thảy có :

$$1 + 4 + 3 + 4 + 3 = 15 \text{ (số).}$$

● Khai thác bài toán

Nếu đổi đề bài thành : "Viết tất cả các số có ba chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 1 ; 2 ; 3 ; 4" thì đáp số sẽ như thế nào ?

Với tổng ba chữ số bằng 1 ta viết $1 = 1 + 0 + 0$ và chỉ được số 100.

Với tổng bằng 2 ta có thể viết :

$$2 = 2 + 0 + 0 = 1 + 1 + 0$$

và được các số : 200 ; 110 ; 101.

Với tổng bằng 3 ta có thể viết :

$$3 = 3 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1$$

và được các số : 300 ; 102 ; 120 ; 201 ; 210 ; 111.

Với tổng bằng 4 ta có thể viết :

$$4 = 4 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 = 2 + 2 + 0 = 2 + 1 + 1$$

và được các số :

$$400 ; 310 ; 301 ; 220 ; 202 ; 211 ; 103 ; 130 ; 112 ; 121.$$

Bài 6

Tính nhanh :

$$a) 11 + 12 + 13 + 14 + \dots + 88 + 89 ;$$

b) $1 + 4 + 5 + 9 + 14 + 23 + 37 + 60 + 97 + 101 + 104 + 205$.

● *Tìm hiểu đề bài*

Yêu cầu là phải tính nhanh các tổng đã cho, mỗi tổng có một đặc điểm riêng nên cần tìm được đặc điểm riêng đó. Ở câu a phải tìm cho đủ các số hạng, còn ở câu b thì đã cho tất cả số hạng.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Các số hạng của tổng là các số tự nhiên liên tiếp từ 11 đến 89. Để tính nhanh tổng này hãy nhận xét rằng :

$$11 + 89 = 12 + 88 = 13 + 87 = \dots = 100$$

từ đó tìm số các cặp như thế để tính nhanh được tổng.

b) Lưu ý số hạng thứ ba 5 bằng tổng hai số hạng 1 và 4 đứng ngay trước nó, từ đó tìm được tổng các số đã cho.

● *Cách giải*

a) Tổng đã cho có thể viết :

$$(11 + 89) + (12 + 88) + (13 + 87) + \dots + (49 + 51) + 50$$

Các tổng trong dấu ngoặc đều bằng 100 mà có cả thảy 49 cặp số thành thử tổng đã cho bằng :

$$100.49 + 50 = 4900 + 50 = 4950.$$

b) Ta nhận thấy rằng :

$1 + 4 = 5$; $9 + 14 = 23$; $37 + 60 = 97$; $101 + 104 = 205$;
như vậy có thể chia tổng thành từng nhóm có 3 số hạng liên tiếp mà số hạng thứ ba trong mỗi nhóm là tổng của hai số đứng ngay trước nó. Vậy tổng đã cho có thể viết :

$$\begin{aligned} & 1 + 4 + 5 + 9 + 14 + 23 + 37 + 60 + 97 + 101 + 104 + 205 \\ &= 5 + 5 + 23 + 23 + 97 + 97 + 205 + 205 \\ &= 2(5 + 23 + 97 + 205) = 2(210 + 120) \\ &= 2.330 = 660. \end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu để bài thay đổi như sau :

"Tính tổng của tám số hạng xếp thành dãy mà năm số hạng đầu là 1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120" thì việc đầu tiên là phải tìm ba số hạng cuối. Muốn thế hãy tìm ra quy luật thành lập dãy số.

Ta nhận thấy rằng : số hạng thứ hai $2 = 1.2$, số hạng thứ ba $6 = 2.3$, số hạng thứ tư $24 = 6.4$, số hạng thứ năm $120 = 24.5$. Từ đó suy ra ngay :

Số hạng thứ sáu là $120.6 = 720$, số hạng thứ bảy là $720.7 = 5040$ và số hạng thứ tám là $5040.8 = 40\,320$.

Vậy tổng phải tìm là :

$$1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5\,040 + 40\,320 = 46\,233.$$

Ta còn có thể tính tổng các chữ số của dãy số

$$10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; \dots ; 88 ; 89.$$

Muốn thế ta tính tổng các chữ số hàng đơn vị của dãy số mà chữ số hàng chục là 1, sau đó cộng với tổng các chữ số mà số hàng chục đã nhân với 10 tức là :

$$(1 + 1 + \dots + 1) \cdot 10 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 100 + 45$$

10 số 1

Tương tự: đối với dãy số mà chữ số hàng chục là 2 ta có :

$$(2 + 2 + \dots + 2) \cdot 10 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 200 + 45$$

10 số 2

.....

dãy số mà số hàng chục là 8 :

$$(8 + 8 + \dots + 8) \cdot 10 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 800 + 45$$

10 số 8

Suy ra tổng phải tìm là :

$$\begin{aligned} & 100 + 45 + 200 + 45 + \dots + 800 + 45 \\ & = 100 + 200 + \dots + 800 + 45 + \dots + 45 \\ & \qquad \qquad \qquad 8 \text{ số} \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + 8) \cdot 100 + 45 \cdot 8 = 3600 + 360 = 3960. \end{aligned}$$

Bài 7

Tính nhẩm :

a) $7.12.25 + 3.16.125 + 8.25$;

b) $4.22.87 + 11.8.36 - 2.44.23$.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài yêu cầu tính nhẩm, khác với tính nhanh là chỉ nhẩm trong óc để tìm được ngay kết quả. Vì thế cần nhớ một số tích đặc biệt như $25.4 = 100$, $125.8 = 1000$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy phân tích mỗi số hạng của tổng hoặc hiệu thành thừa số sao cho xuất hiện được các tích đặc biệt $25.4 = 100$; $125.8 = 1000$; chẳng hạn : $7.12.25 = 7.3.4.25 = 21.100 = 2100$.

● *Cách giải*

a) Phân tích các số hạng của tổng thành thừa số ta có :

$$\begin{aligned} & 7.3.4.25 + 3.2.8.125 + 2.4.25 \\ &= 21.100 + 6.1000 + 2.100 = 2100 + 6000 + 200 = 8\,300. \end{aligned}$$

b) Nhận thấy : $4.22 = 11.8 = 2.44 = 88$, do đó biểu thức đã cho có thể viết : $88.87 + 88.36 - 88.23 = 88.(87 + 36 - 23) = 88.100 = 8\,800$.

● *Khai thác bài toán*

Nếu phải tính nhẩm hai biểu thức :

$$360 : (2.3.6) + 12.25 \text{ và } 4.[(35.42.98) : (5.21.49)].125$$

thì dựa vào hai tích đặc biệt ta có thể tính nhẩm như sau :

$$\begin{aligned} (360 : 36) + 3.4.25 &= 10 + 3.100 \\ &= 10 + 300 = 310 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } 4.(35 : 5).(42 : 21).(98 : 49).125 &= 4.7.2.2.125 \\ &= 8.125.7.2 = 1000.14 = 14\,000. \end{aligned}$$

Bài 8

Tìm x biết :

a) $x + 2010 = 9098$; $1999 + x = 7001$;

b) $51\,162 - (14\,015 + x) = 1111$; $(7\,654 - x) - 1008 = 2\,222$;

c) $627 : x = 19$; $36 : x = x$.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra yêu cầu tìm số hạng chưa biết x khi biết số hạng thứ hai và tổng của chúng (câu a), tìm số trừ hoặc số bị trừ khi biết số bị trừ và hiệu hoặc khi biết số trừ và hiệu, ngoài ra số trừ $14\,015 + x$ hoặc số bị trừ $7654 - x$ tìm được lại phải tìm x cuối cùng (câu b), tìm số chia chưa biết x khi biết số bị chia và thương hoặc tìm số chia và thương chưa biết x khi chỉ biết số bị chia (câu c).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy vận dụng mối quan hệ giữa các số hạng của một tổng với tổng của chúng (câu a), mối quan hệ giữa số bị trừ, số trừ và hiệu của chúng (câu b), mối quan hệ giữa số bị chia, số chia và thương của chúng (câu c).

● *Cách giải*

a) $x = 9098 - 2010 = 7088$;

$$x = 7001 - 1999 = 5002.$$

b) $14\,015 + x = 51\,162 - 1\,111 = 50\,051$

Từ đó $x = 50\,051 - 14\,015 = 36\,036$;

$$7654 - x = 1008 + 2222 = 3230$$

Từ đó $x = 7654 - 3230 = 4424$.

c) $x = 627 : 19 = 33$;

$$x.x = 36 = 6.6. \text{ Vậy } x = 6.$$

● *Khai thác bài toán*

Việc tìm x cũng như tìm y có thể ra dưới các dạng sau :

Tìm y biết $(646\ 464 : 10\ 101) : y = y$, hoặc

Tìm các chữ số thích hợp y để $\overline{yyyy} - \overline{yyy} \neq 1$.

Với dạng thứ nhất ta thực hiện phép chia trong dấu ngoặc được kết quả là 64. Từ đó $64 = y.y$ mà $64 = 8.8$. Suy ra $y = 8$.

Với dạng thứ hai ta có một số có 4 chữ số trừ đi một số có 3 chữ số cho hiệu là 1. Do đó số $\overline{yyyy}$ phải là 1000 và số $\overline{yyy}$ phải là 999 để có $1000 - 999 = 1$.

Bài 9

Cho dãy số

150 149 148 147 ... 51 50.

Giải thích tại sao nếu điền vào ô vuông cùng dấu + hoặc dấu - thì kết quả không thể bằng 1999 ?

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho một dãy số tự nhiên liên tiếp từ số lớn 150 đến số bé 50 và giữa hai số liên tiếp đó là ô vuông mang dấu + hoặc dấu -, vấn đề là giải thích tại sao kết quả không thể là 1999

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Hãy xét từng cặp số liên tiếp (150 ; 149) ; (148 ; 147) ; ... để xem tổng các số của từng cặp hoặc hiệu của chúng là số lẻ hay số chẵn. Hãy gọi T là tổng $(150 + 149) + \dots + (51 + 50)$ hoặc hiệu $(150 - 149) - \dots - (51 - 50)$ và xét xem T gồm bao nhiêu cặp số lẻ hoặc số chẵn. Từ đó suy ra kết quả phải là số chẵn nên không thể là số lẻ 1999.

• Cách giải

Mỗi cặp số liên tiếp có tổng hoặc hiệu là số lẻ. Từ 50 đến 150 có 50 cặp số lẻ.

Tổng hoặc hiệu của 50 số lẻ phải là một số chẵn. Vì thế kết quả của phép tính không thể là số lẻ 1999.

● *Khai thác bài toán*

Nếu trong dãy số đã cho ta thay ô vuông đầu bằng dấu + tiếp theo là hai ô vuông mang dấu -, rồi đến hai ô vuông mang dấu +, ... thì sau khi thực hiện phép tính kết quả sẽ bằng bao nhiêu ?

Như vậy ta phải tính giá trị của biểu thức

$$A = 150 + 149 - 148 - 147 + 146 + 145 - \dots$$

$$\text{hay } A = 50 + (51 - 52 - 53 + 54) + (55 - 56 - 57 + 58) + \dots + (146 - 147 - 148 + 149) + 150.$$

Mỗi biểu thức trong dấu ngoặc đều bằng 0, vì thế giá trị của A bằng : $150 + 50 = 200$.

Bài 10

Tính :

a) $(1998.1999 - 1998.1998 - 1000 - 998) : 2019$.

b) $4.11 + 24 : 4 + 8$, sau đó đưa thêm dấu ngoặc một cách hợp lý và tính tiếp tất cả các biểu thức để được kết quả là số tự nhiên.

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Biểu thức trong dấu ngoặc gồm các số 1998, 1999. Tính được kết quả thì đem chia cho 2019.

b) Đề bài yêu cầu đưa thêm dấu ngoặc ở nhiều chỗ khác nhau trong biểu thức đầu tiên (không có dấu ngoặc) rồi tính giá trị mỗi biểu thức có được sao cho kết quả phải là số tự nhiên (vì có thể thêm dấu ngoặc nhưng kết quả không phải là số tự nhiên).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Lưu ý : $- 1000 - 998 = - 1998$, từ đó có thể đặt 1998 thành thừa số chung (chẳng hạn với $(a + b).c = ac + bc$ thì ngược lại $ac + bc = (a + b).c$, cách làm này gọi là đặt c làm thừa số chung) để tính toán được nhanh biểu thức trong dấu ngoặc.

b) Khi đã đưa thêm dấu ngoặc thì phải tính biểu thức trong dấu ngoặc trước và có thể đưa thêm ở nhiều chỗ, vì thế kết quả sẽ khác nhau, chẳng hạn $4(11 + 24 : 4 + 8)$; $(4.11 + 24) : 4 + 8$; v.v...

● *Cách giải*

a) Biểu thức trong ngoặc có thể viết :

$$\begin{aligned} & 1998.1999 - 1998.1998 - 1998 \\ & = 1998.(1999 - 1998 - 1) = 1998.(1999 - 1999) = 0. \end{aligned}$$

Vậy $0 : 2019 = 0$.

b) Ta có : $4.11 + 24 : 4 + 8 = 44 + 6 + 8 = 58$.

Bây giờ ta đưa thêm dấu ngoặc và sẽ được các biểu thức với các kết quả sau đây :

$$\begin{aligned} & 4.(11 + 24 : 4 + 8) = 4.(11 + 6 + 8) = 4.25 = 100 \\ & (4.11 + 24) : 4 + 8 = (44 + 24) : 4 + 8 = 68 : 4 + 8 = 17 + 8 = 25 \\ & 4.(11 + 24 : 4) + 8 = 4.(11 + 6) + 8 = 4.17 + 8 = 68 + 8 = 76 \\ & 4.(11 + 24) : 4 + 8 = 4.35 : 4 + 8 = 35 + 8 = 43 \\ & 4.11 + 24 : (4 + 8) = 44 + 24 : 12 = 44 + 2 = 46. \end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

a) Biểu thức trong dấu ngoặc có dạng tổng quát

$$n.(n + 1) - n.n - n$$

Ta có thể đặt n làm thừa số chung :

$$n(n + 1 - n - 1) = n.0 = 0.$$

Do đó có thể cho n bất cứ số tự nhiên nào để có được một để toán tương tự. Khi đó số chia có thể là bất cứ số tự nhiên nào vì $0 : a$ ($a \neq 0$) = 0.

b) Việc đưa thêm dấu ngoặc vào một biểu thức cho trước không có dấu ngoặc giúp ta làm được nhiều bài toán tương tự, nhưng muốn cho bài toán có được nhiều biểu thức khác nhau khi đưa thêm dấu ngoặc thì đề bài phải cho thế nào để kết quả là số tự nhiên ở nhiều biểu thức.

Chẳng hạn cho biểu thức $9.12 + 14 : 7 + 6$. Nếu đưa thêm dấu ngoặc như : $9.(12 + 14 : 7 + 6)$ hoặc $(9.12 + 14) : 7 + 6$

thì biểu thức thứ nhất

$$9.(12 + 14 : 7 + 6) = 9.(12 + 2 + 6) = 9.20 = 180 \text{ (là số tự nhiên)}$$

nhưng biểu thức thứ hai

$$(9.12 + 14) : 7 + 6 = (108 + 14) : 7 + 6 = 122 : 7 + 6$$

(không thể là số tự nhiên).

Bài 11

a) Viết các tích và thương sau đây dưới dạng một lũy thừa :

$$5^3.5^4.5^5 ; 8^5.8^6.8^7 ; 4^{19} : 4^{16} ; 32^{14} : 32^{12}.$$

b) So sánh các lũy thừa sau :

$$9^{15} \text{ và } 9^{14} ; 7^5 \text{ và } 8^5 ; (1998 - 1997)^{1999} \text{ và } (2003 - 2002)^{2010}$$

• Tìm hiểu đề bài

a) Các phép tính phải tìm đều là lũy thừa của cùng một cơ số là 5, là 8, là 4, là 32.

b) Hai lũy thừa cho trước để so sánh đều là lũy thừa của cùng một cơ số 9 hoặc là hai cơ số khác nhau nhưng đều cùng một số mũ 5.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Áp dụng quy tắc nhân hai lũy thừa cùng cơ số $a^m.a^n = a^{m+n}$ và quy tắc chia hai lũy thừa cùng cơ số $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$, $m \geq n$).

b) Để so sánh hai lũy thừa hãy lưu ý với $a, b, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\text{– nếu } a > b \text{ thì } a^n > b^n \quad (n \neq 0)$$

$$\text{– nếu } m > n \text{ thì } a^m > a^n \quad (a > 1)$$

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 5^3.5^4.5^5 &= 5^{3+4+5} = 5^{12} ; 8^5.8^6.8^7 = 8^{5+6+7} = 8^{18} ; \\ 4^{19} : 4^{16} &= 4^{19-16} = 4^3 ; 32^{14} : 32^{12} = 32^{14-12} = 32^2. \end{aligned}$$

$$\text{b) } 9^{15} > 9^{14} ; 7^5 < 8^5 ; 1^{1999} = 1^{2010}.$$

● *Khai thác bài toán*

Để bài có thể ra như sau :

- Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số :
- $$128 ; 64 ; 32 ; 625 ; 125 ; 25.$$

Cách giải sẽ là :

$$128 = 2^7, 64 = 2^6, 32 = 2^5 \text{ (lũy thừa của 2)}$$

$$625 = 5^4, 125 = 5^3, 25 = 5^2 \text{ (lũy thừa của 5)}.$$

- Viết các số sau đây dưới dạng tổng các lũy thừa của 10 :
- $$987\,654\,321 ; \overline{abcdef}.$$

Cách giải sẽ là :

$$987\,654\,321 = 9 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10^1 + f \cdot 10^0.$$

Bài 12

Tìm chữ số cuối cùng của các số sau :

$$0^{1999} ; 1^{1999} ; 5^{1999} ; 6^{1999} ; 9^{1999}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Các số đã cho đều có cơ số lần lượt là 0 ; 1 ; 5 ; 6 , 9 và số mũ 1999 như nhau. Yêu cầu là tìm chữ số cuối cùng của mỗi lũy thừa đã cho, tức là mỗi lũy thừa tận cùng bằng chữ số nào.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Lưu ý các số tận cùng bằng 0 khi nâng lên bất cứ lũy thừa tự nhiên nào (khác 0) cũng vẫn tận cùng bằng 0. Các số tận cùng bằng 1 khi nâng lên bất cứ lũy thừa nào (khác 0) cũng vẫn tận cùng bằng 1. Hãy xét xem điều nhận xét trên có đúng với các số tận cùng bằng 5 và bằng 6 không.

Riêng số tận cùng bằng 9 thì viết lũy thừa của 9 dưới dạng $(9^2)^x = (81)^x$ để đưa về trường hợp 1^n , chẳng hạn $9^{20} = (9^2)^{10} = (81)^{10}$.

● *Cách giải*

0^{1999} tận cùng bằng chữ số 0

1^{1999} tận cùng bằng chữ số 1

5^{1999} tận cùng bằng chữ số 5

6^{1999} tận cùng bằng chữ số 6.

Riêng đối với 9^{1999} ta biến đổi nó để đưa về dạng $(...1)^n$ như sau :

$$9^{1999} = (9^2)^{999} \cdot 9 = (81)^{999} \cdot 9 \text{ tận cùng bằng } 1 \cdot 9 = 9.$$

● *Khai thác bài toán*

Qua các ví dụ ở trên ta rút ra nhận xét sau đây :

- Tất cả những số tận cùng bằng 0 ; 1 ; 5 ; 6 khi nâng lên bất cứ lũy thừa tự nhiên nào (khác 0) đều tận cùng bằng chính các chữ số đó.

Chẳng hạn 7775^{7775} tận cùng bằng 5 ; 9996^{9996} tận cùng bằng 6.

Từ đó để tìm chữ số tận cùng của một số ta biến đổi nó (nếu có thể) để đưa về các số có tận cùng bằng 0 ; 1 ; 5 hoặc 6.

- Đối với các số tận cùng bằng 4 hoặc bằng 9 thì :

Lũy thừa của các số tận cùng bằng 4 sẽ tận cùng bằng 6 nếu số mũ chẵn và bằng 4 nếu số mũ lẻ. Chẳng hạn 14^8 tận cùng bằng 6 và 74^9 tận cùng bằng 4.

Lũy thừa của các số tận cùng bằng 9 sẽ tận cùng bằng 1 nếu số mũ chẵn và bằng 9 nếu số mũ lẻ. Chẳng hạn 1999^{12} tận cùng bằng 1 và 1999^{19} tận cùng bằng 9.

Bài 13

Tính giá trị các biểu thức sau :

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 ;$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8 + 2^9.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Biểu thức A là tổng các bình phương của 6 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 6, còn biểu thức B là tổng của 10 số hạng trong đó số hạng đầu tiên là 1 còn các số hạng tiếp theo lần lượt là lũy thừa của 2 với số mũ lần lượt là 1 ; 2 ; ... ; 9.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Đối với biểu thức A chỉ cần tính bình phương các số từ 1 đến 6 rồi tính tổng.

Đối với biểu thức B hãy nhân hai vế với 2 rồi lấy kết quả trừ đi biểu thức A từng vế để có kết quả.

● *Cách giải*

$$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8 + 2^9 \quad (1)$$

$$2.B = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ đi (1) từng vế được :

$$2.B - B = 2^{10} - 1 \text{ hay } B = 1024 - 1 = 1023.$$

● *Khai thác bài toán*

a) Có thể đổi câu A bằng : Chứng tỏ rằng biểu thức

$$C = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

là bình phương của một số tự nhiên (còn gọi là số chính phương).

Ta có $C = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$. Số 225 chính là bình phương của số 15, hay 225 là số chính phương.

b) Lại có thể rút gọn một biểu thức dạng $M : N$ với $M = 2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}$, $N = 2^{27} \cdot 5^7 + 2^{10} \cdot 5^{27}$ bằng cách viết như sau :

$$\frac{M}{N} = \frac{2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}}{2^{27} \cdot 5^7 + 2^{10} \cdot 5^{27}} = \frac{2^{13} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})}{2^{10} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})} = 2^3 = 8.$$

Bài 14

a) Thay dấu * bằng những chữ số thích hợp biết rằng từ phép nhân (A) sau khi đổi chỗ 2 thừa số cho nhau thì được phép nhân (B)

$$\begin{array}{r}
 * * * \\
 \times * 2 * \\
 \hline
 * * *
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 * * * * \\
 \hline
 * 1 * * *
 \end{array}
 \quad (A)$$

$$\begin{array}{r}
 * 2 * \\
 \times * * * \\
 \hline
 * * * *
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 * * * * \\
 \hline
 * * * * *
 \end{array}
 \quad (B)$$

b) Thay các chữ m, n, p bằng chữ số thích hợp trong phép nhân ở bên (các chữ khác nhau được thay bởi các chữ số khác nhau) :

$$\begin{array}{r}
 mp \\
 \times p p \\
 \hline
 mp \\
 \hline
 mp \\
 \hline
 p n n p
 \end{array}$$

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Hai phép nhân (A) và (B) khác nhau ở chỗ số nhân $\overline{*2*}$ ở (A) trở thành số bị nhân ở (B), ngoài ra ở (A) có ba tích riêng nhưng ở (B) chỉ có hai tích riêng. Tích ở (A) và ở (B) đều có năm chữ số nhưng tích ở (A) cho biết chữ số 1 ở hàng nghìn.

b) Số bị nhân và hai tích riêng đều là số có hai chữ số $\overline{mp}$, số nhân là số có hai chữ số giống nhau $\overline{pp}$, còn tích có hai chữ số hàng trăm và hàng chục đều là n.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Lưu ý trong phép nhân (A) số bị nhân đem nhân với 2 thì cho tích riêng là số có bốn chữ số nhưng đem nhân với chữ số hàng đơn vị hoặc với chữ số hàng trăm của số bị nhân thì lại cho số có ba chữ số. Từ đó suy ra được chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị của số nhân phải là 1.

Trong phép nhân (B) tích riêng thứ nhất có bốn chữ số, suy ra chữ số hàng đơn vị của số nhân phải là 9. Từ đó suy ra chữ số hàng trăm của số nhân.

b) Lưu ý do tích riêng thứ nhất và thứ hai đều bằng số bị nhân $\overline{mp}$ tức là $\overline{mp} \cdot p = \overline{mp}$ ta suy ra được giá trị của p bằng 1. Từ đó dựa vào tích $\overline{pnpn}$ để tính được m và n.

● *Cách giải*

a) Theo phép nhân (A) chữ số 2 nhân với số bị nhân cho tích riêng có bốn chữ số nhưng 2 nhân với chữ số hàng đơn vị hoặc chữ số hàng trăm của số bị nhân lại cho tích riêng là số có ba chữ số. Suy ra chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng trăm của số nhân phải là 1. Vậy ta có số nhân là 121 (phép nhân (A)).

Theo phép nhân (B) tích riêng thứ nhất có bốn chữ số, vậy chữ số hàng đơn vị của số nhân phải là 9 để có $121.9 = 1089$ (nếu chữ số hàng đơn vị của số nhân là 8 thì $121.8 = 968$ là số có ba chữ số trái với bài ra).

Phép nhân (B) bây giờ trở thành :

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times \quad *09 \\ \hline 1089 \\ *** \\ \hline *1*89 \end{array}$$

Từ đó suy ra chữ số hàng trăm của số nhân trong phép nhân (B) phải là 5, tức là số nhân là 509.

Tóm lại ta có phép nhân (B) như sau :

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times \quad 509 \\ \hline 1089 \\ 6050 \\ \hline 61589 \end{array}$$

b) Dựa vào phép nhân ta thấy rằng : số bị nhân $\overline{mp}$ đem nhân với p cho tích cũng là $\overline{mp}$, tức là :

$$\overline{mp} \cdot p = \overline{mp}, \text{ suy ra } p = 1.$$

Do khi cộng hai tích riêng là $\overline{mp}$ ta được tích $\overline{pnnp}$ nên :

$$m + p = n + 10 \text{ hay } m + 1 = n + 10$$

Suy ra $m = 9, n = 0$. Do đó số bị nhân phải là 91, số nhân là 11.

Ta có phép nhân như ở bên :

$$91.11 = 1001.$$

Bài 15

a) Thay các chữ x, y, z bằng chữ số thích hợp sao cho :

$$\overline{xx} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{yz} = \overline{xyzxyz}$$

(Các chữ khác nhau được thay bằng các chữ số khác nhau).

b) Thay các chữ m, n, p, q bằng chữ số thích hợp sao cho :

$$\overline{mpp} \cdot \overline{n} = \overline{qnm}, \text{ trong đó tích } \overline{qnm} \text{ là số lẻ}$$

(Các chữ khác nhau được thay bằng các chữ số khác nhau).

● Tìm hiểu đề bài

a) Biểu thức ở bên trái dấu $=$ là tích của ba thừa số $\overline{xx}, \overline{xyz}, \overline{yz}$ mà kết quả ở bên phải dấu $=$ là số có sáu chữ số $\overline{xyzxyz}$ gồm thừa số $\overline{xyz}$ viết hai lần liên nhau.

b) Đề bài cho tích $\overline{qnm}$ là một số lẻ.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy đưa phép tính tích của ba thừa số $\overline{xx} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{yz}$ về phép tính tích của hai thừa số $\overline{xx} \cdot \overline{yz}$, bằng cách chia số $\overline{xyzxyz}$ cho $\overline{xyz}$ được thương là 1001.

Từ đó phân tích 1001 ra hai thừa số dạng $\overline{xx}$ và $\overline{yz}$ để tìm được các giá trị của x, y, z .

b) Do tích $\overline{qnm}$ là số lẻ nên $\overline{mpp}$ và $\overline{n}$ cũng là số lẻ. Suy ra các chữ số m, n, p phải lẻ. Loại các trường hợp $n = 1$ và 5, $pp = 1$ và 5. Từ đó mà suy luận tiếp.

● Cách giải

a) Do tích $\overline{xx} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{yz}$ bằng $\overline{xyzxyz}$ tức là $\overline{xyz} \cdot 1001$ nên chia $\overline{xyzxyz}$ cho $\overline{xyz}$ ta được :

$$\overline{xx} \cdot \overline{yz} = 1001.$$

Do 1001 phân tích được dưới dạng 77.13 nên suy ra $x = 7$, $y = 1$, $z = 3$ và $\overline{xyz} = 713$.

Thử lại : $77.713.13 = 713.1001 = 713713$.

b) Do tích $\overline{qnm}$ là số lẻ nên hai thừa số $\overline{mnp}$ và n cũng là số lẻ. Suy ra m, n, p phải là những chữ số lẻ : 1, 3, 5, 7, 9.

Loại các trường hợp $n = 1, p = 1, n = 5, p = 5$ vì sẽ dẫn tới $p = m = n$ trái với đề bài. Lần lượt xét n và p lấy các giá trị 9 và 7 ; 9 và 3 ; 7 và 3 để tính m rồi chú ý tích có ba chữ số. Sẽ tìm được $n = 3, p = 7, m = 1$. Vậy : $177.3 = 531$.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 16

a) Cho số 88 888 888, hãy dùng ba dấu + viết giữa các chữ số để được kết quả là 112 và dùng bốn dấu + để được kết quả là 1000.

b) Cho số $\underbrace{55 \dots 5}_{20 \text{ chữ số } 5}$, hãy dùng chín dấu + viết giữa các chữ số để được kết quả là 1000.

Bài 17

Tính tổng và hiệu của số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau và số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau.

Bài 18

a) Để viết tất cả các số có hai chữ số thì phải dùng bao nhiêu chữ số 1 ?

b) Tính nhanh $M = 214 + 1999 + 786 + 111 - 1000$.

Bài 19

Chứng tỏ rằng hai biểu thức P và Q bằng nhau :

$$P = 789.754754 ; \quad Q = 754.789789.$$

Bài 20

Chúng tỏ rằng $\underbrace{11 \dots 1}_{20 \text{ chữ số } 1}$ $\underbrace{22 \dots 2}_{20 \text{ chữ số } 2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 21

Viết các số sau dưới dạng tổng các lũy thừa của 10 :

$$19991999 ; \overline{xyztv}.$$

Bài 22*

Các số $10 !$ và $100 !$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

(Kí hiệu $n !$, đọc là n giai thừa, là tích của n số tự nhiên đầu tiên từ 1 đến n tức là :

$$n ! = 1.2.3 \dots (n - 1).n).$$

Bài 23*

a) Chứng tỏ rằng các biểu thức

$M = 1^3 + 2^3$, $N = 1^3 + 2^3 + 3^3$, $P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ đều viết được dưới dạng số chính phương.

b) Tính nhanh :

$$\frac{23456}{(23457)^2 - (23456.23458)}$$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 16

Hướng dẫn. a) Bắt đầu số 88 (với tổng bằng 112) và bằng số 888 (với tổng bằng 1000) ;

b) Bắt đầu bằng số 555.

Cách giải. a) $88 + 8 + 8 + 8 = 112$

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000 ;$$

b) $555 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 5 = 1000.$

Bài 17

Hướng dẫn. Viết số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau là 9876 và số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau là 1023.

Cách giải. Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau là 9876, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau là 1023.

$$\text{Tổng } 9876 + 1023 = 10\,899 ;$$

$$\text{Hiệu } 9876 - 1023 = 8853.$$

Bài 18

Hướng dẫn. a) Viết tất cả số có hai chữ số rồi xét xem có bao nhiêu chữ số 1 từ 10 đến 19, từ 20 đến 29, ..., từ 90 đến 99.

b) Lưu ý : $214 + 786 = 1000$

Cách giải.

a) Tất cả các số có hai chữ số là :

$$10 ; 11 ; 12 ; 13 ; \dots ; 97 ; 98 ; 99.$$

- Từ 10 đến 19 có mười chữ số 1 ở hàng chục và một chữ số 1 ở hàng đơn vị của số 11, tức là có cả thảy 11 chữ số 1.

- Từ 20 đến 29 chỉ có một chữ số 1 ở số 21

Tương tự từ 30 đến 39 có một chữ số 1 ở số 31, từ 40 đến 49 có một chữ số 1 ở số 41, từ 50 đến 59, ..., từ 90 đến 99 có chữ số 1 ở các số 51 ; 61 ; 71 ; 81 và 91.

Như vậy có cả thảy : $11 + 8 = 19$ (chữ số 1).

b)
$$\begin{aligned} M &= 214 + 786 + 1999 + 111 - 1000 \\ &= 1000 + 2110 - 1000 = 2110. \end{aligned}$$

Bài 19

Hướng dẫn. Phân tích $754754 = 754.1001$, tương tự $789789 = 789.1001$

Cách giải. $P = 789.754754 = 789.754.1001$

$$Q = 754.789789 = 754.789.1001$$

Do đó $P = Q$.

Bài 20

Hướng dẫn. Hãy chứng tỏ rằng kết quả là tích của hai số tự nhiên liên tiếp $33\dots 3$ (20 chữ số 3) và $33\dots 4$ (19 chữ số 3).

Cách giải. Ta có thể viết số đã cho như sau :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{11\dots 1}_{20 \text{ chữ số } 1} \quad \underbrace{22\dots 2}_{20 \text{ chữ số } 2} = \underbrace{11\dots 1}_{20} \underbrace{00\dots 0}_{20} + \underbrace{22\dots 2}_{20} \\
 &= \underbrace{11\dots 1}_{20} \quad \underbrace{(100\dots 0 + 2)}_{20} = \underbrace{11\dots 1}_{20} \cdot 3 \underbrace{(33\dots 34)}_{19} \\
 &= \underbrace{33\dots 3}_{20} \cdot \underbrace{33\dots 34}_{19}
 \end{aligned}$$

Kết quả chứng tỏ đây là tích của hai số tự nhiên liên tiếp $33\dots 3$ (20 chữ số 3) và $33\dots 4$ (19 chữ số 3).

Bài 21

Hướng dẫn. Chữ số 1 đầu tiên có thể viết 1.10^7 , tiếp đến chữ số 9 viết 9.10^6 , ...

Cách giải. $19991999 = 1.10^7 + 9.10^6 + 9.10^5 + 9.10^4 + 1.10^3 + 9.10^2 + 9.10^1 + 9.10^0$

$$\overline{xyztv} = x.10^4 + y.10^3 + z.10^2 + t.10^1 + v.10^0.$$

Bài 22*

Hướng dẫn. Nhận xét $10! = 1.2.3\dots 10$ có hai bội của 5 là 5 và $5.2 = 10$ suy ra số bội của 5 chính bằng $10 : 5 = 2$.

Cách giải. Ta nhận thấy rằng :

$$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$$

có hai bội của 5 là 5 và $5.2 = 10$ nên tận cùng bằng số bội của 5 có trong $10!$ tức là 2 chữ số 0 (số bội của 5 ở đây là $10 : 5 = 2$).

Với $100! = 1.2.3\dots 99.100$ ta có $100 : 5 = 20$ (bội của 5) và $100 : 25 = 4$ (bội của 5) do đó $100!$ tận cùng bằng 24 chữ

số 0 (lưu ý là tích của một số chẵn với một số là bội của 5 thì có tận cùng là 0).

Bài 23*

Hướng dẫn. a) Tính trực tiếp giá trị các lập phương để có được giá trị của M, N, P.

b) Đặt $23456 = x$ thì $23455 = x - 1$, $23457 = x + 1$, rồi viết biểu thức ở mẫu theo x sẽ được mẫu bằng 1.

Cách giải.

$$a) M = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$N = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$$

$$P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2.$$

b) Nhận xét :

Số 23 457 ở mẫu lớn hơn số 23456 ở tử là 1 và số 23 458 ở mẫu lại lớn hơn số 23 457 là 1. Như thế nếu đặt $23\ 456 = x$ thì biểu thức ở mẫu sẽ là :

$$(x + 1)^2 - x(x + 2) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1$$

Mẫu bằng 1 nên biểu thức đã cho bằng tử tức là 23 456.

III. CÁC BÀI TOÁN TRONG N

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

LOẠI TÌM CÁC SỐ

Bài 1

Tìm hai số có tổng bằng 46 biết rằng khi chia số lớn cho số bé ta được thương là 8 và dư 1.

- *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho tổng của hai số và phép chia có dư của hai số đó. Từ đó mà tìm hai số.

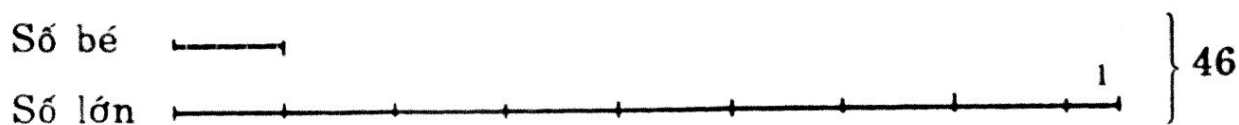
- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Bài toán này thuộc loại toán tìm hai số biết tổng và hiệu của chúng hoặc biết tổng (hiệu) và tỉ số của chúng, mà cách giải là vẽ sơ đồ đoạn thẳng biểu thị hai số đó. Từ đó tìm được số nhỏ bằng $(\text{tổng} - \text{hiệu}) : 2$ hoặc số lớn bằng $(\text{tổng} + \text{hiệu}) : 2$.

Ở đây do đã biết số lớn chia cho số bé được thương là 8 và dư 1 nên nếu lấy số lớn trừ đi số dư 1 thì được 8 lần số bé ($a = bq + r$, suy ra $a - r = bq$ hay $a - 1 = 8.b$), từ đó mà tìm được số bé.

- *Cách giải*

Vẽ sơ đồ :



Ta có 9 lần số bé bằng : $46 - 1 = 45$

Số bé là : $45 : 9 = 5$

Số lớn là : $46 - 5 = 41$.

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi đề bài như sau :

"Tìm hai số biết tổng của chúng gấp 3 lần hiệu và bằng $\frac{1}{2}$ tích của chúng".

Cách giải như sau : coi hiệu hai số là 1 phần thì tổng là 3 phần, số lớn là 2 phần, số bé là 1 phần. Thế thì số bé nhỏ thua tổng một số bằng 2 lần nó. Theo bài ra tổng bằng $\frac{1}{2}$ tích, do đó số bé nhỏ thua tích là 6 lần.

Vậy số lớn bằng 6 và số bé bằng 3.

Bài 2

Ba số chẵn liên tiếp có tổng của số nhỏ nhất và số lớn nhất bằng 108. Tìm ba số chẵn đó.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho ba số chẵn liên tiếp mà tổng của số nhỏ nhất và số lớn nhất bằng 108, tức cũng là cho hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Nếu cho ba số chẵn liên tiếp bất kì thì cũng là cho hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất và hiệu đó luôn luôn bằng 4. Bài toán trở thành : tìm hai số biết tổng (108) và hiệu của chúng (4), mà cách giải đơn giản.

● *Cách giải*

Hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong ba số chẵn liên tiếp luôn bằng 4. Biết tổng hai số là 108 và hiệu của chúng là 4, ta có ngay (xem hướng dẫn bài 1) :

Số nhỏ nhất là : $\frac{108 - 4}{2} = 52$

Số lớn nhất là : $108 - 52 = 56$

Vậy ba số chẵn liên tiếp là :

$$52 ; 54 ; 56.$$

● *Khai thác bài toán*

Ở bài ra ta có thể đổi số chẵn thành số lẻ, chẳng hạn tìm ba số lẻ liên tiếp biết tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 154.

Khi đó hiệu hai số này vẫn luôn bằng 4. Thành thử ta có ngay số nhỏ là : $(154 - 4) : 2 = 75$.

Từ đó ba số lẻ liên tiếp phải tìm là 75 ; 77 và 79.

Bài toán có thể mở rộng cho 5 số liên tiếp, 7 số liên tiếp v.v... Nếu là 5 số liên tiếp thì hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất sẽ là 8, nếu là 7 số liên tiếp thì hiệu này sẽ là 12. Ví dụ : nếu tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong 7 số chẵn liên tiếp bằng 116 thì hiệu của chúng là 12. Từ đó :

Số nhỏ nhất là : $(116 - 12) : 2 = 52$.

Vậy 7 số chẵn liên tiếp là :

$$52 ; 54 ; 56 ; 58 ; 60 ; 62 \text{ và } 64.$$

Bài 3

Năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con. Sau 10 năm nữa tuổi bố hơn tuổi con là 32 tuổi. Hỏi năm nay con bao nhiêu tuổi, bố bao nhiêu tuổi ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra chỉ cho biết năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con và sau 10 năm nữa bố sẽ hơn con 32 tuổi. Lưu ý đừng nhầm cho

rằng năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con thì sau 10 năm nữa cũng vậy !

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Sau 10 năm nữa tuổi bố sẽ hơn tuổi con là 32 tuổi, điều này có nghĩa là hiện nay tuổi bố hơn con là 32 tuổi, vì hiệu giữa tuổi bố và con không đổi theo thời gian.

Do hiện nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con mà hiệu giữa tuổi bố và tuổi con là 32, đây là bài toán về tìm hai số biết hiệu và tỉ số của chúng. Từ đó ta tìm được tuổi con, suy ra tuổi bố.

● *Cách giải*

Hiệu giữa tuổi bố và tuổi con luôn bằng 32, mà tuổi bố hiện nay gấp 5 lần tuổi con, suy ra tuổi con là :

$$\frac{32}{5 - 1} = \frac{32}{4} = 8 \quad (\text{tuổi})$$

Tuổi bố là : $8.5 = 40$ (tuổi).

● *Khai thác bài toán*

Ta có thể đổi bài toán như sau :

"Năm nay tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con và tổng số tuổi của mẹ và con là 60. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa tuổi mẹ sẽ gấp 3 lần tuổi con ?"

Do tuổi hai mẹ con cộng lại là 60 tuổi mà tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con nên ta có ngay tuổi con là 10 và tuổi mẹ là 50. Như vậy mẹ hơn con 40 tuổi. Hiệu này không đổi theo thời gian nên khi tuổi mẹ gấp 3 tuổi con thì hiệu 40 tuổi này chính là 2 lần tuổi mới của con.

Do đó lúc đó tuổi con sẽ là $40 : 2 = 20$ (tuổi), tức là sau 10 năm nữa và tuổi mẹ sẽ là $50 + 10 = 60$ (tuổi). Rõ ràng tuổi mẹ sẽ gấp 3 lần tuổi con.

Bài 4

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có hai chữ số mà tổng các chữ số bằng 12.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài có thể hiểu như sau : nếu trong các số có hai chữ số mà tổng hai chữ số này bằng 12 thì số nhỏ nhất là số nào ?

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tìm tất cả những số có hai chữ số mà tổng hai chữ số này bằng 12, rồi chọn số nhỏ nhất trong các số này.

● *Cách giải*

Nếu tổng hai chữ số bằng 12 thì hai chữ số này có thể là 3 và 9 ; 4 và 8 ; 5 và 7 ; 6 và 6. Do đó ta có bảy số 39 ; 48 ; 57 ; 75 ; 84 ; 93 và 66 trong đó số 39 là số nhỏ nhất.

● *Khai thác bài toán*

Nếu đề bài yêu cầu tìm số nhỏ nhất có 3 chữ số thì cách làm như sau :

$$\begin{aligned}12 &= 0 + 3 + 9 = 1 + 2 + 9 = 2 + 3 + 7 \\&= 3 + 3 + 6 = 4 + 5 + 3 \\&= 5 + 6 + 1 = 6 + 6 + 0. \\&= \dots\end{aligned}$$

Trong các số 390 ; 129 ; 237 ; 336 ; 345 ; 156 ; 660... thì số nhỏ nhất thỏa mãn bài ra là 129.

Nếu yêu cầu tìm số nhỏ nhất có 4 chữ số thì ta phân tích 12 như sau :

$$\begin{aligned}12 &= 0 + 1 + 3 + 8 = 1 + 1 + 1 + 9 = 1 + 1 + 2 + 8 = \\&= 1 + 1 + 3 + 7 = \dots \text{ và số nhỏ nhất thỏa mãn bài ra là } 1038.\end{aligned}$$

Tương tự nếu đề bài là tìm số nhỏ nhất có 5 chữ số thì ta có :

$$\begin{aligned}12 &= 0 + 1 + 1 + 1 + 9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 8 = \\&= 1 + 1 + 1 + 2 + 7 = \dots\end{aligned}$$

và số nhỏ nhất phải tìm sẽ là 10119.

Bài 5

Số nhà bạn Trâm Anh là một số có hai chữ số mà tổng hai chữ số đó bằng 13. Tìm số nhà của bạn ấy biết rằng số nhà đó trừ đi số viết theo thứ tự ngược lại bằng 45.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra cho hai điều kiện để tìm số $\overline{ab}$: đó là tổng $a + b = 13$ và hiệu $\overline{ab} - \overline{ba} = 45$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hiệu $\overline{ab} - \overline{ba} = 45$ chứng tỏ chữ số hàng chục a lớn hơn chữ số hàng đơn vị. Hãy tìm tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ vì nếu biết tổng và hiệu hai số $\overline{ab}$ và $\overline{ba}$ thì ta suy ra ngay số phải tìm $\overline{ab}$. Tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ có thể viết dưới dạng cấu tạo số $10a + b + 10b + a$, rồi kết hợp với điều kiện $a + b = 13$ để tìm được giá trị của tổng này.

● *Cách giải*

Tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ có thể viết dưới dạng sau :

$$10a + b + 10b + a = 10(a + b) + (a + b)$$

mà $a + b = 13$ nên tổng này bằng $10.13 + 13 = 143$.

Biết tổng hai số $\overline{ab}$ và $\overline{ba}$ và hiệu của chúng (45), ta có ngay :

$$\overline{ab} = \frac{143 + 45}{2} = 94.$$

(Rõ ràng $9 + 4 = 13$ và $94 - 49 = 45$).

● *Khai thác bài toán*

Có thể thay đổi các số 13 và 45 bằng các số khác thích hợp, chẳng hạn tìm số có hai chữ số biết tổng hai chữ số là 12 và hiệu giữa số có hai chữ số và số viết theo thứ tự ngược lại là 18.

Bài 6

Cho hai số có hai chữ số $\overline{pq}$, nếu viết tiếp $\overline{pq}$ vào bên phải số đã cho để được số có 4 chữ số $\overline{ppqq}$ thì số mới này gấp mấy lần số ban đầu ? Thử lại bằng ví dụ cụ thể và rút ra kết luận.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho số $\overline{pq}$ và yêu cầu khi viết thành $\overline{pqpq}$ thì số mới sẽ gấp mấy lần số cũ, tức là số ban đầu $\overline{pq}$ sẽ tăng bao nhiêu lần ? Từ đó rút ra kết luận tổng quát.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy tính xem số $\overline{pqpq}$ bằng số $\overline{pq}$ nhân với số nào bằng cách viết $\overline{pqpq} = 100\overline{pq} + \overline{pq}$.

Kết luận tổng quát là : nếu viết vào bên phải một số bất kì có hai chữ số một lần nữa số đó thì số ban đầu sẽ tăng lên bao nhiêu lần.

● *Cách giải*

Số $\overline{pqpq}$ có thể viết như sau :

$$100\overline{pq} + \overline{pq} = 101 \cdot \overline{pq}$$

Vậy số $\overline{pq}$ được tăng lên 101 lần, hay số mới $\overline{pqpq}$ gấp 101 lần số ban đầu.

Ví dụ : $9797 = 97 \cdot 101$

Kết luận : Với bất kì số có hai chữ số nào nếu ta viết thêm một lần nữa số đó vào bên phải số ban đầu thì số ban đầu sẽ tăng lên 101 lần :

$$\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu với số $\overline{pq}$ ta viết tiếp hai lần $\overline{pq}$ vào bên phải thì sẽ được số có 6 chữ số $\overline{pqpqpq}$ gấp 10101 lần số ban đầu $\overline{pq}$, ví dụ : $242424 = 10101 \cdot 24$. Với trường hợp số có 3 chữ số $\overline{abc}$ thì số $\overline{abcabc}$ sẽ bằng 1001 lần số ban đầu $\overline{abc}$ vì :

$$\overline{abcabc} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$$

LOẠI CHUYỂN ĐỘNG ĐỀU

Bài 7

Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 190 km sau 2 giờ thì gặp nhau. Xe máy đi từ A có vận

tốc lớn hơn xe máy đi từ B là 5 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe máy và khoảng cách từ chỗ gặp nhau đến tỉnh A.

● *Tìm hiểu đề bài*

Theo đề bài hai xe đi ngược chiều nhau nhưng cùng một lúc và sau 2 giờ thì gặp nhau trên quãng đường AB dài 190 km. Yêu cầu tìm vận tốc hai xe máy khi biết vận tốc xe này hơn vận tốc xe kia là 5 km/h và tìm quãng đường từ chỗ gặp nhau đến A (chứ không phải đến B).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy đưa về bài toán mà hai xe có vận tốc như nhau chạy trên quãng đường ngắn hơn AB là $5.2 = 10$ (km), tức là hai xe cùng vận tốc đi cùng một lúc trên quãng đường dài $190 - 10 = 180$ (km) để gặp nhau sau 2 giờ. Từ đó tìm được ngay vận tốc của xe đi từ B.

● *Cách giải*

Sau 2 giờ xe đi từ A đi được quãng đường dài hơn xe đi từ B là :

$$5.2 = 10 \text{ (km)}$$

Quãng đường mà hai xe cùng đi với vận tốc bằng vận tốc xe đi từ B là : $190 - 10 = 180$ (km)

Trong 2 giờ xe đi từ B đi được :

$$180 : 2 = 90 \text{ (km)}$$

Vận tốc xe đi từ B là :

$$90 : 2 = 45 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc xe đi từ A là :

$$45 + 5 = 50 \text{ (km/h)}$$

Quãng đường từ chỗ gặp nhau đến A là :

$$50.2 = 100 \text{ (km)}$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán thành hai xe máy cùng một lúc đi cùng chiều từ hai địa điểm cách nhau 70 km thì gặp nhau sau 7 giờ, nếu đi ngược chiều thì gặp nhau sau 1 giờ, tính vận tốc của mỗi xe.

Cách giải sẽ như sau :

Tổng vận tốc của hai xe là : $70 : 1 = 70 \text{ (km/h)}$

Hiệu vận tốc của hai xe là : $70 : 7 = 10 \text{ (km/h)}$

Vận tốc của xe đi nhanh là : $(70 + 10) : 2 = 40 \text{ (km/h)}$

Vận tốc của xe đi chậm là : $(70 - 10) : 2 = 30 \text{ (km/h)}$

hoặc $70 - 40 = 30 \text{ (km/h)}$.

Ta có thể rút ra nhận xét sau đây :

- Nếu hai xe chuyển động cùng chiều thì thời gian để đuổi kịp nhau bằng khoảng cách chia cho hiệu hai vận tốc.

- Nếu hai xe chuyển động ngược chiều thì thời gian để gặp nhau bằng khoảng cách chia cho tổng hai vận tốc.

Bài 8

Hai xe buýt chở khách khởi hành cùng một lúc từ hai bến A và B và đi ngược chiều nhau. Xe thứ nhất chạy từ A đến B và trở về ngay bến A, xe thứ hai chạy từ B đến A và trở về ngay bến B. Hai xe gặp nhau lần đầu tại M cách B là 10 km, gặp nhau lần thứ hai tại N cách A là 8 km. Hỏi hai bến A và B cách nhau bao nhiêu kilômet ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Hai xe đó chạy ngược chiều nhau từ hai bến A và B và không nghỉ tại bến mà trở về ngay bến xuất phát (theo chiều $A \rightarrow B \rightarrow A$ và $B \rightarrow A \rightarrow B$). Cả hai chạy cùng một lúc và gặp nhau hai lần : lần đầu cách B là 10 km và lần thứ hai cách A là 8 km. Vấn đề đặt ra là tính quãng đường AB.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Do chạy cùng một lúc nên lần thứ nhất hai xe gặp nhau khi đã đi được quãng đường bằng quãng đường AB và khi đó xe đi từ bến B đã cách bến là 10 km. Lần gặp thứ hai thì hai xe đã đi được quãng đường gấp 3 lần quãng đường AB, hãy tính xem khi đó xe đi từ bến B lần này đã đi được mấy kilômet. Từ đó tính được quãng đường AB giữa hai bến.

● *Cách giải*

Khi hai xe gặp nhau lần đầu tại M thì cả hai đã chạy được quãng đường bằng quãng đường AB và xe từ bến B đã chạy được 10 km. Khi hai xe gặp nhau lần thứ hai tại N thì cả hai đã chạy được quãng đường gấp 3 lần quãng đường AB và khi đó xe chạy từ bến B đã chạy được $10 \cdot 3 = 30$ (km).

Quãng đường 30 km này chính là quãng đường AB cộng thêm 8km.

Vậy quãng đường giữa hai bến A và B dài :

$$30 - 8 = 22 \text{ (km)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu giả sử hai xe cứ tiếp tục chạy như trên nhiều chuyến không nghỉ và lại gặp nhau lần thứ ba cách bến B là 6 km, thì vẫn lí luận được như trên. Nhưng vì gặp nhau lần thứ ba nên tổng quãng đường hai xe đã chạy được bằng 5 lần quãng đường AB (chứ không phải bằng 3 lần như khi gặp nhau lần thứ hai).

Khi đó xe chạy từ B đã chạy được $10 \cdot 5 = 50$ (km). Quãng đường này chính bằng 2 lần quãng đường AB cộng thêm 6 km.

Vậy quãng đường AB dài :

$$(50 - 6) : 2 = 22 \text{ (km)}.$$

Bài 9

Một canô xuôi dòng từ bến M đến bến N mất 4 giờ và ngược dòng từ N trở về M mất 5 giờ. Vận tốc lúc xuôi hơn lúc ngược

dòng là 5 km/h. Tính vận tốc canô khi xuôi dòng và khoảng cách giữa hai bến sông.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra cho biết thời gian canô xuôi dòng là 4 giờ và ngược dòng là 5 giờ và vận tốc lúc xuôi (vận tốc thực của canô + vận tốc dòng nước) hơn lúc ngược (vận tốc thực của canô - vận tốc dòng nước) là 5 km/h. Yêu cầu tính vận tốc canô khi xuôi dòng (chứ không phải vận tốc thực của canô) và khoảng cách giữa hai bến sông.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tính xem trong 4 giờ canô xuôi dòng một quãng sông nhiều hơn lúc ngược dòng cũng trong 4 giờ là mấy kilômet. Với quãng sông dài hơn này thì canô khi ngược dòng phải đi trong $5 - 4 = 1$ (giờ). Từ đó mà tính được vận tốc canô khi ngược dòng, khi xuôi dòng và khoảng cách giữa hai bến sông.

● *Cách giải*

Trong 4 giờ quãng sông mà canô khi xuôi dòng nhiều hơn lúc ngược dòng cũng trong 4 giờ là :

$$5.4 = 20 \text{ (km)}$$

Thời gian mà canô khi ngược dòng phải đi quãng sông dài này là :

$$5 - 4 = 1 \text{ (giờ)}$$

Vận tốc canô khi ngược dòng là :

$$20 : 1 = 20 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc canô khi xuôi dòng là :

$$20 + 5 = 25 \text{ (km/h)}$$

Khoảng cách giữa hai bến sông là :

$$25.4 = 100 \text{ (km)}, \text{ hoặc } 20.5 = 100 \text{ (km)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán tìm vận tốc lúc xuôi dòng bằng yêu cầu tìm vận tốc thực của canô và vận tốc dòng nước (tức cũng là vận tốc lúc xuôi dòng) như sau :

Một canô xuôi dòng từ bến M đến bến N cách nhau 100 km hết 4 giờ và ngược dòng từ N về M hết 5 giờ. Tính vận tốc thực của canô và vận tốc dòng nước. Bài này khác bài ra ở trên là cho biết khoảng cách giữa hai bến. Cách giải như sau :

Vận tốc canô khi xuôi dòng là :

$$100 : 4 = 25 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc canô khi ngược dòng là :

$$100 : 5 = 20 \text{ (km/h)}.$$

Do vận tốc khi xuôi dòng bằng vận tốc thực của canô cộng thêm vận tốc dòng nước, còn khi ngược dòng thì phải trừ đi vận tốc dòng nước, nên ta có ngay vận tốc dòng nước là :

$$(25 - 20) : 2 = 2,5 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc thực của canô là :

$$25 - 2,5 = 22,5 \text{ (km/h)}, \text{ hoặc } 20 + 2,5 = 22,5 \text{ (km/h)}.$$

Bài 10

Một ô tô vận tải đi quãng đường AB mất 7 giờ, một xe du lịch chỉ đi hết quãng đường này trong 5 giờ. Biết rằng vận tốc xe du lịch lớn hơn vận tốc xe vận tải là 12 km/h.

Tìm vận tốc của mỗi ô tô và quãng đường AB.

● *Tìm hiệu đề bài*

Bài ra cho thời gian mà hai xe vận tải và xe du lịch cùng đi một quãng đường như nhau với vận tốc xe du lịch lớn hơn vận tốc xe tải là 12 km/h. Thời gian đi là 7 giờ đối với xe vận tải,

5 giờ đối với xe du lịch. Yêu cầu tìm vận tốc mỗi ô tô và quãng đường AB.

● *Hướng dẫn cách tìm lại bài*

Bài ra cho hiệu hai vận tốc $v_d - v_t$ (xe du lịch) và v_t (xe tải) là 12 km/h và tỉ số hai vận tốc bằng quãng qua thời gian mỗi xe đi cùng một quãng đường là $v_d \cdot 5 = v_t \cdot 7$. Đây là bài toán tìm hai số biết hiệu của chúng và tỉ số của chúng mà cách giải như sau :

$$\begin{aligned} v_d - v_t &= 12 \text{ (km/h)} \\ v_d \cdot 5 &= v_t \cdot 7 \\ \text{hay } \frac{v_d}{v_t} &= \frac{7}{5} \quad \text{Tỉ số } v_d : v_t = 7 : 5 \text{ có thể viết :} \\ \frac{v_d}{7} &= \frac{v_t}{5} = \frac{v_d - v_t}{7 - 5} = \frac{12}{2} = 6. \end{aligned}$$

Từ đó $v_d = 6 \cdot 7 = 42$ (km/h) và $v_t = 6 \cdot 5 = 30$ (km/h).

Quãng đường AB dài :

$$42 \cdot 5 = 210 \text{ (km), hoặc } 30 \cdot 7 = 210 \text{ (km).}$$

● *Khai thác bài toán*

Đáng lẽ phải tìm vận tốc xe tải và xe du lịch như bài này ta có thể đổi bài toán bằng cách cho biết vận tốc hai xe (là 42 và 30 km/h) và nếu đi cùng một lúc thì xe du lịch đến trước xe tải 2 giờ. Vấn đề đặt ra là tìm quãng đường AB.

Ta có hai cách giải bài toán mới này như sau :

Cách 1

Nếu xe du lịch khởi hành sau xe tải 2 giờ thì rõ ràng hai xe đến B cùng một lúc.

Khi xe du lịch bắt đầu đi thì xe tải đã đi được :

$$30 \cdot 2 = 60 \text{ (km)}$$

Để đuổi kịp xe tải xe du lịch phải cần một thời gian là :

$$\frac{60}{42 - 30} = \frac{60}{12} = 5 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường AB dài :

$$42.5 = 210 \text{ (km)}.$$

Cách 2

Đưa bài toán mới về tìm hai số biết hiệu và tỉ số của chúng.

Do quãng đường đi AB như nhau nên thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc, tức là :

$$\frac{v_d}{v_t} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}.$$

Suy ra $\frac{\tau_d}{\tau_t} = \frac{5}{7}$ hay

$$\frac{\tau_t}{7} = \frac{\tau_d}{5} = \frac{\tau_t - \tau_d}{7 - 5} = \frac{2}{2} = 1.$$

Như thế xe tải đi quãng đường AB mất 7 giờ và xe du lịch đi mất 5 giờ. Do đó quãng đường AB dài :

$$30.7 = 210 \text{ (km)}, \text{ hoặc } 42.5 = 210 \text{ (km)}.$$

Bài 11

Hai người A và B đi xe đạp từ hai thành phố cách nhau 96 km với vận tốc theo thứ tự là 15 km/h (xe đạp A) và 12 km/h (xe đạp B) và đi ngược chiều nhau. Người đi xe đạp A đi được 60 km thì gặp người đi xe đạp B. Hỏi người nào xuất phát trước và trước người kia mấy giờ ?

● Tìm hiểu đề bài

Theo bài ra thì hai người đi xe đạp không xuất phát cùng một lúc mà người này đi trước người kia một thời gian. Chỉ biết rằng người đi xe đạp với vận tốc 15 km/h đi được 60 km thì

gặp người đi xe đạp với vận tốc 12 km/h đi ngược chiều. Yêu cầu là tìm xem ai đi trước và đi trước mấy giờ.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết phải tìm thời gian mà người đi xe đạp A đã đi 60 km cho tới lúc gặp nhau. Khi đó người đi xe đạp B đã đi được mấy giờ mới đến chỗ gặp nhau. Từ đó suy ra ngay người nào xuất phát trước do phải đi thời gian nhiều hơn.

● *Cách giải*

Thời gian người đi xe đạp A đã đi cho tới khi gặp nhau :

$$60 : 15 = 4 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường mà người đi xe đạp B đã đi cho tới khi gặp nhau :

$$96 - 60 = 36 \text{ (km)}$$

Thời gian người đi xe đạp B đã đi cho tới khi gặp nhau là :

$$36 : 12 = 3 \text{ (giờ)}$$

Vậy người đi xe đạp A xuất phát trước người đi xe đạp B và đi trước :

$$4 - 3 = 1 \text{ (giờ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể thay bài toán bằng một bài tương tự như sau :

Hai ô tô khởi hành từ hai tỉnh A và B cách nhau 306 km và đi ngược chiều nhau. Xe ô tô đi từ A có vận tốc 45 km/h, xe ô tô đi từ B có vận tốc 42 km/h. Biết rằng xe từ A đi được 180 km thì gặp xe đi từ B. Hỏi xe ô tô nào khởi hành trước và trước xe ô tô kia mấy giờ ?

Để giải bài này ta cũng phải tính thời gian xe ô tô từ A đi được 180 km là $180 : 45 = 4$ (giờ) và quãng đường mà xe ô tô từ B đi cho tới khi gặp nhau là $306 - 180 = 126$ (km).

Từ đó suy ra thời gian ô tô từ B đi cho tới khi gặp nhau là : $126 : 42 = 3$ (giờ). Vậy xe đi từ A khởi hành trước xe đi từ B là $4 - 3 = 1$ (giờ).

Bài 12*

Hai người đi xe máy cùng một lúc và đi ngược chiều từ hai thành phố C và D cách nhau 325 km. Sau khi người thứ nhất đi được 175 km thì hai người gặp nhau. Lúc đó cả hai đã đi hết một số giờ đúng bằng số chỉ hiệu hai vận tốc. Tính vận tốc của mỗi người.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho hai người đi xe máy cùng một lúc và đi ngược chiều để gặp nhau. Sau khi đi một số giờ thì họ gặp nhau và số giờ đó lại đúng bằng số chỉ hiệu hai vận tốc, chẳng hạn nếu hiệu hai vận tốc là 10 km/h thì sau 10 giờ họ gặp nhau. Yêu cầu là tính vận tốc của mỗi người.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước tiên hãy tìm quãng đường người thứ hai đi từ D đến lúc gặp nhau và khi đó người thứ nhất đã đi được một quãng đường dài hơn người thứ hai là mấy kilômet.

Do số giờ đi đến lúc gặp nhau bằng số chỉ hiệu hai vận tốc nên tích của hai số bằng nhau này bằng số kilômet tìm được ở trên. Từ đó suy ra số giờ đi.

● *Cách giải*

Quãng đường người thứ hai đi từ D đến lúc gặp nhau là :

$$325 - 175 = 150 \text{ (km)}$$

Cho đến lúc gặp nhau, người thứ nhất đi từ C đã đi được một quãng đường dài hơn người thứ hai đi từ D là :

$$175 - 150 = 25 \text{ (km)}$$

Do số giờ đi đến lúc gặp nhau bằng số chỉ hiệu hai vận tốc nên tích hai số bằng nhau này bằng 25 ($= 5.5$). Suy ra số giờ đi là 5 giờ.

Vận tốc người thứ nhất là :

$$175 : 5 = 35 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc người thứ hai là :

$$150 : 5 = 30 \text{ (km/h)}.$$

● Khai thác bài toán

Có thể giải bài toán bằng cách nhận xét : trong cùng một thời gian đi tỉ số các quãng đường đi được bằng tỉ số hai vận tốc.

Gọi vận tốc người thứ nhất đi từ C là v_c và vận tốc người thứ hai đi từ D là v_d ta có tỉ số :

$$\frac{v_c}{v_d} = \frac{175}{150} = \frac{7}{6}$$

Suy ra hiệu vận tốc của hai người bằng $\frac{1}{7}$ vận tốc người thứ nhất và cũng là số giờ đã đi. Vậy :

$$\frac{1}{7} \cdot v_c \cdot v_c = 175$$

hay $v_c \cdot v_c = 175 \times 7 = 1225 = 35.35.$

Suy ra $v_c = 35 \text{ km/h}$ và $v_d = 30 \text{ km/h}$.

LOẠI GIẢI THIẾT TAM

Bài 12

Ở một hội nghị có 44 xe vừa xe máy, vừa ô tô. Cả thầy đếm được 112 bánh xe. Tính số xe máy và xe ô tô.

● Tìm hiểu đề bài

Bài ra cho 44 xe vừa xe máy 2 bánh, vừa ô tô 4 bánh với số bánh xe là 112 và hỏi có bao nhiêu xe máy, bao nhiêu ô tô.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Bài toán này thuộc loại giả thiết tạm giống như bài toán cổ "Vừa gà vừa chó, bó lại cho tròn, 36 con, 100 chân chẵn" mà cách giải là tạm giả thiết tất cả 36 con là gà (cách 1) hoặc tất cả 36 con là chó (cách 2) để thấy nếu toàn là gà thì thiếu chân, nếu toàn là chó thì lại thừa chân. Từ đó mà tìm được số chó trước, hoặc số gà trước.

Với bài này ta tạm giả thiết rằng tất cả 44 xe đều là ô tô 4 bánh (cách 1) hoặc tất cả 44 xe đều là xe máy 2 bánh (cách 2) để tìm được số xe máy trước, hoặc số ô tô trước.

● *Cách giải*

Cách 1. Giả thiết tạm rằng tất cả 44 xe đều là ô tô 4 bánh. Vậy có $44 \cdot 4 = 176$ (bánh xe). Như thế thừa ra :

$$176 - 112 = 64 \text{ (bánh xe)}$$

là do còn có xe máy 2 bánh. Từ đó thay một ô tô bằng một xe máy thì bớt đi 2 bánh xe.

$$\text{Số xe máy là : } 64 : 2 = 32 \text{ (xe máy)}$$

$$\text{Số ô tô là : } 44 - 32 = 12 \text{ (ô tô).}$$

Cách 2. Ta giả thiết tạm rằng cả thảy 44 xe đều là xe máy 2 bánh. Vậy có $44 \cdot 2 = 88$ (bánh xe). Như thế thiếu mất :

$$112 - 88 = 24 \text{ (bánh xe)}$$

là do còn có ô tô 4 bánh. Từ đó thay một xe máy bằng một ô tô thì phải thêm 2 bánh xe.

$$\text{Số ô tô là : } 24 : 2 = 12 \text{ (ô tô)}$$

$$\text{Số xe máy là : } 44 - 12 = 32 \text{ (xe máy).}$$

● *Khai thác bài toán*

Với nội dung và số liệu như bài toán này ta có thể lập những đề toán tương tự như sau :

- Để lắp đặt một đường ống nước dài 112 mét phải dùng 44 ống hai loại : loại dài 4 m và loại ngắn 2 m. Hỏi có bao nhiêu ống nước mỗi loại ?

- Có 44 can đựng 112 lít dầu hỏa trong đó có hai loại : can lớn 4 lít và can nhỏ 2 lít. Tính số can mỗi loại.

- Có 44 túi đựng cả thảy 112 gói kẹo. Túi gồm hai loại : loại đựng 2 gói và loại đựng 4 gói. Tính số túi mỗi loại ?

v.v...

Bài 13

Trong một buổi họp tổ dân phố, nếu xếp 4 người ngồi một ghế dài thì 8 người không có chỗ ngồi, nếu xếp 6 người ngồi một ghế dài thì thừa ra 12 chỗ. Tính số người họp tổ và số ghế dài.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra có thể tóm tắt như sau :

Xếp 4 người một ghế	thiếu 8 chỗ
Xếp 6 người một ghế	thừa 12 chỗ.

Hỏi có bao nhiêu người, bao nhiêu ghế ?

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy tìm số chỗ ngồi chênh lệch trong hai trường hợp và số chỗ ngồi trên 1 ghế chênh lệch trong hai trường hợp. Từ đó tìm được ngay số ghế. Suy ra số người họp tổ.

● *Cách giải*

Do trường hợp đầu thiếu 8 chỗ, trường hợp thứ hai lại thừa 12 chỗ nên số chỗ ngồi chênh lệch trong hai trường hợp là :

$$8 + 12 = 20 \text{ (chỗ)}$$

Do xếp 4 người một ghế (trường hợp 1) và xếp 6 người một ghế (trường hợp 2) nên trên 1 ghế số chỗ ngồi chênh lệch nhau là :

$$6 - 4 = 2 \text{ (chỗ)}$$

Suy ra số ghế là :

$$20 : 2 = 10 \text{ (ghế)}$$

Số người họp tổ là :

$$4.10 + 8 = 48 \text{ (người)}$$

hoặc

$$6.10 - 12 = 48 \text{ (người)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Bài toán trên ra "thiếu chỗ ngồi và thừa chỗ ngồi", nay ta có thể đổi thành "thiếu ghế và thừa ghế" như sau :

Tìm số người và số ghế biết rằng nếu xếp 4 người một ghế thì thừa 1 ghế, nếu xếp 3 người một ghế thì thiếu 2 ghế.

Ta hãy giải bài này theo cách khác sau đây :

Nếu xếp 3 người một ghế thì thiếu 2 ghế tức là thừa ra 6 người. Nếu xếp 4 người một ghế thì thừa 1 ghế tức là nếu có thêm 4 người nữa thì vừa đủ còn nếu thêm 10 người nữa thì sẽ thừa 6 người.

Như thế nếu xếp 4 người một ghế thì bớt đi 1 người, mà muốn bớt đi 10 người thì có đúng 10 ghế. Từ đó suy ra số người dự họp là :

$$4.10 - 4 = 36 \text{ (người)}$$

hoặc

$$3.10 + 6 = 36 \text{ (người)}.$$

Bài 14

Trong cuộc thi bắn súng, mỗi đội được bắn 20 phát. Mỗi phát trúng đích được 10 điểm, mỗi phát không trúng đích bị trừ 15 điểm. Đội A được cả thầy 150 điểm, hỏi đội đã bắn bao nhiêu phát trúng đích ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Có thể tóm tắt đề bài như sau :

Bắn 20 phát mỗi phát trúng đích được 10 điểm, không trúng đích trừ đi 15 điểm. Được cả thầy 150 điểm, tìm số phát trúng đích.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Cách 1. Giả thiết tạm là cả 20 phát đều trúng đích, hãy tìm tổng số điểm đạt được. Nhưng thực tế chỉ có 150 điểm nên thiếu mất một số điểm do có một số phát bắn không trúng đích, từ đó tìm được số phát bắn không trúng đích, suy ra số phát bắn trúng đích.

Cách 2. Giả thiết tạm là cả 20 phát đều không trúng đích rồi lập luận như trên sẽ tìm được số phát bắn trúng đích.

● *Cách giải*

Cách 1

Giả thiết tạm là cả 20 phát đều trúng đích, như thế tổng số điểm đạt được là : $10 \cdot 20 = 200$ (điểm). Do đó thiếu mất $200 - 150 = 50$ (điểm) là do còn có một số phát bắn không trúng đích.

Giữa một phát bắn trúng đích và một phát bắn không trúng đích có sự chênh lệch điểm là :

$$10 + 15 = 25 \text{ (điểm)}$$

Suy ra số phát không trúng đích là :

$$50 : 25 = 2 \text{ (phát)}$$

Vậy số phát bắn trúng đích là :

$$20 - 2 = 18 \text{ (phát)}.$$

Cách 2

Có thể giả thiết tạm là cả 20 phát bắn đều không trúng đích. Lập luận tương tự như trên sẽ tìm được số phát bắn trúng đích là 18.

● *Khai thác bài toán*

Với nội dung và số liệu như bài toán này ta có thể lập những đề toán tương tự, chẳng hạn để sau đây :

Trong cuộc thi tìm hiểu địa lí và lịch sử địa phương, đài vô tuyến truyền hình một tỉnh đã đề ra 20 câu hỏi cho các đội học

sinh tham gia. Câu hỏi nào trả lời đúng thì được 10 điểm, câu nào trả lời sai thì trừ đi 15 điểm. Một đội đã đạt được 150 điểm, tính xem đội đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu hỏi ?

Bài 15

Bác Thảo đi xe đạp với vận tốc 15 km/h từ tỉnh P đến tỉnh Q cách nhau 105 km. Để kịp đến nơi trong thời gian 4 giờ bác lên ô tô đi với vận tốc gấp 4 lần khi đi xe đạp. Tính xem bác Thảo đi xe đạp và đi ô tô trong bao lâu.

- *Tìm hiểu đề bài*

Có thể tóm tắt đề bài như sau :

Quãng đường PQ dài 105 km phải đi trong 4 giờ bằng xe đạp với vận tốc 15 km/h và bằng ô tô với vận tốc gấp 4 lần khi đi xe đạp. Tính thời gian đi mỗi loại xe.

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy giả thiết tạm bác Thảo đi cả 4 giờ bằng xe đạp thì còn cách Q bao nhiêu kilômet. Nếu đi ô tô thì mỗi giờ nhanh hơn được bao nhiêu kilômet. Từ đó suy ra thời gian đi ô tô.

- *Cách giải*

Giả thiết tạm là bác Thảo đi cả 4 giờ bằng xe đạp thì sẽ đi được :

$$15 \cdot 4 = 60 \text{ (km)}$$

Như thế còn cách Q là :

$$105 - 60 = 45 \text{ (km)}$$

Mỗi giờ ô tô đi được $15 \cdot 4 = 60$ (km) nên sẽ nhanh hơn đi xe đạp là

$$60 - 15 = 45 \text{ (km)}.$$

Thời gian đi ô tô là :

$$45 : 45 = 1 \text{ (giờ)}$$

Thời gian đi xe đạp là :

$$4 - 1 = 3 \text{ (giờ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán như sau :

Một người mang theo xe đạp lên ô tô khách đi từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 72 km với vận tốc 36 km/h. Ô tô đi được một thời gian thì bị hỏng máy, người ấy đành lấy xe đạp đi với vận tốc bằng $\frac{1}{3}$ vận tốc ô tô, do đó đến tỉnh B phải mất 4 giờ.

Tính thời gian người ấy đi ô tô.

Cách giải sẽ như sau :

Vận tốc xe đạp là $36 : 3 = 12$ (km/h). Nếu đi từ A đến B bằng xe đạp trong 4 giờ thì chỉ đi được :

$$12 \cdot 4 = 48 \text{ (km)}$$

Như thế quãng đường còn phải đi tiếp là $72 - 48 = 24$ (km). Sở dĩ đến được B sau 4 giờ là nhờ có đi ô tô lúc đầu nên mỗi giờ ô tô đi nhanh hơn xe đạp là :

$$36 - 12 = 24 \text{ (km)}$$

Suy ra thời gian đi ô tô là :

$$24 : 24 = 1 \text{ (giờ)}.$$

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 16

a) Cho đẳng thức sai : $405 - 202 = 5$ (!). Hãy chuyển vị trí một chữ số để được đẳng thức đúng.

b) Có 12 que diêm xếp thành đẳng thức sai :

$$\text{VI} - \text{IV} = \text{IX} \quad 6 - 4 = 9 \text{ (!)}$$

Hãy chuyển chỗ 1 que diêm để được đẳng thức đúng.

Bài 17

Có ba miếng bìa con. Trên miếng bìa thứ nhất là số 23, trên miếng bìa thứ hai là số 79, trên miếng bìa thứ ba là số có hai chữ số $\overline{ab}$. Ghép ba miếng bìa con này liền nhau rồi cộng tất cả số có 6 chữ số thì được tổng là 2 989 896. Tìm số $\overline{ab}$.

Bài 18

Khoa hỏi Tùng : Bố cậu năm nay bao nhiêu tuổi ? Tùng đáp : năm 1986 tuổi bố tớ bằng tổng các chữ số năm sinh của bố tớ. Hỏi bố Tùng sinh năm nào và năm nay 1999 bố Tùng bao nhiêu tuổi ?

Bài 19

Số điểm 10 các bài kiểm tra toán học kì I của bạn Trung là một số có hai chữ số $\overline{xy}$ mà khi viết thành số có ba chữ số $\overline{yx0}$ thì được một số gấp 34 lần số lúc đầu. Hỏi bạn Trung đã được mấy điểm 10 về toán ?

Bài 20

Hai người đi bộ từ thị trấn huyện A đến thị trấn huyện B cùng một lúc với vận tốc 6 km/h và 4 km/h. Người đi nhanh đến B sớm hơn người đi chậm là 2 giờ. Hỏi thị trấn huyện A cách thị trấn huyện B bao nhiêu kilômet ?

Bài 21

Một người đi xe đạp từ nhà đến chỗ họp. Quãng đường này gồm một đoạn lên dốc AB và một đoạn xuống dốc BC. Vận tốc lên dốc là 8 km/h và xuống dốc là 16 km/h. Từ nhà đến chỗ họp mất 2 giờ 45 phút, từ chỗ họp về nhà mất 1 giờ 45 phút. Tính quãng đường AC từ nhà đến chỗ họp.

Bài 22

Trong kho có 83 chiếc xe vừa mô tô 3 bánh vừa ô tô 6 bánh. Kể cả 77 chiếc lốp dự trữ thì có tất cả 500 lốp. Tính xem mỗi loại có bao nhiêu xe.

Bài 23

Một cô bán hàng xếp cam vào hộp. Nếu xếp 9 quả vào một hộp thì thừa 1 quả, nếu xếp 10 quả vào một hộp thì thiếu 3 quả. Hỏi có bao nhiêu cam, bao nhiêu hộp ?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 16

a) Chỉ cần chuyển chữ số 2 ở hàng đơn vị của số 202 thành số mũ như sau : 20^2 , ta sẽ được đẳng thức đúng :

$$405 - 20^2 = 405 - 400 = 5.$$

b) Chỉ cần chuyển chỗ 1 que diêm như sau theo 2 cách và ta sẽ được hai đẳng thức đúng :

$$V + IV = IX \quad (5 + 4 = 9)$$

$$VI + IV = X \quad (6 + 4 = 10)$$

Bài 17

Gọi ba miếng bìa con theo thứ tự là A (mang số 23), B (mang số 79) và C (mang số $\overline{ab}$). Cả thầy có 6 cách ghép thành hàng như sau :

ABC, BAC, CAB

ACB, BCA, CBA

Ở hàng thứ nhất $ABC = 2379ab$ và hàng thứ hai $ACB = 23ab79$ thì các số tạo thành được lặp lại 2 lần số 23, số 79 và số $\overline{ab}$. Nếu khi cộng các số ở hai hàng này ta được tổng $M = 2(23 + 79 + \overline{ab})$.

Tương tự ta gập lại các số này 2 lần ở các hàng thứ ba, thứ tư, thứ năm và thứ sáu và các tổng tương ứng sẽ là $100.M$ và $1000.M$.

Theo bài ra ta có tổng :

$$M + 100M + 1000M = 2\,989\,896$$

hay $10\,101.M = 2\,989\,896$. Suy ra :

$$M = 2\,989\,896 : 10\,101 = 296$$

mà $M = 46 + 158 + 2.\overline{ab}$. Từ đó :

$$2.\overline{ab} = 296 - 204 = 92. \text{ Vậy } \overline{ab} = 46.$$

Bài 18

Giả sử năm sinh của bố Tùng là $\overline{19xy}$, thì tuổi năm 1986 sẽ là :

$$1986 - \overline{19xy} = 86 - \overline{xy} = (8 - x).10 + (6 - y)$$

Theo bài ra tổng các chữ số của năm sinh bằng số tuổi nên ta có :

$$1 + 9 + x + y = 80 - 10x + 6 - y = 86 - 10x - y$$

$$\text{hay } 11x + 2y = 76 \quad (*)$$

Do $y \leq 9$ nên $2y \leq 18$, vậy $11x + 2y \leq 11x + 18$

$$76 \leq 11x + 18. \text{ Suy ra } x \geq \frac{58}{11} > 5. \text{ Từ đó } x = 6, y = 5 \text{ theo } (*).$$

Vậy năm sinh của bố Tùng là 1965 và tuổi năm 1986 là $1 + 9 + 6 + 5 = 21$ (tuổi). Đến năm nay 1999 thì tuổi bố Tùng là $1999 - 1965 = 34$ (tuổi).

Bài 19

Theo bài ra ta có :

$$\overline{yx0} = 34.\overline{xy} \text{ hay}$$

$$100y + 10x = 34.(10x + y) = 340x + 34y.$$

$$\text{Suy ra : } 330x = 66y, \text{ hay } 5x = y.$$

Vì $x > 0$ và $y \leq 9$ nên ta có ngay $x = 1, y = 5$, tức là $\overline{xy} = 15$.

Vậy bạn Trung đã được 15 điểm 10 về toán.

Bài 20

Do người đi nhanh đến B sớm hơn người đi chậm 2 giờ nên khi người ấy đến B thì người đi chậm còn cách B là :

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ (km)}$$

tức là người đi nhanh đã đi nhiều hơn người đi chậm là 8 km.

Vận tốc người đi nhanh hơn người đi chậm là :

$$6 - 4 = 2 \text{ (km/h)}$$

Thời gian để người đi nhanh đến B là :

$$8 : 2 = 4 \text{ (giờ)}$$

Thị trấn huyện A cách thị trấn huyện B là :

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ (km)}$$

Bài 21

Cũng đi một quãng đường như nhau thì thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc. Mà vận tốc xuống dốc (16 km/h) gấp đôi vận tốc lên dốc (8 km/h) nên thời gian xuống dốc bằng nửa thời gian lên dốc.

Thời gian cả đi lẫn về là :

$$2 \text{ giờ } 45 \text{ phút} + 1 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = 4 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$$

Biết tổng hai số và tỉ số của chúng ta có ngay :

Thời gian lên dốc là :

$$4 \text{ giờ } 30 \text{ phút} \cdot \frac{2}{3} = 3 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường AC dài :

$$8 \cdot 3 = 24 \text{ (km)}$$

Bài 22

Số lớp của 83 chiếc xe là :

$$500 - 77 = 423 \text{ (lớp)}$$

Giả sử tất cả xe đều là ô tô 6 bánh. Thế thì số lớp là : $83 \cdot 6 = 498$ (lớp), thừa ra $498 - 423 = 75$ (lớp) là do có cả mô tô 3 bánh. Thay 1 ô tô bằng 1 mô tô thì bớt đi $6 - 3 = 3$ (lớp), vậy :

Số mô tô 3 bánh là :

$$75 : 3 = 25 \text{ (mô tô)}$$

Số ô tô 6 bánh là : $83 - 25 = 58$ (ô tô)

Có thể giải bằng cách giả sử tất cả xe đều là mô tô 3 bánh

Bài 23

Giữa số quả trong các hộp 10 quả và số quả trong các hộp 9 quả có sự chênh lệch là $1 + 3 = 4$ (quả).

Sở dĩ có sự chênh lệch đó vì mỗi hộp 10 quả hơn mỗi hộp 9 quả là : $10 - 9 = 1$ (quả). Suy ra :

Số hộp là : $4 : 1 = 4$ (hộp). Số quả cam là : $9.4 + 1 = 37$ (quả) hoặc $10.4 - 3 = 37$ (quả).

IV. TÍNH CHIA HẾT TRONG N

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

- a) Chứng tỏ rằng tích hai số liên tiếp là một số chẵn.
- b) Tổng của bốn số mà lẻ thì tích của chúng là chẵn hay lẻ ?

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Bài ra cho hai số liên tiếp chứ không phải hai số chẵn liên tiếp, hoặc hai số lẻ liên tiếp, lưu ý điều này để chứng tỏ tích của chúng là một số chẵn.

b) Bài ra cho bốn số mà tổng là lẻ, chứ không phải cho bốn số liên tiếp vì tổng của bốn số liên tiếp không thể là số lẻ (ví dụ : $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ hoặc $5 + 6 + 7 + 8 = 24$).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Hãy gọi hai số liên tiếp là n và $n + 1$ rồi chứng minh tích $n.(n + 1)$ là số chẵn bằng cách lần lượt xét n là chẵn hay lẻ.

b) Cả bốn số mà tổng là lẻ thì bốn số này không thể là lẻ cả, vì sao ? Do đó ít nhất phải có một số chẵn, từ đó mà xét tích của chúng.

● *Cách giải*

a) Gọi hai số liên tiếp bất kì là n và $n + 1$. Ta hãy xét tích $n.(n + 1)$ của chúng.

– Nếu n chẵn thì rõ ràng tích này là chẵn

- Nếu n lẻ thì $n + 1$ là chẵn và tích này cũng chẵn.

b) Bốn số đã cho không thể là lẻ cả, vì tổng của bốn số lẻ là một số chẵn. Muốn tổng của bốn số là một số lẻ thì trong bốn số đó phải có ít nhất một số chẵn. Do đó tích của chúng phải là số chẵn.

● *Khai thác bài toán*

a) Có thể cho rằng trong hai số liên tiếp thì số này chẵn số kia lẻ và ngược lại, do đó tích của chúng phải chẵn.

Còn tích của hai số chẵn liên tiếp luôn là số chẵn (ví dụ $6.8 = 48$) và tích của hai số lẻ liên tiếp luôn là số lẻ (ví dụ $7.9 = 63$). Nếu là tích của ba, bốn số liên tiếp hoặc n số liên tiếp thì tích đều là số chẵn.

b) Ta có thể đổi bài ra như sau :

Chúng ta chứng tỏ rằng tổng của ba số liên tiếp mà lẻ thì tích của chúng chia hết cho 24.

Ta có cách giải sau đây :

Nếu tổng ba số liên tiếp mà lẻ thì số nhỏ nhất và số lớn nhất phải chẵn, ngoài ra một trong chúng là bội của 4. Do đó tích các số chẵn đó chia hết cho 8. Nhưng trong ba số liên tiếp thì luôn có một số chia hết cho 3, vậy tích của chúng chia hết cho $8.3 = 24$.

Bài 2

Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số :

a) chia hết cho 2 ?

b) chia hết cho 5 ?

c) chia hết cho cả 2 và 5 ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Yêu cầu của đề bài là tìm xem từ 1 đến 100 có bao nhiêu số chia hết cho 2, cho 5, cho cả 2 và 5, chứ không phải là tìm dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5, cho cả 2 và 5.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Cần nhớ các dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5, cho cả 2 và 5. Một số chia hết cho cả 2 và 5 khi nó tận cùng bằng 0.

Hãy xét xem mỗi chục có bao nhiêu số chia hết cho 2, cho 5, cho cả 2 và 5 mà từ 1 đến 100 có 10 chục. Từ đó mà tìm được có bao nhiêu số thỏa mãn bài ra.

● *Cách giải*

a) Số chia hết cho 2 phải có tận cùng bằng 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8. Từ 1 đến 10 có 5 số như vậy, đó là 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10.

Từ 1 đến 100 có 10 chục, mỗi chục có 5 số chia hết cho 2, vậy có cả thảy $5 \cdot 10 = 50$ (số chia hết cho 2)

b) Số chia hết cho 5 phải có tận cùng bằng 0 hoặc 5. Từ 1 đến 10 có 2 số như vậy, đó là 5 và 10.

Từ 1 đến 100 có 10 chục, mỗi chục có 2 số chia hết cho 5, vậy có cả thảy $2 \cdot 10 = 20$ (số chia hết cho 5)

c) Số chia hết cho cả 2 và 5 phải có tận cùng bằng 0. Từ 1 đến 10 chỉ có 1 số như vậy, đó là 10. Vì vậy từ 1 đến 100 có cả thảy $1 \cdot 10 = 10$ (số chia hết cho cả 2 và 5).

● *Khai thác bài toán*

Có thể đặt thêm câu hỏi : Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số chia hết cho 3, cho 9, cho cả 2 ; 3 ; 5 ; 9 ?

Khi đó điều kiện để chia hết cho cả 2 ; 3 ; 5 ; 9 là phải tận cùng bằng 0 và có tổng các chữ số chia hết cho 9, ví dụ 90.

Ngoài ra có thể xét các số từ 100 đến 1000 với các câu hỏi của bài 2.

Bài 3

Giải thích tại sao tổng sau đây chia hết cho 5 :

$$M = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{15} + 4^{16}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Tổng M gồm các số hạng là lũy thừa liên tiếp của 4 từ 4^1 đến 4^{16} và phải giải thích tại sao M lại chia hết cho 5.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy ghép các số hạng của tổng M thành từng cặp là hai lũy thừa liên tiếp bắt đầu từ cặp $4 + 4^2$ để làm xuất hiện thừa số chung $1 + 4 = 5$.

● *Cách giải*

Ghép các số hạng của tổng M thành từng cặp như sau :

$$\begin{aligned} M &= (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + \dots + (4^{15} + 4^{16}) \\ &= 4(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \dots + 4^{15}(1 + 4) \\ &= (1 + 4)(4 + 4^3 + \dots + 4^{15}) = 5(4 + 4^3 + \dots + 4^{15}) \end{aligned}$$

Suy ra M chia hết cho 5.

● *Khai thác bài toán*

Lưu ý nếu cho tổng các lũy thừa của 4 thì sẽ chứng minh được tổng này chia hết cho $4 + 1 = 5$, nếu là lũy thừa của n thì chứng minh được tổng chia hết cho $n + 1$. Chẳng hạn chứng minh tổng $P = 1999 + 1999^2 + \dots + 1999^{1998}$ chia hết cho 2000. Ta viết P dưới dạng sau :

$$\begin{aligned} P &= 1999(1 + 1999) + \dots + 1999^{1997}(1 + 1999) \\ &= 2000(1999 + \dots + 1999^{1997}) \text{ chia hết cho } 2000. \end{aligned}$$

Bài 4

Cho $x, y, z \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng :

a) Số có dạng $\overline{xxx}$ chia hết cho 37 ;

b) Nếu số có dạng $\overline{xyz}$ mà chia hết cho 37 thì các số có dạng $\overline{yzx}$ và $\overline{zxy}$ cũng chia hết cho 37. Cho ví dụ.

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Số có dạng $\overline{xxx}$ là số có ba chữ số giống nhau, chẳng hạn 111 ; ... ; 999.

b) Số có dạng $\overline{xyz}$ là số có ba chữ số khác nhau, chẳng hạn số 185 chia hết cho 37 ($x = 1, y = 8, z = 5$).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Hãy viết số $\overline{xxx}$ dưới dạng $111.x$ và chứng tỏ 111 chia hết cho 37.

b) Hãy nhận xét tổng $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = 111.(x + y + z)$ chia hết cho 37 mà $\overline{xyz}$ đã chia hết cho 37, suy ra $\overline{yzx} + \overline{zxy}$ phải chia hết cho 37. Từ đó chứng minh $\overline{yzx}$ và $\overline{zxy}$ chia hết cho 37.

● *Cách giải*

a) Số $\overline{xxx}$ có thể viết dưới dạng $111.x$. Mà $111 = 37.3$ nên $\overline{xxx} = 37.3x$ luôn chia hết cho 37.

b) Ta nhận xét rằng tổng $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = 111.(x + y + z) = 37.3.(x + y + z)$ chia hết cho 37.

Do $\overline{xyz}$ chia hết cho 37 tức là $100x + 10y + z$ chia hết cho 37, nên :

$$\overline{yzx} = 100y + 10z + x = 10.(100x + 10y + z) - 999x$$

Số bị trừ và số trừ đều chia hết cho 37 nên hiệu $\overline{yzx}$ chia hết cho 37.

Tổng $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy}$ chia hết cho 37 mà hai số hạng đầu đã chia hết cho 37 nên số hạng thứ ba $\overline{zxy}$ cũng chia hết cho 37.

Ví dụ : 185 chia hết cho 37 (thương là 5), ta cũng có 851 chia hết cho 37 (thương là 23) và 518 chia hết cho 37 (thương là 14).

● *Khai thác bài toán*

Ta cũng có thể chứng minh rằng :

Số $\overline{xxxyyy}$ chia hết cho 37.

$$\begin{aligned}\text{Thật thế : } \overline{xxxyyy} &= 1000 \cdot \overline{xxx} + \overline{yyy} \\ &= 1000 \cdot 111x + 111y = 111(1000x + y)\end{aligned}$$

mà 111 chia hết cho 37 nên $\overline{xxxyyy}$ chia hết cho 37.

Bài 5

Có bao nhiêu số A có bốn chữ số, chia hết cho 9 mà các số đó chỉ viết bởi ba chữ số 1 ; 2 ; 3 ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Số A chia hết cho 9 nhưng nó có 4 chữ số mà chỉ viết bởi ba chữ số 1 ; 2 ; 3 mà thôi. Có bao nhiêu số A như vậy ?

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Số phải tìm A không thể viết bởi bốn chữ số 3, không thể viết bởi ba chữ số 3, vì sao ? nhưng A lại phải có chữ số 3, vì sao ? Sau đó xét hai trường hợp tùy theo A có một chữ số 3 hoặc có hai chữ số 3.

● *Cách giải*

A không thể có bốn chữ số 3 vì $3 + 3 + 3 + 3 = 12 \not\equiv 9$,
A cũng không thể có ba chữ số 3 vì $3 + 3 + 3 + 1 = 10 \not\equiv 9$
hoặc $3 + 3 + 3 + 2 = 11 \not\equiv 9$.

Nhưng theo bài ra A phải có chữ số 3 vì nếu toàn là chữ số 1 hoặc chữ số 2 thì tổng các số sẽ nhỏ hơn 9 nên không chia hết cho 9.

Xét hai trường hợp :

a) A có một chữ số 3. Khi đó ba chữ số còn lại là 2, ta được 4 số :

$$2223 ; 2232 ; 2322 ; 3222.$$

b) A có hai chữ số 3. Khi đó hai chữ số còn lại là 1 và 2, ta được 12 số sau :

1332 ; 1323 ; 1233

2331 ; 2313 ; 2133

và 3312 ; 3321 ; 3132 ; 3231 ; 3123 ; 3213

Vậy có tất cả 16 số A thỏa mãn bài ra.

● *Khai thác bài toán*

Nếu số A chỉ viết với ba chữ số 2 ; 3 ; 4 thì sao ?

Trong trường hợp này $2 + 3 + 4 = 9 : 9$. Rõ ràng A không thể có bốn chữ số 4, ba chữ số 4, hai chữ số 4 hoặc một chữ số 4, vì nếu A có một chữ số 4 thì ba chữ số còn lại không thể là 2 cả ($4 + 2 + 2 + 2 = 10 \not\equiv 9$), càng không thể là 3 cả ($4 + 3 + 3 + 3 = 13 \not\equiv 9$) và cũng không thể là 2 và 3 ($4 + 3 + 2 + 2 = 11 \not\equiv 9$).

Thành thử chỉ có bốn số A là 2223 ; 2232 ; 2322 ; 3222 (không chứa chữ số 4).

Bài 6

Viết các số nhỏ nhất :

a) có năm chữ số chia hết cho 3 ;

b) có sáu chữ số chia hết cho 9.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài yêu cầu viết các số nhỏ nhất (không phải số lớn nhất hoặc số bất kì) có năm hoặc sáu chữ số chia hết cho 3 hoặc cho 9.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Lưu ý là số nhỏ nhất thì chữ số đầu tiên phải là 1 (không thể là 0), vì sao ? Chữ số cuối cùng phải là 2 hoặc 8, vì sao ?

● *Cách giải*

a) Số nhỏ nhất có năm chữ số phải có chữ số đầu tiên là 1, vì nếu là 0 thì không còn là số có năm chữ số.

Muốn số này chia hết cho 3 tức là có tổng nhỏ nhất các chữ số bằng 3 thì chữ số cuối cùng phải là 2 và ba chữ số ở giữa là 0.

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 10002.

b) Cũng như trên số đầu tiên phải là 1 và tổng nhỏ nhất của các chữ số phải bằng 9, do đó chữ số cuối cùng là 8 và bốn chữ số ở giữa là 0.

Vậy số nhỏ nhất phải tìm là 100008.

● *Khai thác bài toán*

Bài ra yêu cầu tìm số có năm, sáu chữ số nhưng có thể đổi thành số có n chữ số thì đáp số vẫn là : chữ số đầu tiên phải là 1 và chữ số cuối cùng phải là 2 hoặc 8 còn tất cả $n - 2$ chữ số ở giữa là 0.

Bài 7

a) Trong các số có bốn chữ số giống nhau thì số nào có hai ước đều là số nguyên tố ?

b) Tổng của bốn số liên tiếp là số nguyên tố hay hợp số ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Lưu ý ở đề bài câu a là số có bốn chữ số giống nhau (như 1111 ; 2222 ; ...) mà hai ước đều là số nguyên tố, còn ở câu b thì tổng của bốn số liên tiếp chứ không phải tổng của 4 số chẵn hoặc 4 số lẻ liên tiếp.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Lưu ý số $\overline{xxxx}$ có dạng $1111.x$. Từ đó mà phân tích xem x bằng bao nhiêu và 1111 bằng tích của hai số nguyên tố nào.

b) Hãy nhận xét 4 số liên tiếp thì có mấy số chẵn, mấy số lẻ để thấy rằng nếu tổng của chúng mà chẵn thì tích sẽ là hợp số.

● *Cách giải*

a) Số $\overline{xxxx}$ có dạng $1111x = 11.101.x$

Số 11 và số 101 đều là số nguyên tố cho nên x phải bằng 1, khi đó số 1111 sẽ có hai ước 11 và 101 đều là số nguyên tố.

b) Trong bốn số liên tiếp thì luôn có hai số chẵn (mà tổng là số chẵn) và hai số lẻ (mà tổng cũng là số chẵn). Do đó tổng của chúng phải là một số chẵn lớn hơn 2 nên tổng này là một hợp số.

● *Khai thác bài toán*

Về số nguyên tố có thể hỏi thêm như sau :

Nếu số $\overline{xyz}$ là số nguyên tố thì chữ số z có thể là những chữ số nào ? Để tìm các giá trị của z ta chú ý rằng nếu z là 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 thì $\overline{xyz}$ là hợp số (vì chia hết cho 2) ; nếu $z = 5$ thì $\overline{xyz}$ cũng là hợp số (vì chia hết cho 5). Do đó z chỉ có thể lấy các giá trị lẻ là 1 ; 3 ; 7 ; 9.

Nếu đổi câu hỏi là : tổng của n số liên tiếp là số nguyên tố hay hợp số thì câu trả lời là khi n chẵn tổng là số nguyên tố, nhưng khi n lẻ thì có thể là số nguyên tố hoặc hợp số (vì tổng là số lẻ, mà số nguyên tố trừ 2 ra đều là số lẻ, nhưng ngược lại không phải số lẻ nào cũng là số nguyên tố).

Bài 8

a) Viết các hợp số 30 và 104 dưới dạng tổng của hai số nguyên tố.

b) Số $10^{15} + 2$ là số nguyên tố hay hợp số ?

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Đề bài yêu cầu viết dưới dạng tổng của hai số nguyên tố, nên phải lưu ý đến trường hợp $30 = 29 + 1$ không đúng với bài ra do 29 là số nguyên tố nhưng 1 không phải là số nguyên tố hoặc $30 = 3 + 27$ thì 27 lại là hợp số.

b) Đề bài đã rõ.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Có thể sử dụng bảng số nguyên tố ở cuối SGK Toán 6 tập một. Mỗi hợp số đã cho có thể phân tích thành nhiều cách bắt đầu từ số nguyên tố nhỏ.

b) Hãy tính tổng các chữ số của số $10^{15} + 2$, từ đó mà nhận xét ngay kết quả là số nguyên tố hay hợp số.

● *Cách giải*

a) Ta có thể viết như sau :

$$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17 ;$$

$$104 = 3 + 101 = 7 + 97 = 31 + 73 = 37 + 67 = 43 + 61.$$

b) Tổng các chữ số của 10^{15} là 1, do đó tổng các chữ số của số $10^{15} + 2$ là 3, chia hết cho 3 nên số $10^{15} + 2$ là hợp số.

● *Khai thác bài toán*

a) Có thể đặt câu hỏi tương tự với các hợp số 32 ; 103 ; v.v...
Ta có chẳng hạn $32 = 3 + 29 = 13 + 19$ và $103 = 2 + 101$.

b) Nếu câu hỏi là : tổng các chữ số của số $10^{15} + 2$ là số nguyên tố hay hợp số thì ta có ngay câu trả lời : tổng là số 3 nên là số nguyên tố.

Cũng câu hỏi đã cho với số $10^5 - 1$ thì ta có :

$$10^5 - 1 = 100000 - 1 = 99999 \text{ là hợp số (vì chia hết cho 9)}$$

Bài 9

Tìm ba số lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố.

● *Tìm hiểu đề bài*

Có thể hiểu đề ra như sau : Tìm ba số nguyên tố là ba số lẻ liên tiếp.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy gọi ba số lẻ liên tiếp là $n - 2$, n , $n + 2$ (với $n > 3$) và lập luận dựa trên cơ sở ba số này là số nguyên tố thì một trong

ba số lẻ này phải là 3. Lưu ý trong ba số lẻ liên tiếp thì luôn có một số chia hết cho 3, chẳng hạn 7 ; 9 ; 11 hoặc 15 ; 17 ; 19.

● *Cách giải*

Gọi ba số lẻ liên tiếp là $n - 2$, n , $n + 2$ (với n là số lẻ > 3). Chứng minh trong ba số này luôn có một số chia hết cho 3. Thật thế nếu n chia hết cho 3 thì ta đã chứng minh xong, nếu n chia cho 3 dư 1 hoặc 2 thì $n + 1$ hoặc $n - 2$ sẽ chia hết cho 3.

Theo bài ra ba số lẻ $n - 2$, n , $n + 2$ đều là ba số nguyên tố nên một trong ba số này phải là 3.

Vậy $n = 5$, từ đó $n - 2 = 3$, $n + 2 = 7$. Do đó ba số lẻ liên tiếp là ba số nguyên tố là : 3 ; 5 ; 7.

● *Khai thác bài toán*

Nếu là tìm hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố thì ta sẽ tìm được nhiều cặp số như sau :

3 và 5 ; 5 và 7 ; 11 và 13 ; 17 và 19 ; 29 và 31 ; 41 và 43 ; 59 và 61 ; 71 và 73 ; 101 và 103 ; 107 và 109 ; 137 và 139 ; 191 và 193 ; 197 và 199 ; 227 và 229 ; 239 và 241 ; v.v...

Tất cả những cặp số này gọi là *cặp số nguyên tố sinh đôi* (hiệu của chúng bằng 2).

Bài 10*

Cho P là tập hợp các số chia hết cho 3, Q là tập hợp các số chia hết cho 9. Tìm $P \cap Q$ và $P \cup Q$.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài có thể tóm tắt như sau :

Tìm giao và hợp của hai tập hợp P và Q trong đó P và Q theo thứ tự là tập hợp các số chia hết cho 3 và cho 9.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Cần nắm vững các định nghĩa về giao của hai tập hợp và hợp của hai tập hợp :

Giao của hai tập hợp P và Q (kí hiệu $P \cap Q$) là một tập hợp tạo thành bởi các phần tử chung của hai tập hợp.

Hợp của hai tập hợp P và Q (kí hiệu $P \cup Q$) là một tập hợp tạo thành bởi những phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó.

● *Cách giải*

Tập hợp các số chia hết cho 3 là $P = \{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; \dots ; 3k\}$.
Tập hợp các số chia hết cho 9 là $Q = \{9 ; 18 ; 27 ; \dots ; 9k'\}$
với $k, k' = 1 ; 2 ; 3 ; \dots$ Ta thấy ngay :

$$P \cap Q = Q \text{ và } P \cup Q = P.$$

● *Khai thác bài toán*

Qua bài toán này ta rút ra nhận xét tổng quát sau :

Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$, ví dụ $A = \{5\}$, $B = \{5 ; 9\}$ thì $A \cap B = \{5\} = A$ hoặc $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Nếu $A \subset B$ thì $A \cup B = B$, ví dụ $A = \{11\}$, $B = \{11 ; 13\}$ thì $A \cup B = \{11 ; 13\} = B$.

Bài 11

a) Tìm ƯCLN của ba số 72 ; 108 ; 144 rồi tìm tất cả ước có hai chữ số của nó.

b) Tìm BCNN của ba số 35 ; 49 ; 63 rồi tìm tất cả bội có bốn chữ số của nó.

● *Tìm hiểu đề bài*

Mỗi câu a và b đều có hai yêu cầu : thứ nhất là tìm ƯCLN của ba số, tìm BCNN của ba số ; thứ hai là tìm tất cả ước có hai chữ số của nó và bội có bốn chữ số của nó.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Cần nắm vững cách tìm ƯCLN và BCNN của hai hay nhiều số.

Bước 1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố

Bước 2. Xét các thừa số nguyên tố chung (tìm ƯCLN) hoặc xét các thừa số nguyên tố chung và riêng (tìm BCNN)

Bước 3. Lập tích các thừa số chung đó (mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó (tìm ƯCLN) hoặc lập tích các thừa số chung và riêng đó, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó (tìm BCNN).

● *Cách giải*

a) $72 = 2^3.3^2$; $108 = 2^2.3^3$; $144 = 2^4.3^2$

$$\text{ƯCLN} (72 ; 108 ; 144) = 2^2.3^2 = 36.$$

Tất cả ước có hai chữ số của 36 là 36 ; 18 ; 12.

b) $35 = 5.7$; $49 = 7^2$; $63 = 3^2.7$

$$\text{BCNN} (35 ; 49 ; 63) = 3^2.5.7^2 = 2205.$$

Tất cả bội có bốn chữ số của 2205 là 2205 ; 4410 ; 6615 ; 8820.

● *Khai thác bài toán*

Ta có thể hỏi như sau :

Tìm tất cả ước có một chữ số của 36 hoặc tìm tất cả bội có ba chữ số nhỏ hơn 200 của 7.

Nếu thế thì tất cả ước có một chữ số của 36 là 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9. Tất cả bội có ba chữ số của 7 là : 105 ; 112 ; 119 ; 126 ; 133 ; 140 ; 147 ; 154 ; 161 ; 168 ; 175 ; 182 ; 189 ; 196.

Bài 12

Đội văn nghệ của một huyện gồm 48 nam và 32 nữ được chia thành tổ để về các xã biểu diễn.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia tổ sao cho số nam và số nữ được chia đều cho mỗi tổ ?

b) Cách chia nào để mỗi tổ có số người ít nhất ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Lưu ý trong đề bài : khi chia tổ, số nam và số nữ được chia đều cho các tổ, tức là mỗi tổ đều có số nam như nhau và số nữ như nhau (chẳng hạn tổ nào cũng có 6 nam và 4 nữ).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Số tổ phải là ước của 48 và 32, vì thế muốn biết có bao nhiêu cách chia tổ thì phải tìm tất cả ước chung của 48 và 32. Từ đó suy ra có bao nhiêu tổ (lưu ý : loại trường hợp chỉ có 1 tổ, không thực tế).

b) Muốn cho số người trong mỗi tổ là ít nhất thì số tổ phải là nhiều nhất, suy ra được từ câu a. Từ đó suy ra số nam và số nữ trong mỗi tổ này.

● *Cách giải*

a) $48 = 16.3 = 2^4.3$; $32 = 16.2 = 2^4.2 = 2^5$.

Vậy ƯCLN $(48 ; 32) = 2^4 = 16$.

Từ đó tất cả ước chung của 16 là :

$$1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16$$

Loại trường hợp 1 tổ, đội có thể có 4 cách chia tổ sau : 2 tổ, 4 tổ, 8 tổ hoặc 16 tổ.

b) Số tổ phải nhiều nhất để số người trong mỗi tổ là ít nhất. Như thế phải chia thành 16 tổ trong đó mỗi tổ có số nam là $48 : 16 = 3$ (nam) và số nữ là $32 : 16 = 2$ (nữ). Vậy mỗi tổ có ít nhất là : $3 + 2 = 5$ (người).

● *Khai thác bài toán*

Dựa vào bài toán này ta có thể lập những đề toán tương tự với số liệu và cách giải như trên.

– Làm thế nào để chia 48 quả cam và 32 quả quýt thành nhiều phần sao cho phần nào cũng có số cam như nhau và số quýt như nhau. Cách chia nào có số quả ít nhất ?

– Hai tổ sản xuất trong một xí nghiệp gồm : tổ I có 48 công nhân, tổ II có 32 công nhân. Để mừng thắng lợi vượt mức kế hoạch, hai tổ tổ chức liên hoan và chia số công nhân thành những nhóm sao cho số người của mỗi tổ được chia đều cho mỗi nhóm. Hỏi có bao nhiêu cách chia nhóm và có thể chia được nhiều nhất là bao nhiêu nhóm ?

v.v...

Bài 13

Có 4 thuyền A, B, C, D. Thuyền A cứ 5 ngày cập bến một lần, thuyền B 10 ngày, thuyền C 6 ngày và thuyền D 8 ngày. Nếu 4 thuyền cùng cập bến vào ngày hôm nay thì sau đó mấy ngày : thuyền A cùng cập bến với thuyền B ? thuyền C cùng cập bến với thuyền D ? cả 4 thuyền cùng cập bến lần thứ hai ? Đến ngày đó mỗi thuyền đã cập bến mấy lần ?

● Tìm hiểu đề bài

Số ngày cập bến của mỗi thuyền khác nhau. Nếu hôm nay là ngày cả 4 thuyền cùng cập bến thì sau mấy ngày cả 4 thuyền lại cùng cập bến một lần nữa. Ngoài ra lại hỏi thêm A và B cùng cập bến, C và D cùng cập bến.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Số ngày cần tìm để cả 4 thuyền cùng cập bến một lần nữa phải là BCNN của 5 ; 10 ; 6 ; 8.

Từ đó tìm được số ngày mà A và B cùng cập bến, C và D cùng cập bến. Khi tính số lần mà mỗi thuyền đã cập bến phải cộng thêm cả lần cùng cập bến lần trước.

● *Cách giải*

$$\text{BCNN} (5 ; 10 ; 6 ; 8) = 120.$$

Vậy sau 120 ngày thì cả 4 thuyền lại cập bến một lần thứ hai.

Thuyền A đến ngày cùng cập bến đã cập bến được tất cả $(120 : 5) + 1 = 25$ (lần), thuyền B đã cập bến được tất cả $(120 : 10) + 1 = 13$ (lần), thuyền C được $(120 : 6) + 1 = 21$ (lần), thuyền D được $(120 : 8) + 1 = 16$ (lần). Do BCNN (5 ; 10) là 10 nên sau 10 ngày hai thuyền A và B cùng cập bến một lần, và do BCNN (6 ; 8) là 24 nên sau 24 ngày thì hai thuyền C và D cùng cập bến một lần.

● *Khai thác bài toán*

Như ở bài 12, ta có thể ra những đề toán tương tự với số liệu và lời giải như ở bài toán này.

- Trong lớp có 4 học sinh A, B, C, D. Học sinh A cứ 5 ngày trực nhật một lần, học sinh B 10 ngày, học sinh C 6 ngày và học sinh D 8 ngày. Nếu cả 4 học sinh cùng trực nhật vào ngày hôm nay thì sau đó mấy ngày cả 4 em lại cùng trực nhật một lần ? Đến ngày đó mỗi em đã trực nhật được mấy lần ?

- Một đơn vị quân đội đang diễn tập. Nếu xếp hàng 5, hàng 6, hàng 8 hoặc hàng 10 thì vừa đủ hàng không thừa thiếu người nào. Biết rằng đơn vị này có khoảng 350 đến 400 người, hỏi đơn vị gồm bao nhiêu người ?

Cách giải sẽ như sau :

$$\text{BCNN} (5 ; 6 ; 8 ; 10) = 120$$

Do đoàn quân có khoảng 350 đến 400 người nên đoàn quân có $120.3 = 360$ (người).

Bài 14

Tìm hai số p và q biết tổng của chúng là 432 và ƯCLN của chúng là 36.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra chỉ cho biết $p + q = 432$ và $\text{ƯCLN}(p, q) = 36$, ta phải tìm p, q .

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Do $\text{ƯCLN}(p, q) = 36$ nên có thể viết $p = 36p'$ và $q = 36q'$ trong đó p' và q' là hai số nguyên tố cùng nhau. Từ đó kết hợp với $p + q = 432$ sẽ suy ra được $p' + q'$. Dựa vào $p' + q'$ phải là tổng của hai số nguyên tố cùng nhau mà suy ra p', q' , từ đó có ngay p và q .

● *Cách giải*

Do 36 là $\text{ƯCLN}(p, q)$ nên ta có thể viết :

$$p = 36p', q = 36q' \text{ với } \text{ƯCLN}(p', q') = 1.$$

$$\text{Thế thì : } p + q = 36(p' + q') = 432 ;$$

$$\text{suy ra } p' + q' = 432 : 36 = 12.$$

Như vậy hai số p', q' phải có tổng bằng 12 và ƯCLN bằng 1.

Số 12 chỉ có thể là tổng của hai số 1 và 11 hoặc 5 và 7.

Vậy hai số phải tìm là :

$$p = 36.1 = 36 \text{ và } q = 36.11 = 396$$

$$\text{hoặc } p = 36.5 = 180 \text{ và } q = 36.7 = 252.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi việc cho biết tổng hai số bằng cho biết hiệu hai số thì cách giải vẫn tương tự, tức là phải tìm hai số p' và q' biết hiệu $p' - q'$ và $\text{ƯCLN}(p', q') = 1$.

Bài 15

Tìm hai số a và b biết tích của chúng bằng 300 và BCNN của chúng bằng 60.

● *Tìm hiểu đề bài*

Khác với bài 14, bài này cho biết tích hai số và BCNN của chúng, tức là biết $a.b = 300$, $\text{BCNN}(a, b) = 60$ và phải tìm a, b .

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Lưu ý đến tính chất sau đây giữa BCNN của hai số với ƯCLN của chúng : "BCNN của hai số bằng tích của hai số đó chia cho ƯCLN của chúng". Biết BCNN và tích $a.b$ ta tìm được ngay ƯCLN (a, b).

Do đó bài toán đã cho trở thành "Tìm hai số a, b biết tích ab và ƯCLN của chúng".

Dựa vào cách giải bài 14 ta tìm được tích $a'.b'$ trong đó a', b' là hai số nguyên tố cùng nhau. Từ đó suy ra a', b' rồi a, b .

● *Cách giải*

$$\text{Ta có : } \text{ƯCLN}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{BCNN}(a, b)} \text{ hay } \text{ƯCLN}(a, b) = \frac{300}{60} = 5$$

Vì 5 là ƯCLN (a, b) nên ta có thể viết :

$$a = 5a', b = 5b' \text{ với } \text{ƯCLN}(a', b') = 1.$$

$$\text{Ta có : } a.b = 5a'.5b' = 25a'b'. \text{ Suy ra } a'.b' = 300 : 25 = 12.$$

Phân tích 12 thành tích của hai số nguyên tố cùng nhau ta được :

$$12 = 1.12 = 3.4$$

$$\text{Từ đó } a = 5.a' = 5.1 = 5 ; b = 5.b' = 5.12 = 60 ;$$

$$\text{hoặc } a = 5.3 = 15 ; b = 5.4 = 20.$$

● *Khai thác bài toán*

Đáng lẽ cho BCNN của hai số a và b ta có thể cho ƯCLN của chúng. Chẳng hạn với bài toán trên, đề bài có thể là :

"Tìm hai số a và b biết tích của chúng bằng 300 và ƯCLN của chúng bằng 5". Ngoài ra có thể giải bài toán về mối quan hệ giữa BCNN và ƯCLN của hai hay nhiều số :

"Chứng minh rằng BCNN của hai số thì luôn chia hết cho ƯCLN của chúng". Cách giải như sau :

Khi lập BCNN thì có tất cả thừa số nguyên tố của một trong hai số. Do đó trong thành phần của BCNN có nhóm các thừa số chung tức là có ƯCLN. Vậy BCNN của hai số chia hết cho ƯCLN của hai số đó.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 16

a) Tìm số có bốn chữ số $\overline{xyzt}$ biết rằng :

$$\overline{xyzt} \cdot 10001 = \overline{1a8bc9d7}$$

trong đó a, b, c, d là các chữ số.

b) Tìm các chữ số x, y, z sao cho số $\overline{x7y8z9}$ chia hết cho 1001

Bài 17

Cho hai số $\overline{abc}$ và $\overline{def}$ đều không chia hết cho 37 nhưng tổng của chúng lại chia hết cho 37. Chứng minh rằng số $\overline{abcdef}$ chia hết cho 37.

Bài 18

a) Chứng minh rằng số $\overline{xyyx}$ và tổng các số $\overline{xy} + \overline{yx}$ đều chia hết cho 11.

b) Tổng của 18 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 18 không ?

Bài 19

Dùng ba chữ số trong bốn số lẻ 1 ; 3 ; 5 ; 7 để viết tất cả các số có ba chữ số chia hết cho 45.

Bài 20

Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp bằng 3024.

a) Chứng tỏ rằng 4 số này đều có một chữ số ;

b) Tìm 4 số đó.

Bài 21

a) Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 288 và ƯCLN của chúng bằng 24.

b) Tìm hai số biết tích của chúng bằng 4320 và ƯCLN của chúng bằng 12.

Bài 22*

Viết số 10 dưới dạng tổng của các số tự nhiên sao cho BCNN của chúng là lớn nhất.

Bài 23*

Cho m là số có chín chữ số liên tiếp từ 1 đến 9 và p là số có chín chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại. Chứng minh rằng :

a) m và p đều là bội của 9 ;

b) ƯCLN của m và p bằng 9.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 16

a) Ta có thể viết :

$$\overline{xyzt} \cdot 10001 = \overline{xyzt} \cdot (10000 + 1) = \overline{xyzt0000} + \overline{xyzt} = \overline{xyztxyzt}$$

Từ đó :

$$\overline{xyztxyzt} = \overline{1a8bc9d7}$$

Suy ra : $x = 1 = c$, $y = a = 9$, $z = 8 = d$, $t = b = 7$.

Vậy số phải tìm là : $\overline{xyzt} = 1987$.

b) Gọi thương của $\overline{x7y8z9}$ và 1001 là q , q phải là số có ba chữ số (vì nếu q có hai chữ số thì $1001 \cdot q$ là số có 4 chữ số, nếu q có bốn chữ số thì $1001 \cdot q$ là số có 7 chữ số).

Đặt $q = \overline{abc}$ ta có :

$$\overline{x7y8z9} = 1001 \cdot \overline{abc} = (1000 + 1) \cdot \overline{abc}$$

$$= \overline{abc000} + \overline{abc} = \overline{abcabc}$$

Như thế : $\overline{x7y8z9} = \overline{abcabc}$

Suy ra $x = a = 8, y = c = 9, z = b = 7$.

Vậy ba chữ số cần tìm là $x = 8, y = 9, z = 7$.

Bài 17

Để làm xuất hiện tổng $\overline{abc} + \overline{def}$ (chia hết cho 37) ta viết :

$$\overline{abcdef} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{def} = 999 \cdot \overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def}).$$

Vì $999 \cdot \overline{abc} : 37$ và $(\overline{abc} + \overline{def}) : 37$ nên $\overline{abcdef} : 37$.

Bài 18

$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{xyyx} &= 1000x + 100y + 10y + x \\ &= 1001x + 110y = 11(91x + 10y) \end{aligned}$$

luôn chia hết cho 11.

$$\overline{xy} + \overline{yx} = (10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y = 11(x + y)$$

Vậy tổng $\overline{xy} + \overline{yx}$ chia hết cho 11.

b) Tổng của 18 số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ (chẳng hạn $1 + 2 + 3 + \dots + 16 + 17 + 18$ là số lẻ do $1 + 18$ là lẻ, $2 + 17$ lẻ, $3 + 16$ lẻ, v. v...) nên không thể chia hết cho số chẵn 18.

Bài 19

Muốn một số chia hết cho 45 thì số đó phải chia hết cho 9 và cho 5.

Ta nhận thấy $1 + 3 + 7 = 11$, $1 + 5 + 7 = 13$, $3 + 5 + 7 = 15$ đều không chia hết cho 9 nên phải loại chữ số 7 để còn ba chữ số 1, 3, 5 vì $1 + 3 + 5 = 9$ chia hết cho 9.

Với ba chữ số 1, 3, 5 ta viết được hai số tận cùng bằng 5 là 135 và 315. Hai số này chia hết cho 9 và cho 5 nên chia hết cho 45.

Bài 20

a) Trong bốn số này không thể có số 10 vì tích đã cho tận cùng bằng 4. Ngoài ra nếu cả 4 số đều lớn hơn 10 thì tích của chúng phải lớn hơn 3024. Suy ra cả bốn số đều có một chữ số.

b) Trong bốn chữ số này không thể có chữ số 5 vì tích sẽ tận cùng bằng 0. Thành thử trong các chữ số từ 1 đến 9 (trừ chữ số 5) ta có thể lập thành hai nhóm có bốn chữ số liên tiếp : nhóm bốn chữ số 1 ; 2 ; 3 ; 4 mà tích $1.2.3.4 = 24$ và nhóm bốn chữ số 6 ; 7 ; 8 ; 9 mà tích $6.7.8.9 = 3024$. Vậy 4 số phải tìm là 6, 7, 8, 9.

Bài 21

a) Vì 24 là ƯCLN (a, b) nên ta có thể viết : $a = 24.a'$, $b = 24.b'$ (a' và b' nguyên tố cùng nhau). Từ đó :

$$a + b = 24(a' + b') = 288. \text{ Suy ra } a' + b' = 12.$$

Chỉ có hai cặp số nguyên tố cùng nhau mà tổng bằng 12 là : 1 và 11 ; 5 và 7. Từ đó $a = 24.1 = 24$, $b = 11.24 = 264$

hoặc $a = 24.5 = 120$, $b = 7.24 = 168$.

Bài 22*

Trong các cách viết số 10 dưới dạng tổng của các số tự nhiên thì chỉ có cách viết $10 = 2 + 3 + 5$ cho BCNN (2 ; 3 ; 5) = 30 là lớn nhất.

Bài 23*

a) Tổng các chữ số của m là $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ và của p cũng là 45 nên m và p đều luôn chia hết cho 9.

b) Ta nhận thấy $p - 8m = 9$ cho nên nếu m và p có ước chung là k thì 9 chia hết cho k. Thế thì mọi ước chung của m và p đều là ước của 9, tức là ƯCLN (m, p) = 9.

V. TẬP HỢP CÁC SỐ BIỂU DIỄN BỞI PHÂN SỐ (TẬP HỢP Q_+)

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Tìm x biết :

$$\text{a) } \frac{2}{7} = \frac{x}{21} \quad \text{b) } \frac{x}{9} = \frac{8}{12} \quad \text{c) } \frac{11}{13} = \frac{121}{x} \quad \text{d) } \frac{15}{x} = \frac{9}{12}$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra cho hai phân số bằng nhau, ta phải tìm giá trị của x là tử hoặc mẫu của một trong hai phân số bằng nhau đó. Một số phân số đã cho chưa được rút gọn.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Để tìm được giá trị của x , cần dựa vào tính chất cơ bản của phân số là : nếu ta nhân hay chia tử và mẫu của một phân số với cùng một số tự nhiên khác không thì được một phân số bằng phân số đã cho. Chẳng hạn, với câu a, ta nhận thấy : mẫu của phân số thứ hai gấp 3 lần mẫu của phân số thứ nhất (vì $21 = 7.3$) nên theo tính chất cơ bản của phân số thì tử của phân số thứ hai cũng phải gấp 3 lần tử của phân số thứ nhất, từ đó suy ra giá trị của x . Các câu khác làm tương tự câu a.

● *Cách giải*

$$\text{a) Vì } \frac{2}{7} = \frac{x}{21} \text{ và } 21 = 7.3 \text{ nên } x = 2.3 = 6$$

b) Vì $\frac{x}{9} = \frac{8}{12}$ hay $\frac{x}{9} = \frac{2}{3}$ và $9 = 3.3$ nên $x = 2.3 = 6$

c) Vì $\frac{11}{13} = \frac{121}{x}$ và $121 = 11.11$ nên $x = 13.11 = 143$

d) Vì $\frac{15}{x} = \frac{9}{12}$ hay $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$ và $15 = 3.5$ nên $x = 4.5 = 20$.

● *Khai thác bài toán*

Bài toán đã cho có thể giải theo cách khác : nếu có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì suy ra $a.d = b.c$, do đó mà $a = \frac{b.c}{d}$ (tương tự có $b = \frac{a.d}{c}$, $c = \frac{a.d}{b}$, $d = \frac{b.c}{a}$).

Từ đó có cách giải khác như sau :

a) $\frac{2}{7} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = \frac{21.2}{7} = 3.2 = 6$

b) $\frac{x}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = \frac{8.9}{12} = \frac{8.9}{4.3} = 2.3 = 6$

c) $\frac{11}{13} = \frac{121}{x} \Rightarrow x = \frac{121.13}{11} = 11.13 = 143$

d) $\frac{15}{x} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \frac{15.12}{3.3} = 5.4 = 20$.

Bài 2

a) Cho phân số $\frac{3}{7}$. Xét phân số $\frac{7-3}{7}$. Hai phân số này có tối giản không ?

b) Cho phân số $\frac{p}{q}$ tối giản ($q \neq 0, q > p$). Chứng tỏ rằng phân số $\frac{q-p}{q}$ cũng tối giản.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra ở câu a : cho phân số $\frac{3}{7} < 1$ và phân số mà tử bằng hiệu của mẫu và tử của phân số $\frac{3}{7}$ tức là phân số $\frac{4}{7} < 1$. Với

để đặt ra là xét xem hai phân số này có tối giản không. Câu b là xét dạng tổng quát nhưng cho phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản mà phải chứng tỏ phân số $\frac{q-p}{q}$ cũng tối giản.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Với câu a hãy chứng tỏ rằng tử và mẫu là hai số nguyên tố cùng nhau tức là ƯCLN của chúng bằng 1.

Với câu b hãy giả sử rằng phân số $\frac{q-p}{q}$ có thể rút gọn được cho $d > 1$ thì sẽ dẫn tới điều vô lí vì trái với đề bài là $\frac{p}{q}$ tối giản, nên điều giả sử trên là không đúng, suy ra $\frac{q-p}{q}$ tối giản.

● *Cách giải*

a) $\frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$. Ta thấy 3 và 7 cũng như 4 và 7 là các cặp số nguyên tố cùng nhau tức là ƯCLN (3 ; 7) = 1 và ƯCLN (4 ; 7) = 1, do đó $\frac{3}{7}$ và $\frac{4}{7}$ là các phân số tối giản.

b) Giả sử rằng $\frac{q-p}{q}$ không phải là phân số tối giản, tức là $\frac{q-p}{q}$ có thể rút gọn cho $d > 1$, khi đó :

$q - p = dm$ và $q = dn$ (với $m, n \in \mathbf{N}$ và $n > m$), suy ra :

$q - (q - p) = d(n - m)$ hay $p = d(n - m)$.

Theo trên ta có $q = dn$ và $p = d(n - m)$, tức là p và q cùng chia hết cho $d > 1$, điều này vô lí vì theo bài ra phân số $\frac{p}{q}$ tối

giản tức là $\text{UCLN}(p, q) = 1$. Vậy điều giả sử trên là sai, do đó $\frac{q-p}{q}$ là phân số tối giản.

● *Khai thác bài toán*

+ Cần phải thay đổi điều kiện nào trong câu b của bài ra để phân số $\frac{p-q}{p}$ tối giản ? Cho ví dụ.

Ta thấy ngay rằng, phép trừ $p - q$ phải thực hiện được. Muốn vậy phải thay đổi điều kiện trong câu b là $q > p$ bằng $p > q$. Ví dụ, có phân số $\frac{7}{5}$ tối giản, suy ra $\frac{7-5}{7} = \frac{2}{7}$ là phân số tối giản.

+ Chú ý rằng, cách giải ở câu b là cách chứng minh bằng "*phản chứng*". Cần xem kĩ để nắm được cách giải này. Ngoài ra lưu ý là nếu $\frac{p}{q}$ tối giản thì $\frac{q}{p}$ cũng tối giản (vì UCLN của p và q đều bằng 1).

Bài 3

a) Cho phân số $\frac{a}{a+1}$ với a là số tự nhiên, chứng tỏ rằng phân số đó là tối giản.

b) Chứng tỏ rằng, nếu phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản ($b \neq 0$) thì phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng tối giản, từ đó suy ra phân số $\frac{2\,475\,791}{1\,237\,896}$ là tối giản.

● *Tìm hiểu đề bài*

Ở câu a phân số $\frac{a}{a+1}$ có tử và mẫu là hai số tự nhiên liên tiếp, còn ở câu b thì cho $\frac{a}{b}$ là tối giản, phải chứng tỏ phân số mà tử là tổng của tử và mẫu của phân số đã cho và mẫu vẫn được giữ nguyên $\left(\frac{a+b}{b}\right)$ cũng tối giản.

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Với câu a, do a và $a + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên luôn có ƯCLN $(a, a + 1) = 1$.

Với câu b, hãy làm tương tự cách giải câu b của bài 2.

• *Cách giải*

a) Vì a và $a + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên ƯCLN $(a, a + 1) = 1$, vậy phân số $\frac{a}{a + 1}$ là tối giản.

b) Giả sử rằng $\frac{a + b}{b}$ không phải là phân số tối giản, tức là $\frac{a + b}{b}$ có thể rút gọn cho $d > 1$, khi đó :

$a + b = dm$, $b = dn$ (với $m, n \in \mathbb{N}$ và $m > n$), suy ra :

$a + b - b = dm - dn = d(m - n)$ hay $a = d(m - n)$.

Theo trên ta có $a = d(m - n)$ và $b = dn$ tức là a và b cùng chia hết cho $d > 1$, trái với bài ra là phân số $\frac{a}{b}$ tối giản tức là ƯCLN $(a, b) = 1$. Vậy điều giả sử trên là sai, do đó $\frac{a + b}{b}$ là phân số tối giản.

Ta có $\frac{2\,475\,791}{1\,237\,896} = \frac{1\,237\,895 + 1\,237\,896}{1\,237\,896}$. Vì $1\,237\,895$ và $1\,237\,896$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên phân số $\frac{1\,237\,895}{1\,237\,896}$ là tối giản.

Áp dụng kết quả ở trên ta có phân số $\frac{1\,237\,895 + 1\,237\,896}{1\,237\,896}$ là tối giản.

Vậy $\frac{2\,475\,791}{1\,237\,896}$ là phân số tối giản.

● *Khai thác bài toán*

+ Ở câu a khi số tự nhiên a bằng 0 thì ta vẫn có phân số $\frac{0}{0+1}$ hay $\frac{0}{1}$, mà $\text{ƯCLN}(0; 1) = 1$. Vậy số tự nhiên a có thể là bất kì số nào thì phân số $\frac{a}{a+1}$ cũng luôn tối giản.

Như vậy, từ kết quả ở câu a có thể rút ra kết luận gì ?

Ta thấy ngay rằng, mọi phân số mà tử và mẫu là hai số tự nhiên liên tiếp luôn tạo thành phân số tối giản.

+ Với điều kiện như ở câu b, hãy chứng tỏ rằng phân số $\frac{a+b}{a}$ cũng là tối giản.

Thật vậy, giả sử $\frac{a+b}{a}$ không phải là phân số tối giản, tức là $\frac{a+b}{a}$ có thể rút gọn cho $d > 1$, nghĩa là :

$a+b = dm$ và $a = dn$ (với $m, n \in \mathbb{N}$ và $m > n$), suy ra :

$$a+b-a = dm-dn \text{ hay } b = d(m-n).$$

Như vậy ta có $a = dn$, $b = d(m-n)$ tức là a và b cùng chia hết cho $d > 1$, trái với bài ra là a và b nguyên tố cùng nhau, vậy điều giả sử trên là sai, do đó $\frac{a+b}{a}$ là phân số tối giản.

Bài 4

Chứng tỏ rằng :

Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (với $b, d \neq 0$) thì $ad = bc$ và ngược lại.

● *Tìm hiểu đề bài*

Theo đề bài, nếu có hai phân số bằng nhau, ta phải chứng tỏ rằng : tích giữa tử của phân số này với mẫu của phân số kia

phải bằng tích giữa mẫu của phân số này với tử của phân số kia, tức là $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ ($\Rightarrow$: đọc là suy ra).

Điều ngược lại là từ $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Bằng cách quy đồng mẫu của hai phân số đã cho, ta được hai phân số cùng mẫu, chúng bằng nhau, nên hai tử phải bằng nhau.

Với điều ngược lại, cần làm phép chia hai vế của đẳng thức $ad = bc$, cho thừa số $bd \neq 0$.

● *Cách giải*

Quy đồng mẫu các phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ ($b, d \neq 0$) ta được :

$$\begin{aligned}\frac{ad}{bd} &= \frac{bc}{bd} \\ \Rightarrow ad &= bc.\end{aligned}$$

Ngược lại, khi có đẳng thức $ad = bc$ ($b, d \neq 0$), có thể chia cả hai vế cho tích bd :

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

rút gọn phân số, ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Bài toán này có ý nghĩa như một tính chất toán học có thể ghi tóm tắt như sau :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc^{(*)} \quad (\Leftrightarrow : \text{đọc là khi và chỉ khi})$$

Từ đây trở đi, có thể dùng tính chất này để giải các bài tập khi cần thiết.

+ Cách viết như ở dạng (*) là do viết gộp hai mệnh đề sau :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (**)$$

Người ta nói rằng : $ad = bc$ là điều kiện cần và đủ để cho

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

+ Từ dạng (**) có thể chia hai vế của đẳng thức $ad = bc$ cho :

$$- ab \text{ có } \frac{ad}{ab} = \frac{bc}{ab} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a},$$

$$- ac \text{ có } \frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

$$- dc \text{ có } \frac{ad}{dc} = \frac{bc}{dc} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Cụ thể, nếu có $3.8 = 4.6$ (cùng bằng 24) ta suy ra được các cặp phân số bằng nhau dưới đây :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}; \frac{8}{4} = \frac{6}{3};$$

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{6}; \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

Bài 5

Tìm x, y biết :

$$a) \frac{x}{12} = \frac{5}{y}$$

$$b) \frac{x}{y} = \frac{12}{16}$$

$$c) \frac{3}{x} = \frac{y}{15}$$

$$d) \frac{6}{y} = \frac{x}{3}$$

• Tìm hiểu đề bài

Bài ra cho hai phân số bằng nhau, phải tìm phân số bằng phân số đã cho (câu b) hoặc phải tìm tử của phân số đã cho mẫu hoặc phải tìm mẫu của phân số đã cho tử.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Sử dụng kết quả bài 3 để làm bài toán này. Vận dụng mối quan hệ giữa phép nhân, phép chia trong tập hợp $\mathbf{N}$ để tìm giá trị của x, y .

● *Cách giải*

a) $\frac{x}{12} = \frac{5}{y} \Rightarrow x.y = 12.5 = 60$. Từ đó, suy ra các cặp giá trị của x, y như sau :

$$x = 1 \text{ thì } y = 60 ; x = 2 \text{ thì } y = 30$$

$$x = 3 \text{ thì } y = 20 ; x = 4 \text{ thì } y = 15$$

$$x = 5 \text{ thì } y = 12 ; x = 6 \text{ thì } y = 10$$

$$x = 10 \text{ thì } y = 6 ; x = 12 \text{ thì } y = 5$$

$$x = 15 \text{ thì } y = 4 ; x = 20 \text{ thì } y = 3$$

$$x = 30 \text{ thì } y = 2 ; x = 60 \text{ thì } y = 1.$$

$$b) \frac{x}{y} = \frac{12}{16} \text{ hay } \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{4} y.$$

Nhận thấy rằng, với giá trị của y là bội của 4 thì có một giá trị của x . Do có vô số số là bội của $y = 4$ nên sẽ có vô số số là giá trị tương ứng của x . Vậy có vô số cặp giá trị x, y thỏa

$$\text{mãn } \frac{x}{y} = \frac{12}{16}.$$

c) $\frac{3}{x} = \frac{y}{15} \Rightarrow xy = 3.15 = 45$. Từ đó, suy ra các cặp giá trị của x, y như sau :

$$x = 1 \text{ thì } y = 45 ; x = 3 \text{ thì } y = 15$$

$$x = 5 \text{ thì } y = 9 ; x = 9 \text{ thì } y = 5$$

$$x = 15 \text{ thì } y = 3 ; x = 45 \text{ thì } y = 1.$$

d) $\frac{6}{y} = \frac{x}{3} \Rightarrow x.y = 3.6 = 18$. Từ đó, suy ra các cặp giá trị của x, y như sau :

$$x = 1 \text{ thì } y = 18 ; x = 2 \text{ thì } y = 9$$

$$x = 3 \text{ thì } y = 6 ; x = 6 \text{ thì } y = 3$$

$$x = 9 \text{ thì } y = 2 ; x = 18 \text{ thì } y = 1.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Trong các cặp phân số bằng nhau đã cho ta đã tìm được các cặp giá trị của x và y . Bây giờ nếu $\frac{z}{11} = \frac{x}{y}$ thì có thể tính được các giá trị của x, y và z không ?

Sử dụng kết quả của bài toán 3, ta có :

$$\frac{z}{11} = \frac{x}{y} \Rightarrow yz = 11.x$$

Có thể tính được giá trị của x, y, z như sau :

$$x = 1 \text{ thì } y = 1 \text{ và } z = 11$$

hoặc $y = 11 \text{ và } z = 1,$

$$x = 2 \text{ thì } y = 2 \text{ và } z = 11$$

hoặc $y = 11 \text{ và } z = 2, \dots$

Như vậy là, cứ chọn một giá trị của x sẽ có 2 giá trị của y và z . Làm tương tự như trên sẽ có vô số giá trị của x, y, z thỏa mãn $\frac{z}{11} = \frac{x}{y}$.

+ Từ kết quả của bài toán này, chẳng hạn với câu a, khi chọn $x = 30$ và $y = 2$ ta có hai phân số bằng nhau $\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$, có thể chứng tỏ rằng cặp phân số sau đây là bằng nhau không ?

$$\frac{30 + 5}{12 + 2} \text{ và } \frac{30 - 5}{12 - 2} ; \frac{5 + 2}{2} \text{ và } \frac{30 + 12}{12} ;$$

$$\frac{2}{5} \text{ và } \frac{12}{30} ; \frac{5}{30} \text{ và } \frac{2}{12} .$$

Để chứng tỏ rằng hai phân số bằng nhau có thể tiến hành một trong hai cách sau :

Cách 1. Làm các phép tính rồi áp dụng kết quả bài toán 3

$$\frac{30+5}{12+2} = \frac{35}{14}, \quad \frac{30-5}{12-2} = \frac{25}{10}, \quad 35 \cdot 10 = 25 \cdot 14 = 350. \text{ Do đó}$$

$$\frac{30+5}{12+2} = \frac{30-5}{12-2}.$$

$$\frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{30+12}{12} = \frac{42}{12}, \quad 12 \cdot 7 = 42 \cdot 2 = 84. \text{ Do đó}$$

$$\frac{5+2}{2} = \frac{30+12}{12}.$$

$$30 \cdot 2 = 12 \cdot 5 = 60. \text{ Do đó } \frac{2}{5} = \frac{12}{30}.$$

$$5 \cdot 12 = 30 \cdot 2 = 60. \text{ Do đó } \frac{5}{30} = \frac{2}{12}.$$

Cách 2. Làm các phép tính rồi áp dụng tính chất cơ bản của phân số

$$\frac{30+5}{12+2} = \frac{35}{14} = \frac{35 : 7}{14 : 7} = \frac{5}{2}; \quad \frac{30-5}{12-2} = \frac{25}{10} = \frac{25 : 5}{10 : 5} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{30+5}{12+2} = \frac{30-5}{12-2}.$$

$$\frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}; \quad \frac{30+12}{12} = \frac{42}{12} = \frac{42 : 6}{12 : 6} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Do đó } \frac{5+2}{2} = \frac{30+12}{12}.$$

$$\frac{12}{30} = \frac{12 : 6}{30 : 6} = \frac{2}{5}. \text{ Do đó } \frac{2}{5} = \frac{12}{30}.$$

$$\frac{5}{30} = \frac{5 : 5}{30 : 5} = \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{12} = \frac{2 : 2}{12 : 2} = \frac{1}{6}. \text{ Do đó } \frac{5}{30} = \frac{2}{12}.$$

Bài 6

a) Tìm dạng tối giản của một phân số mà tử bằng 60 và mẫu là BCNN của các số 30 ; 50 ; 75.

b) Tìm dạng tối giản của một phân số mà tử bằng 170 và mẫu là BCNN của 200 ; 350 ; 425.

● *Tìm hiểu đề bài*

Câu a và b của bài toán là cùng một loại câu hỏi : tìm dạng tối giản của một phân số biết tử là một số đã cho còn mẫu thì cho biết một cách gián tiếp, đó là BCNN của bộ ba số cụ thể.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết phải tìm BCNN của các số đã cho bằng cách : phân tích mỗi số đó ra thừa số nguyên tố, rồi lấy tích của các thừa số chung và riêng với số mũ lớn nhất. Đó chính là mẫu của phân số. Sau đó phải tìm ƯCLN của tử và mẫu bằng cách : phân tích tử và mẫu ra thừa số nguyên tố rồi lấy tích của các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất. Cuối cùng lấy mẫu, tử chia cho ƯCLN của tử và mẫu được phân số tối giản phải tìm.

● *Cách giải*

$$a) 30 = 2.3.5 ; 50 = 2.5^2 ; 75 = 3.5^2.$$

$$BCNN (30 ; 50 ; 75) = 2.3.5^2 = 150 ,$$

$$60 = 2^2.3.5.$$

$$ƯCLN (60 ; 150) = 2.3.5 = 30$$

$$\text{Phân số phải tìm là } \frac{60}{150} .$$

$$\text{Vậy phân số tối giản phải tìm là : } \frac{60 : 30}{150 : 30} = \frac{2}{5} .$$

$$b) 200 = 2^3.5^2 ; 350 = 2.5^2.7 ; 425 = 5^2.17$$

$$BCNN (200 ; 350 ; 425) = 2^3.5^2.7.17 = 23800.$$

$$170 = 2.5.17$$

$$\text{ƯCLN}(23800; 170) = 2.5.17 = 170$$

Phân số phải tìm là $\frac{170}{23800}$.

Vậy phân số tối giản phải tìm là :

$$\frac{170}{23800} = \frac{170 : 170}{23800 : 170} = \frac{1}{140}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Có thể trình bày lời giải bài toán trên gọn hơn, với câu a chẳng hạn : sau khi có BCNN $(30; 50; 75) = 2.3.5^2$ và $60 = 2^2.3.5$ thì phân số phải tìm có dạng $\frac{2^2.3.5}{2.3.5^2}$. Sau khi rút gọn được phân số tối giản phải tìm là $\frac{2}{5}$.

+ Nếu tử của phân số phải tìm là số nguyên tố, chẳng hạn với câu a thay 60 bằng 61 thì phân số tối giản phải tìm là $\frac{61}{150}$.

Bài 7

So sánh các cặp phân số sau :

a) $\frac{p+1}{p}$ và $\frac{p+3}{p+2}$ (với $p \in \mathbf{N}$, $p \neq 0$) ;

b) $\frac{p}{p+6}$ và $\frac{p+1}{p+7}$ ($p \in \mathbf{N}$).

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài toán yêu cầu so sánh các cặp phân số tức là xét xem phân số này lớn hơn hay nhỏ hơn phân số kia.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Với $p \in \mathbf{N}$ trong các phân số đã cho có thể biết được mỗi phân số đó là lớn hơn hay nhỏ hơn 1.

Để có thể so sánh hai phân số với nhau, nếu phân số lớn hơn 1 thì lấy phân số đó trừ đi 1, còn nếu phân số nhỏ hơn 1 thì lấy 1 trừ đi phân số. Từ đó rút ra được kết luận về mỗi cặp phân số cần phải so sánh.

● *Cách giải*

a) Vì $p + 1 > p$ nên $\frac{p + 1}{p} > 1$, ta xét hiệu :

$$\frac{p + 1}{p} - 1 = \frac{p + 1 - p}{p} = \frac{1}{p}.$$

Vì $p + 3 > p + 2$ nên $\frac{p + 3}{p + 2} > 1$, ta xét hiệu :

$$\frac{p + 3}{p + 2} - 1 = \frac{p + 3 - p - 2}{p + 2} = \frac{1}{p + 2}.$$

Rõ ràng $p + 2 > p$ nên $\frac{1}{p} > \frac{1}{p + 2}$ (vì trong hai phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn).

$$\text{Vậy } \frac{p + 1}{p} > \frac{p + 3}{p + 2}.$$

b) Vì $p + 6 > p$ nên $\frac{p}{p + 6} < 1$, ta xét hiệu :

$$1 - \frac{p}{p + 6} = \frac{p + 6 - p}{p + 6} = \frac{6}{p + 6}.$$

Vì $p + 7 > p + 1$ nên $\frac{p + 1}{p + 7} < 1$, ta xét hiệu :

$$1 - \frac{p + 1}{p + 7} = \frac{p + 7 - p - 1}{p + 7} = \frac{6}{p + 7}.$$

Rõ ràng $p + 7 > p + 6$ nên $\frac{6}{p + 6} > \frac{6}{p + 7}$ (vì trong hai phân số cùng tử, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn).

Ta nhận thấy rằng, trong hai phép trừ ở trên, cùng có số bị trừ là 1, nếu phép trừ nào có hiệu lớn hơn thì phép trừ ấy có số trừ nhỏ hơn.

$$\text{Vậy } \frac{p}{p+6} < \frac{p+1}{p+7}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Có thể so sánh hai phân số với nhau bằng cách quy đồng mẫu như sau :

a) Quy đồng mẫu hai phân số đã cho

$$\frac{p+1}{p} = \frac{(p+1)(p+2)}{p(p+2)} = \frac{p^2+2p+p+2}{p(p+2)} = \frac{p^2+3p+2}{p(p+2)}$$

$$\frac{p+3}{p+2} = \frac{p(p+3)}{p(p+2)} = \frac{p^2+3p}{p(p+2)}$$

$$\text{Vì } p^2+3p+2 > p^2+3p \text{ nên } \frac{p^2+3p+2}{p(p+2)} > \frac{p^2+3p}{p(p+2)} \text{ hay}$$

$$\frac{p+1}{p} > \frac{p+3}{p+2}.$$

b) Quy đồng mẫu hai phân số đã cho

$$\frac{p}{p+6} = \frac{p(p+7)}{(p+6)(p+7)} = \frac{p^2+7p}{(p+6)(p+7)}$$

$$\frac{p+1}{p+7} = \frac{(p+1)(p+6)}{(p+7)(p+6)} = \frac{p^2+p+6p+6}{(p+6)(p+7)} = \frac{p^2+7p+6}{(p+6)(p+7)}.$$

$$\text{Vì } p^2+7p+6 > p^2+7p \text{ nên } \frac{p^2+7p+6}{(p+6)(p+7)} > \frac{p^2+7p}{(p+6)(p+7)} \text{ hay}$$

$$\frac{p}{p+6} < \frac{p+1}{p+7}.$$

+ Như vậy để so sánh hai phân số với nhau ta có thể dùng cách :

a) so sánh mỗi phân số với số 1, rồi rút ra kết luận

b) quy đồng mẫu các phân số đó, rồi so sánh các tử

c) quy đồng tử các phân số đó, rồi so sánh các mẫu.

Khi giải toán, vận dụng cách nào hoặc phải kết hợp các cách là tùy nội dung bài ra.

Bài 8

So sánh các cặp phân số sau :

a) $\frac{1}{2^{300}}$ và $\frac{1}{3^{200}}$;

b) $\frac{1}{5^{199}}$ và $\frac{1}{3^{300}}$.

● Tìm hiểu đề bài

Bài ra là so sánh các cặp phân số, trong đó mẫu là một lũy thừa có cơ số và số mũ khác nhau.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Các cặp phân số phải so sánh đều có chung tử là 1, nên muốn biết phân số nào lớn hơn phải xét xem trong hai mẫu của hai phân số, mẫu nào nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn.

Mẫu của các phân số đều là lũy thừa không có cùng cơ số và số mũ, cần biến đổi hai mẫu của mỗi cặp phân số về dạng lũy thừa có cơ số khác nhau nhưng có cùng số mũ sẽ dễ so sánh hơn.

Cần nhớ lại các phép tính về lũy thừa như :

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Nếu $a > b > 1$ và $m > n$ thì $a^m > b^n$.

● Cách giải

a) Ta có $2^{300} = 2^{3 \cdot 100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

$$3^{200} = 3^{2 \cdot 100} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

Vì $9 > 8$ nên $9^{100} > 8^{100}$ suy ra $\frac{1}{8^{100}} > \frac{1}{9^{100}}$.

Vậy $\frac{1}{2^{300}} > \frac{1}{3^{200}}$.

b) Ta có $5^{199} < 5^{200} = 5^{2 \cdot 100} = (5^2)^{100} = 25^{100}$,
 $3^{300} = 3^{3 \cdot 100} = (3^3)^{100} = 27^{100}$.

Vì $27 > 25$ nên $27^{100} > 25^{100}$ suy ra $\frac{1}{25^{100}} > \frac{1}{27^{100}}$ hay
 $\frac{1}{5^{200}} > \frac{1}{3^{300}}$ (1). Biết $5^{199} < 5^{200}$ nên $\frac{1}{5^{199}} > \frac{1}{5^{200}}$ (2).

Từ (1) và (2) có : $\frac{1}{5^{199}} > \frac{1}{3^{300}}$.

● *Khai thác bài toán*

Để so sánh hai phân số với nhau, có thể quy đồng mẫu rồi so sánh các tử. Chẳng hạn, với câu a, bằng cách quy đồng mẫu ta có :

$$\frac{3^{200}}{2^{300} \cdot 3^{200}} \text{ và } \frac{2^{300}}{2^{300} \cdot 3^{200}}.$$

Đến đây chỉ cần so sánh 3^{200} và 2^{300} .

Biết $2^{300} = 8^{100}$ và $3^{200} = 9^{100}$ mà $9^{100} > 8^{100}$, do đó

$$\frac{1}{8^{100}} > \frac{1}{9^{100}} \text{ hay } \frac{1}{2^{300}} > \frac{1}{3^{200}}.$$

Bài 9

a) So sánh phân số $A = \frac{1998 \cdot 1999 - 2}{1997 \cdot 1999 + 1996}$ với số 1.

b) So sánh hai phân số sau :

$$B = \frac{7\,378\,605\,124}{8\,853\,642\,354} \text{ và } C = \frac{7\,387\,605\,125}{8\,853\,642\,356}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Câu a là so sánh một phân số mà tử là một hiệu và mẫu là một tổng với đơn vị. Câu b là so sánh hai phân số mà tử và mẫu là số rất lớn.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Với câu a, cần vận dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng khi viết $1998 \cdot 1999 = (1997 + 1) \cdot 1999$. Sau đó

thực hiện các phép tính ở tử rồi chứng tỏ rằng tử lớn hơn mẫu nên phân số lớn hơn đơn vị.

Với câu b không thể dùng cách quy đồng mẫu để so sánh hai phân số B và C, cần nhận xét hai tử, hai mẫu với nhau, sau đó dùng chữ để viết hai phân số theo như nhận xét trên. Quy đồng mẫu hai phân số vừa viết được, nêu nhận xét để rút ra kết luận.

● *Cách giải*

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{1998 \cdot 1999 - 2}{1997 \cdot 1999 + 1996} = \frac{(1997 + 1) \cdot 1999 - 2}{1997 \cdot 1999 + 1996} \\ &= \frac{1997 \cdot 1999 + 1999 - 2}{1997 \cdot 1999 + 1996} = \frac{1997 \cdot 1999 + 1997}{1997 \cdot 1999 + 1996} \\ &= \frac{(1997 \cdot 1999 + 1996) + 1}{1997 \cdot 1999 + 1996} = 1 + \frac{1}{1997 \cdot 1999 + 1996} \end{aligned}$$

Vậy tử lớn hơn mẫu nên $A > 1$.

b) Nhận thấy tử của phân số C lớn hơn tử của phân số B là 1 và mẫu của phân số C lớn hơn mẫu của phân số B là 2, nên nếu đặt $B = \frac{p}{q}$ thì $C = \frac{p+1}{q+2}$. Với mẫu chung là $q(q+2)$, ta có :

$$B = \frac{p(q+2)}{q(q+2)} = \frac{pq+2p}{q(q+2)}$$

$$C = \frac{q(p+1)}{q(q+2)} = \frac{pq+q}{q(q+2)}$$

$2p$ là một số có 11 chữ số còn q là một số có 10 chữ số do đó $2p > q$, suy ra $pq+2p > pq+q$.

$$\text{Vậy } \frac{pq+2p}{q(q+2)} > \frac{pq+q}{q(q+2)} \text{ hay } B > C.$$

● *Khai thác bài toán*

Ngoài cách so sánh hai phân số bằng cách dùng một phân số khác làm trung gian, viết thành phân số mới, quy đồng rồi nhận xét như ở trên còn có thể so sánh hai phân số bằng cách :

- Rút gọn phân số. Chẳng hạn, so sánh hai phân số :

$$\frac{9764}{36615} \text{ và } \frac{56272}{263775}.$$

Ta thấy $\frac{9764}{36615} = \frac{4}{15}$ và $\frac{56272}{263775} = \frac{16}{75}$. Vì $\frac{4}{15} = \frac{20}{75}$, do đó $\frac{20}{75} > \frac{16}{75}$ hay $\frac{9764}{36615} > \frac{56272}{263775}$.

- So sánh với số 1. Chẳng hạn, so sánh hai phân số :

$$\frac{12}{25} \text{ và } \frac{11}{20}.$$

Ta thấy $1 - \frac{12}{25} = \frac{25 - 12}{25} = \frac{13}{25} = \frac{52}{100}$.

$$1 - \frac{11}{20} = \frac{20 - 11}{20} = \frac{9}{20} = \frac{45}{100}$$

Vì $\frac{45}{100} < \frac{52}{100}$ nên $\frac{11}{20} > \frac{12}{25}$.

Bài 10

Sắp xếp các phân số sau đây theo thứ tự từ bé đến lớn :

a) $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{17}{60}, \frac{7}{12}, \frac{3}{5}$

b) $\frac{7}{22}, \frac{14}{49}, \frac{5}{33}, \frac{14}{55}, \frac{18}{66}$

c) $\frac{5}{12}, \frac{8}{36}, \frac{9}{27}, \frac{41}{72}, \frac{25}{30}$

d) $\frac{5}{7}, \frac{23}{49}, \frac{45}{84}, \frac{40}{70}, \frac{72}{63}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các phân số không cùng mẫu, phải sắp xếp chúng theo thứ tự từ bé đến lớn, trong đó có những phân số phải rút gọn.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để có thể sắp xếp các phân số đã cho theo thứ tự từ bé đến lớn cần phải quy đồng mẫu các phân số rồi so sánh các tử với

nhau. Mẫu chung của các phân số là BCNN của các mẫu. Chú ý là, nếu có thể được hãy rút gọn phân số trước khi quy đồng.

● *Cách giải*

a) Ta thấy 60 chia hết cho 4, 5, 6 và 12, nên mẫu chung là 60, do đó có các phân số sau :

$$\frac{50}{60}, \frac{15}{60}, \frac{17}{60}, \frac{35}{60}, \frac{36}{60}$$

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ bé đến lớn ta có :

$$\frac{15}{60}, \frac{17}{60}, \frac{35}{60}, \frac{36}{60}, \frac{50}{60} \text{ hay } \frac{1}{4}, \frac{17}{60}, \frac{7}{12}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$$

b) Các phân số có thể rút gọn được :

$$\frac{14}{49} = \frac{2}{7}, \frac{18}{66} = \frac{3}{11}$$

Các phân số đã cho (sau khi rút gọn) có thể viết là :

$$\frac{7}{2 \cdot 11}, \frac{2}{7}, \frac{5}{3 \cdot 11}, \frac{14}{5 \cdot 11}, \frac{3}{11}$$

$$\text{BCNN } (22 ; 7 ; 33 ; 55 ; 11) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

Quy đồng mẫu, được :

$$\frac{735}{2310}, \frac{660}{2310}, \frac{350}{2310}, \frac{588}{2310}, \frac{630}{2310}$$

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ bé đến lớn ta có :

$$\frac{350}{2310}, \frac{588}{2310}, \frac{630}{2310}, \frac{660}{2310}, \frac{735}{2310}$$

$$\text{hay } \frac{5}{33}, \frac{14}{55}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7}, \frac{7}{22}$$

c) Các phân số có thể rút gọn được :

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}, \frac{9}{27} = \frac{1}{3}, \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Các phân số đã cho (sau khi rút gọn) có thể viết là :

$$\frac{5}{12} , \frac{2}{9} , \frac{1}{3} , \frac{41}{72} , \frac{5}{6}$$

$$\text{BCNN} (12 ; 9 ; 3 ; 72 ; 6) = 72.$$

Quy đồng mẫu các phân số, được :

$$\frac{30}{72} , \frac{16}{72} , \frac{24}{72} , \frac{41}{72} , \frac{60}{72}$$

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ bé đến lớn ta có :

$$\frac{16}{72} , \frac{24}{72} , \frac{30}{72} , \frac{41}{72} , \frac{60}{72} \text{ hay}$$

$$\frac{8}{36} , \frac{9}{27} , \frac{5}{12} , \frac{41}{72} , \frac{25}{30}$$

d) Các phân số có thể rút gọn được :

$$\frac{45}{84} = \frac{15}{28} , \frac{40}{70} = \frac{4}{7} , \frac{72}{63} = \frac{8}{7}$$

Các phân số đã cho (sau khi rút gọn) có thể viết là :

$$\frac{5}{7} , \frac{23}{49} , \frac{15}{28} , \frac{4}{7} , \frac{8}{7}$$

$$\text{BCNN} (7, 49, 28) = 2^2 \cdot 7^2 = 196$$

Quy đồng mẫu các phân số, được :

$$\frac{140}{196} , \frac{92}{196} , \frac{105}{196} , \frac{112}{196} , \frac{184}{196}$$

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ bé đến lớn ta có :

$$\frac{92}{196} , \frac{105}{196} , \frac{112}{196} , \frac{140}{196} , \frac{184}{196}$$

$$\text{hay} \frac{23}{49} , \frac{15}{28} , \frac{4}{7} , \frac{5}{7} , \frac{8}{7}$$

● Khai thác bài toán

Nhận thấy rằng, khi phải quy đồng mẫu các phân số, cần phải rút gọn chúng trước khi quy đồng mẫu. Có thể sau

khi rút gọn sẽ có ngay mẫu của một phân số chia hết cho các mẫu còn lại, số này là mẫu chung (câu c), cũng có thể sau khi rút gọn việc tìm BCNN sẽ nhanh chóng khi viết một số mẫu là tích của hai thừa số (câu b). Tóm lại, cần linh hoạt và sáng tạo khi giải toán nói chung và quy đồng mẫu nói riêng.

Bài 11

Tìm n để các phân số sau đây bằng một số tự nhiên:

$$\text{a) } \frac{n + 18}{n + 3} \qquad \text{b) } \frac{3n + 30}{n + 3}$$

$$\text{c) } \frac{n + 8}{n - 2} \qquad \text{d) } \frac{3n + 24}{n - 3}$$

● Tìm hiểu đề bài

Bài ra đòi hỏi phải tìm số tự nhiên n để mỗi biểu thức cũng là một số tự nhiên.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần tìm cách biến đổi mỗi biểu thức đã cho thành tổng của một số tự nhiên và một phân số, chẳng hạn với câu a, có :

$$\frac{n + 18}{n + 3} = \frac{(n + 3) + 15}{n + 3} = \frac{n + 3}{n + 3} + \frac{15}{n + 3} = 1 + \frac{15}{n + 3}.$$

Như vậy, để trở thành số tự nhiên thì $\frac{15}{n + 3}$ phải là một số tự nhiên với giá trị thích hợp của n , muốn vậy thì $n + 3$ phải là ước của 15. Các câu b, c, d làm tương tự.

● Cách giải

$$\text{a) } \frac{n + 18}{n + 3} = \frac{(n + 3) + 15}{n + 3} = \frac{n + 3}{n + 3} + \frac{15}{n + 3} = 1 + \frac{15}{n + 3}.$$

$\frac{15}{n + 3}$ là số tự nhiên khi $n + 3$ là ước của 15, các ước của 15 là 1 ; 3 ; 5 ; 15.

Không thể có $n + 3$ bằng 1 được, mà chỉ có:

$$n + 3 = 3 \text{ khi } n = 0$$

$$n + 3 = 5 \text{ khi } n = 2$$

$$n + 3 = 15 \text{ khi } n = 12$$

Vậy khi n bằng 0 ; 2 ; 12 ta có các số tự nhiên :

$$\frac{0 + 18}{0 + 3} = \frac{18}{3} = 6 ; \frac{2 + 18}{2 + 3} = \frac{20}{5} = 4 ; \frac{12 + 18}{12 + 3} = \frac{30}{15} = 2.$$

$$b) \frac{3n + 30}{n + 3} = \frac{(3n + 9) + 21}{n + 3} = \frac{3(n + 3)}{n + 3} + \frac{21}{n + 3} = 3 + \frac{21}{n + 3}.$$

$\frac{21}{n + 3}$ sẽ là số tự nhiên khi $n + 3$ là ước của 21, các ước của

21 là : 1 ; 3 ; 7 ; 21.

Không thể có $n + 3$ bằng 1 được, mà chỉ có :

$$n + 3 = 3 \text{ khi } n = 0$$

$$n + 3 = 7 \text{ khi } n = 4$$

$$n + 3 = 21 \text{ khi } n = 18.$$

Vậy khi n bằng 0 ; 4 ; 18 ta có các số tự nhiên :

$$\frac{3 \cdot 0 + 30}{0 + 3} = \frac{30}{3} = 10 ; \frac{3 \cdot 4 + 30}{4 + 3} = \frac{42}{7} = 6 ;$$

$$\frac{3 \cdot 18 + 30}{18 + 3} = \frac{84}{21} = 4.$$

$$c) \frac{n + 8}{n - 2} = \frac{(n - 2) + 10}{n - 2} = \frac{n - 2}{n - 2} + \frac{10}{n - 2} = 1 + \frac{10}{n - 2}.$$

$\frac{10}{n - 2}$ sẽ là số tự nhiên khi $n - 2$ là ước của 10, các ước của

10 là 1 ; 2 ; 5 ; 10.

$$\text{Ta có } n - 2 = 1 \text{ khi } n = 3$$

$$n - 2 = 2 \text{ khi } n = 4$$

$$n - 2 = 5 \text{ khi } n = 7$$

$$n - 2 = 10 \text{ khi } n = 12.$$

Vậy khi n bằng 3 ; 4 ; 7 ; 12 ta có các số tự nhiên :

$$\frac{3+8}{3-2} = \frac{11}{1} = 11 ; \frac{4+8}{4-2} = \frac{12}{2} = 6 ; \frac{7+8}{7-2} = \frac{15}{5} = 3 ;$$

$$\frac{12+8}{12-2} = \frac{20}{10} = 2.$$

$$d) \frac{3n+24}{n-3} = \frac{(3n-9)+33}{n-3} = \frac{3(n-3)}{n-3} + \frac{33}{n-3} = 3 + \frac{33}{n-3}$$

$\frac{33}{n-3}$ là số tự nhiên khi $n-3$ là ước của 33, các ước của 33 là 1 ; 3 ; 11 ; 33.

Ta có $n-3 = 1$ khi $n = 4$

$n-3 = 3$ khi $n = 6$

$n-3 = 11$ khi $n = 14$

$n-3 = 33$ khi $n = 36$.

Vậy khi n bằng 4 ; 6 ; 14 ; 36 ta có các số tự nhiên :

$$\frac{3 \cdot 4 + 24}{4-3} = \frac{36}{1} = 36 ; \frac{3 \cdot 6 + 24}{6-3} = \frac{42}{3} = 14 ;$$

$$\frac{3 \cdot 14 + 24}{14-3} = \frac{66}{11} = 6 ; \frac{3 \cdot 36 + 24}{36-3} = \frac{132}{33} = 4.$$

● Khai thác bài toán

Lưu ý rằng, một biểu thức có dạng một phân số, chỉ viết được dưới dạng tổng của một số tự nhiên và một phân số khi biểu thức ấy có tử lớn hơn mẫu.

Khi biến đổi, cần căn cứ vào mẫu để viết tử thành một tổng của mẫu và một số thích hợp. Chẳng hạn ở câu d :

$$\begin{aligned} \frac{3n+24}{n-3} &= \frac{3n-9+9+24}{n-3} = \frac{(3n-9)+33}{n-3} = \\ &= \frac{3(n-3)}{n-3} + \frac{33}{n-3} = 3 + \frac{33}{n-3} \end{aligned}$$

Bài 12

Trong các phân số sau đây, phân số nào viết được hoặc không viết được dưới dạng phân số thập phân :

$$\frac{12}{75}, \frac{17}{125}, \frac{18}{150}, \frac{11}{140}, \frac{17}{372}$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi cần xét xem trong các phân số đã cho phân số nào viết được hay không viết được dưới dạng phân số thập phân tức là phân số mà mẫu là một lũy thừa của 10.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Muốn xét xem một phân số có phải là phân số thập phân hay không cần tiến hành theo trình tự sau :

+ Trước hết đưa phân số về dạng tối giản.

+ Phân tích mẫu thành thừa số nguyên tố. Nếu mẫu chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 và 5 thì có thể đổi thành phân số thập phân, còn nếu ngoài 2 và 5 mà mẫu còn chứa các thừa số nguyên tố khác thì không thể đổi phân số đó về dạng phân số thập phân được.

● Cách giải

$$\frac{12}{75} = \frac{12 : 3}{75 : 3} = \frac{4}{25} = \frac{4}{5^2} = \frac{4 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{4 \cdot 4}{10^2} = \frac{16}{100}$$

$$\frac{17}{125} = \frac{17}{5^3} = \frac{17 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{17 \cdot 8}{10^3} = \frac{136}{1000}$$

$$\frac{18}{150} = \frac{18 : 3}{150 : 3} = \frac{6}{50} = \frac{6}{5^2 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{12}{10^2} = \frac{12}{100}$$

$\frac{11}{140} = \frac{11}{2^2 \cdot 5 \cdot 7}$, không thể đổi thành phân số thập phân vì có thừa số 7 ở mẫu.

$\frac{17}{372} = \frac{17}{2^2 \cdot 3 \cdot 31}$, không thể đổi thành phân số thập phân vì có các thừa số 3 và 31 ở mẫu.

● *Khai thác bài toán*

Giữa phân số thập phân và số thập phân có mối liên hệ mật thiết vì có thể chuyển đổi từ phân số thập phân sang số thập phân và ngược lại. Chẳng hạn :

a) Đổi ra số thập phân

$$\frac{37}{100} = 0,37 ; \frac{31}{1000} = 0,031 ; \frac{429}{10} = 42,9.$$

b) Đổi ra phân số thập phân

$$0,25 = \frac{25}{100} ; 0,0013 = \frac{13}{10\,000} ; 3,81 = \frac{381}{100}.$$

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 13.

a) Hiệu của mẫu và tử của một phân số bằng 4, tổng của mẫu và tử bằng 10. Tìm phân số đó.

b) Một phân số sau khi rút gọn bằng $\frac{2}{3}$. Nếu thêm 11 đơn vị vào tử thì phân số bằng 1. Tìm phân số ban đầu.

Bài 14

Tìm một phân số :

a) bằng $\frac{4}{7}$ biết hiệu giữa mẫu và tử bằng 21 ;

b) bằng $\frac{5}{8}$ biết tổng của tử và mẫu bằng 39.

Bài 15

Cho n là số tự nhiên bất kì. Chứng tỏ rằng phân số $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ là tối giản.

Bài 16

Rút gọn các phân số sau :

a) $\frac{1989 \cdot 1990 + 3978}{1992 \cdot 1991 - 3984}$

b) $\frac{76\,76\,76\,76}{67\,67\,67\,67}$

c) $\frac{205\,205\,205\,205}{302\,302\,302\,302}$

d) $\frac{1998\,1998\,1998}{1999\,1999\,1999}$

e) $\frac{2385 \cdot 3150 \cdot 588}{1815 \cdot 441 \cdot 3339}$

f) $\frac{924 \cdot 252 \cdot 12\,096}{756 \cdot 336 \cdot 2205}$

Bài 17

So sánh hai phân số

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \text{ và } B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$$

Bài 18

Chứng minh rằng, nếu một phân số nhỏ hơn 1 thì khi thêm vào tử và mẫu cùng một số tự nhiên khác 0 sẽ được một phân số lớn hơn phân số đã cho. Nếu phân số lớn hơn 1 thì ngược lại.

Bài 19

a) Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn :

$$\frac{11}{35}, \frac{15}{47}, \frac{23}{71}, \frac{17}{53}$$

b) Cho phân số $\frac{p}{q}$ (với $q \neq 0, p, q \in \mathbb{N}$), sau khi rút gọn được phân số $\frac{t}{k}$. Chứng tỏ rằng :

$$\frac{p}{q} = \frac{p + t}{q + k}$$

Bài 20

Hãy so sánh các cặp phân số sau :

$$\frac{22}{23} \text{ và } \frac{23}{24} ; \frac{23}{24} \text{ và } \frac{24}{25}$$

$$\frac{24}{25} \text{ và } \frac{25}{26} ; \frac{25}{26} \text{ và } \frac{26}{27} .$$

Có thể rút ra được nhận xét như thế nào ?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 13

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Với câu a, giả sử phân số phải tìm là $\frac{p}{q}$ trong đó có $q > p$ và $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. Căn cứ vào đề bài để viết ra các đẳng thức, từ đó sẽ tính được p, q .

Với câu b, theo tính chất cơ bản của phân số thì phân số phải tìm có dạng $\frac{2 \cdot m}{3 \cdot m}$ với $m \neq 0$. Căn cứ vào đề bài để viết ra đẳng thức, thực hiện phép biến đổi, tính được giá trị của m .

● *Cách giải*

a) Giả sử có phân số $\frac{p}{q}$ (với $q \neq 0$, $q > p$; $q, p \in \mathbb{N}$), theo đầu bài ta có các đẳng thức sau :

$$q - p = 4$$

$$q + p = 10$$

Từ đó suy ra $2q = 14$ hay $q = 7$. Do đó

$$p = 10 - q = 10 - 7 = 3.$$

Vậy phân số phải tìm là $\frac{3}{7}$.

b) Theo tính chất cơ bản của phân số thì phân số phải tìm có dạng $\frac{2 \cdot m}{3 \cdot m}$ với $m \neq 0$. Theo đầu bài ta có đẳng thức

$$\frac{2m + 11}{3m} = 1.$$

Từ đó có $2m + 11 = 3m$, suy ra $m = 11$.

Vậy phân số phải tìm là $\frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{22}{33}$.

Bài 14

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, giả sử phân số phải tìm là $\frac{p}{q}$ trong đó $q \neq 0$,

$q > p$ và $p, q \in \mathbf{N}$, theo đầu bài có $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$ và biết $\frac{q-p}{q} = \frac{7-4}{7}$ hay $\frac{21}{q} = \frac{3}{7}$. Từ đó tính được q và suy ra p .

Với câu b, làm tương tự như trên.

• Cách giải

a) Phân số phải tìm có dạng $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$, $q > p$ và $p, q \in \mathbf{N}$), theo đầu bài có $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$ và biết $\frac{q-p}{q} = \frac{7-4}{7}$ hay $\frac{21}{q} = \frac{3}{7}$. Từ đó có $q = \frac{21 \cdot 7}{3} = 49$.

Từ $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$ suy ra $p = 4q : 7 = 4 \cdot 49 : 7 = 28$.

Vậy phân số phải tìm là $\frac{28}{49}$.

b) Phân số phải tìm có dạng $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$; $p, q \in \mathbf{N}$), theo đầu bài có $\frac{p}{q} = \frac{5}{8}$ và biết $\frac{p+q}{q} = \frac{5+8}{8}$ hay $\frac{39}{q} = \frac{13}{8}$. Từ đó có $q = (39 \cdot 8) : 13 = 24$.

Từ $\frac{p}{q} = \frac{5}{8}$ suy ra $p = (5.q) : 8 = 5.24 : 8 = 15$.

Vậy phân số phải tìm là $\frac{15}{24}$.

Bài 15

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần lưu ý rằng, nếu $d = \text{ƯCLN}(a, b)$ (trong đó $a = 21n + 4$, $b = 14n + 3$) thì d cũng là ước của $3b$, $2a$ và của $3b - 2a$, sau đó sẽ chứng minh rằng $d = 1$ để có phân số $\frac{a}{b}$ tối giản.

• Cách giải

Gọi $d = \text{ƯCLN}(21n + 4, 14n + 3)$, thế thì d cũng là ước của $3(14n + 3)$, của $2(21n + 4)$ và của hiệu $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$. Vì $d = 1$ nên phân số $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ tối giản.

Bài 16

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy viết $1989 = 1991 - 2$ ở tử và viết $1992 = 1990 + 2$ ở mẫu rồi thực hiện các phép tính để có tử và mẫu bằng nhau.

Với câu b, hãy chia tử và mẫu cho 1 010 101.

Với câu c, hãy chia tử và mẫu cho 1 001 001 001.

Với câu d, hãy chia tử và mẫu cho 100 010 001.

Với câu e và f hãy phân tích từng thừa số ở tử, mẫu ra thừa số nguyên tố rồi rút gọn.

• Cách giải

$$a) \frac{1989 \cdot 1990 + 3978}{1992 \cdot 1991 - 3984} = \frac{(1991 - 2) \cdot 1990 + 3978}{(1990 + 2) \cdot 1991 - 3984}$$

$$= \frac{1991 \cdot 1990 - 3980 + 3978}{1990 \cdot 1991 + 3982 - 3984} = \frac{1990 \cdot 1991 - 2}{1990 \cdot 1991 - 2} = 1 ;$$

$$b) \frac{76767676}{67676767} = \frac{76767676 : 1010101}{67676767 : 1010101} = \frac{76}{67} ;$$

$$c) \frac{205 \, 205 \, 205 \, 205}{302 \, 302 \, 302 \, 302} = \frac{205205205205 : 1001001001}{302302302302 : 1001001001} = \frac{205}{302}$$

$$d) \frac{199819981998}{199919991999} = \frac{199819981998 : 100010001}{199919991999 : 100010001} = \frac{1998}{1999}$$

$$e) \frac{2385 \cdot 3150 \cdot 588}{1815 \cdot 441 \cdot 3339} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}{3 \cdot 5 \cdot 121 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 53} = \frac{200}{121}$$

$$f) \frac{924 \cdot 252 \cdot 12096}{756 \cdot 336 \cdot 2205} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{176}{35} .$$

Bài 17

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Quy đồng mẫu các phân số rồi lấy tử của phân số thứ nhất trừ đi tử của phân số thứ hai.

Chú ý phép tính về lũy thừa, chẳng hạn :

$$100^{100} \cdot 100^{68} = 100^{100+68} = 100^{168} ;$$

$$100^{69} = 100^{68+1} = 100^{68} \cdot 100.$$

● Cách giải

Quy đồng mẫu hai phân số, được :

$$A = \frac{(100^{100} + 1)(100^{68} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)} \text{ và } B = \frac{(100^{69} + 1)(100^{99} + 1)}{(100^{99} + 1)(100^{68} + 1)} .$$

Để so sánh hai phân số chỉ cần so sánh hai tử, có thể lấy tử của phân số A trừ đi tử của phân số B. Ta có :

$$\begin{aligned} & (100^{100} + 1)(100^{68} + 1) - (100^{99} + 1)(100^{69} + 1) \\ &= 100^{168} + 100^{100} + 100^{68} + 1 - 100^{168} - 100^{99} - 100^{69} - 1 \\ &= 100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 100^{99} \cdot 100 - 100^{99} - 100^{68} \cdot 100 + 100^{68} \\
&= 100^{99}(100 - 1) - 100^{68}(100 - 1) \\
&= (100 - 1)(100^{99} - 100^{68}) = 99(100^{99} - 100^{68}) > 0 \text{ do } 100^{99} > 100^{68}.
\end{aligned}$$

Vậy $A > B$.

Bài 18

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với phân số $\frac{p}{q} < 1$ ($p < q$) thì $\frac{p+a}{q+a} < 1$. Thực hiện hai phép tính $1 - \frac{p}{q}$ và $1 - \frac{p+a}{q+a}$, sau đó so sánh hai hiệu bằng cách dựa vào hai phân số có cùng tử, phân số nào có mẫu lớn hơn thì nhỏ hơn. Từ đó có cơ sở để so sánh hai số trừ.

Với phân số $\frac{p}{q} > 1$ ($p > q$), thực hiện phép tính $\frac{p}{q} - 1$ và $\frac{p+a}{q+a} - 1$ và suy luận tương tự.

• Cách giải

Giả sử có phân số $\frac{p}{q} < 1$ ($p < q$) thì khi thêm số tự nhiên a khác 0 vào tử và mẫu ta có $\frac{p+a}{q+a} < 1$.

$$\text{Ta có } 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q} \text{ và } 1 - \frac{p+a}{q+a} = \frac{q+a-p-a}{q+a} = \frac{q-p}{q+a}.$$

$$\text{Vì } q+a > q \text{ nên } \frac{q-p}{q} > \frac{q-p}{q+a}.$$

Hai phép tính trừ ở trên có cùng số bị trừ (là 1) mà hiệu của phép trừ thứ nhất lớn hơn hiệu của phép trừ thứ hai nên

$$\text{suy ra } \frac{p}{q} < \frac{p+a}{q+a}.$$

Tương tự như trên, giả sử có $\frac{p}{q} > 1$ ($p > q$) thì phân số

$$\frac{p+a}{q+a} > 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q} \text{ và } \frac{p+a}{q+a} - 1 = \frac{p+a-q-a}{q+a} = \frac{p-q}{q+a}.$$

$$\text{Vì } q+a > q \text{ nên } \frac{p-q}{q} > \frac{p-q}{q+a}.$$

Trong hai phép tính trừ ở trên có cùng số trừ (là 1) mà hiệu của phép trừ thứ nhất lớn hơn hiệu của phép trừ thứ hai, suy

$$\text{ra } \frac{p}{q} > \frac{q+a}{p+a}.$$

Bài 19

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, ta có nhận xét như sau : rõ ràng $\frac{10}{15} < \frac{12}{15}$, nhưng với số nghịch đảo của mỗi phân số trên thì cho ta $\frac{15}{10} > \frac{15}{12}$. Áp dụng nhận xét này để làm câu a.

Với câu b, cần lưu ý cách viết khi rút gọn phân số $\frac{p}{q}$ cho $a \neq 0$ được phân số $\frac{t}{k}$, như vậy ta có $p = at$, $q = ak$. Cộng thêm t vào $p = at$, cộng thêm k vào $q = ak$, rồi biến đổi ta sẽ có điều phải chứng minh.

• Cách giải

a) Lấy số nghịch đảo các phân số đã cho, ta được : $\frac{35}{11}$, $\frac{47}{15}$, $\frac{71}{23}$, $\frac{53}{17}$. Viết các phân số trên về dạng hỗn số :

$$\frac{35}{11} = 3 \frac{2}{11}, \quad \frac{47}{15} = 3 \frac{2}{15}$$

$$\frac{71}{23} = 3\frac{2}{23}, \frac{53}{17} = 3\frac{2}{17}.$$

Các hỗn số trên có phần nguyên giống nhau, để sắp xếp thứ tự chúng, chỉ cần sắp xếp các phân số rồi suy ra cách sắp xếp hỗn số. Ta có $\frac{2}{11} > \frac{2}{15} > \frac{2}{17} > \frac{2}{23}$, suy ra

$$3\frac{2}{11} > 3\frac{2}{15} > 3\frac{2}{17} > 3\frac{2}{23} \text{ hay } \frac{35}{11} > \frac{47}{15} > \frac{53}{17} > \frac{71}{23}.$$

Vì số nghịch đảo của một phân số lớn hơn đơn vị là một số nhỏ hơn đơn vị, nên có $\frac{11}{35} < \frac{15}{47} < \frac{17}{53} < \frac{23}{71}$

b) Giả sử phân số $\frac{p}{q}$ sau khi rút gọn cho số tự nhiên $a \neq 0$ được phân số $\frac{t}{k}$, từ đó có :

$$p = at \text{ và } q = ak$$

Thêm t vào hai vế của $p = at$ có :

$$p + t = at + t = t(a + 1)$$

Thêm k vào hai vế của $q = ak$ có :

$$q + k = ak + k = k(a + 1)$$

$$\text{Ta có } \frac{p+t}{q+k} = \frac{t(a+1)}{k(a+1)} \text{ hay } \frac{p+t}{q+k} = \frac{t}{k}.$$

$$\text{Vì } \frac{t}{k} = \frac{p}{q} \text{ do đó có } \frac{p}{q} = \frac{p+t}{q+k}.$$

Bài 20

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để so sánh hai phân số $\frac{22}{23}$ và $\frac{23}{24}$ với nhau, ta lấy số 1 trừ đi mỗi phân số đó, sau đó so sánh hai hiệu để có được kết luận là phân số nào lớn hơn.

Các cặp phân số khác làm tương tự.

● *Cách giải*

Do $\frac{22}{23} < 1$ và $\frac{23}{24} < 1$ nên có thể xét hiệu :

$$1 - \frac{22}{23} = \frac{1}{23}$$

$$1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$$

Rõ ràng $\frac{1}{23} > \frac{1}{24}$ suy ra $\frac{22}{23} < \frac{23}{24}$.

Tương tự có $\frac{23}{24} < \frac{24}{25}$, $\frac{24}{25} < \frac{25}{26}$, $\frac{25}{26} < \frac{26}{27}$.

Nhận xét. Trong hai phân số có tử và mẫu là hai số tự nhiên liên tiếp (mẫu là số lớn hơn) thì phân số nào có mẫu lớn hơn sẽ lớn hơn.

VI. CÁC PHÉP TÍNH TRONG Q_+

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Thực hiện các phép tính sau đây theo hai cách :

$$\text{a) } \left(5\frac{4}{63} + 1\frac{4}{9} \right) + 7\frac{55}{126} ; \quad \text{b) } \frac{9}{720} + \left(3\frac{31}{144} + \frac{51}{720} \right) ;$$

$$\text{c) } 3\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8} + 2\frac{1}{4} \right) ; \quad \text{d) } \left(2\frac{4}{9} + \frac{11}{36} \right) + 4\frac{5}{9} .$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra là làm phép cộng một tổng (hay một số) với một số (hay một tổng). Số ở đây là một hỗn số hoặc một phân số.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Đề bài đòi hỏi thực hiện các phép tính theo hai cách : cách thứ nhất là làm phép tính trong ngoặc trước rồi cộng với phân số hoặc hỗn số ; cách thứ hai là vận dụng tính chất của phép cộng, kết quả tính sẽ nhanh hơn.

● *Cách giải*

- *Cách 1*

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(5\frac{4}{63} + 1\frac{4}{9} \right) + 7\frac{55}{126} &= \left(5\frac{4}{63} + 1\frac{28}{63} \right) + 7\frac{55}{126} \\ &= 6\frac{32}{63} + 7\frac{55}{126} = 6\frac{64}{126} + 7\frac{55}{126} = 13\frac{119}{126} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{9}{720} + \left(3\frac{31}{144} + \frac{51}{720} \right) &= \frac{9}{720} + \left(3\frac{155}{720} + \frac{51}{720} \right) \\ &= \frac{9}{720} + 3\frac{206}{720} = 3\frac{215}{720} = 3\frac{43}{144} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8} + 2\frac{1}{4} \right) &= 3\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8} + 2\frac{2}{8} \right) \\ &= 3\frac{5}{8} + 2\frac{5}{8} = 5\frac{10}{8} = 6\frac{2}{8} = 6\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(2\frac{4}{9} + \frac{11}{36} \right) + 4\frac{5}{9} &= \left(2\frac{16}{36} + \frac{11}{36} \right) + 4\frac{5}{9} \\ &= 2\frac{27}{36} + 4\frac{20}{36} = 6\frac{47}{36} = 7\frac{11}{36} \end{aligned}$$

- Cách 2

$$\text{a) } \left(5\frac{4}{63} + 1\frac{4}{9} \right) + 7\frac{55}{126} = 5\frac{8}{126} + 7\frac{55}{126} + 1\frac{56}{126} = 13\frac{119}{126}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{9}{720} + \left(3\frac{31}{144} + \frac{51}{720} \right) &= \frac{9}{720} + 3\frac{155}{720} + \frac{51}{720} \\ &= 3\frac{215}{720} = 3\frac{43}{144} \end{aligned}$$

$$\text{c) } 3\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{8} + 2\frac{1}{4} \right) = 3\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + 2\frac{2}{8} = 5\frac{10}{8} = 6\frac{2}{8} = 6\frac{1}{4}$$

$$\text{d) } \left(2\frac{4}{9} + \frac{11}{36} \right) + 4\frac{5}{9} = 2\frac{16}{36} + \frac{11}{36} + 4\frac{20}{36} = 6\frac{47}{36} = 7\frac{11}{36}$$

● Khai thác bài toán

Trong thực hành hay khi làm bài kiểm tra, hãy thấy cách nào giải ngắn gọn hơn thì chọn cách đó để làm bài.

Bài 2

Chứng minh các đẳng thức sau :

$$\text{a) } 3\frac{17}{24} + 2\frac{8}{15} + 1\frac{7}{8} = 4\frac{3}{4} + 3\frac{11}{30} ;$$

$$\text{b) } 2\frac{4}{11} + 5\frac{2}{3} + 1\frac{7}{11} = \frac{322219}{33333}$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Câu a của đề bài là làm phép cộng các hỗn số ở bên trái và bên phải dấu bằng. Câu b ở bên trái dấu bằng cũng là phép cộng các hỗn số còn bên phải dấu bằng là một phân số lớn hơn đơn vị.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Với câu a, cần làm phép cộng các hỗn số ở bên trái và bên phải dấu bằng, nếu kết quả ở hai vế mà bằng nhau thì đẳng thức được chứng minh (hay đẳng thức đã cho là đúng).

Còn câu b, cần làm phép cộng các hỗn số ở bên trái dấu bằng, bên phải dấu bằng cần đổi phân số ra hỗn số sau đó rút gọn ; nếu kết quả ở hai vế mà bằng nhau thì đẳng thức được chứng minh.

● *Cách giải*

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\frac{17}{24} + 2\frac{8}{15} + 1\frac{7}{8} &= \left(3\frac{17}{24} + 1\frac{21}{24} \right) + 2\frac{8}{15} = 4\frac{38}{24} + 2\frac{8}{15} \\ &= 4\frac{19}{12} + 2\frac{8}{15} = (4 + 2)\frac{95 + 32}{60} = 6\frac{127}{60} = 8\frac{7}{60} \end{aligned}$$

$$4\frac{3}{4} + 3\frac{11}{30} = (4 + 3)\frac{45 + 22}{60} = 7\frac{67}{60} = 8\frac{7}{60}$$

Hai vế của đẳng thức cùng bằng $8\frac{7}{60}$ suy ra đẳng thức đã cho là đúng.

$$\begin{aligned} \text{b) } 2\frac{4}{11} + 5\frac{2}{3} + 1\frac{7}{11} &= (2 + 5 + 1)\frac{12 + 22 + 21}{33} = 8\frac{55}{33} \\ &= 9\frac{22}{33} = 9\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{322\,219}{33\,333} = 9 \frac{22\,222}{33\,333} = 9 \frac{2}{3}.$$

Hai vế của đẳng thức cùng bằng $9\frac{2}{3}$ suy ra đẳng thức đã cho là đúng.

• *Khai thác bài toán*

Cũng có thể chứng tỏ đẳng thức đã cho là đúng khi lấy vế trái trừ đi vế phải mà kết quả bằng 0.

Hãy xét câu b chẳng hạn :

$$\begin{aligned} & 2\frac{4}{11} + 5\frac{2}{3} + 1\frac{7}{11} - \frac{322\,219}{33\,333} = \\ &= \underbrace{2\frac{4}{11} + 5\frac{2}{3} + 1\frac{7}{11}}_{9\frac{2}{3}} - \frac{322\,219}{33\,333} \\ &= \frac{29}{3} - \frac{322\,219}{33\,333} = \frac{29 \cdot 11\,111 - 32\,2219}{33\,333} \\ &= \frac{322\,219 - 322\,219}{33\,333} = \frac{0}{33\,333} = 0. \end{aligned}$$

Bài 3

Tính tổng các phân số sau một cách hợp lí nhất :

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} ;$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} .$

• *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho một số phân số có tử là 1 và mẫu là các số khác nhau, đòi hỏi tính tổng các phân số đó bằng cách hợp lí nhất.

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Ta thấy :

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} ; \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{42} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}, \text{ do đó có :}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

b) Ta thấy :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right); \quad \frac{1}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right);$$

$$\frac{1}{35} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{35} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right); \quad \frac{1}{63} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{63} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right);$$

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{99} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right), \text{ do đó có :}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Bài toán này có 2 câu đều là tính tổng của các phân số có tử là 1 còn các mẫu của câu a có thể viết là :

1.2 ; 2.3 ; 3.4 ; 4.5 ; 5.6 ; 6.7, và các mẫu của câu b có thể viết là : 1.3 ; 3.5 ; 5.7 ; 7.9 ; 9.11.

Như vậy mẫu các phân số của câu a là các tích của hai số tự nhiên liên tiếp, còn mẫu các phân số của câu b là các tích của hai số lẻ liên tiếp.

Cách giải câu a và câu b là đều biến mỗi phân số đã cho thành một hiệu của hai phân số, biến dãy tính cộng thành dãy tính trừ và cộng để có thể ước lượng các số hạng đối nhau, chẳng hạn $-\frac{1}{2}$ và $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ và $+\frac{1}{3}$. Riêng câu b phải vận dụng tính chất cơ bản của phân số mới đưa mỗi phân số đã cho về tích giữa $\frac{1}{2}$ và hiệu hai phân số tương ứng. Đó là nhận xét được rút ra từ cách giải giúp làm các bài toán khác sau này.

Sở dĩ biết được cách biến đổi như trên là do đã làm thử, mò mẫm một số lần, rồi rút ra được kinh nghiệm làm bài. Đó là cách học toán mà mỗi người cần biết.

Bài 4

Hãy tính các tổng sau đây bằng cách nhanh chóng nhất :

$$a) \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{24 \cdot 25}$$

$$b) \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101}$$

$$c) \frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{49 \cdot 51}$$

$$d) \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{775} + \frac{1}{1147}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài là tính tổng của các phân số có tử giống nhau và mẫu là các số khác nhau, trong đó ở câu a có mẫu là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp, còn ở câu b và c có mẫu là tích của 2 số lẻ liên tiếp.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, nhận thấy mẫu của mỗi phân số là tích của hai thừa số hơn kém nhau 1 đơn vị, do đó có $\frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$,

$$\frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{24 \cdot 25} = \frac{1}{24} - \frac{1}{25}.$$

Với câu b, mẫu của mỗi phân số là tích của hai thừa số lẻ liên tiếp, hơn kém nhau 2 đơn vị, do đó $\frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$,
 $\frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$, $\frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, ..., $\frac{2}{99 \cdot 101} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101}$.

Như vậy, có thể áp dụng công thức $\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$ để làm câu a, b.

Với câu c, ta viết mỗi phân số đã cho về dạng câu b đã biết cách làm, chẳng hạn : $\frac{3}{1 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2}{(1 \cdot 3) \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1 \cdot 3}$,

$$\frac{3}{3 \cdot 5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3 \cdot 5}, \dots, \frac{3}{49 \cdot 51} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{49 \cdot 51}.$$

Với câu d, ta thấy $7 = 1 \cdot 7$; $91 = 7 \cdot 13$; $247 = 13 \cdot 19$,
 $475 = 19 \cdot 25$; $775 = 25 \cdot 31$; $1147 = 31 \cdot 37$. Như vậy mỗi mẫu gồm hai thừa số hơn kém nhau 6 đơn vị nên câu d có thể viết lại như sau :

$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 31} + \frac{1}{31 \cdot 37}$ và cách làm tương tự như câu c.

● Cách giải

a) Ta có $\frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$, $\frac{1}{7 \cdot 8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$, ...,
 $\frac{1}{24 \cdot 25} = \frac{1}{24} - \frac{1}{25}$, do đó :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{24 \cdot 25} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{24} - \frac{1}{25} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{5-1}{25} = \frac{4}{25}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{2}{1 \cdot 3} &= 1 - \frac{1}{3}, \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \dots, \\ \frac{2}{99 \cdot 101} &= \frac{1}{99} - \frac{1}{101}, \text{ do đó :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101} = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \\ &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{101 - 1}{101} = \frac{100}{101}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \frac{3}{1 \cdot 3} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3}{3 \cdot 5} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\frac{3}{49 \cdot 51} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{49 \cdot 51} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right), \text{ do đó :}$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{49 \cdot 51} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{51}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{51 - 1}{51} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{51} = \frac{1 \cdot 25}{1 \cdot 17} = 1 \frac{8}{17}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có } \frac{1}{7} &= \frac{1}{1 \cdot 7}, \frac{1}{91} = \frac{1}{7 \cdot 13}, \frac{1}{247} = \frac{1}{13 \cdot 19}, \\ \frac{1}{475} &= \frac{1}{19 \cdot 25}, \frac{1}{775} = \frac{1}{25 \cdot 31}, \frac{1}{1147} = \frac{1}{31 \cdot 37}, \text{ và} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 7} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{1 \cdot 7} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{7} \right)$$

$$\frac{1}{7 \cdot 13} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7 \cdot 13} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right)$$

.....

$$\frac{1}{31 \cdot 37} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{31 \cdot 37} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{37} \right), \text{ do đó :}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 31} + \frac{1}{31 \cdot 37} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{6}{1 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 13} + \dots + \frac{6}{31 \cdot 37} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{37} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{37} = \frac{6}{37} . \end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Qua cách giải bài 4, có nhận xét như sau :

- Với câu a, các phân số có tử là 1, mẫu là tích của hai số tự nhiên liên tiếp, có thể viết mỗi phân số đó là hiệu của hai phân số : phân số bị trừ có tử là 1, mẫu là thừa số thứ nhất (số nhỏ hơn), phân số trừ có tử là 1, mẫu là thừa số thứ hai, chẳng hạn như $\frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$, ... Làm như vậy được dãy tính trừ và cộng giúp tính nhanh tổng đã cho.

- Với câu b, các phân số có tử là 2, mẫu là tích của hai số tự nhiên lẻ liên nhau, có thể viết mỗi phân số đó là hiệu của hai phân số : phân số bị trừ có tử là 1 mẫu là thừa số thứ nhất (số nhỏ hơn), phân số trừ có tử là 1 mẫu là thừa số thứ hai, chẳng hạn như $\frac{2}{15 \cdot 17} = \frac{1}{15} - \frac{1}{17}$, ... Do đó dễ dàng tính được tổng đã cho.

- Với câu c, các phân số này có tử là 3, mẫu là tích của hai số tự nhiên lẻ liên nhau, để có thể viết mỗi phân số thành một hiệu phải biến đổi sao cho phân số có tử là 2 (như câu b) bằng cách nhân tử và mẫu của mỗi phân số đã cho với 2 rồi viết phân số thành một tích của hai phân số, chẳng hạn

$$\frac{3}{7 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{7 \cdot 9} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right), \dots \text{ Từ đó tính được tổng.}$$

- Với câu d, sau khi viết các mẫu thành một tích của hai số tự nhiên lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị, phải làm sao cho mỗi phân số đó có tử là 6 ; muốn vậy hãy nhân tử và mẫu của mỗi phân số đã cho với 6, rồi biến đổi thành một tích của hai phân số,

$$\text{chẳng hạn } \frac{1}{7 \cdot 13} = \frac{1 \cdot 6}{7 \cdot 13 \cdot 6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7 \cdot 13} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right), \dots$$

Từ đó tính được tổng.

Để có thể thấy rõ hơn những nhận xét trên, hãy tự tìm các ví dụ, sau đây là ví dụ cho câu d.

Tính tổng sau bằng cách nhanh nhất :

$$\frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 33}$$

Có thể làm như sau :

$$\frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 33}$$

$$= \frac{1 \cdot 8}{1 \cdot 9 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 8}{9 \cdot 17 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 8}{17 \cdot 25 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 8}{25 \cdot 33 \cdot 8}$$

$$(\text{vì } 8 = 9 - 1 = 17 - 9 = \dots)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{1 \cdot 9} + \frac{8}{9 \cdot 17} + \frac{8}{17 \cdot 25} + \frac{8}{25 \cdot 33} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{33} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{33} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{33 - 1}{33} = \frac{32}{8 \cdot 33} = \frac{4}{33}$$

Bài 5

Tìm số tự nhiên x biết rằng

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{1998}{2000}.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho một đẳng thức có chứa số tự nhiên x mà ta phải tìm giá trị của nó. Vế trái của đẳng thức này là một tổng các phân số có dạng tương tự như ở bài toán 4, vế phải là một phân số nhỏ hơn đơn vị.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết hãy xét phân số $\frac{2}{x(x+1)}$, ta thấy phân số này có tử là 2, có mẫu là tích của hai số tự nhiên liên tiếp, nên có thể viết $\frac{2}{x(x+1)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$. Phân số này có dạng như câu a bài toán 4.

Vấn đề đặt ra là có thể biến đổi các phân số $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ về dạng phân số có tử là 2 và mẫu là tích của hai số tự nhiên liên tiếp được không?

Để có tử là 2 cho các phân số kể trên, cần áp dụng tính chất cơ bản của phân số, cụ thể là :

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{2 \cdot 3}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12} = \frac{2}{3 \cdot 4};$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{2}{20} = \frac{2}{4 \cdot 5}.$$

Như vậy vế trái của đẳng thức gồm các phân số có dạng gần giống câu a bài toán 4. Cần tính tổng các phân số ở vế trái để đưa bài toán về dạng toán tìm x đơn giản mà ta đã biết cách làm.

● Cách giải

Trước hết cần biến đổi các phân số ở vế trái của đẳng thức đã cho cùng có tử là 2, cùng có mẫu là tích của hai số tự nhiên liên tiếp bằng cách áp dụng tính chất cơ bản của phân số như sau :

$$\frac{1}{3} = \frac{1.2}{3.2} = \frac{2}{2.3} ; \frac{1}{6} = \frac{1.2}{6.2} = \frac{2}{12} = \frac{2}{3.4} ; \frac{1}{10} = \frac{1.2}{10.2} = \frac{2}{20} = \frac{2}{4.5} ,$$

do đó vế trái của đẳng thức có thể viết được như sau :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} \\ &= \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right] \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) \end{aligned}$$

Như vậy đẳng thức đã cho có thể viết gọn như sau :

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1998}{2000}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1998}{2000} : 2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = \frac{999}{2000}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{999}{2000}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1000 - 999}{2000} = \frac{1}{2000}$$

Ta có hai phân số bằng nhau với tử bằng nhau thì mẫu phải bằng nhau, tức là :

$$x + 1 = 2000, \text{ suy ra } x = 1999.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Ở bài toán này, "chìa khóa" để tìm cách giải là suy xét về cách viết giữa phân số $\frac{2}{x(x+1)}$ với các phân số đã cho như $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$. Như đã biết, phải biến đổi sao cho các phân số ở bên trái dấu bằng có cùng một cách cấu tạo (hay cùng một cách viết). Đây là một kinh nghiệm được rút ra qua cách giải bài tập này.

+ Trên cơ sở đó hãy áp dụng để giải bài toán sau :

Tìm số tự nhiên x biết rằng :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1999}{2001}.$$

Ta thấy vế phải của đẳng thức là một hỗn số $1\frac{1999}{2001} = 1 + \frac{1999}{2001}$ nên nếu bớt 1 ở cả hai vế ta có đẳng thức :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{1999}{2001}$$

Đến đây có bài toán tương tự như bài toán 5, giải ra được $x = 2000$. Bạn đọc hãy giải cụ thể lại bài này.

Bài 6

Tính giá trị của các biểu thức sau đây theo phương pháp hợp lý nhất :

a) $\frac{13}{45} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{51}{91}$;

b) $\left(13\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5}\right) \cdot \left(3\frac{1}{9} \cdot 2\frac{3}{11}\right)$;

c) $74\frac{19}{35} \cdot \frac{7}{90} + 15\frac{16}{35} \cdot \frac{7}{90}$;

d) $\left(3\frac{1}{15} - \frac{1}{11}\right) \cdot 11$.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra yêu cầu thực hiện các phép nhân phân số với phân số, hỗn số với hỗn số và vận dụng tính chất của phép nhân phân số với phân số.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Áp dụng quy tắc nhân phân số với phân số, chú ý rút gọn trước khi nhân (câu a). Với các hỗn số cần đổi ra phân số để làm phép nhân (câu b). Với câu c áp dụng tính chất nhân một số với một tổng, câu d áp dụng tính chất nhân một số với một hiệu.

Cần chú ý đến tính chất giao hoán của phép nhân.

● *Cách giải*

$$a) \frac{13}{45} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{51}{91} = \frac{13 \cdot 15 \cdot 51}{91 \cdot 45 \cdot 34} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{7 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{14}$$

$$b) \left(13\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{5} \right) \cdot \left(3\frac{1}{9} \cdot 2\frac{3}{11} \right) = \left(\frac{27}{2} \cdot \frac{33}{5} \right) \cdot \left(\frac{28}{9} \cdot \frac{25}{11} \right) \\ = \frac{27}{2} \cdot \frac{33}{5} \cdot \frac{28}{9} \cdot \frac{25}{11} = \frac{27 \cdot 28 \cdot 33 \cdot 25}{9 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 630$$

$$c) 74\frac{19}{35} \cdot \frac{7}{90} + 15\frac{16}{35} \cdot \frac{7}{90} = \frac{7}{90} \left(74\frac{19}{35} + 15\frac{16}{35} \right) \\ = \frac{7}{90} \cdot 89\frac{35}{35} = \frac{7}{90} \cdot 90 = 7.$$

$$d) \left(3\frac{1}{15} - \frac{1}{11} \right) \cdot 11 = 33\frac{11}{15} - 1 = 32\frac{11}{15}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Nhân một hỗn số với một số ta có thể làm theo một trong hai cách sau :

$$\text{– Cách 1 : } 3\frac{1}{15} \cdot 11 = \left(3 + \frac{1}{15} \right) \cdot 11 = 3 \cdot 11 + \frac{1}{15} \cdot 11 = \\ = 33 + \frac{11}{15} = 33\frac{11}{15}$$

$$\text{– Cách 2 : } 3\frac{1}{15} \cdot 11 = \frac{46}{15} \cdot 11 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Chọn cách làm nào là tùy thuộc vào "tình huống" cụ thể trong quá trình giải toán, như trong câu d bài toán trên, ta đã chọn cách 1 tiện lợi hơn.

+ Ở câu b bài toán trên, không nên thực hiện phép tính trong ngoặc trước mà nên lập thành một tích gồm 4 thừa số, sẽ rút gọn được trước khi thực hiện phép nhân.

Bài 7

Tính các tích sau :

$$a) A = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{9\,999}{10\,000} ;$$

$$b) B = \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1326}\right) ;$$

$$c) C = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) + \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99 \cdot 101}\right).$$

● Tìm hiểu đề bài

Bài ra đòi hỏi phải tìm tích các phân số. Đối với câu b và c cần thực hiện các phép tính trừ hoặc cộng trong dấu ngoặc để được các phân số.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, ta nhận thấy : các phân số đã cho đều có tử nhỏ hơn mẫu 1 đơn vị, mẫu là bình phương của số tự nhiên n (với $n \geq 2$). Nếu vận dụng quy tắc nhân phân số với phân số thì sẽ rất phức tạp trong tính toán. Ở đây cần tách mỗi số thành một tích các thừa số ở tử hơn kém nhau 2 đơn vị, rồi lập ra ở tử và mẫu hai dãy các thừa số để có thể rút gọn được. Từ đó sẽ có kết quả bài toán.

Với câu b, thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc được tích sau $\frac{20}{21} \cdot \frac{27}{28} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{1325}{1326}$, các phân số này có tử nhỏ hơn mẫu 1 đơn vị, còn mẫu chưa được viết theo một quy luật nào cả.

Mẫu của ba phân số đầu tiên có thể viết được là 3.7 ; 4.7 ; 4.9 . Các thừa số có lặp lại, nhưng chưa có quy luật nào cả. Nhận thấy, nếu có 6.7 ; 7.8 ; 8.9 thì ba tích này lần lượt là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số 6. Để có điều đó phải nhân tử và mẫu của ba phân số với 2, ta được : $\frac{40}{42}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{70}{72}$ hay $\frac{5.8}{6.7}$, $\frac{6.9}{7.8}$, $\frac{7.10}{8.9}$. Đến đây ta thấy tử của mỗi phân số có 2 thừa số hơn kém nhau 3 đơn vị. Nhân tử và mẫu của phân số cuối cùng với 2, rồi dựa vào nhận xét trên về tử và mẫu của ba phân số đầu, ta có : $\frac{2650}{2652} = \frac{50.53}{51.52}$. Như vậy tích đã cho được viết thành $\frac{5.8}{6.7} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdots \frac{50.53}{51.52}$. Từ đây dễ dàng đi tới kết quả.

Với câu c, thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc, nhận thấy tử của các phân số là bình phương của số tự nhiên n (với $n \geq 2$), còn mẫu của các phân số là tích của hai thừa số hơn kém nhau 2 đơn vị. Đến đây có thể viết tử và mẫu thành hai dãy tích các thừa số rồi rút gọn sẽ có kết quả.

● *Cách giải*

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{9999}{10000} \\ &= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{99.101}{100^2} \\ &= \frac{1.2.3 \cdots 99}{2.3.4 \cdots 100} \cdot \frac{3.4.5 \cdots 101}{2.3.4 \cdots 100} \\ &= \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} . \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1326}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{20}{21} \cdot \frac{27}{28} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{1325}{1326} \\
&= \frac{40}{42} \cdot \frac{54}{56} \cdot \frac{70}{72} \cdots \frac{2650}{2652} \\
&= \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9} \cdots \frac{50 \cdot 53}{51 \cdot 52} \\
&= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 50}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdots 51} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 53}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdots 52} \\
&= \frac{5}{51} \cdot \frac{53}{7} = \frac{265}{357} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } C &= \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99 \cdot 101}\right) \\
&= \frac{4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{9}{2 \cdot 4} \cdot \frac{16}{3 \cdot 5} \cdots \frac{10000}{99 \cdot 101} \\
&= \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{100^2}{99 \cdot 101} \\
&= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 101} \\
&= \frac{100}{1} \cdot \frac{2}{101} = \frac{200}{101} = 1 \frac{99}{101} .
\end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Loại toán tìm tích (hay tổng) của một dãy các phân số, trong đó thường cho 3 phân số đầu là số cụ thể còn phân số cuối cùng cho ở dạng tổng quát. Để làm loại toán này cần có nhận xét, so sánh giữa tử với mẫu, các tử (hay mẫu) với nhau, giữa phân số cho cụ thể và tổng quát để tìm ra được cách viết các phân số rồi dần dần tìm ra cách giải. Chẳng hạn :

- Ở câu a, do mẫu là bình phương của số tự nhiên n , nên ba phân số sau phân số $\frac{15}{16}$ sẽ có mẫu lần lượt là $5^2, 6^2, 7^2$. Do tử

nhỏ hơn mẫu 1 đơn vị nên ba phân số sau phân số $\frac{15}{16}$ có từ lần lượt là 24 ; 35 ; 48. Từ đó có 6 phân số đầu như sau :

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2}, \frac{2 \cdot 4}{3^2}, \frac{3 \cdot 5}{4^2}, \frac{4 \cdot 6}{5^2}, \frac{5 \cdot 7}{6^2}, \frac{6 \cdot 8}{7^2}$$

Để có thể viết tử và mẫu của phân số cuối cùng dưới dạng tích, ngoài việc nhận xét mẫu là bình phương của số tự nhiên n nên có $10000 = 100^2$, và do các thừa số ở tử hơn kém nhau 2 đơn vị nên việc tách số 9999 thành một tích cần được nhắm tính dần dần. Vì $10000 = 100 \cdot 100$ nên 9999 có thể là 99 nhân với một số nào đó. Biết các thừa số ở tử hơn kém nhau 2 đơn vị nên thừa số thứ hai có thể là $99 + 2 = 101$. Thử lại, thấy $101 \cdot 99 = 9999$.

Đến đây, tích các phân số đã cho được viết như sau :

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7^2} \cdots \frac{99 \cdot 101}{100^2}$$

Với chú ý rằng, các thừa số thứ nhất của các tử thuộc dãy các thừa số thứ nhất, còn các thừa số thứ hai của các tử thuộc dãy các thừa số thứ hai, nên có tích :

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 101}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100}$$

- Ở câu b, với mẫu của ba phân số đầu tiên có thể viết lần lượt là : 3.7 ; 4.7 ; 4.9. Ta thấy thừa số 4 và 7 được lặp lại, các thừa số ở mỗi tích không có sự nối tiếp nhau. Nhận thấy, nếu có các tích 6.7 ; 7.8 ; 8.9 thì các thừa số ở 3 mẫu của 3 phân số đầu tiên đã được viết theo một quy luật nhất định, đó là dãy hai thừa số là hai số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số 6. Để có được như vậy, chính là các thừa số 3 ; 4 đã được nhân lên với 2. Các mẫu được nhân lên 2 lần, để mỗi phân số vẫn giữ

nguyên giá trị của nó thì các tử cũng được nhân lên 2 lần, theo tính chất cơ bản của phân số.

Như vậy tích đã cho được viết lại là :

$$\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9} \cdots \frac{2650}{2652}$$

Đến đây ta có nhận xét :

a) Các thừa số ở tử hơn kém nhau 3 đơn vị. Để có thể tách 2650 thành tích, phải nhắm tính dần. Trước hết biết $2500 = 50^2$, do các thừa số ở tử hơn kém nhau 3 đơn vị, nên nếu một thừa số là 50 thì thừa số kia phải là $50 + 3 = 53$. Thử lại thấy $53 \cdot 50 = 2650$.

b) Các thừa số ở mẫu hơn kém nhau 1 đơn vị, mà $2652 > 2650$ nên dự đoán một thừa số là 51, thừa số kia là 52. Thử lại, thấy $51 \cdot 52 = 2652$. Chú ý rằng, nếu khi thử lại không đúng thì có thể thay đổi thừa số thứ nhất bằng cách thêm hoặc bớt đi từng đơn vị rồi nhắm ra thừa số thứ hai.

Đến đây tích đã cho được viết lại là :

$$\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9} \cdots \frac{50 \cdot 53}{51 \cdot 52}$$

Do tử nhỏ hơn mẫu 2 đơn vị, nên có thể viết thêm vào tích trên 3 phân số sau 3 phân số đầu tiên như sau :

$$\frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 10}{8 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 11}{9 \cdot 10} \cdot \frac{9 \cdot 12}{10 \cdot 11} \cdot \frac{10 \cdot 13}{11 \cdot 12} \cdots \frac{50 \cdot 53}{51 \cdot 52}$$

Các thừa số viết trước ở tử và mẫu là dãy các tích ở tử và mẫu của phân số thứ nhất, các thừa số viết sau ở tử và mẫu là dãy các tích ở tử và mẫu của phân số thứ hai, tích đã cho viết thành :

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 50}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdots 51} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 53}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdots 52}$$

– Ở câu c, sau khi làm phép tính trong ngoặc, ta thấy rằng mỗi phân số của tích này là số nghịch đảo của phân số tương ứng của tích đã cho trong câu a. Do đó việc tính toán tiếp theo là rất thuận lợi.

Bài 8

Tìm x , biết :

$$a) \left[\frac{3,75 : \frac{1}{4} - 6\frac{2}{3} \cdot 0,3}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + 0,5 - \frac{1}{15}\right) \cdot 2\frac{1}{7}}{1,05 + 0,95} \right] \cdot x = 11\frac{3}{4} ;$$

$$b) \left[\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} \right) \cdot 2,8 + 2,94 \right] : 0,02 = 647 ;$$

$$c) (0,66 - 0,024 : 0,4) : \left(\frac{31}{35} - 2\frac{4}{7} \cdot 0,2 \right) = \\ = 2\frac{9}{13} x : \left(5,1 - 5,6 : 2\frac{2}{3} \right).$$

● Tìm hiểu đề bài

Bài ra đòi hỏi phải tìm giá trị của x trong một dãy các phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, thực hiện các phép tính trong móc vuông, đưa bài toán về dạng $a \cdot x = 11\frac{3}{4}$ (trong đó a là giá trị của biểu thức trong móc vuông). Ta thấy muốn tìm một thừa số trong phép nhân, lấy tích chia cho thừa số kia.

Với câu b, biểu thức trong móc vuông coi như số bị chia mà muốn tìm số bị chia ta lấy số chia nhân với thương. Sau đó là phép cộng, muốn tìm một số hạng lấy tổng trừ đi số hạng kia. Rồi đến phép nhân, thừa số trong ngoặc bằng tích chia cho 2,8.

Lại tiếp đến phép trừ, số trừ bằng số bị trừ trừ đi hiệu. Suy luận tiếp theo cho phép chia rồi phép trừ sẽ có kết quả bài toán.

Với câu c, ở bên trái dấu bằng cần thực hiện các phép tính trong 2 dấu ngoặc, sau đó là phép chia sẽ được một số cụ thể. Ở bên phải dấu bằng cũng làm các phép tính trong dấu ngoặc trước và như vậy sẽ có một phép tính chia mà ta phải tìm số bị chia khi biết số chia và thương.

● *Cách giải*

$$a) \left[\frac{3,75 : \frac{1}{4} - 6\frac{2}{3} \cdot 0,3}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + 0,5 - \frac{1}{15}\right) \cdot 2\frac{1}{7}}{1,05 + 0,95} \right] \cdot x = 11\frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{3,75 : 0,25 - \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{21}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\frac{9 + 30 - 4}{60} \cdot \frac{15}{7}}{2} \right] \cdot x = 11\frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{15 - 2}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{2} \right] \cdot x = 11\frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{13}{2} - \frac{5}{8} \right] \cdot x = 11\frac{3}{4}$$

$$\frac{52 - 5}{8} \cdot x = \frac{47}{4} \quad \text{Từ đó}$$

$$x = \frac{47}{4} : \frac{47}{8} = \frac{47}{4} \cdot \frac{8}{47} = 2$$

$$b) \left[\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} \right) \cdot 2,8 + 2,94 \right] : 0,02 = 647$$

$$\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} \right) \cdot 2,8 + 2,94 = 647 \cdot 0,02$$

$$\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} \right) \cdot 2,8 + 2,94 = 12,94$$

$$\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} \right) \cdot 2,8 = 12,94 - 2,94$$

$$\left(6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} \right) \cdot 2,8 = 10$$

$$6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} = 10 : 2,8$$

$$6\frac{3}{7} - \frac{0,75x - 2}{0,35} = 3\frac{4}{7}$$

$$\frac{0,75x - 2}{0,35} = 6\frac{3}{7} - 3\frac{4}{7} = 2\frac{6}{7}$$

$$0,75x - 2 = 2\frac{6}{7} \cdot 0,35 = 1$$

$$0,75x = 1 + 2. \text{ Từ đó}$$

$$x = 3 : 0,75 = 4.$$

$$c) (0,66 - 0,024 : 0,4) : \left(\frac{31}{35} - 2\frac{4}{7} \cdot 0,2 \right) =$$

$$= 2\frac{9}{13} x : \left(5,1 - 5,6 : 2\frac{2}{3} \right)$$

$$(0,66 - 0,06) : \left(\frac{31}{35} - \frac{18}{35} \right) = 2\frac{9}{13} x : (5,1 - 2,1)$$

$$0,6 : \frac{13}{35} = 2\frac{9}{13} x : 3$$

$$\frac{21}{13} = \frac{35}{13} x : 3 \text{ hay } \frac{35}{13} x = \frac{21}{13} \cdot 3 = \frac{63}{13}.$$

$$\text{Từ đó } x = \frac{63}{13} : \frac{35}{13} = \frac{63}{35} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}.$$

● Khai thác bài toán

Với loại toán tìm x trong một dãy các phép tính, thông thường tiến hành qua các bước sau đây :

- Thực hiện lần lượt phép tính trong dấu ngoặc, trong móc vuông. Trong mỗi dấu ngoặc hay móc vuông cần làm tính nhân chia trước rồi làm tính cộng trừ sau.

- Tìm giá trị của x khi x là một thừa số, hoặc là số bị chia (số chia), hoặc là số bị trừ (số trừ), hoặc là một số hạng, khi đó sẽ sử dụng mối quan hệ nhân chia hay cộng trừ.

Bài 9

a) Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$\frac{\frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}}}{1 - \frac{x}{x+1}} \quad (\text{với } x \neq 0)$$

b) Tính giá trị biểu thức

$$A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}} ; \quad B = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}} .$$

● Tìm hiểu đề bài

Câu a của bài ra, đòi hỏi phải chứng tỏ biểu thức đã cho có một giá trị nhất định bằng số (không còn chứa x nữa).

Câu b của đề bài thực chất là thực hiện các phép cộng và chia phân số.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện dần các phép tính trừ, phép chia từ cuối ngược lên.

Với câu b, cần thực hiện các phép cộng, phép chia từ cuối ngược lên.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}} - 1} &= \frac{\frac{x}{1}}{\frac{x+1-x}{x+1} - 1} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{x+1} - 1} \\ &= \frac{x}{x+1-1} = \frac{x}{x} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3+1}{3}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4+3}{4}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7+4}{7}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11+7}{11}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{18}{11}}} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{7}} \\ &= 1 + \frac{7}{11} = \frac{11+7}{11} = \frac{18}{11} = 1 \frac{7}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{12+1}{4}}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13}{4}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{13}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{13+4}{13}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{13}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{13}{17}} \\
&= 2 + \frac{1}{\frac{17+13}{17}} = 2 + \frac{1}{\frac{30}{17}} = 2 + \frac{17}{30} = 2\frac{17}{30}.
\end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Với loại toán tính ngược từ dưới lên, cần lưu ý khi làm tính từ dưới lên từng phần một thì các phần khác chưa làm hãy viết lại y nguyên, do vậy chỉ cần tập trung chú ý vào chỗ cần tính toán, các chỗ khác chỉ việc viết lại, làm như vậy sẽ tăng được tốc độ làm bài.

Bài 10

Thực hiện các phép tính sau một cách hợp lí :

$$564 \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{7} - \frac{12}{25} - \frac{12}{71}}{4 + \frac{4}{7} - \frac{4}{25} - \frac{4}{71}} : \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{19} + \frac{3}{101}}{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{19} + \frac{5}{101}} \right) \cdot \frac{124\,242\,423}{237\,373\,735}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài là một biểu thức bao gồm các phép cộng, trừ, nhân, chia và có dấu ngoặc.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Đối với một biểu thức gồm 4 phép tính và có dấu ngoặc, cần làm phép tính trong ngoặc trước. Để làm được các phép tính trong ngoặc cần làm phép cộng, trừ các phân số không cùng mẫu, ở đây lưu ý viết mỗi phân số thành một tích để có thể rút gọn được, chẳng hạn $\frac{12}{7} = 12 \cdot \frac{1}{7}$.

Đối với phân số cho cuối biểu thức cần vận dụng tính chất chia hết để viết tử và mẫu thành một tích nhằm rút gọn được.

• *Cách giải*

$$\begin{aligned}
 & 564 \cdot \left(\frac{12 + \frac{12}{7} - \frac{12}{25} - \frac{12}{71}}{4 + \frac{4}{7} - \frac{4}{25} - \frac{4}{71}} : \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{19} + \frac{3}{101}}{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{19} + \frac{5}{101}} \right) \cdot \frac{124242423}{237373735} \\
 &= 564 \cdot \left[\frac{12 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{25} - \frac{1}{71} \right)}{4 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{25} - \frac{1}{71} \right)} : \frac{3 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{101} \right)}{5 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{101} \right)} \right] \cdot \frac{124242423}{237373735} \\
 &= 564 \cdot \left(\frac{12}{4} : \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{124242423}{237373735} \\
 &= 564 \cdot 5 \cdot \frac{3 \cdot 41 \cdot 1010101}{5 \cdot 47 \cdot 1010101} \\
 &= 12 \cdot 47 \cdot 5 \cdot \frac{3 \cdot 41}{5 \cdot 47} = 12 \cdot 3 \cdot 41 = 1476.
 \end{aligned}$$

• *Khai thác bài toán*

Với loại toán đòi hỏi tính giá trị một biểu thức một cách hợp lí, nói chung là phải vận dụng tính chất của các phép tính, dấu hiệu chia hết, chẳng hạn :

a) $3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{19} + \frac{3}{101} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{101} \right)$, ta đã vận dụng tính chất : nhân một số với một tổng. Cũng cần lưu ý về chữ số 3 có mặt trong các số hạng của tổng.

Với nhận xét này, các phép tính trong dấu ngoặc được thực hiện một cách dễ dàng.

b) Phân số $\frac{124242423}{237373735}$ có tử chia hết cho 3 còn mẫu chia hết cho 5, do đó có

$$\frac{124242423}{237373735} = \frac{3 \cdot 41414141}{5 \cdot 47474747}$$

Đến đây, tử lại chia hết cho 41, còn mẫu lại chia hết cho 47, nên

$$\frac{3 \cdot 41414141}{5 \cdot 47474747} = \frac{3 \cdot 41 \cdot 1010101}{5 \cdot 47 \cdot 1010101}$$

Như vậy là phân số có thể rút gọn được và còn $\frac{3 \cdot 41}{5 \cdot 47}$.

c) Cũng xem xét xem số 564 có liên quan gì tới 47 không, và rõ ràng 564 chia hết cho 47.

Như vậy là nhờ vào tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, tính chất cơ bản của phân số, các quy tắc của các phép tính và dấu hiệu chia hết nên cách giải bài toán trên sẽ nhanh chóng, chính xác hơn. Đây là kinh nghiệm làm bài về loại toán này, cần lưu ý rèn luyện để quen dần cách làm bài.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 11

Tính tổng :

$$a) A = \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{37 \cdot 38 \cdot 39} + \frac{2}{38 \cdot 39 \cdot 40} ;$$

$$b) B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{1998}} .$$

Bài 12

Chứng tỏ rằng :

$$a) \text{ Tổng } Q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ chia hết cho } 7 ;$$

b) Phân số $A = \frac{10^{1997} + 1}{10^{1998} + 1}$ lớn hơn phân số

$$B = \frac{10^{1998} + 1}{10^{1999} + 1}.$$

Bài 13

Thực hiện các phép tính sau :

$$a) \left[\left(70\frac{21}{25} : 23 \right) : 7\frac{7}{10} + 11,45 - \left(2,225 - 1\frac{3}{8} \right) \right] \cdot \frac{9}{77} ;$$

$$b) \left[18\frac{1}{6} - \left(0,06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0,38 \right) \right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4,75 \right).$$

Bài 14

Tính :

$$a) \frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} : \left(\frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} \cdot \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4} \right) ;$$

$$b) \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{3333}{1212} + \frac{3333}{2020} + \frac{3333}{3030} + \frac{3333}{4242} + \frac{3333}{5656} \right) ;$$

$$c) \frac{2^3 + 3^2}{10^6 + 7 \cdot 10^5}.$$

Bài 15

Tìm y, biết :

$$\frac{\left(3,75 : \frac{1}{4} + 2\frac{2}{5} \cdot 1,25 \right) - \left(\frac{7}{2} \cdot 0,8 - 1,2 : \frac{3}{2} \right)}{\left(1\frac{1}{2} + 0,75 \right) \cdot y} = 64.$$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 11

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Tách mỗi phân số đã cho thành hiệu của 2 phân số có tử là 1, mẫu của phân số bị trừ là tích của thừa số thứ nhất với

thừa số thứ hai, mẫu của phân số trừ là tích của thừa số thứ hai với thừa số thứ ba, chẳng hạn : $\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}$, ...
 $\frac{2}{38 \cdot 39 \cdot 40} = \frac{1}{38 \cdot 39} - \frac{1}{39 \cdot 40}$. Từ đó có thể tính được tổng đã cho.

$$\text{b) Ta thấy } \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$\frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}\right), \dots, \frac{1}{2^{1998}} = \frac{1}{2^{1997}} - \frac{1}{2^{1998}},$$

từ đó dãy cộng các phân số đã cho trở thành dãy trừ và cộng các phân số, ta có thể tính nhanh được tổng đã cho.

● *Cách giải*

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{37 \cdot 38 \cdot 39} + \frac{2}{38 \cdot 39 \cdot 40} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{37 \cdot 38} - \frac{1}{38 \cdot 39} + \frac{1}{38 \cdot 39} - \frac{1}{39 \cdot 40} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{39 \cdot 40} = \frac{260 - 1}{39 \cdot 40} = \frac{259}{1560} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{1998}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1997}} - \frac{1}{2^{1998}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{1998}} = \frac{2^{1998} - 1}{2^{1998}}. \end{aligned}$$

Bài 12

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Nhóm từng cặp số đã cho để được phân số có tử là 7, sau đó quy đồng mẫu các phân số, rồi áp dụng tính chất phân phối

của phép nhân đối với phép cộng để được một tích có thừa số là 7.

b) Hãy nhân các phân số A, B lần lượt với 10 và chú ý đến quy tắc sau :

$$a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

• *Cách giải*

$$\begin{aligned} \text{a) } Q &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\ &= \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{7}{6} + \frac{7}{10} + \frac{7}{12} \\ &= \frac{7 \cdot 10 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 5}{60} = \frac{7 \cdot (10 + 6 + 5)}{60} = \frac{7 \cdot 21}{60}. \end{aligned}$$

Do $\frac{7 \cdot 21}{60}$ chia hết cho 7 nên Q chia hết cho 7.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } 10A &= \frac{10(10^{1997} + 1)}{10^{1998} + 1} \\ &= \frac{10^{1997} \cdot 10 + 10}{10^{1998} + 1} = \frac{10^{1998} + 10}{10^{1998} + 1} \\ &= \frac{10^{1998} + 1}{10^{1998} + 1} + \frac{9}{10^{1998} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{1998} + 1} \\ 10B &= \frac{10(10^{1998} + 1)}{10^{1999} + 1} = \frac{10^{1998} \cdot 10 + 10}{10^{1999} + 1} \\ &= \frac{10^{1999} + 10}{10^{1999} + 1} = \frac{10^{1999} + 1}{10^{1999} + 1} + \frac{9}{10^{1999} + 1} \\ &= 1 + \frac{9}{10^{1999} + 1}. \end{aligned}$$

Ta thấy $10^{1999} + 1 > 10^{1998} + 1$ nên $\frac{9}{10^{1998}+1} > \frac{9}{10^{1999}+1}$,

do đó $10A > 10B$ hay $A > B$ tức là

$$\frac{10^{1997} + 1}{10^{1998} + 1} > \frac{10^{1998} + 1}{10^{1999} + 1}.$$

Bài 13

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện một dãy tính cần đảm bảo tiến hành theo trình tự như sau :

- Làm tính trong dấu ngoặc trước
- Làm tính trong móc vuông
- Làm phép nhân chia trước, làm phép cộng trừ sau.

Chú ý rút gọn phân số trong quá trình tính toán.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left[\left(70 \frac{21}{25} : 23 \right) : 7 \frac{7}{10} + 11,45 - \left(2,225 - 1 \frac{3}{8} \right) \right] \cdot \frac{9}{77} \\ &= \left[\left(\frac{1771}{25} : 23 \right) : \frac{77}{10} + 11,45 - \left(2 \frac{9}{40} - 1 \frac{3}{8} \right) \right] \cdot \frac{9}{77} \\ &= \left[\frac{1771}{25 \cdot 23} \cdot \frac{10}{77} + 11,45 - \left(\frac{89}{40} - \frac{55}{40} \right) \right] \cdot \frac{9}{77} \\ &= \left[\frac{2}{5} + 11 \frac{9}{20} - \frac{17}{20} \right] \cdot \frac{9}{77} \\ &= \left(\frac{2}{5} + 10 \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{9}{77} \\ &= 11 \cdot \frac{9}{77} = \frac{9}{7} = 1 \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{b) } \left[18\frac{1}{6} - \left(0,06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0,38 \right) \right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4,75 \right) \\
&= \left[18\frac{1}{6} - (0,06 : 7,5 + 3,4 \cdot 0,38) \right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4\frac{3}{4} \right) \\
&= \left[18\frac{1}{6} - (0,008 + 1,292) \right] : \left(19 - 12\frac{2}{3} \right) \\
&= \left[18\frac{1}{6} - 1,3 \right] : 6\frac{1}{3} = \left(18\frac{1}{6} - 1\frac{3}{10} \right) : 6\frac{1}{3} \\
&= \left(18\frac{5}{30} - 1\frac{9}{30} \right) : 6\frac{1}{3} = \left(17\frac{35}{30} - 1\frac{9}{30} \right) : 6\frac{1}{3} \\
&= 16\frac{26}{30} : 6\frac{1}{3} = 16\frac{13}{15} : 6\frac{1}{3} = \frac{253}{15} : \frac{19}{3} = \frac{253}{19.5} \approx 2,66.
\end{aligned}$$

Bài 14

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Viết các số đã cho dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số để có thể rút gọn, chẳng hạn $27^3 = (3^3)^3 = 3^9$, ...

b) Cần phân tích tử và mẫu của mỗi phân số thành một tích để rút gọn, sau đó viết mỗi phân số mới thành một tích, rồi quy đồng mẫu, cuối cùng là thực hiện phép tính nhân.

c) Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng ở mẫu của phân số đã cho, rồi rút gọn sẽ được điều cần tính toán.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
& \text{a) } \frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} : \left(\frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} \cdot \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4} \right) \\
&= \frac{(3^3)^3 \cdot (2^2)^5}{(2 \cdot 3)^8} : \left(\frac{5^5 \cdot 2^4}{(2 \cdot 5)^4} \cdot \frac{2^6 \cdot 3^4}{(2 \cdot 3)^4} \right).
\end{aligned}$$

$$= \frac{3^9 \cdot 2^{10}}{2^8 \cdot 3^8} : \left(\frac{5^5 \cdot 2^4}{2^4 \cdot 5^4} \cdot \frac{2^6 \cdot 3^4}{2^4 \cdot 3^4} \right)$$

$$= 3 \cdot 2^2 : (5 \cdot 2^2) = \frac{3 \cdot 2^2}{5 \cdot 2^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{b) } \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{3333}{1212} + \frac{3333}{2020} + \frac{3333}{3030} + \frac{3333}{4242} + \frac{3333}{5656} \right)$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{33 \cdot 101}{12 \cdot 101} + \frac{33 \cdot 101}{20 \cdot 101} + \frac{33 \cdot 101}{30 \cdot 101} + \frac{33 \cdot 101}{42 \cdot 101} + \frac{33 \cdot 101}{56 \cdot 101} \right)$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{33}{12} + \frac{33}{20} + \frac{33}{30} + \frac{33}{42} + \frac{33}{56} \right)$$

$$= \frac{7}{4} \cdot 33 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} \right)$$

$$= \frac{7 \cdot 33}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{7 \cdot 33}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) = \frac{7 \cdot 33}{4} \cdot \frac{5}{24} = \frac{385}{32} = 12 \frac{1}{32}.$$

$$\text{c) } \frac{2^3 + 3^2}{10^6 + 7 \cdot 10^5} = \frac{8 + 9}{10^5 \cdot 10 + 7 \cdot 10^5} = \frac{17}{10^5 \cdot (10 + 7)}$$

$$= \frac{17}{10^5 \cdot 17} = \frac{1}{10^5}.$$

Bài 15

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện các phép tính trong hai dấu ngoặc ở số bị chia, sau đó làm phép trừ.

Ở số chia, ta cũng làm phép tính trong dấu ngoặc trước.

Như vậy bài toán sẽ có dạng $\frac{a}{b \cdot y} = 64$ (trong đó a, b là các số vừa tính được) từ đó suy ra giá trị của y.

• Cách giải

$$\frac{\left(3,75 : \frac{1}{4} + 2 \frac{2}{5} \cdot 1,25\right) - \left(\frac{7}{2} \cdot 0,8 - 1,2 : \frac{3}{2}\right)}{\left(1 \frac{1}{2} + 0,75\right) \cdot y} = 64$$

$$\frac{\left(3 \frac{3}{4} : \frac{1}{4} + \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{12}{10} \cdot \frac{2}{3}\right)}{\left(1 \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot y} = 64$$

$$\frac{\left(\frac{15}{4} \cdot \frac{4}{1} + 3\right) - \left(\frac{14}{5} - \frac{4}{5}\right)}{\left(1 \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \cdot y} = 64$$

$$\frac{(15 + 3) - 2}{2 \frac{1}{4} \cdot y} = 64$$

$$\frac{16}{2 \frac{1}{4} \cdot y} = 64 \quad \text{suy ra} \quad 16 = 64 \cdot 2 \frac{1}{4} \cdot y. \quad \text{Từ đó}$$

$$y = \frac{16}{64 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{1}{9}.$$

VII. CÁC BÀI TOÁN TRONG Q_+

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Một canô đi xuôi dòng sông từ A đến B trong 3 giờ, rồi đi ngược dòng từ B trở về A trong $4\frac{1}{2}$ giờ. Hỏi, nếu có một bè gỗ trôi xuôi dòng từ A đến B thì phải mất bao nhiêu thời gian ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài đòi hỏi tính thời gian của một bè gỗ trôi xuôi dòng từ A đến B mất bao nhiêu lâu, cho biết trên quãng sông ấy có một canô đi xuôi dòng trong 3 giờ và ngược dòng trong $4\frac{1}{2}$ giờ.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trong toán chuyển động đều thì quãng đường (s), vận tốc (v) và thời gian (t) được cho bởi công thức $v = \frac{s}{t}$. Ở đây quãng đường s chính là độ dài quãng sông AB, v là vận tốc của dòng nước (vì bè gỗ trôi được là do sức đẩy của dòng nước). Ta phải tính v để có $t = \frac{s}{v}$.

Canô xuôi dòng trên quãng sông AB trong 3 giờ, rồi ngược dòng trên quãng sông đó trong $4\frac{1}{2}$ giờ, như vậy có thể tính

được vận tốc của canô đi xuôi, đi ngược. Cần lưu ý rằng, khi đi xuôi, canô có vận tốc bằng vận tốc riêng của nó cộng với vận tốc dòng nước ; còn khi đi ngược dòng, canô có vận tốc bằng hiệu giữa vận tốc riêng với vận tốc dòng nước. Từ đó có thể suy ra được vận tốc của dòng nước, đó chính là vận tốc của bè gỗ. Quãng sông AB đã cho, vận tốc bè gỗ đã biết nên tính được thời gian bè gỗ trôi từ A đến B. Lưu ý rằng, hiệu giữa vận tốc canô xuôi dòng và ngược dòng bằng 2 lần vận tốc dòng nước (khi vận tốc riêng của canô không đổi).

● *Cách giải*

$$4\frac{1}{2} \text{ giờ} = \frac{9}{2} \text{ giờ}$$

$$\text{Vận tốc của canô đi xuôi dòng là : } \frac{\text{quãng đường AB}}{3} = \frac{1}{3} \text{ q.đ AB}$$

$$\text{Vận tốc của canô đi ngược dòng là : } \frac{\text{quãng đường AB}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9} \text{ q.đ AB}$$

Vận tốc của dòng nước là :

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} \right) : 2 = \frac{1}{18} \text{ (q.đ AB)}$$

Thời gian bè gỗ trôi xuôi dòng từ A đến B là :

$$1 : \frac{1}{18} = 18 \text{ (giờ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Vì sao : hiệu giữa vận tốc canô xuôi dòng với vận tốc canô ngược dòng lại chính là 2 lần vận tốc dòng nước ?

Thật vậy, nếu canô có vận tốc riêng là v , còn vận tốc dòng nước là v_{dn} , vận tốc canô xuôi dòng là v_x , ngược dòng là v_n , ta có :

$$v_x = v + v_{dn}$$

$$v_n = v - v_{dn}$$

Hiệu hai vận tốc là :

$$\begin{aligned}v_x - v_n &= v + v_{dn} - (v - v_{dn}) \\&= v + v_{dn} - v + v_{dn} \\&= 2v_{dn}.\end{aligned}$$

+ Bài toán cho thời gian đi xuôi dòng, đi ngược dòng là các số, nhưng không cho biết độ dài tính bằng kilômet của quãng sông AB, nhưng ta vẫn tính được vận tốc của canô xuôi dòng, ngược dòng như đã làm, lưu ý rằng các vận tốc này phụ thuộc vào quãng đường AB. Do vậy có thể nói : 1 giờ canô xuôi dòng được $\frac{1}{3}$ AB và ngược dòng được $\frac{2}{9}$ AB, từ đó tìm được hiệu hai vận tốc.

Bài 2

Ba người thợ chia nhau một số tiền công như sau : Người thứ nhất hơn người thứ hai 20% và hơn người thứ ba 25%. Người thứ hai đã nhận 360 000đ. Hỏi hai người kia mỗi người nhận được bao nhiêu tiền ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho biết người thứ hai được chia 360 000đ, người thứ nhất hơn người thứ hai 20% và hơn người thứ ba 25%, yêu cầu tính số tiền của người thứ nhất và người thứ ba.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Số tiền được chia của người thứ hai đã biết, tỉ số phần trăm số tiền người thứ nhất hơn người thứ hai là 20%, do đó tính được số tiền mà người thứ nhất hơn người thứ hai và tính được số tiền người thứ nhất được chia.

Người thứ nhất hơn người thứ ba là 25%, có nghĩa là số tiền được chia của người thứ nhất bằng 125% số tiền người thứ ba, từ đó tính được số tiền mà người thứ ba được chia.

● *Cách giải*

20% số tiền của người thứ hai là : $360\,000 \cdot \frac{20}{100} = 72\,000$ (đ)

Số tiền của người thứ nhất là : $360\,000 + 72\,000 = 432\,000$ (đ)

432000 đ bằng 125% số tiền của người thứ ba, vậy số tiền của người thứ ba là : $432\,000 \cdot \frac{100}{125} = 345\,600$ (đ)

● *Khai thác bài toán*

+ Giải bài toán trên là sự vận dụng một trong ba bài toán cơ bản về phân số, đó là : tìm giá trị phân số của một số cho trước, chẳng hạn :

a) Biết người thứ nhất được chia hơn người thứ hai 20% hay $\frac{1}{5}$, nên muốn biết người thứ nhất hơn người thứ hai bao nhiêu tiền ta phải tìm 20% (hay $\frac{1}{5}$) của 360 000 đ.

b) Biết người thứ ba được chia một số tiền bằng $\frac{100}{125}$ (hay $\frac{4}{5}$) số tiền của người thứ nhất, tức là tìm $\frac{4}{5}$ của 432 000 đ, ta có $432\,000 \cdot \frac{4}{5} = 345\,600$ (đ).

+ Một cách lập luận đáng chú ý : Đề bài cho biết số tiền người thứ nhất hơn người thứ ba 25%, trong khi đó lại chưa tính được số tiền của người thứ ba. Do vậy, sau khi biết số tiền được chia của người thứ nhất và với ý : "số tiền người thứ nhất hơn người thứ ba 25%" thì suy ra được : số tiền của người thứ nhất bằng 125% số tiền của người thứ ba, do đó số tiền người thứ ba được chia bằng $\frac{100}{125}$ số tiền của người thứ nhất, từ đó tính được số tiền được chia của người thứ ba.

Bài 3

Một người dùng $\frac{4}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh và lãi được 12%. Dùng $\frac{5}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh khác người ấy lãi 10%. Số vốn còn lại người ấy bị lỗ trong một kinh doanh thứ ba là 8%. Tính gộp của ba loại kinh doanh người ấy lãi được 2 296 000 đ. Hỏi số vốn của người đó là bao nhiêu ?

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi tính tổng số tiền vốn đã bỏ ra trong ba loại kinh doanh, cho biết phân số chỉ số vốn, tỉ số phần trăm lãi, lỗ của từng loại kinh doanh và số tiền lãi gộp của cả ba loại kinh doanh của người đó.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết hãy tìm phân số chỉ số tiền vốn ở loại kinh doanh bị thua lỗ, sau đó tính số tiền lãi, tiền lỗ của từng loại kinh doanh so với số vốn bỏ ra, đây là 3 bài toán cụ thể thuộc loại tìm giá trị phân số của một số (đã biết cách giải từ 3 bài toán cơ bản về phân số).

Sau đó tìm phân số chỉ số tiền lãi gộp cả 3 loại kinh doanh, cuối cùng là tìm số vốn khi đã biết giá trị một phân số của nó.

● Cách giải

Phân số chỉ số tiền vốn ở kinh doanh thứ ba là :

$$1 - \left(\frac{4}{11} + \frac{5}{11} \right) = \frac{2}{11} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lãi ở kinh doanh thứ nhất là :

$$\frac{4}{11} \cdot \frac{12}{100} = \frac{48}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lãi ở kinh doanh thứ hai là :

$$\frac{5}{11} \cdot \frac{10}{100} = \frac{50}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lỗ ở kinh doanh thứ ba là :

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{8}{100} = \frac{16}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lãi gộp 2 296 000 đ là :

$$\frac{48}{1100} + \frac{50}{1100} - \frac{16}{1100} = \frac{82}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Số tiền vốn của người đó là :

$$2\,296\,000 \cdot \frac{82}{1100} = 30\,800\,000 \text{ (đ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Nếu thay câu : "Dùng $\frac{5}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh

khác người ấy lãi 10%" bằng câu : "Dùng $\frac{2}{7}$ số vốn còn lại của mình sau lần kinh doanh thứ nhất để kinh doanh khác người ấy lãi 10%". Hãy giải bài toán này với sự thay đổi kể trên.

Ta lưu ý đến $\frac{2}{7}$ số vốn còn lại, vì sự thay đổi này làm thay đổi cả lời giải bài toán. Có thể giải như sau :

Phân số chỉ số vốn còn lại sau kinh doanh thứ nhất là :

$$1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11} \text{ (số tiền vốn)}$$

$\frac{1}{7}$ số tiền vốn còn lại là : $\frac{7}{11} : 7 = \frac{1}{11}$ (số tiền vốn)

$\frac{2}{7}$ số tiền vốn ở kinh doanh thứ hai là :

$$\frac{1}{11} \cdot 2 = \frac{2}{11} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền vốn ở kinh doanh thứ ba là :

$$\frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{5}{11} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lãi ở kinh doanh thứ nhất là :

$$\frac{4}{11} \cdot \frac{12}{100} = \frac{48}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lãi ở kinh doanh thứ hai là :

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{10}{100} = \frac{20}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lỗ ở kinh doanh thứ ba là :

$$\frac{5}{11} \cdot \frac{8}{100} = \frac{40}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Phân số chỉ số tiền lãi gộp 2 296 000 đ là :

$$\frac{48}{1100} + \frac{20}{1100} - \frac{40}{1100} = \frac{28}{1100} \text{ (số tiền vốn)}$$

Số tiền vốn của người đó là :

$$2\,296\,000 : \frac{28}{1\,100} = 90\,200\,000 \text{ (đ)}$$

+ Sự thay đổi so với đề bài toán 3 ở chỗ : "dùng $\frac{2}{7}$ số vốn còn lại sau lần kinh doanh thứ nhất..." để tìm số vốn kinh doanh lần thứ hai, thay cho 2 phép tính kể trên, từ nay chỉ cần làm một phép tính sau :

$$\frac{7}{11} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{11} \text{ (số tiền vốn).}$$

Bài 4

Có ba vòi nước cùng chảy vào một cái bể. Nếu mở vòi thứ nhất và vòi thứ hai cùng chảy trong 6 giờ thì đầy $\frac{3}{5}$ bể. Nếu mở vòi thứ hai và vòi thứ ba cùng chảy trong 5 giờ thì đầy $\frac{7}{12}$ bể. Nếu mở vòi thứ nhất và vòi thứ ba cùng chảy trong 9 giờ thì đầy $\frac{3}{4}$ bể. Hỏi nếu mở cả ba vòi cùng chảy vào bể thì trong bao lâu bể sẽ đầy nước ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Biết vòi I và II chảy trong 6 giờ làm đầy $\frac{3}{5}$ bể, vòi II và III chảy trong 5 giờ làm đầy $\frac{7}{12}$ bể, vòi I và III chảy trong 9 giờ làm đầy $\frac{3}{4}$ bể, cần tính xem cả ba vòi cùng chảy vào bể đó trong cùng một lúc thì trong bao lâu bể đầy nước.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Biết vòi I và II chảy trong 6 giờ làm đầy $\frac{3}{5}$ bể thì có thể biết được trong 1 giờ chúng làm đầy bao nhiêu phần bể. Tương tự có thể biết được vòi II và III, vòi I và III trong 1 giờ làm đầy bao nhiêu phần bể.

Như vậy tính được trong 2 giờ cả 3 vòi làm đầy bao nhiêu phần bể, rồi cả 3 vòi trong 1 giờ làm đầy mấy phần bể, do đó suy ra được thời gian cả 3 vòi cùng chảy làm đầy bể.

● *Cách giải*

Trong 1 giờ vòi I và II chảy được : $\frac{3}{5} : 6 = \frac{1}{10}$ (bể).

Trong 1 giờ vòi II và III chảy được : $\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{60}$ (bể).

Trong 1 giờ vòi I và III chảy được : $\frac{3}{4} : 9 = \frac{1}{12}$ (bể).

Trong 2 giờ cả ba vòi chảy được :

$$\frac{1}{10} + \frac{7}{60} + \frac{1}{12} = \frac{6 + 7 + 5}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \text{ (bể)}.$$

Trong 1 giờ cả ba vòi chảy được : $\frac{3}{10} : 2 = \frac{3}{20}$ (bể).

Thời gian cả ba vòi cùng chảy làm đầy bể trong :

$$1 : \frac{3}{20} = 6\frac{2}{3} \text{ (giờ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu câu hỏi của bài toán được thay đổi như sau : Hỏi nếu cho vòi thứ ba chảy một mình thì nó sẽ làm đầy bể trong bao nhiêu lâu ?

Để trả lời câu hỏi trên, phải tính được trong 1 giờ cả ba vòi chảy được bao nhiêu phần của bể nước, rồi trong 1 giờ vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy được bao nhiêu phần của bể nước, từ đó suy ra được trong 1 giờ vòi thứ ba chảy một mình được mấy phần bể nước.

Do vậy, để giải bài toán với câu hỏi mới, ta vẫn phải giải bài toán đã cho như cũ để biết phân số chỉ lượng nước chảy được của cả ba vòi trong 1 giờ, rồi tiếp tục như sau :

$$\text{Trong 1 giờ vòi III chảy được : } \frac{3}{20} - \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \text{ (bể)}.$$

Thời gian vòi III chảy một mình đầy bể là :

$$1 : \frac{1}{20} = 20 \text{ (giờ)}.$$

Bài 5

Một số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ vừa chia hết cho 9 vừa chia hết cho 5, trong đó chữ số hàng nghìn bằng $\frac{1}{8}$ chữ số hàng trăm, chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{2}$ chữ số hàng trăm. Hãy tìm số đó.

● *Tìm hiểu đề bài*

Số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thì đương nhiên là $a \neq 0$ (vì nếu $a = 0$ thì không còn số có bốn chữ số nữa). Đề bài cho biết $a = \frac{1}{8}b$,

$c = \frac{1}{2}b$, và phải tìm số $\overline{abcd}$ vừa chia hết cho 9, vừa chia hết cho 5

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Số phải tìm $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 thì phải thỏa mãn điều kiện thứ nhất là $(a + b + c + d) : 9$ và chia hết cho 5 thì phải thỏa mãn điều kiện thứ hai là $d = 0$ hoặc $d = 5$. Như vậy số có bốn chữ số cần tìm phải thỏa mãn đồng thời hai điều kiện kể trên.

Cần lưu ý đến điều đã cho là : chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{2}$ chữ số hàng trăm tức là $c = \frac{1}{2}b$, suy ra $b = 2c$, hay b là chữ số chẵn : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8. Kết hợp với điều cho biết thứ hai là : chữ số hàng nghìn bằng $\frac{1}{8}$ chữ số hàng trăm tức là $a = \frac{1}{8}b$ hay $b = 8a$. Từ đó suy ra giá trị của a, b, c, d .

● *Cách giải*

Vì số phải tìm là số chia hết cho 9 nên phải có $(a + b + c + d) : 9$ và là số chia hết cho 5 nên $d = 0$ hoặc $d = 5$.

Theo đề bài $c = \frac{1}{2}b$ suy ra $b = 2c$, tức là b là chữ số chẵn.

Mặt khác, cũng theo đề bài $a = \frac{1}{8}b$ suy ra $b = 8a$, mà $a \neq 0$, $a < 9$ và $0 < b < 9$ nên $a = 1, b = 8, c = 4$.

Số có bốn chữ số phải tìm có dạng $\overline{184d}$. Để chia hết cho 9 cần có $(1 + 8 + 4 + d) : 9$, suy ra $d = 5$.

Vậy số có bốn chữ số phải tìm là 1845.

● *Khai thác bài toán*

Lưu ý rằng, số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ phải tìm có thể là một số duy nhất, nhưng cũng có thể là nhiều số tùy thuộc vào điều

kiện số phải tìm chia hết cho những số nào và tùy thuộc vào giá trị của các chữ a, b, c, d đã cho. Ta hãy xét bài toán sau đây :

Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ vừa chia hết cho 3 vừa chia hết cho 2, trong đó chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{4}$ chữ số hàng trăm và chữ số hàng trăm bằng 2 lần chữ số hàng nghìn.

Ta có thể giải như sau :

Nhận thấy $a \neq 0$ thì mới tồn tại số có bốn chữ số $\overline{abcd}$. Để $\overline{abcd} : 3$ thì $(a + b + c + d) : 3$ và để $\overline{abcd} : 2$ thì d phải là chữ số chẵn.

Do chữ số hàng trăm bằng 2 lần chữ số hàng nghìn tức là $b = 2a$ suy ra b luôn là chữ số chẵn, và luôn chia hết cho 4 vì chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{4}$ chữ số hàng trăm tức là $c = \frac{1}{4} b$, do đó chữ số chẵn b có thể bằng :

a) 4, thì $c = 1$ và $a = 2$. Ta phải có $(2 + 4 + 1 + d)$ chia hết cho 2, cho 3 do vậy $d = 2$ hoặc $d = 8$, nên có số 2412 hoặc số 2418, vì chúng đều chia hết cho 2, cho 3.

b) 8, thì $c = 2$ và $a = 4$. Ta phải có $(4 + 8 + 2 + d)$ chia hết cho 2, cho 3, do vậy $d = 4$, nên có số 4824 chia hết cho 2, cho 3.

Vậy ta tìm được ba số 2412 ; 2418 và 4824 là những số có bốn chữ số chia hết cho 2, cho 3 trong đó chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{4}$ chữ số hàng trăm và chữ số hàng trăm bằng 2 lần chữ số hàng nghìn.

Bài 6

Một đại lí xi măng đã bán hết số xi măng họ có trong 4 ngày. Ngày thứ nhất bán $\frac{1}{5}$ số xi măng và 10 tạ. Ngày thứ hai bán

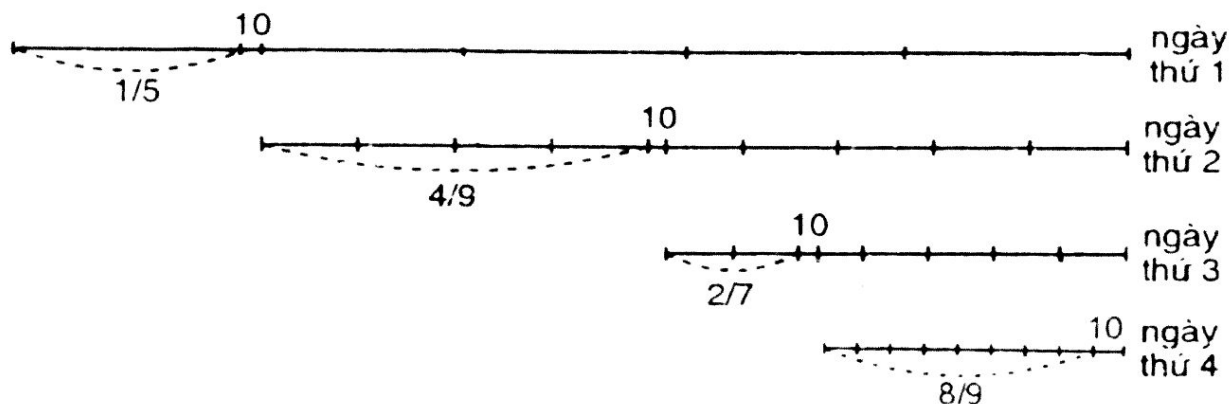
$\frac{4}{9}$ số xi măng còn lại và 10 tạ. Ngày thứ ba bán $\frac{2}{7}$ số xi măng còn lại và 10 tạ. Ngày thứ tư bán $\frac{8}{9}$ số xi măng còn lại và 10 tạ cuối cùng. Hỏi đại lí này đã bán được tất cả bao nhiêu tạ xi măng ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Đây là bài toán mà khi giải ta cần tính ngược từ cuối lên. Bài giải sẽ thấy dễ dàng hơn khi vẽ được sơ đồ đoạn thẳng minh họa đề bài.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Dựa vào đề bài để vẽ sơ đồ đoạn thẳng minh họa các ngày đã bán xi măng như sau :



● *Cách giải*

Ngày thứ tư bán $\frac{8}{9}$ số xi măng còn lại và 10 tạ cuối cùng, suy ra $\frac{1}{9}$ số xi măng bằng 10 tạ.

Vậy số xi măng còn lại sau ngày thứ ba (hay số xi măng đã bán trong ngày thứ tư) là :

$$10 : \frac{1}{9} = 90 \text{ (tạ)}$$

(90 + 10) tạ là $\frac{5}{7}$ số xi măng còn lại sau ngày thứ hai, vậy số xi măng còn lại sau ngày thứ hai là :

$$100 : \frac{5}{7} = 140 \text{ (tạ)}$$

$(140 + 10)$ tạ là $\frac{5}{9}$ số xi măng còn lại sau ngày thứ nhất, vậy số xi măng còn lại sau ngày thứ nhất là :

$$150 : \frac{5}{9} = 270 \text{ (tạ)}$$

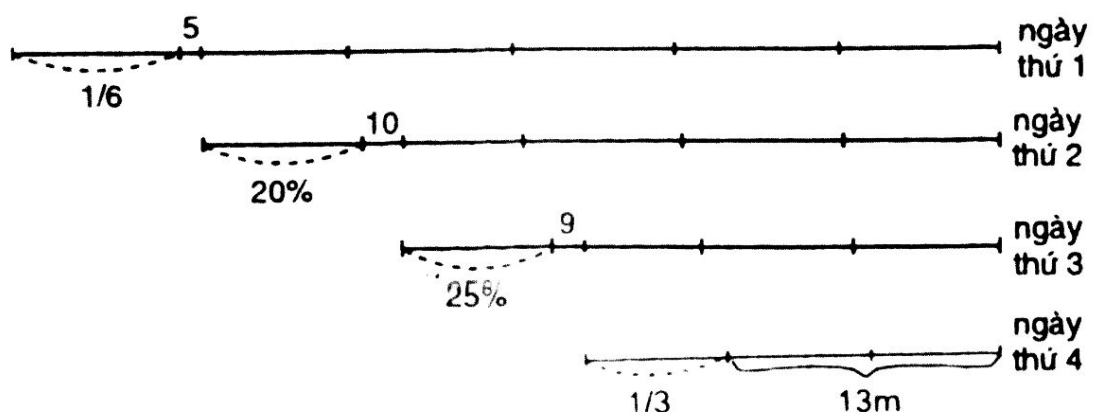
$(270 + 10)$ tạ là $\frac{4}{5}$ số xi măng có trong kho, vậy số xi măng mà đại lí này có tất cả là :

$$280 : \frac{4}{5} = 350 \text{ (tạ)}$$

● *Khai thác bài toán*

+ Để làm quen với phương pháp giải loại toán bằng cách tính ngược từ cuối lên ta làm thêm bài sau :

Một cửa hàng bán một tấm vải trong 4 ngày. Ngày thứ nhất bán $\frac{1}{6}$ tấm vải và 5 m ; ngày thứ hai bán 20% số vải còn lại và 10 m ; ngày thứ ba bán 25% số vải còn lại và 9m ; ngày thứ tư bán $\frac{1}{3}$ số vải còn lại. Cuối cùng còn 13 m. Tính chiều dài tấm vải.



● *Cách giải*

$$20\% = \frac{1}{5} ; 25\% = \frac{1}{4}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ ba :

$$13 : \frac{2}{3} = \frac{39}{2} \text{ (m)}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ hai :

$$\left(\frac{39}{2} + 9 \right) : \frac{3}{4} = 38 \text{ (m)}$$

Số mét vải còn lại sau ngày thứ nhất :

$$(38 + 10) : \frac{4}{5} = 60 \text{ (m)}$$

Chiều dài của cả tấm vải là :

$$(60 + 5) : \frac{5}{6} = 78 \text{ (m)}.$$

+ Kiến thức chủ yếu dùng để giải bài toán loại này là vận dụng bài toán cơ bản về phân số : tìm một số biết giá trị phân số của nó, chẳng hạn như : Biết $\frac{5}{6}$ tấm vải bằng 65m thì tấm vải đó dài là :

$$65 : \frac{5}{6} = 78 \text{ (m)}$$

Hoặc biết $\frac{4}{5}$ số xi măng có trong kho là 280 tạ thì số tạ xi măng có tất cả trong kho là :

$$280 : \frac{4}{5} = 350 \text{ (tạ)}.$$

Bài 7

Một đại lí bán xi măng. Lần thứ nhất bán được $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ số bao xi măng có trong kho. Lần thứ hai bán được $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ số xi măng còn lại trong kho. Lần thứ ba cũng bán được $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ số bao

ximăng còn lại trong kho. Sau 3 lần bán trong kho còn lại 686 bao. Tính xem đại lí đã nhập về tất cả bao nhiêu bao ximăng.

● *Tìm hiểu đề bài*

Ba lần xuất bán ximăng của đại lí có giống nhau về số liệu, nhưng ý nghĩa của số liệu là khác nhau. Lần thứ nhất bán $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ số bao ximăng có trong kho lúc đầu. Lần thứ hai bán $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ số bao ximăng còn lại sau lần bán thứ nhất. Lần thứ ba bán $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ số bao ximăng còn lại sau lần bán thứ hai. Cần chú ý đến việc tìm giá trị còn lại của phân số $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ trong các lần bán thứ hai và thứ ba.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Dễ dàng tính được phân số chỉ số bao ximăng đã bán được trong lần đầu : $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ (tổng số bao), như vậy phân số chỉ số bao ximăng còn lại trong kho là $\frac{7}{15}$ (tổng số bao). Sau đó tìm giá trị $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ của $\frac{7}{15}$ số bao ximăng còn lại trong kho, suy ra phân số chỉ số bao ximăng bán được trong lần thứ hai. Rồi tìm phân số chỉ số bao ximăng còn lại sau lần bán thứ hai, và tiếp tục tìm giá trị $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ của phân số chỉ số bao ximăng còn lại trong kho sau lần bán thứ hai, từ đó suy ra phân số chỉ số bao ximăng bán được trong lần thứ ba. Phân số chỉ số bao ximăng còn lại sau lần bán thứ ba chính là 686 bao. Từ đó tính được tổng số bao ximăng có trong kho tức là số bao ximăng đã được nhập kho.

● *Cách giải*

Phân số chỉ số bao xi măng bán được trong lần thứ nhất là :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15} \text{ (tổng số bao XM)}$$

Phân số chỉ số bao xi măng còn lại trong kho sau lần bán thứ nhất là :

$$\frac{15}{15} - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \text{ (tổng số bao XM)}$$

Phân số chỉ số bao xi măng bán được trong lần bán thứ hai là :

$$\left(\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{56}{225} \text{ (tổng số bao XM)}$$

Phân số chỉ số bao xi măng còn lại sau lần bán thứ hai là :

$$\frac{7}{15} - \frac{56}{225} = \frac{105 - 56}{225} = \frac{49}{225} \text{ (tổng số bao XM)}$$

Phân số chỉ số bao xi măng bán được trong lần bán thứ ba là :

$$\left(\frac{49}{225} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{49}{225} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{392}{3375} \text{ (tổng số bao XM)}$$

Phân số chỉ số bao xi măng còn lại sau lần bán thứ ba là :

$$\frac{49}{225} - \frac{392}{3375} = \frac{735 - 392}{3375} = \frac{343}{3375} \text{ (tổng số bao XM)}$$

Tổng số bao xi măng đại lí đã nhập về kho là :

$$686 : \frac{343}{3375} = 686 \cdot \frac{3375}{343} = 6750 \text{ (bao xi măng).}$$

● *Khai thác bài toán*

+ Trong việc thực hiện các phép tính ở cách giải bài toán trên, chú ý sử dụng lũy thừa khi tìm mẫu chung và áp dụng các tính chất của các phép tính trong tính toán, cụ thể :

$$\left(\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{3^2 \cdot 5} + \frac{7}{3 \cdot 5^2} =$$

$$= \frac{7(5+3)}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 8}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{56}{225}$$

$$\frac{7}{15} - \frac{56}{225} = \frac{7}{3 \cdot 5} - \frac{7 \cdot 8}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{7(15-8)}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 7}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{49}{225}$$

$$\left(\frac{49}{225} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{49}{225} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{49}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 3} + \frac{49}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{49(5+3)}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{49 \cdot 8}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{392}{3375}$$

$$\frac{49}{225} - \frac{392}{3375} = \frac{49}{3^2 \cdot 5^2} - \frac{49 \cdot 8}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{49(15-8)}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{49 \cdot 7}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{343}{3375}$$

Khi làm tính như trên là ghi ở vở nháp, còn khi trình bày bài làm thì viết như trong cách giải bài toán này.

+ Câu hỏi của bài 7 được thay đổi như sau : "Tính xem đại lí đã bán được bao nhiêu phần trăm số bao xi măng có trong kho".

Dưới đây là cách giải :

Cách 1. Ta vẫn làm như cách giải cũ, rồi thêm như sau :

Số bao xi măng đại lí đã bán trong 3 lần là :

$$6750 - 686 = 6064 \text{ (bao xi măng)}$$

Số xi măng đã bán chiếm tỉ số phần trăm là :

$$\frac{6064 \cdot 100}{6750} \% = 89,83\%.$$

Cách 2. Ta chỉ cần tìm phân số chỉ số bao xi măng đã bán được trong 3 lần, rồi tìm phân số chỉ tổng số bao xi măng đã bán trong 3 lần là :

$$\frac{8}{15} + \frac{56}{225} + \frac{392}{3375} = \frac{3032}{3375}$$

Số xi măng đã bán chiếm tỉ số phần trăm là : $\frac{3032.100}{3375} \% = 89,83\%$.

Lưu ý : Làm theo cách này, theo bài ra sẽ thừa số liệu 686 bao.

Bài 8

Có hai bình đựng nước muối với nồng độ muối là 6% và 42%. Cần phải lấy bao nhiêu gam mỗi loại nước muối kể trên để có 150 gam nước muối với nồng độ muối là 30%.

• *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài đòi hỏi phải tính xem lấy bao nhiêu gam mỗi loại nước muối với nồng độ 6% và 42% để được 150 gam nước muối với nồng độ 30%.

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết cần tính xem trong 150 gam nước muối với nồng độ 30% muối có bao nhiêu gam muối.

Sau đó cũng xét xem với 150 gam nước muối với nồng độ 6% muối thì có bao nhiêu gam muối.

Hãy so sánh xem nếu dùng 150 gam nước muối với nồng độ 6% muối thì số gam muối thiếu hụt là bao nhiêu để từ đó tìm cách thay thế một số gam nước muối với nồng độ 6% bằng số gam nước muối với nồng độ 42% một cách phù hợp.

• *Cách giải*

Lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 30% là :

$$\frac{150 \cdot 30}{100} = 45 \text{ (g)}$$

Lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 6% là :

$$\frac{150 \cdot 6}{100} = 9 \text{ (g)}$$

Lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 6% kém lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 30% là :

$$45 - 9 = 36 \text{ (g)}$$

Khi thay 1 gam nước muối với nồng độ 6% bằng 1 gam nước muối với nồng độ 42% thì lượng muối tăng lên là :

$$0,42 - 0,06 = 0,36 \text{ (g)}$$

Lượng nước muối với nồng độ 42% cần dùng để pha trộn là :

$$36 : 0,36 = 100 \text{ (g)}$$

Lượng nước muối với nồng độ 6% cần dùng để pha trộn là :

$$150 - 100 = 50 \text{ (g)}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Trong cách giải ở trên ta đã tìm cách pha trộn nước muối nồng độ 42% vào nước muối nồng độ 6%. Cũng có thể làm ngược lại như sau :

Lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 30% là :

$$\frac{150 \cdot 30}{100} = 45 \text{ (g)}$$

Lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 42% là :

$$\frac{150 \cdot 42}{100} = 63 \text{ (g)}$$

Lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 42% hơn lượng muối chứa trong 150 gam nước muối với nồng độ 30% là :

$$63 - 45 = 18 \text{ (g)}$$

Khi thay 1 gam nước muối với nồng độ 42% bằng 1 gam nước muối với nồng độ 6% thì lượng muối giảm đi là :

$$0,42 - 0,06 = 0,36 \text{ (g)}$$

Lượng nước muối với nồng độ 6% cần dùng để pha trộn là :

$$18 : 0,36 = 50 \text{ (g)}$$

Lượng nước muối với nồng độ 42% cần dùng để pha trộn là :

$$150 - 50 = 100 \text{ (g)}.$$

+ Hai cách giải là như nhau vì đã cho cùng một đáp số, nhưng thông thường thì người ta pha trộn dần số gam nước muối ở nồng độ cao vào số gam nước muối ở nồng độ thấp hơn. Như vậy việc trình bày như trong cách giải là hay dùng hơn.

+ Giải toán nên có thói quen thử lại kết quả để kiểm tra cách làm.

Ta có thể thử lại cách giải bài toán trên như sau :

Số gam nước muối cần có : $50\text{g} + 100\text{g} = 150 \text{ g}$

Lượng muối trong 150 gam :

$$\frac{50 \cdot 6}{100} + \frac{100 \cdot 42}{100} = 3 + 42 = 45 \text{ (g)}$$

Nồng độ muối trong 150 gam nước muối là :

$$\frac{45 \cdot 100}{150} \% = 30\%.$$

Bài 9

Có một công việc, người thứ nhất làm một mình sẽ hoàn thành trong 25 ngày, người thứ hai trong 20 ngày, người thứ ba trong 24 ngày. Cả ba người đã cùng làm được 2 ngày, sau đó chỉ có người thứ ba làm tiếp trong 6 ngày ; rồi người thứ nhất, người thứ ba và thêm người thứ tư thì cả ba người cùng làm thêm 4 ngày nữa mới xong công việc đó. Hỏi nếu để một mình người thứ tư làm từ đầu thì phải bao nhiêu ngày mới hoàn thành công việc đó ?

● Tìm hiểu đề bài

Để bài cho biết, để hoàn thành một công việc, nếu làm một mình thì người thứ nhất, thứ hai, thứ ba phải làm lần lượt trong

25 ngày, 20 ngày, 24 ngày. Tính ra người thứ nhất đã tham gia vào làm công việc này trong 6 ngày, người thứ hai 2 ngày, người thứ ba 12 ngày và người thứ tư trong 4 ngày. Cần phải tính xem nếu người thứ tư làm một mình từ đầu công việc ấy phải mất bao nhiêu ngày mới xong.

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tính xem người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt làm được mấy phần công việc trong 1 ngày ; sau đó xét xem người thứ nhất, thứ hai, thứ ba đã tham gia vào công việc này mỗi người tất cả là bao nhiêu ngày, từ đó biết được phần công việc mà người thứ tư đã làm trong 4 ngày rồi suy ra được nếu người thứ tư làm một mình từ đầu thì xong công việc ấy trong bao nhiêu ngày.

• *Cách giải*

Người thứ nhất, thứ hai, thứ ba làm một mình xong công việc đó lần lượt trong 25 ngày, 20 ngày, 24 ngày thì trong một ngày người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt làm được $\frac{1}{25}$ công việc, $\frac{1}{20}$ công việc và $\frac{1}{24}$ công việc.

Theo đề bài thì số ngày đã tham gia vào công việc này của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là 6 ngày, 2 ngày và 12 ngày.

Như vậy phân số chỉ phần công việc cả ba người đã làm được là :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{25} \cdot 6 \right) + \left(\frac{1}{20} \cdot 2 \right) + \left(\frac{1}{24} \cdot 12 \right) = \\ & = \frac{6}{25} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{42}{50} \text{ (công việc)} \end{aligned}$$

Phân số chỉ phần công việc mà người thứ tư đã làm trong 4 ngày là :

$$1 - \frac{42}{50} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} \text{ (công việc)}$$

Phân số chỉ phần công việc người thứ tư làm được trong 1 ngày là :

$$\frac{4}{25} : 4 = \frac{1}{25} \text{ (công việc)}$$

Vậy số ngày người thứ tư làm một mình xong công việc đó là :

$$1 : \frac{1}{25} = 25 \text{ (ngày)}.$$

● *Khai thác bài toán*

+ Đây là loại bài toán thuộc về công việc làm đồng thời của vài ba người để hoàn thành một việc nào đó, mà người ta thường quy ước công việc cần hoàn thành đó là 1.

Bài toán thường có hai nội dung chính là "làm chung" và "làm riêng" trong một số ngày đã định. Để làm toán thường tính phần hoàn thành công việc trong 1 ngày của từng người rồi căn cứ vào đề bài để làm các phép tính tiếp theo.

+ Cách giải nêu trên là cách giải ngắn, gọn và hợp lí nhất. Để thấy rõ điều đó, sẽ nêu cách giải khác dài hơn cách giải đã trình bày trên.

Cách giải gồm các bước sau :

- Tính xem trong 1 ngày mỗi người làm được mấy phần công việc
- Phần công việc cả ba người làm được trong 2 ngày là bao nhiêu
- Phần công việc người thứ ba làm được trong 6 ngày là bao nhiêu
- Phần công việc người thứ nhất, thứ ba làm trong 4 ngày là bao nhiêu
- Tổng số phần công việc đã làm của cả ba người

- Phân công việc người thứ tư làm trong 4 ngày
- Số ngày người thứ tư làm một mình để làm xong công việc đó.

Bài 10

Trường phổ thông trung học Thăng Lợi có dự kiến về việc thu nhận số học sinh của ba khối lớp 10, 11, 12 trong năm học tới như sau : số học sinh khối lớp 12 bằng $\frac{4}{15}$ tổng số học sinh toàn trường, số học sinh khối lớp 11 sẽ bằng 125% số học sinh khối lớp 12 ; còn số học sinh khối lớp 10 nhiều hơn số học sinh khối lớp 11 là 80 học sinh. Tính xem trong năm học tới trường phổ thông trung học Thăng Lợi có bao nhiêu học sinh.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho biết phân số chỉ số học sinh của khối lớp 12 so với số học sinh toàn trường, biết phân số chỉ số học sinh của khối lớp 11 so với số học sinh của khối lớp 12 và biết số học sinh khối lớp 10 hơn số học sinh khối lớp 11. Yêu cầu tính số học sinh toàn trường.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết phải tìm phân số chỉ số học sinh của khối lớp 11 so với số học sinh toàn trường, từ đó suy ra được phân số chỉ số học sinh của khối lớp 10 so với số học sinh toàn trường. Do đó mà biết được phân số chỉ 80 học sinh và từ đây dễ dàng suy ra được số học sinh toàn trường.

● *Cách giải*

Phân số chỉ số học sinh của khối lớp 11 so với số học sinh toàn trường là :

$$\frac{125}{100} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{3} \text{ (số học sinh toàn trường)}$$

Phân số chỉ số học sinh của khối lớp 10 so với số học sinh toàn trường là :

$$1 - \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{5} \text{ (số học sinh toàn trường)}$$

Phân số chỉ 80 học sinh là :

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \text{ (số học sinh toàn trường)}$$

Số học sinh của trường phổ thông trung học Thăng Lợi có là :

$$80 : \frac{1}{15} = 1200 \text{ (học sinh).}$$

● *Khai thác bài toán*

+ Qua bài 10, ta đã áp dụng hai trong ba bài toán cơ bản về phân số. Đó là :

- Tìm giá trị phân số của một số, ở đây là của một phân số :
tìm $\frac{125}{100}$ của $\frac{4}{15}$.

- Biết giá trị phân số của một số, tìm số đó : biết $\frac{1}{15}$ số học sinh toàn trường là 80 học sinh, tìm số học sinh toàn trường.

+ Có thể thay đổi hoặc giữ nguyên số liệu và cách hỏi của bài toán này cho các bài toán có nội dung khác, chẳng hạn bài :

Có 3 đội công nhân cùng nhận sửa một quãng đường. Đội I được phân công sửa $\frac{5}{14}$ quãng đường, đội II được phân công sửa số mét đường bằng $\frac{5}{4}$ số mét đường mà đội I sửa, đội III được phân công sửa số mét đường nhiều hơn số mét đường đội II sửa là 80 mét. Tính số mét đường mỗi đội được phân công sửa.

So với bài 10, đề bài có 2 thay đổi :

- Thay 125% bằng $\frac{5}{4}$ vì $125\% = \frac{125}{100} = \frac{125 : 25}{100 : 25} = \frac{5}{4}$.

- Tính số mét đường mỗi đội được phân công sửa, thì về cơ bản, lời giải vẫn phải làm như cũ tức là phải tính tổng số mét đường cần sửa, sau đó giải ba bài toán tìm giá trị phân số của một số để tính số mét đường mỗi đội cần sửa. Bạn đọc hãy tự làm tiếp để có kết quả cụ thể của bài toán.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 11

Hòa nghĩ một số. Lấy số đó cộng với 2, được bao nhiêu nhân với $\frac{1}{2}$ rồi cộng với 0,5, lấy kết quả nhân với $1\frac{2}{5}$, được bao nhiêu trừ đi $\frac{3}{4}$ rồi lấy kết quả chia cho 11 thì được 0,25. Hỏi Hòa đã nghĩ số nào ?

Bài 12

Hai vòi nước chảy vào một bể bơi trong 45 phút thì đầy bể. Nếu mở riêng vòi thứ nhất thì phải mất 2 giờ 15 phút mới đầy bể. Tìm thể tích nước của bể biết rằng trong một phút vòi thứ hai chảy nhiều hơn vòi thứ nhất 80m^3 nước.

Bài 13

Một người đem trứng ra chợ bán. Lúc đầu bán 30 quả, sau đó bán thêm được $\frac{1}{3}$ số quả trứng còn lại, rồi lại bán thêm được 30 quả nữa. Đến lúc này, người ấy nhận thấy số quả trứng còn lại đúng bằng $\frac{1}{2}$ số quả trứng mang đi bán. Hỏi người đó mang đi bán bao nhiêu quả trứng ?

Bài 14

Một canô xuôi dòng từ A đến B hết 6 giờ và ngược dòng từ B đến A hết 9 giờ. Tính vận tốc thực của canô biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 15

Tổng số tuổi của ba cha con là 106. Biết tuổi cha bằng $\frac{29}{13}$ tuổi con gái và bằng $\frac{29}{11}$ tuổi con trai. Hỏi tuổi của mỗi người là bao nhiêu ?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 11

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Đây là bài toán giải bằng cách tình ngược từ cuối lên. Có thể gọi số mà Hòa nghĩ là x , rồi căn cứ theo đề bài ta sẽ được một đẳng thức. Sử dụng mối quan hệ giữa bốn phép tính cộng trừ nhân chia sẽ tìm được giá trị của x .

● Cách giải

Gọi số Hòa nghĩ là x . Lấy số đó cộng với 2 ta có $x + 2$, được bao nhiêu nhân với $\frac{1}{2}$ ta có $(x + 2) \cdot \frac{1}{2}$, rồi cộng với 0,5 ta có $(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + 0,5$, lấy kết quả nhân với $1\frac{2}{5}$ ta có $\left[(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + 0,5 \right] \cdot 1\frac{2}{5}$; được bao nhiêu trừ đi $\frac{3}{4}$ ta có $\left[(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + 0,5 \right] \cdot 1\frac{2}{5} - \frac{3}{4}$; rồi lấy kết quả chia cho 11 thì được 0,25, tức là có :

$$\left\{ \left[(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + 0,5 \right] \cdot 1\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \right\} : 11 = 0,25.$$

Giải bằng cách tính ngược từ cuối ta có :

$$\left[(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{7}{5} - 0,75 = 0,25 \cdot 11 = 2,75$$

$$\left[(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{7}{5} = 2,75 + 0,75 = 3,5 = \frac{35}{10}$$

$$(x + 2) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{35}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{2}$$

$$(x + 2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x + 2 = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$$

$$x = 4 - 2 = 2.$$

Bài 12

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết cần tính xem trong một phút vòi 1 và vòi 2, rồi riêng vòi 1 lần lượt làm đầy được mấy phần bể, từ đó suy ra trong một phút vòi 2 làm đầy được mấy phần bể. Tìm phân số chỉ sự chênh lệch giữa lượng nước vòi 2 chảy hơn vòi 1 trong 1 phút, đó chính là phân số chỉ 80m^3 nước của bể bơi. Từ đó tính được thể tích của bể.

● Cách giải

Vòi 1 và vòi 2 cùng chảy trong 45 phút thì bể đầy nước, vậy trong 1 phút hai vòi chảy được $\frac{1}{45}$ bể.

Vòi 1 chảy một mình làm đầy bể trong 2 giờ 15 phút hay 135 phút, vậy trong 1 phút vòi 1 chảy được $\frac{1}{135}$ bể.

Vòi 2 trong 1 phút chảy được :

$$\frac{1}{45} - \frac{1}{135} = \frac{2}{135} \text{ (bể)}$$

Phân số chỉ lượng nước trong một phút vòi 2 chảy được nhiều hơn vòi 1 là :

$$\frac{2}{135} - \frac{1}{135} = \frac{1}{135} \text{ (bể)}$$

Thể tích của bể bơi là :

$$80 : \frac{1}{135} = 10\,800 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Bài 13

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Có thể gọi số trứng đem ra chợ bán là a quả (với $a \neq 0$, $a \in \mathbf{N}$) thì $\frac{1}{2}$ số trứng sẽ là $\frac{a}{2}$ quả.

Sau khi bán 30 quả trứng, số trứng còn lại là $(a - 30)$ quả, rồi bán thêm $\frac{1}{3}$ số trứng còn lại tức là bán được $\frac{1}{3} \cdot (a - 30)$ quả.

Tiếp tục tính toán theo số liệu đề bài cho sẽ lập được một đẳng thức giữa số trứng đã bán trong 3 lần với số trứng còn lại, từ đó suy ra được số quả trứng phải tìm.

• Cách giải

Gọi số quả trứng đem ra chợ bán lúc đầu là a quả ($a \neq 0$, $a \in \mathbf{N}$). Sau khi bán 30 quả trứng thì số trứng còn lại là $(a - 30)$ quả.

Bán thêm được $\frac{1}{3}$ số trứng còn lại tức là bán được $\frac{1}{3} \cdot (a - 30)$ quả.

Lại bán thêm 30 quả trứng nữa, như vậy số quả trứng đã bán 3 lần là :

$$30 + \frac{1}{3} (a - 30) + 30.$$

Số trứng còn lại sau 3 lần bán bằng $\frac{1}{2}$ số quả trứng mang đi bán tức là $\frac{a}{2}$ quả, nên có đẳng thức :

$$30 + \frac{1}{3}(a - 30) + 30 = \frac{a}{2}$$

$$30 + \frac{a}{3} - 10 + 30 = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{3} + 50 = \frac{a}{2}$$

$$50 = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$$

Suy ra $a = 300$.

Vậy số trứng đem ra chợ bán là 300 quả.

Bài 14

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Biết công thức tính vận tốc trong chuyển động đều là $v = \frac{s}{t}$ (v là vận tốc, t là thời gian và s là quãng đường). Như vậy nếu quãng đường s không đổi thì vận tốc v và thời gian t là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau.

Chú ý vận dụng kết quả bài 1 : Hiệu giữa vận tốc xuôi và vận tốc ngược bằng 2 lần vận tốc dòng chảy.

Trên cơ sở đó sẽ tìm được kết quả bài toán.

● Cách giải

Thời gian canô xuôi dòng quãng sông AB hết 6 giờ và thời gian ngược dòng quãng sông BA hết 9 giờ, nên thời gian xuôi dòng bằng $\frac{6}{9}$ hay $\frac{2}{3}$ thời gian ngược dòng.

Do quãng sông AB không đổi nên thời gian đi và vận tốc của canô là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau, do đó vận tốc của canô khi xuôi dòng bằng $\frac{3}{2}$ vận tốc khi ngược dòng.

Hiệu giữa vận tốc xuôi dòng và ngược dòng là :

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \text{ (vận tốc ngược dòng)}$$

Hiệu giữa vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của canô chính là hai lần vận tốc dòng nước, suy ra $\frac{1}{4}$ vận tốc ngược dòng bằng 4 km/h.

Vậy vận tốc ngược dòng của canô là :

$$4 : \frac{1}{4} = 16 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc thực của canô là :

$$16 + 4 = 20 \text{ (km/h)}.$$

Bài 15

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Theo đầu bài thì tuổi cha bằng $\frac{29}{13}$ tuổi con gái có nghĩa là tuổi con gái bằng $\frac{13}{29}$ tuổi cha. Tương tự tuổi con trai bằng $\frac{11}{29}$ tuổi cha. Sau đó tìm phân số chỉ tổng số tuổi ba cha con, từ đó tính được tuổi của mỗi người.

- *Cách giải*

Tuổi cha bằng $\frac{29}{13}$ tuổi con gái thì tuổi con gái bằng $\frac{13}{29}$ tuổi cha.

Tuổi cha bằng $\frac{29}{11}$ tuổi con trai thì tuổi con trai bằng $\frac{11}{29}$ tuổi cha.

Nếu lấy tuổi cha làm đơn vị thì phân số chỉ tổng số tuổi của ba cha con là :

$$1 + \frac{13}{29} + \frac{11}{29} = \frac{53}{29} \text{ (tuổi cha)}$$

$$\text{Tuổi cha là : } 106 : \frac{53}{29} = 106 \cdot \frac{29}{53} = 58 \text{ (tuổi)}$$

$$\text{Tuổi con gái là : } 58 \cdot \frac{13}{29} = 26 \text{ (tuổi)}$$

$$\text{Tuổi con trai là : } 58 \cdot \frac{11}{29} = 22 \text{ (tuổi)}.$$

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu	3
I. Tập hợp các số tự nhiên (tập hợp $\mathbf{N}$).....	4
II. Các phép tính trong $\mathbf{N}$	28
III. Các bài toán trong $\mathbf{N}$	55
- Loại tìm các số	55
- Loại chuyển động đều	61
- Loại giả thiết tạm	71
IV. Tính chia hết trong $\mathbf{N}$	83
V. Tập hợp các số biểu diễn bởi phân số (tập hợp $\mathbf{Q_+}$).....	105
VI. Các phép tính trong $\mathbf{Q_+}$	140
VII. Các bài toán trong $\mathbf{Q_+}$	174