

LÊ HẢI CHÂU
NGUYỄN XUÂN QUỲ

Cách tìm lời giải CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP II
ĐẠI SỐ



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU – NGUYỄN XUÂN QUỲ

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP 2
ĐẠI SỐ

In lần thứ hai

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI- 2001

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc NGUYỄN VĂN THỎA

Tổng biên tập NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập và sửa bản in: NGUYỄN LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: TRẦN TIỂU LÂM

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS. TẬP 2: ĐẠI SỐ

Mã số : 01.102.ĐH2000 - 746.2000.

In 1.000 cuốn, tại Công ty In Khoa học kỹ thuật - Hà Nội.

Số xuất bản : 44/746/CXB. Số trích ngang : 81-KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2001.

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là bộ sách về *phương pháp học giải toán* nhằm mục đích hình thành cho học sinh thói quen suy nghĩ và tìm lời giải của một bài toán trên cơ sở các kiến thức đã học. Bộ sách này là cầu nối giữa lí thuyết và thực hành toán học.

Học giải toán là một cách tư duy sáng tạo về toán, đồng thời là một vấn đề trừu tượng và khá khó đối với học sinh, nhưng đó lại là điều rất cần thiết cho mỗi học sinh trong quá trình học toán ở trường PTCS.

Bộ sách "Cách tìm lời giải các bài toán THCS" gồm 3 tập : SỐ HỌC, ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC. Đây là tập II - Đại số trong bộ sách này.

Mỗi tập giới thiệu các trọng điểm, đều có thêm ba chấm sao **

1) Các bài toán điển hình, mỗi bài toán đều gồm :

- Đề bài
- Tìm hiểu đề bài
- Hướng dẫn cách tìm lời giải
- Cách giải
- Khai thác bài toán

2) Các bài toán tự giải

Các vị phụ huynh học sinh, các thầy cô giáo có thể dùng bộ sách này làm tài liệu hướng dẫn con em mình học tập. Hy vọng rằng bộ sách sẽ giúp ích nhiều cho học sinh để có thể phát huy nội lực trong giải toán nói riêng và học toán nói chung.

CÁC TÁC GIẢ

I. TẬP HỢP $\mathbb{Z}$ CÁC SỐ NGUYÊN. TẬP HỢP $\mathbb{Q}$ CÁC SỐ HỮU TỈ

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

a) Viết tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm giao và hợp của tập hợp $\mathbb{N}$ và tập hợp $\mathbb{Z}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu liệt kê các phần tử của tập hợp $\mathbb{N}$, tập hợp $\mathbb{Z}$ rồi sau đó tìm các tập hợp là giao và hợp của hai tập hợp $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy dùng dấu ngoặc nhọn $\{ \}$ để liệt kê các phần tử của tập hợp $\mathbb{N}$, tập hợp $\mathbb{Z}$.

Với câu b, hãy vận dụng khái niệm:

- Giao của hai tập hợp là một tập hợp tạo thành bởi các phần tử chung của hai tập hợp đó.

- Hợp của hai tập hợp là một tập hợp tạo thành bởi những phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó.

• Cách giải

a) $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

b) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \{\dots, -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

• Khai thác bài toán

a) Từ bài toán trên có thể rút ra được những kết luận gì đối với hai tập hợp $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$?

Ta thấy:

- Tập hợp N các số tự nhiên là tập hợp con của tập hợp Z các số nguyên, kí hiệu $N \subset Z$.

Có thể nói chính xác hơn: Tập hợp N các số tự nhiên là *tập hợp con thực sự* của tập hợp Z các số nguyên, kí hiệu là $N \subsetneq Z$.

- Giao của tập hợp N các số tự nhiên và tập hợp Z các số nguyên chính là tập hợp N các số tự nhiên:

$$N \cap Z = N$$

- Hợp của tập hợp N các số tự nhiên và tập hợp Z các số nguyên chính là tập hợp Z các số nguyên:

$$N \cup Z = Z$$

b) Có thể phát biểu như thế nào về số nguyên?

Ta thấy rõ hai cách phát biểu sau đây:

- Số nguyên gồm số tự nhiên và số nguyên âm.
- Số nguyên gồm số nguyên dương, số 0 và số nguyên âm.

Bài 2

a) Tìm số đối của các số nguyên sau: 2; 4; -5; -3.

b) Hãy biểu diễn các số trên và các số đối của chúng trên cùng một trục số.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu tìm các số đối của các số nguyên đã cho, sau đó biểu diễn các số nguyên đã cho và các số đối của chúng trên cùng một trục số.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

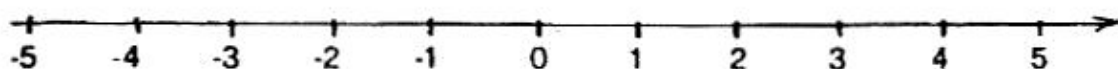
Với câu a, cần nắm vững khái niệm về hai số đối nhau, chẳng hạn như hai số đối nhau a và $-a$ chỉ khác nhau về dấu.

Với câu b, hai điểm biểu diễn hai số đối nhau ở về hai phía của điểm biểu diễn số 0 trên trục số; trong đó số nguyên âm ở bên trái số 0 còn số nguyên dương là số đối của số nguyên âm kể trên ở bên phải số 0.

● Cách giải

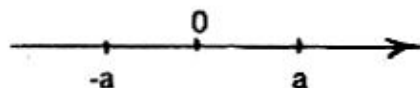
a) Số đối của 2 là -2; của 4 là -4; của -5 là 5; của -3 là 3.

b) Các số trên và các số đối của chúng được biểu diễn trên trục số như hình vẽ dưới đây:



● Khai thác bài toán

Ta hiểu rằng, hai số nguyên được gọi là đối nhau khi: chúng có giá trị tuyệt đối bằng nhau, dấu khác nhau và được biểu diễn bằng hai điểm đối xứng với nhau qua điểm biểu diễn số 0 trên trục số. Chẳng hạn a và $-a$ ($a > 0$) được biểu diễn trên trục số như sau:



Vậy thì số 0 có số đối không?

Ta đã biết rằng, số 0 không thuộc số nguyên dương (tức là không thuộc $\mathbb{Z}_+$) và không thuộc số nguyên âm (tức là không thuộc $\mathbb{Z}_-$), từ đó có $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Như vậy có thể coi số 0 là số không có số đối.

Nhưng nếu công nhận $+0 = -0 = 0$ thì số 0 có thể coi là số có số đối là chính nó, tức là số đối của số 0 chính là số 0.

Bài 3

Cho hai số nguyên a và b , nếu có:

a) $|a| = |b|$

b) $a > 0, b > 0, |a| > |b|$

c) $a < 0, b < 0, |a| < |b|$

thì có thể kết luận thế nào về quan hệ giữa a và b ? Cho ví dụ minh họa.

● Tìm hiểu đề bài

Với câu a, đề bài cho hai số nguyên có giá trị tuyệt đối bằng

nhau, hãy so sánh hai số đó với nhau.

Với câu b, đề bài cho hai số cùng dương và giá trị tuyệt đối của số a lớn hơn giá trị tuyệt đối của số b, cần so sánh hai số a và b đã cho.

Với câu c, đề bài cho hai số cùng âm và giá trị tuyệt đối của số a bé hơn giá trị tuyệt đối của số b, cần so sánh hai số a và b đã cho.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để làm bài, cần vận dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

và lưu ý rằng: với hai số cùng dương (hay cùng âm) khi được biểu diễn trên trục số, bao giờ số lớn hơn cũng ở bên phải số bé hơn.

● Cách giải

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số:

a) Nếu $|a| = |b|$ thì a và b bằng nhau hoặc đối nhau.

Ví dụ: $|-8| = |-8|$; $|-8| = |8|$

b) Nếu $a > 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$ thì $a > b$.

Ví dụ: $a = 5$; $b = 3$, $|5| > |3|$ rõ ràng $5 > 3$

c) Nếu $a < 0$, $b < 0$, $|a| < |b|$ thì $a > b$.

Ví dụ: $a = -1$; $b = -3$, $|-1| < |-3|$ rõ ràng $-1 > -3$.

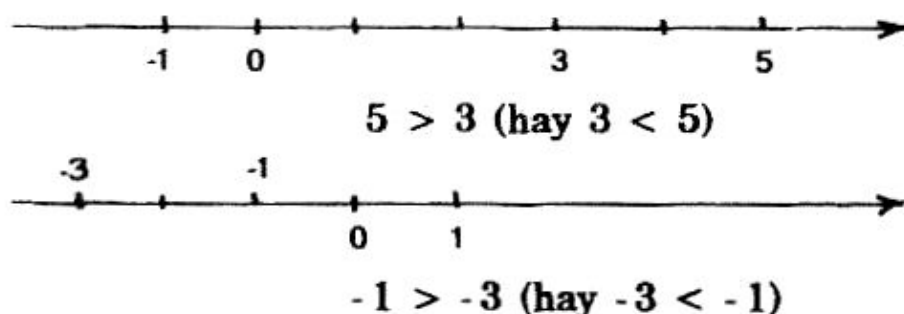
● Khai thác bài toán

Căn cứ vào đề bài và dựa vào cách giải, hãy phát biểu câu b, câu c bằng lời văn. Minh họa các ví dụ cụ thể ở câu b, c trên trục số.

Ta thấy:

+ Trong hai số dương, số có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì lớn hơn.

+ Trong hai số âm, số có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn thì lớn hơn.



Bài 4

Cho hai số nguyên âm a , b (chẳng hạn $a = -3$, $b = -9$)

a) So sánh a và b .

b) Tính $|a|$, $|b|$ và so sánh hai số này.

Có thể rút ra kết luận gì về thứ tự giữa hai số nguyên âm và thứ tự giữa hai giá trị tuyệt đối của chúng?

• Tìm hiểu đề bài

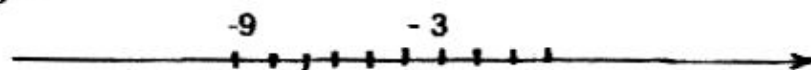
Đề bài cho hai số nguyên âm, yêu cầu so sánh hai số này để biết được trong hai số ấy số nào lớn hơn rồi lại so sánh về giá trị tuyệt đối của chúng, cuối cùng là rút ra kết luận về thứ tự giữa hai số nguyên âm và thứ tự giữa hai giá trị tuyệt đối.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, dựa vào cách biểu diễn số nguyên trên trục số có ngay kết quả so sánh giữa a và b .

Với câu b, trước hết tìm giá trị tuyệt đối của mỗi số, so sánh hai giá trị vừa tìm được để có được kết luận theo yêu cầu của đề bài.

• Cách giải



a) Với $a = -3$, $b = -9$ thì $-9 < -3$ tức là $b < a$ (hay $a > b$).

b) Với $a = -3$ thì $|-3| = 3$ và với $b = -9$ thì $|-9| = 9$. Vì $9 > 3$

nên $|b| > |a|$.

Kết luận: Trong hai số nguyên âm, số lớn hơn ở bên phải số bé hơn trên trục số; số nào nhỏ hơn có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

● Khai thác bài toán

Hãy xem xét bài toán trên khi: a, b là hai số nguyên dương; a là số nguyên dương còn b là số nguyên âm.

Ta thấy:

- Nếu a, b là hai số nguyên dương hay có thể nói, đó là hai số tự nhiên, điều này đã học từ lớp dưới. Nếu $a = 7; b = 4$ thì $a > b$ và $|a| > |b|$.

- Nếu a là số nguyên dương còn b là số nguyên âm ta luôn có $a > b$, nhưng về giá trị tuyệt đối của a, b thì phải căn cứ vào giá trị cụ thể của a và b mới có thể so sánh được:

Nếu $a = 1$ còn $b = -10$ thì $|b| > |a|$

Nếu $a = 7$ còn $b = -3$ thì $|a| > |b|$

Nếu $a = 8$ còn $b = -8$ thì $|a| = |b|$.

Bài 5

Tìm tập hợp các số nguyên x sao cho:

a) $-3 < x < 1$ b) $-6 \leq x \leq -4$

c) $-5 \leq x \leq -4$ d) $|x| = 8$

e) $|x| = -3$ g) $|x| < 5$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi tìm tập hợp các số nguyên x sao cho:

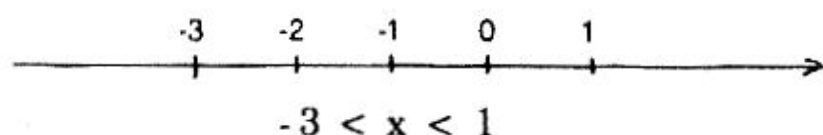
Số x thỏa mãn bất đẳng thức kép (ngặt) đối với câu a, câu g

Số x thỏa mãn bất đẳng thức kép (không ngặt) đối với câu b, câu c

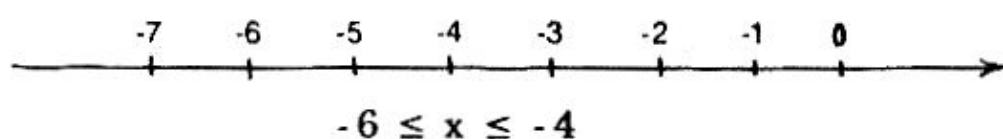
Số x thỏa mãn đẳng thức đối với câu d, câu e.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a cần phải tìm tập hợp các số nguyên x lớn hơn -3 nhưng nhỏ hơn 1 , có thể dựa vào trục số để có câu trả lời:



Với câu b, cần phải tìm tập hợp các số nguyên x lớn hơn hoặc bằng -6 nhưng nhỏ hơn hoặc bằng -4 , có thể dựa vào trục số để có câu trả lời:



Với câu c, nhận thấy -5 và -4 là hai số nguyên âm kề liền nhau, do đó giữa chúng không còn có số nguyên nào nữa, từ đó có câu trả lời.

Với câu d, cần phải tìm tập hợp các số nguyên x sao cho chúng có giá trị tuyệt đối bằng 8 , đây là một đẳng thức, dựa vào định nghĩa giá trị tuyệt đối để có câu trả lời.

Với câu e, cần lưu ý rằng giá trị tuyệt đối của bất kì một số nguyên nào cũng là một số không âm, nên đẳng thức đã cho là một đẳng thức sai.

Với câu g, ta đã biết: nếu có $x > -5$ và $x < 5$ thì có thể viết gộp hai bất đẳng thức trên thành một bất đẳng thức kép là $-5 < x < 5$ hay $|x| < 5$. Do đó câu g là tìm tập hợp các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $-5 < x < 5$, cách làm tương tự câu a.

● Cách giải

a) Tập hợp A các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-3 < x < 1$ là

$$A = \{-2; -1; 0\}$$

b) Tập hợp B các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép

$-6 \leq x \leq -4$ là

$$B = \{-6; -5; -4\}$$

c) Vì -5 và -4 là hai số nguyên âm kề liền nhau (liên tiếp) nên giữa -5 và -4 không có một số nguyên âm nào nữa, do đó tập hợp C các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-5 \leq x \leq -4$ là

$$C = \emptyset$$

d) Vì $|x| = 8$ nên theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối, suy ra $x = -8$ hay $x = 8$. Vậy tập hợp D các số nguyên x thỏa mãn đẳng thức $|x| = 8$ là

$$D = \{-8; 8\}$$

e) Biết rằng, giá trị tuyệt đối của bất kì số nguyên nào cũng là một số không âm, nên tập hợp E các số nguyên x thỏa mãn đẳng thức $|x| = -3$ là

$$E = \emptyset$$

g) Vì $|x| < 5$ tương đương với $-5 < x < 5$, nên tập hợp F các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $|x| < 5$ là

$$F = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

● Khai thác bài toán

Cần chú ý thêm về các dạng bất đẳng thức:

1. Bất đẳng thức đơn, chẳng hạn:

a) Tìm các số nguyên x sao cho $x < 1$

Ta thấy các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $x < 1$ là tập hợp:

$$E = \{0; -1; -2; -3; \dots\}$$

b) Tìm các số nguyên x sao cho $-3 < x$

Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $-3 < x$ là tập hợp:

$$F = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

c) Tìm các số nguyên x sao cho $x \leq 1$

Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $x \leq 1$ là tập hợp:

$$G = \{1; 0; -1; -2; -3; \dots\}$$

d) Tìm các số nguyên x sao cho $-3 \leq x$

Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức $-3 \leq x$ là tập hợp:

$$K = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

2. Bất đẳng thức kép, chẳng hạn:

a) Khi ghép hai bất đẳng thức 1a) và 1b) ở trên với nhau ta có bất đẳng thức kép (ngật) sau đây:

$$-3 < x < 1$$

Theo cách giải ở bài 5 ta có tập hợp:

$$A = \{-2; -1; 0\}$$

b) Khi ghép hai bất đẳng thức 1c) và 1d) ở trên với nhau ta có bất đẳng thức kép (không ngật) sau đây:

$$-3 \leq x \leq 1$$

Giải tương tự như ở bài toán 5 ta có tập hợp:

$$I = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$$

Ta thấy, các tập hợp A và I là hai tập hợp có *hữu hạn* các phần tử, còn các tập hợp E , F , G , K là các tập hợp có *vô hạn* các phần tử.

Bài 6

a) Cho hai dãy số nguyên:

10; 11; 12; ...; 98; 99 (I) và -10; -11; -12; ...; -98; -99 (II).

Trong hai dãy số này, dãy số nào là dãy số tăng, dãy số nào là dãy số giảm?

b) Tìm:

- Số nguyên âm nhỏ nhất và lớn nhất có hai chữ số

- Số nguyên dương nhỏ nhất và số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số.

● Tìm hiểu đề bài

Câu a của bài toán cho hai dãy số I và II, trong đó dãy số I là dãy các số nguyên dương, còn dãy số II là dãy các số nguyên âm. Đề bài đòi hỏi xem xét dãy số nào tăng, dãy số nào giảm.

Câu b của bài toán yêu cầu tìm số nguyên âm, số nguyên dương lớn nhất, nhỏ nhất có hai chữ số, có ba chữ số.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, dãy số I là dãy các số nguyên dương, đó chính là dãy các số tự nhiên nên dễ dàng biết được là dãy số tăng; dãy số II cần lưu ý rằng, với hai số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối bé hơn sẽ là số lớn hơn, từ đó có câu trả lời.

Với câu b, đối với các số nguyên âm, cần lưu ý đến giá trị tuyệt đối để xác định số lớn nhất. Chẳng hạn như: với các số nguyên âm có hai chữ số, số nào có giá trị tuyệt đối lớn nhất là số nhỏ nhất; số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất là số lớn nhất. Đối với số có ba chữ số, suy luận tương tự. Với các số nguyên dương thì việc tìm số lớn nhất giống như việc tìm số lớn nhất trong tập hợp N các số tự nhiên.

● Cách giải

a) Rõ ràng là $10 < 11 < 12 < \dots < 98 < 99$, do đó dãy các số 10; 11; 12; ...; 98; 99 là dãy các số tăng.

Với các số âm, số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn sẽ là số lớn hơn. Biết $|-10| < |-11|$, $|-11| < |-12|$, ..., $|-98| < |-99|$ nên có $-10 > -11 > -12 \dots > -98 > -99$, như vậy dãy các số -10; -11, -12; ...; -98, -99 là dãy các số giảm.

b) Theo dãy số II trong câu a, ta có ngay:

Số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số là -99.

Số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số là -10.

Biết dãy các số nguyên dương có ba chữ số tăng dần là 100; 101; 102; ...; 998; 999, suy ra số nguyên dương nhỏ nhất có ba chữ

số là 100.

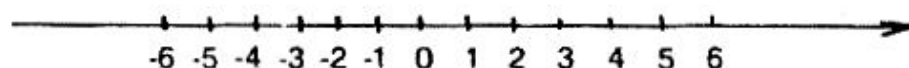
Biết dãy các số nguyên âm có ba chữ số tăng dần là -999; -998;... ; -102; -101; -100, suy ra số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số là -100.

● Khai thác bài toán

Như đã biết, các số nguyên âm (kí hiệu là $\mathbb{Z}_-$) là tập hợp con của tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên; các số nguyên dương (kí hiệu là $\mathbb{Z}_+$) là tập hợp con của tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên, nên:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

Biết rằng, các số nguyên có thể biểu diễn được trên trục số chẳng hạn:



Ta thấy: các điểm biểu diễn các số nguyên âm nằm bên trái điểm biểu diễn số 0, các điểm biểu diễn các số nguyên dương nằm bên phải điểm biểu diễn số 0. Đặc biệt là:

- Các điểm biểu diễn các số nguyên dương càng gần điểm biểu diễn số 0 là số ngày càng nhỏ.
- Các điểm biểu diễn các số nguyên âm càng gần điểm biểu diễn số 0 là số ngày càng lớn.

Với nhận xét như trên, có thể dùng trục số để làm (câu b) bài toán 5.

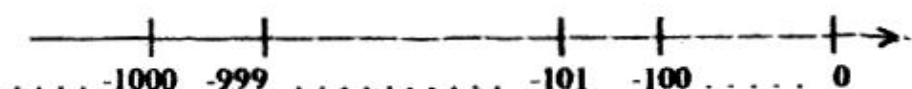
Thật vậy, trên một trục số, có thể biểu diễn các số nguyên âm có hai chữ số bằng các điểm như sau:



Như vậy, số -10 là số nguyên âm lớn nhất có hai chữ số và số -99 là số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số.

Tương tự, trên một trục số, có thể biểu diễn các số nguyên âm

có ba chữ số bằng các điểm như sau:



Ở hình vẽ trên, ta thấy số -100 là số nguyên âm lớn nhất có ba chữ số và số -999 là số nguyên âm nhỏ nhất có ba chữ số.

Bài 7

Tính các tổng sau:

- a) $675 + (-587) + (-655) + (-177) + (-23) + 387$
- b) $1316 + (-315) + (-1216) + 317 + (-85)$
- c) $4366 + (-3275) + 3634 + (-725) + (-2384) + 6384$
- d) $5002 + (-2820) + 4715 + (-3002) + 3840 + (-6715)$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu tính tổng của các số nguyên dương và nguyên âm trong một dãy tính.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thông thường đối với một dãy các phép tính cộng thì làm tính theo thứ tự từ trái sang phải, song cũng có thể có các cách giải khác, trong bài này ta vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng để tính riêng tổng các số nguyên dương, nguyên âm rồi làm phép cộng hai số trái dấu.

• Cách giải

- a) $675 + (-587) + (-655) + (-177) + (-23) + 387$
 $= (675 + 387) + [(-587) + (-655) + (-167) + (-23)]$
 $= 1062 + (-1442) = -380.$
- b) $1316 + (-315) + (-1216) + 317 + (-85)$
 $= (1316 + 317) + [(-315) + (-1216) + (-85)]$
 $= 1633 + (-1616) = 17.$
- c) $4366 + (-3275) + 3634 + (-725) + (-2384) + 6384$

$$= (4366 + 3634 + 6384) + [(-3275) + (-725) + (-2384)]$$

$$= 14384 + (-6384) = 8000.$$

$$\text{d) } 5002 + (-2820) + 4715 + (-3002) + 3840 + (-6715)$$

$$= (5002 + 4715 + 3840) + [(-2820) + (-3002) + (-6715)]$$

$$= 13557 + (-12537) = 1020.$$

● Khai thác bài toán

Có thể vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng một cách linh hoạt, không giống cách giải trên để làm nhanh các phép tính cộng trên như sau:

$$\text{a) } 675 + (-587) + (-655) + (-177) + (-23) + 387$$

$$= [675 + (-655)] + [(-177) + (-23)] + [387 + (-587)]$$

$$= 20 + (-200) + (-200) = -380$$

$$\text{b) } 1316 + (-315) + (-1216) + 317 + (-85)$$

$$= [1316 + (-1216)] + [(-315) + (-85)] + 317$$

$$= 100 + (-400) + 317 = 17$$

$$\text{c) } 4366 + (-3275) + 3634 + (-725) + (-2384) + 6384$$

$$= (4366 + 3634) + [(-3275) + (-725)] + [(-2384) + 6384]$$

$$= 8000 + (-4000) + 4000 = 8000$$

$$\text{d) } 5002 + (-2820) + 4715 + (-3002) + 3840 + (-6715)$$

$$= [5002 + (-3002)] + [(-6715) + 4715] + [3840 + (-2820)]$$

$$= 2000 + (-2000) + 1020 = 1020.$$

Bài 8

Tính tổng các số nguyên x thỏa mãn:

$$\text{a) } -9 < x < 7;$$

$$\text{b) } -5 \leq x \leq 5.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi tìm các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức

kép (ngắt) $-9 < x < 7$, thỏa mãn bất đẳng thức kép (không ngắt) $-5 \leq x \leq 5$, sau đó tính tổng của các số nguyên x vừa tìm được.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với mỗi bất đẳng thức đã cho, trước hết hãy tìm các số nguyên x thỏa mãn từng bất đẳng thức, sau đó làm phép cộng. Cần lưu ý khi cộng các số đối nhau, chúng có tổng bằng 0.

● **Cách giải**

a) Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-9 < x < 7$ là tập hợp A các số sau:

$$A = \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Tổng của các số nguyên vừa tìm được là:

$$\begin{aligned} &(-8) + (-7) + (-6) + 6 + (-5) + 5 + (-4) + 4 + (-3) + \\ &+ 3 + (-2) + 2 + (-1) + 1 + 0 = (-8) + (-7) = -15. \end{aligned}$$

b) Các số nguyên x thỏa mãn bất đẳng thức kép $-5 \leq x \leq 5$ là tập hợp B các số sau:

$$B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Tổng của các số nguyên vừa tìm được là:

$$(-5) + 5 + (-4) + 4 + (-3) + 3 + (-2) + 2 + (-1) + 1 + 0 = 0.$$

● **Khai thác bài toán**

Với loại bài toán này, việc tìm tổng các số nguyên sẽ nhanh chóng và đơn giản nếu chú ý đến các số đối nhau. Vì tổng của hai số đối nhau bằng 0, nên việc tìm tổng chỉ còn là tính tổng của các số nguyên còn lại (không phải là số đối nhau).

Thật vậy, với bất đẳng thức $-9 < x < 7$, sau khi loại bỏ các số đối nhau, tổng sẽ là $(-8) + (-7) = -15$. Có thể giải nhầm bài toán trên theo cách lập luận này.

Bài 9. Tìm x biết rằng:

a) $|x - 5| = 8;$

b) $|x| - 7 = 11;$

$$c) |x + 8| = 4; \quad d) 12 - |x + 2| = 7.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của số nguyên x nằm trong dấu giá trị tuyệt đối, đó là giá trị tuyệt đối của một số hay một tổng, một hiệu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, câu c áp dụng công thức

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

Với câu b, câu d, trước hết hãy thực hiện các phép tính để có dạng tương tự như câu a, câu c, sau đó mới áp dụng công thức trên.

● **Cách giải**

a) Khi $x - 5$ là số dương, ta có:

$$x - 5 = 8; x = 8 + 5 = 13$$

Khi $x - 5$ là số âm, ta có:

$$x - 5 = -8; x = -8 + 5 = -3$$

b) $|x| - 7 = 11$

$$|x| = 11 + 7 = 18$$

Suy ra $x = \pm 18$

c) Khi $x + 8$ là số dương, ta có:

$$x + 8 = 4; \quad x = 4 - 8 = -4$$

Khi $x + 8$ là số âm, ta có:

$$x + 8 = -4; x = -4 - 8 = -12.$$

d) $12 - |x + 2| = 7$

$$|x + 2| = 5$$

Khi $x + 2$ là số dương, ta có:

$$x + 2 = 5; x = 5 - 2 = 3.$$

Khi $x + 2$ là số âm, ta có:

$$x + 2 = -5; x = -5 - 2 = -7.$$

● Khai thác bài toán

Ta đã biết: $x + 5 = 7 \Rightarrow x = 7 - 5$, ngược lại

$$x = 7 - 5 \Rightarrow x + 5 = 7.$$

Có thể viết gọn cách trình bày ở trên như sau:

$$x + 5 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 5.$$

Cách biến đổi như trên gọi là biến đổi tương đương. Có thể áp dụng phép biến đổi tương đương để trình bày lời giải các câu a, câu c như sau:

$$a) |x - 5| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 8 \\ x - 5 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 5 \\ x = -8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$c) |x + 8| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8 = 4 \\ x + 8 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 8 \\ x = -4 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -12 \end{cases}.$$

Với câu b, câu d, cần thực hiện các phép tính để đưa về dạng bài tương tự câu a, câu c, rồi có thể áp dụng cách trình bày trên.

$$b) |x| - 7 = 11 \Rightarrow |x| = 11 + 7 = 18;$$

$$|x| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ x = -18 \end{cases}$$

$$d) 12 - |x + 2| = 7 \Rightarrow |x + 2| = 12 - 7 = 5;$$

$$|x + 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 5 \\ x + 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 \\ x = -5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$$

Bài 10

a) Tìm giá trị của x sao cho $x + 5$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

b) Điền dấu cộng (+) hoặc dấu trừ (-) vào ô vuông để biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất:

1) $75 \square 82$ 2) $45 \square (-37)$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài câu a đòi hỏi tìm giá trị của x để biểu thức $x + 5$ có giá trị là số nguyên dương nhỏ nhất.

Câu b đòi hỏi thay $\square$ bằng dấu "+" hay dấu "-" để thỏa mãn điều kiện bài toán.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết cần khẳng định số nguyên dương nhỏ nhất là số nào? Từ đó dễ dàng tìm được giá trị của x .

Với câu b cần lưu ý:

- Hai số 75 và 82 đều là hai số dương, hãy cộng hoặc trừ nhẩm và xét xem kết quả nào nhỏ hơn, từ đó có câu trả lời.

- Hai số 45 và -37 là hai số không cùng dấu, hãy cộng hoặc trừ nhẩm và xét xem kết quả nào nhỏ hơn, từ đó có câu trả lời.

● **Cách giải**

a) Số nguyên dương nhỏ nhất là 1, theo đầu bài ta có:

$$x + 5 = 1, \text{ suy ra } x = 1 - 5 = -4.$$

Vậy với $x = -4$ thì $x + 5$ sẽ là số nguyên dương nhỏ nhất.

b) Ta thấy $75 + 82 = 157$; $75 - 82 = -7$, rõ ràng $-7 < 157$. Do đó, để biểu thức $75 \square 82$ có giá trị nhỏ nhất phải điền dấu "-" vào $\square$ để có $75 \ominus 82 = -7$.

Ta thấy $45 + (-37) = 8$; $45 - (-37) = 45 + 37 = 82$; rõ ràng $8 < 82$. Do đó, để cho biểu thức $45 \square (-37)$ có giá trị nhỏ nhất phải điền dấu "+" vào $\square$ để có $45 \oplus (-37) = 8$.

● **Khai thác bài toán**

a) Với câu a, có thể thay đổi đề bài như sau: Tìm giá trị của x sao cho $x + 5$ là số nguyên âm lớn nhất.

Ta thấy số -1 là số nguyên âm lớn nhất, theo đề bài có:

$$x + 5 = -1; x = -1 - 5 = -6.$$

Vậy khi $x = -6$ thì $x + 5$ sẽ là số nguyên âm lớn nhất.

b) Với câu b, khi có biểu thức $-45 \square (-37)$ thì phải điền vào ô vuông dấu "+" hay dấu "-" để biểu thức có giá trị lớn nhất.

Ta thấy, nếu điền dấu "+" vào $\square$ ta có $-45 \oplus (-37) = -82$, còn nếu điền dấu "-" vào $\square$ ta được $-45 \ominus (-37) = -45 + 37 = -8$. Rõ ràng $-82 < -8$.

Vậy muốn biểu thức $-45 \square (-37)$ có giá trị lớn nhất phải điền dấu "-" vào $\square$ để có $-45 \ominus (-37) = -8$.

Lưu ý. Trong tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên thì:

- Không xác định được số nguyên âm nhỏ nhất và số nguyên dương lớn nhất.

- Chỉ xác định được số nguyên âm lớn nhất và số nguyên dương nhỏ nhất.

Bài 11. Tính tổng:

a) $5 + (-10) + 15 + (-20) + 25 + (-30) + \dots + 95 + (-100)$

b) $3 + (-6) + 9 + (-12) + 15 + (-18) + \dots + 87 + (-90)$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu tính tổng của một dãy các số dương và số âm được cho theo một quy tắc viết số nhất định.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, theo giá trị tuyệt đối, là dãy các số tăng dần, theo quy tắc số sau bằng số trước cộng thêm 5. Cần vận dụng tính chất kết hợp của phép cộng để tìm tổng của các cặp số liên nhau vì chúng đều có tổng bằng -5 .

Với câu b, theo giá trị tuyệt đối, là dãy các số tăng dần, theo quy tắc số sau bằng số trước cộng thêm 3. Cần vận dụng tính chất kết hợp của phép cộng để tìm tổng của các cặp số liên nhau vì chúng đều có tổng bằng -3 .

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } & 5 + (-10) + 15 + (-20) + 25 + (-30) + \dots + 95 + (-100) \\ &= [5 + (-10)] + [15 + (-20)] + [25 + (-30)] + \dots + [95 + (-100)] \\ &= (-5) + (-5) + (-5) + \dots + (-5). \end{aligned}$$

Tất cả có 10 cặp số nên tổng trên bằng -50.

$$\begin{aligned} \text{b) } & 3 + (-6) + 9 + (-12) + 15 + (-18) + \dots + 87 + (-90) \\ &= [3 + (-6)] + [9 + (-12)] + [15 + (-18)] + \dots + [87 + (-90)] \\ &= (-3) + (-3) + (-3) + \dots + (-3). \end{aligned}$$

Tất cả có 15 cặp số nên tổng trên bằng -45.

● **Khai thác bài toán**

Bài toán thuộc dạng này có thể ra rất nhiều bài tập tương tự, vấn đề quan trọng ở đây là xác định được quy tắc viết các số hạng theo giá trị tuyệt đối như thế nào; thông thường cho số các số hạng là một số chẵn để có thể tạo ra một số chẵn các cặp số.

Chẳng hạn, với dãy các số hạng tăng dần theo giá trị tuyệt đối bằng 10 từ 10 đến 100, theo dạng bài toán 11 này có bài toán sau:

Tìm tổng: $10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90 + (-100)$. Có thể tính như sau:

$$\begin{aligned} & 10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90 + (-100) \\ &= [10 + (-20)] + [30 + (-40)] + \dots + [90 + (-100)] \\ &= (-10) + (-10) + \dots + (-10) \end{aligned}$$

Tất cả có 5 cặp số nên tổng trên bằng -50.

Cũng có thể cho số các số hạng là một số lẻ, chẳng hạn:

Tìm tổng: $10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90$.

Có thể tính như sau:

$$\begin{aligned} & 10 + (-20) + 30 + (-40) + \dots + 90 \\ &= [10 + (-20)] + [30 + (-40)] + \dots + 90 \\ &= (-10) + (-10) + \dots + 90 \end{aligned}$$

Tất cả có 4 cặp số, nên tổng trên sẽ là:

$$(-10) + (-10) + (-10) + (-10) + 90 = 50.$$

Bài 12. Tìm x biết:

a) $8 - (12 - x) = 13;$

b) $-72 - (x - 25) = 0;$

c) $-32 + (-9 + x) = 8;$

d) $72 + (15 - x) = 18.$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của x trong các đẳng thức đã cho.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Có thể vận dụng quy tắc "dấu ngoặc" để giải bài toán này với chú ý đặc biệt là: các số của biểu thức trong dấu ngoặc mà trước nó có dấu trừ, khi bỏ ngoặc phải đổi dấu của các số ấy.

● **Cách giải**

a) $8 - (12 - x) = 13;$

b) $-72 - (x - 25) = 0$

$$8 - 12 + x = 13$$

$$-72 - x + 25 = 0$$

$$-4 + x = 13$$

$$-47 - x = 0$$

$$x = 13 - (-4) = 17.$$

$$x = -47.$$

c) $-32 + (-9 + x) = 8;$

d) $72 + (15 - x) = 18$

$$-32 - 9 + x = 8$$

$$72 + 15 - x = 18$$

$$-41 + x = 8$$

$$87 - x = 18$$

$$x = 8 - (-41) = 49.$$

$$x = 87 - 18 = 69.$$

● **Khai thác bài toán**

Ta đã biết:

- Với phép trừ: $SBT - ST = H$, suy ra $SBT = H + ST$;
 $ST = SBT - H$.

- Với phép cộng: $SH_1 + SH_2 = T$, suy ra $SH_1 = T - SH_2$;
 $SH_2 = T - SH_1$.

Có thể vận dụng hiểu biết trên để làm bài toán tìm x.

$$\text{a)} \quad 8 - (12 - x) = 13$$

$$12 - x = 8 - 13 = -5$$

$$x = 12 - (-5) = 17$$

$$\text{c)} \quad -32 + (-9 + x) = 8$$

$$-9 + x = 8 - (-32) = 40$$

$$x = 40 - (-9) = 49$$

$$\text{b)} \quad -72 - (x - 25) = 0$$

$$x - 25 = -72$$

$$x = -72 + 25 = -47$$

$$\text{d)} \quad 72 + (15 - x) = 18$$

$$15 - x = 18 - 72 = -54$$

$$x = 15 - (-54) = 69.$$

Bài 13

Thay đổi vị trí số hạng và đặt dấu ngoặc thích hợp để tính các tổng đại số sau:

$$\text{a)} \quad -8537 + 523 + 8520 - 661; \quad \text{b)} \quad 1445 - 387 - 1430 + 372;$$

$$\text{c)} \quad -2607 + 324 + 2507 - 424; \quad \text{d)} \quad 5609 - 915 - 4508 + 715.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho tổng đại số, yêu cầu thay đổi vị trí các số hạng và đặt dấu ngoặc một cách thích hợp rồi thực hiện phép tính.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Các tổng đại số đã cho đều gồm 4 số hạng, cần dùng dấu ngoặc để tổng còn hai số hạng. Thực hiện phép tính trong từng dấu ngoặc, cuối cùng tìm tổng của hai số cùng dấu hoặc trái dấu.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -8537 + 523 + 8520 - 661 = (-8537 + 8520) + (523 - 661) \\ & = -17 + (-138) = -155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 1445 - 387 - 1430 + 372 = (1445 - 1430) + (372 - 387) \\ & = 15 + (-15) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & -2607 + 324 + 2507 - 424 = (-2607 + 2507) + (324 - 424) \\ & = (-100) + (-100) = -200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 5609 - 915 - 4508 + 715 = (5609 - 4508) + (715 - 915) \\ & = 1101 + (-200) = 901. \end{aligned}$$

● **Khai thác bài toán**

Với một tổng đại số đã cho, nếu đề bài không có yêu cầu nào khác ngoài việc tính toán, ta có thể chọn cách làm nhanh, hợp lí, tùy thuộc vào đề bài cụ thể. Chẳng hạn:

Tính tổng đại số: $175 - 75 + 100 - 125$.

Ta có thể làm một trong ba cách sau:

- Cách 1

$$\begin{aligned} & 175 - 75 + 100 - 125 \\ & = 100 + 100 - 125 = 200 - 125 = 75 \end{aligned}$$

- Cách 2

$$\begin{aligned} & 175 - 75 + 100 - 125 \\ & = (175 + 100) - (75 + 125) = 275 - 200 = 75. \end{aligned}$$

- Cách 3

$$\begin{aligned} & 175 - 75 + 100 - 125 \\ & = (175 - 125) + (100 - 75) = 50 + 25 = 75. \end{aligned}$$

Nhận thấy cách làm thứ hai hay thứ ba nhanh hơn cách thứ nhất.

Tất nhiên là còn cách làm khác nữa, bạn đọc hãy tự làm.

Bài 14. Tính nhanh:

a) $-125 \cdot 150 \cdot (-8) \cdot (-6)$;

b) $51 - 52 + 53 - 54 + 55 - 56 + \dots + 97 - 98 + 99$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a là tìm tích của 4 thừa số, trong đó có 3 thừa số âm. Câu b là tìm tổng đại số của các số có dấu "+", dấu "-" đan xen nhau bắt đầu từ 51 đến 99.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, cần vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân để tính nhanh tích phải tìm.

Với câu b, nhận thấy $51 - 52 = 53 - 54 = \dots = 97 - 98 = -1$, như vậy là hiệu của 2 số liền nhau (bắt đầu từ 51) luôn bằng -1 . Cần tính số các cặp số để tính tổng các số có dấu "+", dấu "-" đan xen nhau từ 51 đến 98. Ta thấy số các cặp số là $\frac{(98-51)+1}{2} = 24$.

Từ đó có thể tính nhanh được kết quả của tổng đại số đã cho.

● Cách giải

a) $-125 \cdot 150 \cdot (-8) \cdot (-6)$

$$= [(-125)(-8)] \cdot [150 \cdot (-6)]$$

$$= 1000 \cdot (-900) = -900\,000$$

b) $A = \underbrace{51 - 52} + \underbrace{53 - 54} + \underbrace{55 - 56} + \dots + \underbrace{97 - 98} + 99$

$$= (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + 99$$

Dãy tính từ 51 đến 98 có $\frac{(98-51)+1}{2} = 24$ cặp số, nên có

$$A = (-1) \cdot 24 + 99 = -24 + 99 = 75.$$

● Khai thác bài toán

- Ở câu a bài toán trên, số thừa số âm là 3, đây là một số lẻ, nên tích mang dấu trừ. Từ đó, ta thấy rằng, khi làm một dãy tính nhân, ta cứ nhân các giá trị tuyệt đối với nhau, rồi đặt ở tích dấu cộng nếu số thừa số âm là một số chẵn, còn đặt ở tích dấu trừ nếu số thừa số âm là một số lẻ.

Chẳng hạn:

$$(-4) \cdot (-5) \cdot 6 \cdot (-1) = -120$$

$$(-4) \cdot (-5) \cdot 6 \cdot 1 = 120.$$

- Nếu phải tính tổng đại số

$$A = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 97 - 98 + 99 \text{ thì làm thế nào?}$$

Ta nhận thấy cách làm vẫn như trên, chỉ có khác nhau về số các cặp số của A. Số các cặp số ở đây là $\frac{(98-1)+1}{2} = 49$. Vậy

$$A = (-1) \cdot 49 + 99 = -49 + 99 = 50.$$

Bài 15. Tìm x biết:

a) $x(x - 5) = 0$; b) $(x + 7)(x - 3) = 0$;

c) $(x - 1)(x + 2)(x - 7) = 0$.

• **Tìm hiểu đề bài**

Các đẳng thức mà đề bài đã cho, đều có vế phải bằng 0 còn vế trái là một tích của hai hay ba thừa số.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Ta đã biết: $5.0 = 0.6 = 0.8.9 = 0$, như vậy nếu tích của hai hay ba thừa số mà bằng không thì một trong các thừa số của tích phải bằng không. Do vậy, để tìm x , cần lần lượt xét các thừa số bằng 0 của tích đã cho.

• **Cách giải**

$$\text{a) } x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Chú ý. Kí hiệu $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ để chỉ A hoặc B.

$$\text{b) } (x + 7)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{c) } (x - 1)(x + 2)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 7. \end{cases}$$

• **Khai thác bài toán**

Nhận thấy, với một đẳng thức có dạng như ở đề bài, nếu vế trái có bao nhiêu thừa số thì có bấy nhiêu giá trị tìm được của x . Chú ý rằng, với một trong các giá trị tìm được của x cũng đủ để cho vế trái bằng không, không phải là tất cả các giá trị tìm được của x mới làm cho vế trái bằng 0.

Thật vậy, ở câu b, ta có $x = -7$ hoặc $x = 3$. Rõ ràng:

- Nếu $x = -7$, ta có $(-7 + 7)(-7 - 3) = 0 \cdot (-7 - 3) = 0$

- Nếu $x = 3$, ta có $(3 + 7)(3 - 3) = (3 + 7) \cdot 0 = 0$.

Lên lớp trên khi học về phương trình, đề bài 15 có thể gọi là: giải các phương trình. Người ta gọi các phương trình có dạng này là *phương trình tích*, mà cách giải cũng giống như đã giải ở trên.

Bài 16. Tìm số nguyên x biết:

a) $x(x - 5) < 0$;

b) $x(x - 5) > 0$;

c) $(x + 1)(x + 7) < 0$;

d) $(x + 2)(x + 7) > 0$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là các bài toán về bất đẳng thức mà vế trái là tích của hai thừa số, còn vế phải cho biết hai thừa số này sẽ là số âm (< 0) hay là số dương (> 0). Đề bài đòi hỏi phải tìm các giá trị của x để vế trái luôn là số âm hay luôn là số dương.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a và câu c, vế trái là số âm nên hai thừa số ở vế trái phải khác dấu, cần phải xác định quan hệ lớn nhỏ giữa hai thừa số đó. Ta thấy $x > x - 5$ và $x + 7 > x + 1$ nên có thể xét $x > 0$ và $x + 7 > 0$, đó là cơ sở đầu tiên để tiếp tục tìm số nguyên x .

Với câu b, câu d, có vế trái là số dương nên hai thừa số ở vế trái phải cùng dương hay cùng âm, từ đó suy ra số nguyên x .

● **Cách giải**

$$\text{a) } x(x - 5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

Do $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{1; 2; 3; 4\}$ hay $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$.

$$\text{b) } x(x - 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$$

$$x(x - 5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

Vậy với các số nguyên $x < 0$ hoặc $x > 5$ thì $x(x - 5) > 0$.

$$c) (x + 1)(x + 7) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -7 \end{cases}$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2\}$ hay $x = -6; x = -5; x = -4; x = -3; x = -2$.

$$d) (x + 2)(x + 7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$$

$$(x + 2)(x + 7) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < -7 \end{cases} \Leftrightarrow x < -7$$

Vậy với các số nguyên $x > -2$ hoặc $x < -7$ thì $(x + 2)(x + 7) > 0$.

• Khai thác bài toán

Nói chung, với một bất đẳng thức mà vế trái luôn âm:

- Nếu xác định được quan hệ lớn nhỏ giữa hai thừa số thì chỉ cần xét một trường hợp. Chẳng hạn, tìm số nguyên x sao cho:

$$x(x + 5) < 0.$$

Biết rằng, tích hai thừa số là âm nên hai thừa số đó phải khác dấu. Trong hai thừa số x và $x + 5$ thì $x < x + 5$, do đó chỉ có thể

$$\begin{cases} x < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 0$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}$

- Nếu không xác định được quan hệ lớn nhỏ giữa hai thừa số, ta phải xét hai trường hợp. Chẳng hạn, tìm số nguyên x sao cho:

$$(x + 3)(7 - x) < 0.$$

Ta phải có $x + 3$ và $7 - x$ là hai số khác dấu. Xét hai trường hợp:

$$a) \begin{cases} x + 3 < 0 \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$$

$$b) \begin{cases} x + 3 > 0 \\ 7 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 7$$

Vậy với các số nguyên $x < -3$ hoặc $x > 7$ thì $(x + 3)(7 - x) < 0$.

Bài 17

- a) Tìm tập hợp các ước của 16 mà lớn hơn -4.
b) Tìm số nguyên n biết rằng $n - 3$ là ước của 5.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đòi hỏi tìm các ước của 16, các ước này phải lớn hơn -4.

Câu b đòi hỏi tìm các số nguyên n mà $n - 3$ lại là ước của 5.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần xét xem 16 chia hết cho những số nguyên nào, sau đó loại bỏ các số nguyên âm nhỏ hơn và bằng -4.

Với câu b, trước hết hãy xét xem số 5 chia hết cho những số nguyên nào, sau đó lập mối quan hệ giữa mỗi số nguyên đó với $n - 3$, từ đó suy ra các số nguyên n cần tìm.

• Cách giải

a) 16 chia hết cho $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16$. Vậy tập hợp A các ước của 16 mà lớn hơn -4 là:

$$A = \{-1; -2; 1; 2; 4; 8; 16\}.$$

b) Các ước của 5 là ± 1 và ± 5 , mà mỗi ước này lại bằng $n - 3$, do đó có:

$$n - 3 = -1 \Rightarrow n = -1 + 3 = 2$$

$$n - 3 = 1 \Rightarrow n = 1 + 3 = 4$$

$$n - 3 = -5 \Rightarrow n = -5 + 3 = -2$$

$$n - 3 = 5 \Rightarrow n = 5 + 3 = 8.$$

Vậy các số nguyên $n \in B$ mà $n - 3$ là ước của 5 là

$$B = \{\pm 2; 4; 8\}.$$

• Khai thác bài toán

- Câu a của đề bài đã cho là tìm tập hợp các ước của một hợp

số (số 16), có thể tìm tập hợp các ước của một số nguyên tố được không?

Câu trả lời là: được. Chẳng hạn: tìm tập hợp các ước của 17 mà lớn hơn -17.

Ta thấy 17 là số nguyên tố, 17 có các ước là ± 1 và ± 17 . Gọi M là tập hợp các ước của 17 mà lớn hơn -17, ta có:

$$M = \{\pm 1; 17\}$$

- Câu b của đề bài lại là tìm các ước của số nguyên tố, nếu thay 5 bằng 6 thì bài toán sẽ có lời giải dài hơn:

Biết các ước của 6 là $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Do đó có:

$$n - 3 = -1 \Rightarrow n = -1 + 3 = 2$$

$$n - 3 = 1 \Rightarrow n = 1 + 3 = 4$$

$$n - 3 = -2 \Rightarrow n = -2 + 3 = 1$$

$$n - 3 = 2 \Rightarrow n = 2 + 3 = 5$$

$$n - 3 = -3 \Rightarrow n = -3 + 3 = 0$$

$$n - 3 = 3 \Rightarrow n = 3 + 3 = 6$$

$$n - 3 = -6 \Rightarrow n = -6 + 3 = -3$$

$$n - 3 = 6 \Rightarrow n = 6 + 3 = 9.$$

Vậy các số nguyên n mà $n - 3$ là ước của 6 là

$$\{-3; 0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}.$$

Bài 18

Tìm các số nguyên a và b sao cho:

a) $(a + 3)(b + 1) = 3;$

b) $(a - 1)(b + 1) = 2.$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đòi hỏi tìm số nguyên a và b để cho

$$(a + 3)(b + 1) = 3.$$

Câu b đòi hỏi tìm số nguyên a và b để cho

$$(a - 1)(b + 1) = 2.$$

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ta thấy tích của hai tổng $a + 3$ và $b + 1$ bằng 3, như vậy là $a + 3$ và $b + 1$ đều là ước của 3, mà các ước của 3 là $\pm 1; \pm 3$.

Mặt khác, biết $3 = 1 \cdot 3$ hay $3 = (-1) \cdot (-3)$, do đó cần xem xét các trường hợp sau:

- Nếu $a + 3 = 1$ thì $b + 1 = 3$
- Nếu $a + 3 = 3$ thì $b + 1 = 1$
- Nếu $a + 3 = -1$ thì $b + 1 = -3$
- Nếu $a + 3 = -3$ thì $b + 1 = -1$.

Từ đó sẽ suy ra được các giá trị của số nguyên a, b .

Với câu b, làm tương tự như câu a.

● **Cách giải**

a) Vì $a + 3$ và $b + 1$ là ước của 3, mà 3 có các ước là $\pm 1; \pm 3$, do đó:

- Nếu $a + 3 = 1$ thì $b + 1 = 3$, suy ra $a = -2; b = 2$
- Nếu $a + 3 = 3$ thì $b + 1 = 1$, suy ra $a = 0; b = 0$
- Nếu $a + 3 = -1$ thì $b + 1 = -3$, suy ra $a = -4; b = -4$
- Nếu $a + 3 = -3$ thì $b + 1 = -1$, suy ra $a = -6; b = -2$.

b) Vì $a - 1$ và $b + 1$ là ước của 2, mà 2 có các ước là $\pm 1; \pm 2$, do đó:

- Nếu $a - 1 = 1$ thì $b + 1 = 2$, suy ra $a = 2; b = 1$
- Nếu $a - 1 = 2$ thì $b + 1 = 1$, suy ra $a = 3; b = 0$
- Nếu $a - 1 = -1$ thì $b + 1 = -2$, suy ra $a = 0; b = -3$
- Nếu $a - 1 = -2$ thì $b + 1 = -1$, suy ra $a = -1; b = -2$.

● Khai thác bài toán

- Có thể trình bày cách giải bài toán trên bằng cách lập bảng.

a) Vì $a + 3$ và $b + 1$ là các số nguyên có tích bằng 3 nên chúng là ước của 3, mà 3 có các ước là $\pm 1; \pm 3$. Có thể lập bảng sau:

$a + 3$	1	3	-1	-3
$b + 1$	3	1	-3	-1

 $\Rightarrow$

a	-2	0	-4	-6
b	2	0	-4	-2

b) Vì $a - 1$ và $b + 1$ là các số nguyên có tích bằng 2 nên chúng là ước của 2, mà 2 có các ước là $\pm 1; \pm 2$. Có thể lập bảng sau:

$a - 1$	1	2	-1	-2
$b + 1$	2	1	-2	-1

 $\Rightarrow$

a	2	3	0	-1
b	1	0	-3	-2

- Nếu có $(a + 3)(b + 1) = 6$ thì có thể tìm được các số nguyên a và b không?

Hoàn toàn được, với chú ý:

$$6 = 1.6 = -1.(-6) = 2.3 = -2.(-3)$$

Ta có thể lập bảng để tính giá trị của a, b như sau:

$a + 3$	1	6	-1	-6	2	3	-2	-3
$b + 1$	6	1	-6	-1	3	2	-3	-2

 $\Rightarrow$

a	-2	3	-4	-9	-1	0	-5	-6
b	5	0	-7	-2	2	1	-4	-3

Bài 19

a) Tìm $Ư(-30)$, $Ư(60)$ và tìm $Ư(-30) \cap Ư(60)$.

b) Tìm $Ư(-24)$, $Ư(-16)$ và tìm $Ư(-24) \cap Ư(-16)$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm tập hợp các ước của từng số đã cho sau đó là tìm tập hợp giao của hai tập hợp các ước đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết tìm các ước của -30 bằng cách xét xem -30 chia hết cho những số nào. Đối với số 60 cũng làm tương tự. Sau đó hãy tìm các số có mặt trong cả hai tập hợp ước trên, đó là tập hợp giao của hai tập hợp các ước của -30 và 60.

Với câu b, làm tương tự như câu a.

● **Cách giải**

a) $Ư(-30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$

$$Ư(60) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 12; \pm 15; \pm 20; \pm 30; \pm 60\}.$$

$$Ư(-30) \cap Ư(60) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$$

b) $Ư(-24) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24\}$

$$Ư(-16) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}.$$

$$Ư(-24) \cap Ư(-16) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}.$$

● **Khai thác bài toán**

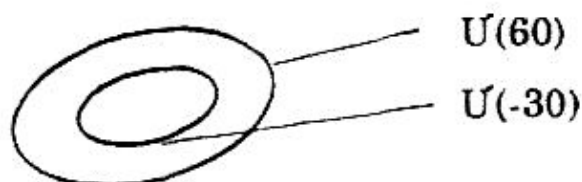
a) Có nhận xét gì về $Ư(-30) \cap Ư(60)$?

Ta thấy -30 là ước của 60, nên

$$Ư(-30) \cap Ư(60) = Ư(-30)$$

b) Có thể dùng hình vẽ để minh họa $Ư(-30) \cap Ư(60)$ được không?

Vì -30 là ước của 60 và $Ư(-30) \cap Ư(60) = Ư(-30)$ nên $Ư(-30) \subseteq Ư(60)$, ta có hình vẽ sau:



c) Tìm $Ư(-24) \cap Ư(-16) \cap Ư(-30)$?

Ta có:

$$Ư(-24) \cap Ư(-16) \cap Ư(-30) = \{\pm 1; \pm 2\}.$$

Bài 20

Viết tập hợp các phân số bằng:

a) $-\frac{15}{20}$; b) $\frac{6}{9}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu viết tập hợp các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ (câu

a), bằng phân số $\frac{6}{9}$ (câu b).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết cần rút gọn phân số đã cho để có phân số tối giản. Biết rằng, theo tính chất cơ bản của phân số: giá trị của một phân số không thay đổi khi nhân tử và mẫu của phân số với cùng một số khác không. Chẳng hạn $\frac{1}{2} = \frac{1.2}{2.2} = \frac{1.3}{2.3} = \dots$ Từ đó suy ra kết quả của bài toán.

Với câu b, làm tương tự câu a.

• Cách giải

a) Trước hết, cần rút gọn phân số đã cho:

$$-\frac{15}{20} = -\frac{15:5}{20:5} = -\frac{3}{4}.$$

Với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \neq 0$, tập hợp A các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ là:

$$A = \left\{ -\frac{3m}{4m} \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

b) Trước hết, cần rút gọn phân số đã cho:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tập hợp B các phân số bằng phân số $\frac{6}{9}$ là:

$$B = \left\{ \frac{2n}{3n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

● Khai thác bài toán

Vấn đề đặt ra là tại sao cần rút gọn phân số trước khi tìm tập hợp các phân số bằng phân số đã cho?

Giả sử như không rút gọn phân số $-\frac{15}{20}$ thì tập hợp C các phân số bằng nó sẽ là

$$C = \left\{ -\frac{15 \cdot m}{20 \cdot m} \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Làm như trên là bỏ sót nhiều phân số, chẳng hạn $-\frac{3}{4}$, $-\frac{6}{8}$, $-\frac{12}{16}$, ...

Từ đó, ta thấy rằng để viết tập hợp các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ chẳng hạn (hay là viết dạng chung của các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$) cần thực hiện theo hai bước sau:

- *Bước 1:* Rút gọn phân số $-\frac{15}{20}$ đến khi tử và mẫu không còn ước chung khác ± 1 , được phân số tối giản $-\frac{3}{4}$.

- *Bước 2:* Dựa vào tính chất cơ bản của phân số để viết tập hợp các phân số bằng phân số $-\frac{15}{20}$ là $\left\{ -\frac{3 \cdot m}{4 \cdot m} \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$ (hay viết được dạng chung của các phân số bằng $-\frac{15}{20}$ là $-\frac{3 \cdot m}{4 \cdot m}$ với m là

số nguyên khác 0).

Bài 20

a) Viết tập hợp các phân số bằng $-\frac{16}{18}$.

b) Viết dạng chung của các phân số bằng $\frac{-107107}{214214}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a yêu cầu viết tập hợp các phân số bằng $-\frac{16}{18}$, câu b yêu cầu viết dạng chung của các phân số bằng $\frac{-107107}{214214}$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Làm theo các bước 1 và 2 như phần khai thác bài toán của bài 19.

• Cách giải

a) Trước hết, cần rút gọn phân số

$$-\frac{16}{18} = -\frac{8}{9}.$$

Theo tính chất cơ bản của phân số thì có thể viết tập hợp M các phân số bằng phân số $-\frac{16}{18}$ là:

$$M = \left\{ -\frac{8m}{9m} \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

b) Trước hết cần rút gọn phân số:

$$\frac{-107107}{214214} = \frac{-1}{2}.$$

Theo tính chất cơ bản của phân số thì có thể viết dạng chung của các phân số bằng $\frac{-107107}{214214}$ là phân số $\frac{-1m}{2m}$ với m là số nguyên khác 0.

● Khai thác bài toán

Khi cho phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ thì tập hợp các phân số bằng $\frac{a}{b}$ sẽ viết như thế nào?

Theo tính chất cơ bản của phân số, thì tập hợp P các phân số bằng $\frac{a}{b}$ sẽ viết được như sau:

$$P = \left\{ \frac{am}{bm} \mid a, b, m \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1, b \neq 0, m \neq 0 \right\}.$$

Bài 21

a) Các phân số sau có bằng nhau không:

$$\frac{-2}{6} \text{ và } \frac{3}{-9}; \quad \frac{-3}{2} \text{ và } \frac{4}{-5}?$$

b) Rút gọn các phân số:

$$\frac{-14}{49}, \frac{63}{-90}, \frac{-180}{288}, \frac{55}{-165}.$$

● Tìm hiểu đề bài

Câu a của đề bài là xem xét các cặp hai phân số đã cho có bằng nhau không?

Câu b là rút gọn các phân số đã cho để được các phân số tối giản.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần vận dụng điều đã biết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ để có câu trả lời.

Với câu b, vận dụng dấu hiệu chia hết để rút gọn dần các phân số.

● Cách giải

$$\text{a) Ta thấy } (-2) \cdot (-9) = 6 \cdot 3 = 18 \text{ nên } \frac{-2}{6} = \frac{3}{-9}$$

Ta thấy $(-3) \cdot (-5) = 15 \neq 2 \cdot 4 = 8$ nên $\frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-5}$.

$$\text{b) } \frac{-14}{49} = \frac{-14:7}{49:7} = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{63}{-90} = \frac{63:9}{-90:9} = \frac{7}{-10}$$

$$\frac{-180}{288} = \frac{-180:2}{288:2} = \frac{-90}{144} = \frac{-90:2}{144:2} = \frac{-45}{72} = \frac{-45:9}{72:9} = \frac{-5}{8}$$

$$\frac{55}{-165} = \frac{55:5}{-165:5} = \frac{11}{-33} = \frac{11:11}{-33:11} = \frac{1}{-3}$$

● Khai thác bài toán

- Muốn xét xem hai phân số có bằng nhau hay không ta thường vận dụng điều đã biết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; cũng có thể sử dụng cách quy đồng mẫu.

$$\text{Chẳng hạn: } \frac{-3}{2} = \frac{-3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{-15}{10}; \quad \frac{4}{-5} = \frac{4 \cdot 2}{-5 \cdot 2} = \frac{8}{-10}$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{-15}{10} \neq \frac{8}{-10} \text{ nên } \frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-5}.$$

- Rút gọn phân số có thể vận dụng liên tiếp các dấu hiệu chia hết cho 2; cho 3; cho 5; ..., đối với tử và mẫu, cũng có thể tìm UCLN của tử và mẫu rồi lấy tử và mẫu chia cho UCLN đó. Chẳng hạn:

$$\frac{-180}{288} = \frac{-180:36}{288:36} = \frac{-5}{8} \text{ vì UCLN}(180, 288) = 36.$$

Bài 22

Cho ba phân số $\frac{1}{-5}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{3}{-4}$.

a) Viết ba phân số lần lượt bằng ba phân số đã cho và có mẫu là số dương.

b) Viết ba phân số lần lượt bằng ba phân số đã cho và có mẫu là số dương bằng nhau.

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a của đề bài yêu cầu viết ba phân số có mẫu là số dương, lần lượt bằng ba phân số $\frac{1}{-5}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{3}{-4}$.

Câu b yêu cầu viết ba phân số có mẫu là số dương bằng nhau và lần lượt bằng ba phân số $\frac{1}{-5}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{3}{-4}$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, để viết một phân số bằng phân số đã cho, có thể nhân tử và mẫu của phân số đó với cùng một số khác 0; nhưng để được một phân số bằng phân số đã cho và có mẫu là số dương thì cần nhân tử và mẫu của phân số đó với cùng một số âm.

Với câu b, trước hết viết các phân số đã cho có mẫu là số dương bằng cách nhân tử và mẫu của mỗi phân số đó với -1, sau đó quy đồng mẫu các phân số ta sẽ được các phân số có mẫu là số dương bằng nhau.

● **Cách giải**

a) Theo tính chất cơ bản của phân số ta có:

$$\frac{1}{-5} = \frac{1 \cdot (-2)}{(-5) \cdot (-2)} = \frac{-2}{10},$$

$$\frac{7}{-3} = \frac{7 \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3)} = \frac{-21}{9},$$

$$\frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-5)}{(-4) \cdot (-5)} = \frac{-15}{20}.$$

b) Theo tính chất cơ bản của phân số ta có:

$$\frac{1}{-5} = \frac{1 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-1}{5}; \quad \frac{7}{-3} = \frac{7 \cdot (-1)}{(-3) \cdot (-1)} = \frac{-7}{3};$$

$$\frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-4) \cdot (-1)} = \frac{-3}{4}.$$

Mẫu chung của 3 phân số trên là BCNN (5; 3; 4) = 60. Do đó:

$$\frac{-1}{5} = \frac{-1 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{-12}{60}; \quad \frac{-7}{3} = \frac{(-7) \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{-140}{60}$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{(-3) \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{-45}{60}.$$

• Khai thác bài toán

Vì sao trong hướng dẫn tìm lời giải bài toán này với cùng một yêu cầu là viết các phân số đã cho có mẫu là số dương, mà ở câu a thì nói: nhân tử và mẫu của phân số đó với cùng một số âm, còn ở câu b thì nói: nhân tử và mẫu của phân số đó với -1?

Sở dĩ như vậy là vì:

- Với câu a, sau khi có mẫu là số dương, công việc đã kết thúc
- Với câu b, sau khi có mẫu là số dương, còn phải tìm mẫu chung của ba phân số đã cho, mà việc tìm mẫu chung của các mẫu thì nếu là của các số nhỏ sẽ thuận lợi hơn so với các số lớn.

Thật vậy, tìm mẫu chung của 3 phân số $\frac{-1}{5}$; $\frac{-7}{3}$ và $\frac{-3}{4}$ sẽ đơn giản hơn, thuận lợi hơn khi tìm mẫu chung của 3 phân số $\frac{-3}{15}$; $\frac{-49}{21}$ và $\frac{-18}{24}$ (vì $\frac{1}{-5} = \frac{1 \cdot (-3)}{(-5) \cdot (-3)} = \frac{-3}{15}$; $\frac{7}{-3} = \frac{7 \cdot (-7)}{(-3) \cdot (-7)} = \frac{-49}{21}$; $\frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-6)}{(-4) \cdot (-6)} = \frac{-18}{24}$).

Nêu nhận xét này để lưu ý rằng, khi làm một bài toán ngoài việc tìm ra hướng giải, tìm quy tắc giải, còn rất cần chú ý đến lời giải ngắn gọn.

Bài 23

- a) Xét xem trong các phân số sau, các phân số nào biểu diễn

cùng một số hữu tỉ:

$$\frac{-39}{52}, \frac{-14}{21}, \frac{-33}{44}, \frac{-32}{48}, \frac{-38}{57}$$

b) Viết tập hợp các số nguyên z sao cho số hữu tỉ sau có giá trị là một số nguyên:

$$\text{a) } \frac{8}{z}; \quad \text{b) } \frac{z+6}{2}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài câu a cho các phân số, cần xét xem những phân số nào biểu diễn cùng một số hữu tỉ.

Câu b là tìm các số nguyên z để số hữu tỉ đã cho có giá trị là một số nguyên.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết hãy rút gọn các phân số đã cho về dạng tối giản, rồi xét xem những phân số nào bằng nhau thì các phân số đó cùng biểu diễn một số hữu tỉ.

Với câu b ta thấy: $\frac{8}{z}$ sẽ là số nguyên khi z là ước của 8, còn $\frac{z+6}{2}$ sẽ là số nguyên khi $z + 6$ chia hết cho 2; mà 6 luôn chia hết cho 2, nên $z + 6$ chia hết cho 2 khi $z : 2$.

● **Cách giải**

$$\text{a) Ta có: } \frac{-39}{52} = \frac{(-39):13}{52:13} = \frac{-3}{4}; \quad \frac{-14}{21} = \frac{(-14):7}{21:7} = \frac{-2}{3};$$

$$\frac{-33}{44} = \frac{(-33):11}{44:11} = \frac{-3}{4}; \quad \frac{-32}{48} = \frac{(-32):16}{48:16} = \frac{-2}{3};$$

$$\frac{-38}{57} = \frac{(-38):19}{57:19} = \frac{-2}{3}$$

Nhận thấy:

1) $\frac{-39}{52} = \frac{-33}{44} (= \frac{-3}{4})$, nên hai phân số $\frac{-39}{52}$ và $\frac{-33}{44}$ cùng biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-3}{4}$.

2) $\frac{-14}{21} = \frac{-32}{48} = \frac{-38}{57} (= \frac{-2}{3})$, nên ba phân số $\frac{-14}{21}$, $\frac{-32}{48}$ và $\frac{-38}{57}$ cùng biểu diễn số hữu tỉ $\frac{-2}{3}$.

b) Phân số $\frac{8}{z}$ là số nguyên khi z là ước của 8; 8 có các ước là ± 1 ; ± 2 ; ± 4 ; ± 8 .

Vậy tập hợp A các số nguyên z để phân số $\frac{8}{z}$ là số nguyên là

$$A = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Phân số $\frac{z+6}{2}$ là số nguyên khi $z + 6$ chia hết cho 2, mà 6 luôn chia hết cho 2, vậy $z + 6$ sẽ chia hết cho 2 khi có z chia hết cho 2, tức là z thuộc tập hợp B:

$$B = \{z = 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Khai thác bài toán

- Theo câu a, ta thấy có hai phân số hoặc có ba phân số cùng biểu diễn một số hữu tỉ. Vấn đề đặt ra là có phải mỗi điểm trên trục số hữu tỉ chỉ có thể viết là 2 hoặc 3 phân số không?

Không phải, mỗi điểm trên trục số có thể được viết bởi vô số các phân số có cùng một giá trị.

Chẳng hạn, điểm biểu diễn số hữu tỉ $\frac{3}{5}$ trên trục số có thể viết bằng vô số các phân số như sau:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \dots = \frac{600}{1000} = \dots$$

- Ở câu b, phân số $\frac{z+6}{2}$ là số nguyên với $z = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ tức là z

là một số nguyên chẵn, nên tập hợp B kể trên có thể viết cách khác như sau:

$$B = \{0; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \dots\}$$

Thật vậy khi $z = 0$ thì $\frac{z+6}{2} = 3$

Khi $z = -2$ thì $\frac{z+6}{2} = 2$

Khi $z = 2$ thì $\frac{z+6}{2} = 4, \dots$

Bài 24. Thực hiện phép tính sau một cách hợp lí:

a) $\frac{1}{42} + \frac{1}{12} - (-\frac{5}{9}) - (+\frac{7}{45}) + \frac{2}{3} - (-\frac{1}{4}) + \frac{3}{5};$

b) $\frac{1}{2} - (-\frac{16}{17}) + \frac{4}{5} - (-\frac{4}{9}) - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}.$

● **Tim hiểu đề bài**

Câu a, câu b của đề bài là một dãy phép cộng và trừ các số hữu tỉ.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết viết dãy tính đã cho thành một tổng đại số, sau đó vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp để có thể tiến hành việc quy đồng mẫu một cách thuận tiện, giúp thực hiện phép tính được nhanh chóng.

Với câu b, làm tương tự như câu a.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1}{42} + \frac{1}{12} - (-\frac{5}{9}) - (+\frac{7}{45}) + \frac{2}{3} - (-\frac{1}{4}) + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{1}{12} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \\ &= (\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{5}{9} + \frac{3}{5} - \frac{7}{45}) + \frac{1}{42} \end{aligned}$$

$$= \frac{1+8+3}{12} + \frac{25+27-7}{45} + \frac{1}{42}$$

$$= \frac{12}{12} + \frac{45}{45} + \frac{1}{42} = 1 + 1 + \frac{1}{42} = 2\frac{1}{42}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} - \left(-\frac{16}{17}\right) + \frac{4}{5} - \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{4}{9} - \frac{11}{45} + \frac{19}{34} + \frac{17}{105}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{19}{34}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{9} - \frac{11}{45}\right) + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{17+32+19}{34} + \frac{36+20-11}{45} + \frac{17}{105}$$

$$= \frac{68}{34} + \frac{45}{45} + \frac{17}{105} = 2 + 1 + \frac{17}{105} = 3\frac{17}{105}$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể giải bài toán trên bằng cách khác để thấy rõ hơn cách giải trình bày ở trên là hợp lí.

Chẳng hạn với câu a, sau khi viết dãy tính đã cho về một tổng đại số, ta thấy 45 chia hết cho 9 và 5; 12 chia hết cho 3 và 4 nên chỉ cần tìm mẫu chung của các phân số có mẫu là 42; 45 và 12, tức là tìm BCNN(42; 45; 12).

Ta có $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $45 = 3^2 \cdot 5$; $12 = 2^2 \cdot 3$, nên $\text{BCNN}(42; 45; 12) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. Do đó có:

$$\frac{1}{42} + \frac{1}{12} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{30 + 105 + 700 - 196 + 840 + 315 + 756}{1260}$$

$$= \frac{2550}{1260} = \frac{255}{126} = 2\frac{3}{126} = 2\frac{1}{42}$$

Nếu chỉ quan tâm đến mẫu là 45 và 12 thì $BCNN(45; 12) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Do đó có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{42} + \frac{1}{12} + \frac{5}{9} - \frac{7}{45} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{15 + 100 - 28 + 120 + 45 + 108}{180} \\ &= \frac{1}{42} + \frac{360}{180} = \frac{1}{42} + 2 = 2\frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Rõ ràng qua các cách giải khác của bài này như trình bày ở trên, ta thấy cách giải như đã làm là hợp lý nhất. Do vậy, khi được giao làm một bài toán, cần có ý thức tìm cách giải hợp lý nhất. Cũng có thể cứ giải bài toán theo cách thông thường, từ đó sẽ tìm thấy được cách giải khác hợp lý hơn.

Bài 25. Tìm x biết:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{-4}{15} - x &= \frac{-7}{10}; & \text{b) } \frac{17}{20} + \left(\frac{4}{5} + x\right) &= \frac{5}{6}; \\ \text{c) } x + \frac{3}{4} &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right); & \text{d) } \left|x + \frac{1}{4}\right| &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a là tìm x khi x là số trừ. Câu b là tìm biểu thức chứa x . Câu c có dạng tìm x khi x là một trong hai số hạng của tổng. Câu d là tìm x nằm trong một biểu thức có dấu giá trị tuyệt đối.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a vận dụng cách tìm $ST = SBT - H$.

Với câu b, trước hết vận dụng cách tìm số hạng thứ hai bằng cách lấy tổng trừ đi số hạng thứ nhất, sau đó lại làm tiếp một lần nữa như trên.

Với câu c, trước hết thực hiện phép trừ ở bên phải dấu bằng, rồi áp dụng cách giải tương tự câu b.

Với câu d, cần xét hai trường hợp: $x + \frac{1}{4} > 0$ và $x + \frac{1}{4} < 0$.

• Cách giải

$$a) \frac{-4}{15} - x = \frac{-7}{10}$$

$$x = \frac{-4}{15} - \frac{-7}{10} = \frac{-8+21}{30} = \frac{13}{30}.$$

$$b) \frac{17}{20} + \left(\frac{4}{5} + x\right) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{4}{5} + x = \frac{5}{6} - \frac{17}{20} = \frac{50-51}{60} = \frac{-1}{60}$$

$$x = \frac{-1}{60} - \frac{4}{5} = \frac{-1-48}{60} = -\frac{49}{60}.$$

$$c) x + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$x + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}.$$

d) Xét hai trường hợp

* Khi $x + \frac{1}{4} > 0$, ta có:

$$x + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}; x = \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

* Khi $x + \frac{1}{4} < 0$, ta có:

$$x + \frac{1}{4} = -\frac{11}{12}; x = -\frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{-14}{12} = -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6}.$$

• Khai thác bài toán

Với loại toán tìm x này, sau khi tìm được giá trị của x cần thử lại, sau đó mới trả lời.

Chẳng hạn, thử lại với câu a bài toán này.

Thay $x = \frac{13}{30}$ vào bên trái dấu bằng của đề bài, ta có:

$$-\frac{4}{15} - x = \frac{-4}{15} - \frac{13}{30} = \frac{-8-13}{30} = \frac{-21}{30} = \frac{-7}{10}. \text{ Vế trái bằng vế}$$

phải, nên giá trị $x = \frac{13}{30}$ là đúng.

Bạn đọc hãy tự thử lại các câu b, c, d của bài toán này.

Bài 26. Tìm các số nguyên x, y biết rằng:

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm các số x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần xem lại bài số 18 để có gợi ý về cách giải bài này. Trước hết cho y phụ thuộc x bằng cách biến đổi như sau $\frac{1}{y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{4} = \frac{x-2}{8}$. Sau đó áp dụng điều đã biết là: nếu có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì có $ad = bc$, từ đó suy ra $y(x-2) = 8$. Như vậy y và $x-2$ là ước của 8. Biết các ước của 8 là $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$. Vận dụng từng trường hợp đối với mỗi ước của 8 sẽ suy ra x, y .

● **Cách giải**

$$\text{Từ } \frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \text{ suy ra } \frac{1}{y} = \frac{x}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\text{Quy đồng mẫu ở vế phải, có } \frac{1}{y} = \frac{x-2}{8}.$$

Biết rằng, nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì suy ra $ad = bc$. Áp dụng điều này vào bài toán đang giải có:

$$y(x - 2) = 8.$$

Dạng thức trên chứng tỏ rằng y và $x - 2$ là ước của 8. Mà 8 có các ước là $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$.

Bằng cách lập bảng để suy ra các số nguyên x, y cần tìm

y	1	-1	2	-2	4	-4	8	-8
x - 2	8	-8	4	-4	2	-2	1	-1
x	10	-6	6	-2	4	0	3	1

● Khai thác bài toán

Đề bài đã ra có x và y là tử và mẫu của hai số hữu tỉ $\frac{x}{8}$ và $\frac{1}{y}$ trong mối quan hệ của hiệu hai số hữu tỉ ấy.

Vấn đề được đặt ra là hai số hữu tỉ có liên quan đến các số nguyên x, y trong mối quan hệ của tổng hai số hữu tỉ, chẳng hạn như cho $\frac{1}{y} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}$, có thể tìm được các số nguyên x, y không?

Được, có thể làm như sau:

$$\frac{1}{y} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{x}{6} = \frac{3-x}{6}.$$

Từ $\frac{1}{y} = \frac{3-x}{6}$ suy ra $y(3-x) = 6$. Các ước của 6 là $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Lập bảng để tìm x, y :

y	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
3-x	6	-6	3	-3	2	-2	1	-1
x	-3	9	0	6	1	5	2	4

Bài 27. Tìm giá trị:

a) nhỏ nhất của biểu thức $A = \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1$;

b) lớn nhất của biểu thức $B = 5 - \left| \frac{3}{4} - x \right|$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a của đề bài đòi hỏi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A và khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

Câu b đòi hỏi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B và khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Trước hết hãy làm quen với khái niệm: giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một biểu thức.

Chẳng hạn, có:

1) $x \geq 2$, thì hiểu rằng x luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 2 và khi x bằng 2 thì đó là giá trị nhỏ nhất của x.

2) $x \leq 3$, thì hiểu rằng x luôn nhận mọi giá trị nhỏ hơn hoặc bằng 3 và khi x bằng 3 thì đó là giá trị lớn nhất của x.

Ở đề bài này cần lưu ý sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một biểu thức: $|a| \geq 0$. Cũng cần chú ý đến việc đặt dấu trừ trước một số dương, chẳng hạn, nếu có $a \geq 0$ thì $-a \leq 0$.

● **Cách giải**

a) Ta đã biết rằng, với mọi giá trị của x thì $\left| x - \frac{2}{3} \right| \geq 0^{(*)}$. Thêm vào hai vế của bất đẳng thức (*) số 1, ta có:

$$A = \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1 \geq 1$$

Nhận thấy biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng 1, vậy khi A bằng 1 thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất:

$$|x - \frac{2}{3}| + 1 = 1 \Rightarrow |x - \frac{2}{3}| = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Vậy khi $x = \frac{2}{3}$ thì biểu thức A có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

b) Ta đã biết rằng, với mọi giá trị của x thì $|\frac{3}{4} - x| \geq 0$, từ đó

$$\text{có } -|\frac{3}{4} - x| \leq 0^{(**)}.$$

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức (**) số 5, ta có:

$$B = 5 - |\frac{3}{4} - x| \leq 5.$$

Nhận thấy biểu thức B luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5, vậy khi B bằng 5 thì biểu thức B có giá trị lớn nhất:

$$5 - |\frac{3}{4} - x| = 5 \Rightarrow |\frac{3}{4} - x| = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Vậy khi $x = \frac{3}{4}$ thì biểu thức B có giá trị lớn nhất bằng 5.

● Khai thác bài toán

Ở bài toán trên, người ta đã khẳng định một biểu thức nào đó là có giá trị nhỏ nhất hay có giá trị lớn nhất. Bây giờ có hai biểu thức:

$$\text{a) } C = |x + \frac{1}{4}| \quad \text{b) } D = |x - \frac{1}{2}| + 1$$

thì mỗi biểu thức này có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất?

Ta có thể lập luận như sau:

a) Biết rằng $C = |x + \frac{1}{4}| \geq 0$, chứng tỏ rằng C luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 0 và khi $C = 0$ thì đó là giá trị nhỏ nhất của C; $C = 0$ hay $|x + \frac{1}{4}| = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$

Vậy khi $x = -\frac{1}{4}$ thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Tương tự có $|x - \frac{1}{2}| \geq 0$. Thêm vào hai vế của bất đẳng thức số 1, có

$$D = |x - \frac{1}{2}| + 1 \geq 1,$$

chứng tỏ rằng D luôn nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 1 và khi $D = 1$ thì đó là giá trị nhỏ nhất của D.

$$D = 1 \text{ suy ra } |x - \frac{1}{2}| = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi $x = \frac{1}{2}$ thì biểu thức D có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài 28. Thực hiện các phép tính sau:

a) $[6.(-\frac{1}{3})^2 - 3.(-\frac{1}{3}) + 1] : (-\frac{1}{3} - 1);$

b) $6.(-\frac{2}{3})^3 - 3.(-\frac{2}{3})^2 - 2.(-\frac{2}{3}) + 8;$

c) $\frac{(\frac{2}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{4})^2 \cdot (-1)^5}{(\frac{2}{5})^2 \cdot (-\frac{5}{12})^3};$

d) $16^{16} : 8^7.$

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a là một dãy tính có dấu móc vuông gồm các phép tính: nhân, lũy thừa, chia và cộng trừ.

Câu b là một dãy tính gồm các phép tính lũy thừa, nhân và cộng trừ.

Câu c là một dãy tính gồm các phép tính lũy thừa, nhân và chia.

Câu d là chia hai lũy thừa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a cần làm các phép tính trong dấu móc vuông trước. Trong móc vuông làm phép tính lũy thừa, phép nhân rồi làm cộng, trừ. Cuối cùng làm phép chia.

Với câu b cần làm phép tính lũy thừa, nhân rồi cộng trừ.

Với câu c cần làm phép tính lũy thừa, nhân và cuối cùng là phép chia.

Với câu d là phép chia hai lũy thừa, cần biến đổi để hai lũy thừa có cùng một cơ số rồi áp dụng quy tắc chia hai lũy thừa của cùng một số.

● **Cách giải**

$$\text{a) } [6.(-\frac{1}{3})^2 - 3(-\frac{1}{3}) + 1] : (-\frac{1}{3} - 1)$$

$$= [6. \frac{1}{9} + 1 + 1] : (-\frac{4}{3})$$

$$= [\frac{2}{3} + 2] : (-\frac{4}{3}) = \frac{8}{3} \cdot (-\frac{3}{4}) = -2.$$

$$\text{b) } 6.(-\frac{2}{3})^3 - 3.(-\frac{2}{3})^2 - 2(-\frac{2}{3}) + 8$$

$$= 6.(-\frac{8}{27}) - 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 8$$

$$= -\frac{16}{9} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 8 = \frac{-16+72}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}.$$

$$\text{c) } \frac{(\frac{2}{3})^3 \cdot (-\frac{3}{4})^2 \cdot (-1)^5}{(\frac{2}{5})^2 \cdot (-\frac{5}{12})^3} = \frac{\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{16} \cdot (-1)}{\frac{4}{25} \cdot \frac{-125}{144 \cdot 12}} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{144 \cdot 3}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{144 \cdot 3}{5} = \frac{72}{5} = 14,4.$$

$$d) 16^{16} : 8^7 = (2^4)^{16} : (2^3)^7 = 2^{64} : 2^{21} = 2^{43}.$$

Bài 29. Tìm x biết rằng:

$$a) (2x - 3)^2 = 9; \quad b) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \frac{1}{8};$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \frac{1}{81}; \quad d) 3^{x-1} = \frac{1}{243};$$

$$e) 2^x + 2^{x+3} = 144; \quad f) 81^{2x} \cdot 27^x = 9^{10}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm giá trị của x trong các đẳng thức có chứa biểu thức lũy thừa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a cần lưu ý rằng, lũy thừa bậc chẵn của một số âm hoặc số dương luôn là số dương.

Với câu b, hãy biến đổi để đẳng thức có cùng một cơ số.

Với câu c, lưu ý đến lũy thừa bậc chẵn và cần biến đổi để đẳng thức có cùng một cơ số.

Với câu d, cần biến đổi 243 thành một lũy thừa có cơ số là 3 và lưu ý lũy thừa $a^0 = 1$.

Với câu e, lưu ý sử dụng quy tắc về tích 2 lũy thừa của cùng một số, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, rồi chia 2 vế của đẳng thức cho cùng một số và cuối cùng xem xét hai lũy thừa có cùng cơ số từ đó có x.

Với câu f, biến đổi các lũy thừa về cùng cơ số 3, áp dụng các quy tắc về lũy thừa để tìm x.

● **Cách giải**

$$a) (2x - 3)^2 = (\pm 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0. \end{cases}$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7.$$

$$d) 3^{x-1} = \frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3^5}$$

$$3^{x-1} \cdot 3^5 = 1 \Leftrightarrow 3^{x+4} = 1 = 3^0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

$$e) 2^x + 2^{x+3} = 144 \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 144 \Leftrightarrow$$

$$2^x(1 + 2^3) = 144 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 144 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$f) 81^{-2x} \cdot 27^x = 9^{10} \Leftrightarrow (3^4)^{-2x} \cdot (3^3)^x = (3^2)^{10}$$

$$\Leftrightarrow 3^{-8x} \cdot 3^{3x} = 3^{20} \Leftrightarrow 3^{-5x} = 3^{20}$$

$$\Leftrightarrow -5x = 20 \Leftrightarrow x = -4.$$

● Khai thác bài toán

Sau khi tìm được giá trị của x , cần thử lại để kiểm tra kết quả. Chẳng hạn với câu a, ta có $x = 3$ thì $(2x - 3)^2 = 3^2 = 9$; $x = 0$ thì $(2x - 3)^2 = (-3)^2 = 9$.

Tương tự như trên, bạn đọc có thể tự thử lại.

Bài 30. So sánh các cặp số sau:

a) $(-32)^9$ và $(-16)^{13}$;

b) 10^{20} và 90^{10} ;

c) $(-5)^{30}$ và $(-3)^{50}$;

d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{10}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài ở mỗi câu cho hai lũy thừa, yêu cầu so sánh xem trong hai lũy thừa đó thì số nào lớn hơn.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cách làm chung cho các bài toán so sánh hai lũy thừa là tìm cách đưa hai lũy thừa đã cho về hai lũy thừa có cùng số mũ hoặc có cùng cơ số, từ đó dễ dàng so sánh chúng với nhau. Cụ thể:

Với câu a, trước hết hãy biến đổi 32^9 và 16^{13} về cùng cơ số 2 và

cần lưu ý như sau: biết $4 < 8$ hay $2^2 < 2^3$, nhưng nếu nhân 4 và 8 với -1 ta sẽ có $-4 > -8$ hay $-2^2 > -2^3$.

Với câu b, hãy biến đổi để có cùng số mũ là 10 và với lưu ý rằng, lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn, chẳng hạn như $5^{10} > 4^{10}$.

Với câu c, vì 30 và 50 đều là các số chẵn, nên các lũy thừa đã cho là lũy thừa với cơ số dương, hãy tìm cách biến đổi để hai lũy thừa có cùng số mũ là 10.

Với câu d, hãy biến đổi hai lũy thừa để có cùng cơ số là $\frac{1}{2}$ và chú ý như sau: với cơ số nhỏ hơn 1, lũy thừa nào có số mũ nhỏ hơn sẽ lớn hơn, chẳng hạn $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$.

● Cách giải

a) Ta có $(32)^9 = (2^5)^9 = 2^{45}$

$$16^{13} = (2^4)^{13} = 2^{52}.$$

Rõ ràng $2^{45} < 2^{52}$ Nhân hai vế với -1 , ta có:

$$-2^{45} > -2^{52} \text{ hay } (-2^5)^9 > (-2^4)^{13}$$

$$\text{Vậy } (-32)^9 > (-16)^{13}.$$

b) Ta có $10^{20} = (10^2)^{10} = 100^{10}$.

Rõ ràng $100 > 90$ nên $100^{10} > 90^{10}$

$$\text{Vậy } 10^{20} > 90^{10}.$$

c) Ta có $(-5)^{30} = 5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$

$$(-3)^{50} = 3^{50} = (3^5)^{10} = 243^{10}.$$

Rõ ràng $243 > 125$ nên $243^{10} > 125^{10}$, vậy

$$(-5)^{30} < (-3)^{50}.$$

d) Ta có $(\frac{1}{16})^{10} = (\frac{1}{2^4})^{10} = [(\frac{1}{2})^4]^{10} = (\frac{1}{2})^{40}$.

Vì $\frac{1}{2} < 1$ nên $(\frac{1}{2})^{40} > (\frac{1}{2})^{50}$, vậy

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{2})^{50}.$$

● Khai thác bài toán

Như đã nói ở phần hướng dẫn cách tìm lời giải, khi phải so sánh hai lũy thừa thì căn cứ vào đề bài cụ thể mà biến đổi các lũy thừa đã cho để chúng có cùng cơ số (hay cùng số mũ), khi đó sẽ so sánh số mũ (hay so sánh cơ số) để có kết luận.

Tuy vậy, cũng có đề bài có thể làm theo cả hai cách đã nói ở trên. Chẳng hạn, với câu d, trong cách giải đã trình bày cách biến đổi cơ số, bây giờ sẽ trình bày cách biến đổi số mũ như sau:

$$(\frac{1}{2})^{50} = [(\frac{1}{2})^5]^{10} = (\frac{1}{2^5})^{10} = (\frac{1}{32})^{10}.$$

Biết $16 < 32$ suy ra $\frac{1}{16} > \frac{1}{32}$, vậy

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{32})^{10} \text{ hay}$$

$$(\frac{1}{16})^{10} > (\frac{1}{2})^{50}.$$

Chú ý: Nếu $a > b > 0$ và $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ thì $a^n > b^n$. Chẳng hạn $a = 8$, $b = 5$, $n = 2$, ta sẽ có $8^2 > 5^2$.

Bài 31. Tìm các số a , b , c biết rằng:

$$3a = 6b = 9c \text{ và } a - b + c = 45.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho $3a = 6b = 9c$ và tổng đại số $a - b + c = 45$, yêu cầu tìm giá trị của ba số a , b , c .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Từ giả thiết $3a = 6b = 9c$ phải lập ra được một dãy các tỉ số

bằng nhau bằng cách chia $3a$, $6b$, $9c$ cho BCNN của 3; 6; 9. Sau đó áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm a , b , c .

• Cách giải

Từ $3a = 6b = 9c$ suy ra $\frac{3a}{18} = \frac{6b}{18} = \frac{9c}{18}$ hay $\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = \frac{a-b+c}{6-3+2} = \frac{45}{5} = 9.$$

$$\text{Từ } \frac{a}{6} = 9 \Rightarrow a = 54,$$

$$\frac{b}{3} = 9 \Rightarrow b = 27,$$

$$\frac{c}{2} = 9 \Rightarrow c = 18.$$

Vậy $a = 54$, $b = 27$, $c = 18$.

• Khai thác bài toán

Có thể kiểm tra lại kết quả trên bằng cách nào?

Kiểm tra như sau:

- Cách 1. Tính $a - b + c$ có bằng 45 không?

$$a - b + c = 54 - 27 + 18 = 45$$

- Cách 2. Xét xem có $3a = 6b = 9c$ không?

$$3a = 3 \cdot 54 = 162; 6b = 6 \cdot 27 = 162; 9c = 9 \cdot 18 = 162.$$

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 32. Biết rằng $|a + b| = |a| + |b|$ khi và chỉ khi $ab \geq 0$.
Hãy tìm số nguyên x , nếu biết:

a) $|x - 3| + |5 - x| = 2$;

b) $|x - 4| + |5 - x| = 1$.

Bài 33. Tìm các số nguyên x, y sao cho:

a) $(x - 3)(y - 2) = 5;$

b) $(x + 1)(y + 3) = 7.$

Bài 34. Cho tổng

$M = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$, hãy xét xem tổng M có chia hết cho 2; 3; 4 và 5 không?

Bài 35. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức

a) $|3 + 2x| + 3;$

b) $5 - |x - 2|.$

Bài 36. Tìm x biết:

a) $|3x - 5| = 4;$

b) $|2x + 1| + 2 = 5.$

Bài 37. Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q = x^2 - 2x$ có giá trị âm.

Bài 38. Tìm x biết:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = \frac{1}{27};$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \frac{1}{729}.$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 32. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Hãy sử dụng triệt để các điều đã cho của đề bài để làm.

• Cách giải

a) $|x - 3| + |5 - x| = 2 = |(x - 3) + (5 - x)|.$

Theo đề bài có $(x - 3)(5 - x) \geq 0$, suy ra $x - 3$ và $5 - x$ cùng dấu, do đó có $3 \leq x \leq 5$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{3; 4; 5\}.$

b) $|x - 4| + |5 - x| = 1 = |(x - 4) + (5 - x)|.$

Theo đề bài có $(x - 4)(5 - x) \geq 0$, suy ra $x - 4$ và $5 - x$ cùng dấu, do đó có $4 \leq x \leq 5$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5\}.$

Bài 33. • Hướng dẫn cách tìm lời giải.

a) Cần xét mối quan hệ giữa các ước cụ thể của 5 với hai ước phụ thuộc vào x, y của 5 là $x - 3$ và $y - 2$.

b) Tương tự, cần xét mối quan hệ giữa các ước cụ thể của 7 với hai ước phụ thuộc vào x, y của 7 là $x + 1$ và $y + 3$.

• Cách giải

a) Biết $(x - 3)(y - 2) = 5$ nên $x - 3$ và $y - 2$ là ước của 5, mà số 5 có các ước là $\pm 1; \pm 5$, do đó có thể lập bảng để tìm số nguyên x, y như sau:

$x - 3$	1	-1	5	-5
$y - 2$	5	-5	1	-1

 $\Rightarrow$

x	4	2	8	-2
y	7	-3	3	1

b) Biết $(x + 1)(y + 3) = 7$ nên $x + 1$ và $y + 3$ là ước của 7, mà số 7 có các ước là $\pm 1; \pm 7$, do đó có thể lập bảng để tìm số nguyên x, y như sau:

$x + 1$	1	-1	7	-7
$y + 3$	7	-7	1	-1

 $\Rightarrow$

x	0	-2	6	-8
y	4	-10	-2	-4

Bài 34. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Trước hết phải tính tổng M , muốn vậy hãy để ý 2 số liên tiếp bắt đầu từ số 1, chúng có hiệu bằng -1, tất cả có 50 hiệu, do đó tính được M . Sau đó vận dụng dấu hiệu chia hết để trả lời.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 M &= \underbrace{1 - 2} + \underbrace{3 - 4} + \underbrace{5 - 6} + \dots + \underbrace{99 - 100} \\
 &= \underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{\text{có 50 số } -1} \\
 &= -50
 \end{aligned}$$

Số - 50 chia hết cho 2 và cho 5 vì có chữ số tận cùng bằng số 0.

Số - 50 không chia hết cho 3 và cho 4.

Bài 35. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Chú ý vận dụng về giá trị tuyệt đối của một biểu thức: $|A| \geq 0, -|A| \leq 0$.

a) Ta biết rằng, với mọi giá trị của x thì $|3 + 2x| \geq 0$.

Thêm 3 vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$|3 + 2x| + 3 \geq 3.$$

Nhận thấy biểu thức $|3 + 2x| + 3$ luôn lớn hơn hoặc bằng 3 và khi nó bằng 3 là giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Từ } |3 + 2x| + 3 = 3 \Rightarrow |3 + 2x| = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Vậy khi $x = -\frac{3}{2}$ thì $|3 + 2x| + 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3.

b) Ta biết rằng, với mọi giá trị của x thì $|x - 2| \geq 0$, từ đó có $-|x - 2| \leq 0$.

Thêm 5 vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$5 - |x - 2| \leq 5$$

Nhận thấy biểu thức $5 - |x - 2|$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5 và khi nó bằng 5 là giá trị lớn nhất.

$$\text{Từ } 5 - |x - 2| = 5 \Rightarrow |x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2$$

Vậy khi $x = 2$ thì $5 - |x - 2|$ có giá trị lớn nhất bằng 5.

Bài 36. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Câu a cần xét khi $3x - 5 > 0$ và $3x - 5 < 0$

Câu b cần xét khi $2x + 1 > 0$ và $2x + 1 < 0$.

• Cách giải

a) Khi $3x - 5 > 0$ hay $x > \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = 3x - 5$, do đó có:

$$3x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > \frac{5}{3} \text{)}$$

Khi $3x - 5 < 0$ hay $x < \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = -(3x - 5) = 5 - 3x$,

do đó có:

$$5 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

b) Khi $2x + 1 > 0$ hay $x > -\frac{1}{2}$ thì $|2x + 1| = 2x + 1$, do đó có:

$$2x + 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Khi $2x + 1 < 0$ hay $x < -\frac{1}{2}$ thì $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$, do đó có:

$$-2x - 1 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 - 2x = 5 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Bài 37. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Biến đổi sao cho Q viết được thành một tích của hai thừa số. Tích của hai thừa số này là âm khi hai thừa số này trái dấu.

• Cách giải

$$Q = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$Q < 0$ khi các thừa số x và $x - 2$ trái dấu. Biết rằng $x > x - 2$ nên khi x và $x - 2$ trái dấu thì $x > 0$ còn $x - 2 < 0$ tức là $0 < x < 2$.

Vậy với $0 < x < 2$ thì Q có giá trị âm, có thể biểu diễn kết quả trên trục số như sau:

$$0 < x < 2$$



Bài 38. • Hướng dẫn cách tìm lời giải. Hãy viết số ở vế phải dưới dạng một lũy thừa có cùng cơ số với lũy thừa ở vế trái.

• Cách giải

$$\text{a) } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{729} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^6 \Leftrightarrow x - 1 = 6 \Leftrightarrow x = 7.$$

II. ĐA THỨC VÀ CÁC PHÉP TÍNH

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức:

$$a) A = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x - y} \text{ với } x = 2; y = -1,5;$$

$$b) B = \frac{4xy}{(x + y)^2 - (x - y)^2} \text{ với } x = 2; y = -0,75;$$

$$c) C = (x^7 + 11y^2)(x^{11} + 2y)(x^4 + y)(x^2 - y) \text{ với } x = -\frac{1}{5};$$

$y = 0,04;$

$$d) D = 6x^2 - 4|x| + 2x - 5 \text{ với } x = 2; x = -3;$$

$$e) E = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \text{ với } |x| = \frac{1}{2}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các biểu thức có một biến hoặc hai biến và giá trị bằng số của biến, đòi hỏi tính giá trị của biểu thức.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Phương pháp chung để tính giá trị của một biểu thức đại số gồm 2 bước sau:

- Bước 1. Thay chữ bởi giá trị số đã cho, với giá trị là số âm cần lưu ý đặt trong dấu ngoặc.

- Bước 2. Thực hiện các phép tính: lũy thừa, nhân, chia và cuối cùng là cộng, trừ.

Cụ thể:

+ Các câu a, b có thể áp dụng ngay hướng dẫn trên.

+ Câu c, hãy thay chữ bởi số đã cho đối với thừa số cuối cùng của biểu thức đã cho, từ đó sẽ có ngay kết quả.

+ Câu d, cho giá trị bằng số của x , phải tính $|x|$.

+ Câu e, cho $|x| = \frac{1}{2}$, phải tính x , cần xét hai trường hợp

$$x = \frac{1}{2} \text{ và } x = -\frac{1}{2}.$$

• Cách giải

a) Với $x = 2, y = -1,5 = -1\frac{1}{2}$, có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^2 + (-1\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-1\frac{1}{2})}{2 - (-1\frac{1}{2})} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 6}{2 + 1\frac{1}{2}} \\ &= \frac{12\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}} = \frac{49}{4} : \frac{7}{2} = \frac{49}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Với $x = 2; y = -0,75 = -\frac{3}{4}$, có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4 \cdot 2 \cdot (-\frac{3}{4})}{[2 + (-\frac{3}{4})]^2 - [2 - (-\frac{3}{4})]^2} = \frac{-6}{(\frac{5}{4})^2 - (\frac{11}{4})^2} = \frac{-6}{\frac{25}{16} - \frac{121}{16}} \\ &= \frac{-6}{-\frac{96}{16}} = \frac{-6}{-6} = 1. \end{aligned}$$

c) Với $x = -\frac{1}{5} = -0,2, y = 0,04$. Trước hết tính $x^2 - y$, có:

$$(-0,2)^2 - 0,04 = 0,04 - 0,04 = 0.$$

C là tích của bốn thừa số, thừa số thứ tư bằng 0, vậy $C = 0$.

d) * Với $x = 2$, có:

$$\begin{aligned} D &= 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 24 - 8 + 4 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

* Với $x = -3$, có:

$$\begin{aligned} D &= 6.(-3)^2 - 4.3 + 2.(-3) - 5 \\ &= 54 - 12 - 6 - 5 = 31. \end{aligned}$$

e) Xét hai trường hợp:

* Với $x = \frac{1}{2}$, có:

$$\begin{aligned} E &= 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\frac{1}{2} + 1 \\ &= 4.\frac{1}{8} - 2.\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

* Với $x = -\frac{1}{2}$, có:

$$\begin{aligned} E &= 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 4.\left(-\frac{1}{8}\right) - 2.\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Một vài chú ý khi giải loại toán tính giá trị của biểu thức:

- Với loại bài như câu c, nếu cứ làm theo phương pháp chung ta có:

$$[(-0,2)^7 + 11.(0,04)^2][(-0,2)^{11} + 2.(0,04)][(-0,2)^4 + 0,04].[(-0,2)^2 \cdot 0,04]$$

Nhận thấy, nâng $-0,2$ lên lũy thừa 4; 7; 11 được số thập phân với nhiều chữ số ở phần thập phân, tính toán rất phức tạp. Sau một hồi tính toán kiên trì, ta sẽ gặp thừa số thứ tư bằng 0, đến đây có thể bỏ không cần tính toán cụ thể các thừa số thứ nhất, thứ hai, thứ ba, mà biết ngay biểu thức này bằng 0, vì trong một tích có một trong các thừa số bằng không thì cả tích đó sẽ bằng 0.

Điều chú ý thứ nhất rút ra: cần làm thử, mò mẫm để tìm kết quả, do đó sẽ có cách giải nhanh, gọn.

- Với loại bài như câu e, biểu thức đã cho chứa biến x , còn giá

trị của x đã cho là $|x| = \frac{1}{2}$. Ta cần tính x .

Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối, ta có: $|\frac{1}{2}| = |+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$,
nên $|x| = \frac{1}{2}$ suy ra $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$. Do vậy câu này cần xét hai trường hợp đối với x .

Điều chú ý thứ hai rút ra: Chẳng những quan tâm tìm hiểu đề bài mà còn quan tâm đến các giá trị đã cho của x để làm bài cho đầy đủ.

Bài 2. Tìm các giá trị thích hợp của biến trong biểu thức:

a) $\frac{x}{5x + 1}$;

b) $\frac{4}{x^2 - 9}$;

c) $\frac{x + 3}{x^2 - xy}$;

d) $\frac{5x - 8}{x^2 + 4}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các biểu thức phân, đòi hỏi phải tìm giá trị thích hợp của biến để mỗi biểu thức phân đó có nghĩa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Như đã biết trong phép chia, số chia phải khác 0 thì mới thực hiện được phép tính. Cũng vậy, một biểu thức phân có nghĩa khi giá trị của các biến ở mẫu không làm cho mẫu đó bằng 0 tức là mẫu phải khác 0. Từ đó phải xét lần lượt các mẫu khác 0 để tìm giá trị thích hợp của các biến trong mỗi phân thức.

● **Cách giải**

a) Ta có $5x + 1 \neq 0 \Rightarrow 5x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{5}$.

Vậy giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức $\frac{x}{5x + 1}$ là

$$x \neq -\frac{1}{5}$$

b) Ta có $x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3$.

Vậy giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức $\frac{4}{x^2 - 9}$ là $x \neq 3; x \neq -3$.

c) Ta có $x^2 - xy = x(x - y) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$.

Vậy giá trị thích hợp của biến x, y trong biểu thức $\frac{x+3}{x^2 - xy}$ là $x \neq 0; x \neq y$.

d) Ta có $x^2 + 4$ luôn khác 0 với mọi giá trị của x .

Vậy giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức $\frac{5x-8}{x^2+4}$ là với mọi giá trị của x .

● Khai thác bài toán

- Khi mẫu của một biểu thức phân là tổng của một bình phương và một số dương nào đó, chẳng hạn $x^2 + 4$, thì $x^2 + 4$ luôn là một số dương và chắc chắn rằng $x^2 + 4 \neq 0$ với mọi giá trị của x . Do đó giá trị thích hợp của biến x trong biểu thức phân là mọi giá trị của x , biểu thức đã cho luôn có nghĩa.

- Khi làm toán với một phân số có dạng $\frac{a}{b}$ và một biểu thức phân có dạng $\frac{A}{B}$ thì phải có điều kiện $b \neq 0; B \neq 0$ vì phép chia cho số 0 là không có nghĩa.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $M = (x - 4)^2 + 1;$

b) $N = (2x + 1)^2 - 3;$

c) $Q = (x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1.$

● Tìm hiểu đề bài

Câu a là tổng một bình phương và số 1, câu b là hiệu một bình phương và số 3, câu c là tổng một lũy thừa bậc 6 và giá trị tuyệt đối của một biểu thức với số -1. Ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức M, N, Q .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Lưu ý rằng, lũy thừa bậc chẵn của một biểu thức A chẳng hạn luôn là một số không âm, tức là $A \geq 0$. Mặt khác cũng biết rằng giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức cũng là số không âm.

Khi thêm cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức $A \geq 0$ thì được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức đó, chẳng hạn từ $A \geq 0$ suy ra $A + 5 \geq 5$ hay $A - 3 \geq -3$.

Dựa vào gợi ý trên hãy giải bài toán đã cho.

● **Cách giải**

a) Với mọi x ta đều có $(x - 4)^2 \geq 0$ nên $(x - 4)^2 + 1 \geq 1$.

Ta thấy $(x - 4)^2 + 1$ luôn lớn hơn hoặc bằng 1, nên giá trị nhỏ nhất của $(x - 4)^2 + 1$ bằng 1 khi $x - 4 = 0$ hay $x = 4$.

Vậy khi $x = 4$ thì biểu thức M có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

b) Với mọi x ta đều có $(2x + 1)^2 \geq 0$ nên $(2x + 1)^2 - 3 \geq -3$.

Ta thấy $(2x + 1)^2 - 3$ luôn lớn hơn hoặc bằng -3, vậy giá trị nhỏ nhất của $(2x + 1)^2 - 3$ bằng -3 khi $2x + 1 = 0$ hay $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy khi $x = -\frac{1}{2}$ thì biểu thức N có giá trị nhỏ nhất bằng -3.

c) Với mọi x ta đều có $(x^2 - 9)^6 \geq 0$ và với mọi y ta đều có $|y - 5| \geq 0$, do đó $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| \geq 0$ nên

$$(x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1 \geq -1.$$

Ta thấy $(x^2 - 9)^6 + |y - 5| - 1$ luôn lớn hơn hoặc bằng -1, vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q bằng -1 khi

$$(x^2 - 9)^6 + |y - 5| = 0.$$

Tổng của hai số hạng không âm bằng không khi và chỉ khi mỗi số hạng đó bằng 0 tức là có:

$$(x^2 - 9)^6 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$|y - 5| = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5.$$

Vậy với $x = \pm 3$ và $y = 5$ thì biểu thức Q có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

● **Khai thác bài toán.** Một lưu ý về phương pháp giải:

Nhận thấy các biểu thức M , N , Q đã cho đều có lũy thừa bậc chẵn, mà lũy thừa bậc chẵn của một số hay của một biểu thức luôn là một số không âm. Đó là cơ sở chủ yếu để dựa vào đó mà làm loại toán này. Bạn đọc cần lưu ý và làm quen cách lập luận này.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $M = 12 - x^2$;

b) $N = 5 - (3x - 1)^4$;

c) $Q = \frac{3}{3x^2 + 6}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Câu a cho hiệu của 12 với bình phương của x , câu b cho hiệu của 5 với lũy thừa bậc 4 của một biểu thức, câu c cho thương của 3 với một biểu thức có chứa lũy thừa bậc 2. Ta phải tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức M , N , Q .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ta thấy rằng, với mọi x thì $x^2 \geq 0$, nhưng nếu nhân với -1 thì có $-x^2 \leq 0$. Thêm 12 vào hai vế ta có $12 - x^2 \leq 12$. Từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức M .

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, với mọi giá trị của x , ta luôn có $3x^2 + 6 \geq 6$, do đó $\frac{3}{3x^2+6} \leq \frac{3}{6}$, vì với hai phân số có cùng tử nếu phân số nào có mẫu lớn hơn thì nhỏ hơn. Lại biết $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, từ đó tìm được giá trị lớn nhất của biểu thức Q .

● Cách giải

a) Với mọi giá trị của x ta đều có $x^2 \geq 0$. Nhân hai vế với -1 ta có $-x^2 \leq 0$. Thêm 12 vào hai vế được $12 - x^2 \leq 12$.

Ta thấy $12 - x^2$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 12, nên giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 12 - x^2$ bằng 12 khi $x^2 = 0$ hay $x = 0$.

Vậy khi $x = 0$ thì biểu thức M có giá trị lớn nhất bằng 12.

b) Với mọi x ta đều có $(3x - 1)^4 \geq 0$. Nhân hai vế với -1 ta có $-(3x - 1)^4 \leq 0$. Thêm 5 vào hai vế được $5 - (3x - 1)^4 \leq 5$.

Ta thấy $5 - (3x - 1)^4$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 5, nên giá trị lớn nhất của biểu thức $N = 5 - (3x - 1)^4$ bằng 5 khi $3x - 1 = 0$ hay

$$x = \frac{1}{3}.$$

Vậy khi $x = \frac{1}{3}$ thì biểu thức N có giá trị lớn nhất bằng 5.

c) Ta luôn có $3x^2 + 6 \geq 6$ với mọi x . Biết rằng, nếu hai phân số có cùng tử là 3 thì phân số nào có mẫu lớn hơn sẽ là phân số nhỏ hơn, do đó có $\frac{3}{3x^2+6} \leq \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Ta thấy $\frac{3}{3x^2+6}$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{3}{3x^2+6}$ bằng $\frac{1}{2}$ khi $x = 0$.

Vậy khi $x = 0$ thì biểu thức Q có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

● Khai thác bài toán. Một lưu ý về phương pháp giải:

Ngược lại với bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, ở bài toán tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức, ta lập luận để cho biểu thức đã cho nhỏ hơn hoặc bằng một số nào đó. Cái giống nhau của đề bài loại toán này là các lũy thừa của biến hay biểu thức đã cho đều là lũy thừa bậc chẵn.

Hãy làm đi làm lại một số lần với mỗi bài để có thói quen và kỹ năng về cách giải loại toán này.

Bài 5

a) Tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $A = \frac{3x-5}{x}$ có giá trị nguyên nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $B = \frac{2}{6-x}$ có giá trị nguyên lớn nhất.

• Tìm hiểu đề bài

Câu a, phải tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $A = \frac{3x-5}{x}$ cũng là một số nguyên, nhưng có giá trị nhỏ nhất.

Câu b, phải tìm giá trị nguyên của biến x để biểu thức $B = \frac{2}{6-x}$ cũng là một số nguyên, nhưng có giá trị lớn nhất.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết cần lưu ý rằng, nếu phải trừ hai phân số có cùng mẫu, chẳng hạn $\frac{x}{7}$ trừ $\frac{3}{7}$, thì có thể viết $\frac{x}{7} - \frac{3}{7} = \frac{x-3}{7}$. Ở đây ta quan tâm đến điều ngược lại, tức là $\frac{x-3}{7} = \frac{x}{7} - \frac{3}{7}$.

Vận dụng cách viết này để biến A thành một số nguyên và một biểu thức phân, rồi tiếp tục suy luận để tìm ra kết quả.

Với câu b, vì tử là số dương không đổi, nên biểu thức B có giá trị lớn nhất khi $6 - x$ là số nguyên nhỏ nhất. Biết rằng $6 - x$ không thể là một số nguyên âm vì không có số nguyên âm nhỏ nhất, tức là $6 - x > 0$. Như vậy B có giá trị lớn nhất khi $6 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

• Cách giải

a) Ta có $A = \frac{3x-5}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{5}{x}$ (dựa theo cách viết khi phải trừ

hai phân số có cùng mẫu).

$$\text{Vậy } A = 3 - \frac{5}{x}.$$

Ta thấy A là hiệu của 3 và $\frac{5}{x}$ sẽ có giá trị nhỏ nhất khi số trừ $\frac{5}{x}$ là số nguyên dương lớn nhất.

Phân số $\frac{5}{x}$ là số dương khi $x > 0$. Phân số $\frac{5}{x}$ có tử là số không đổi, sẽ là số nguyên dương lớn nhất khi x là số nguyên dương bé nhất.

Biết số nguyên dương bé nhất bằng 1, nên có $\frac{5}{x} = \frac{5}{1} = 5$, từ đó suy ra: giá trị nhỏ nhất của $A = 3 - \frac{5}{x} = 3 - 5 = -2$ khi $x = 1$.

Vậy khi $x = 1$ thì biểu thức $A = \frac{3x-5}{x}$ có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

b) Vì biểu thức phân B có tử bằng 2 là một số nguyên dương không đổi nên $B = \frac{2}{6-x}$ sẽ có giá trị lớn nhất khi $6 - x > 0$ và $6 - x$ phải là số nguyên dương nhỏ nhất.

Biết số nguyên dương nhỏ nhất bằng 1, nên có $6 - x = 1$, suy ra $x = 5$.

Vậy khi $x = 5$ thì biểu thức $B = \frac{2}{6-x}$ có giá trị lớn nhất bằng 2.

● Khai thác bài toán

Ta thấy:

- Trong cách giải đối với câu a, dựa vào cách viết về phép trừ hai phân số cùng mẫu để biến đổi biểu thức phân đã cho thành một số nguyên và một biểu thức phân khác đơn giản hơn.

Đến đây ta được một hiệu, hiệu này có giá trị nhỏ nhất khi số trừ có giá trị lớn nhất, dẫn đến phải lập luận phân số $\frac{5}{x}$ là số nguyên dương lớn nhất với giá trị nguyên dương nào của x . Tiếp tục những suy luận có lí ta sẽ đi tới kết quả bài toán.

- Trong cách làm đối với câu b, do tử là một số dương, nên cần những suy luận có lí đối với mẫu để biểu thức B có giá trị lớn nhất.

Chú ý rằng, cả hai câu a và b đều phải lập luận với giá trị nào của x để $\frac{5}{x}$ và $\frac{2}{6-x}$ có giá trị lớn nhất. Cả hai lập luận đều đi đến mẫu của hai biểu thức phân này phải bằng 1.

Đây là loại bài toán đòi hỏi dùng một dãy các suy luận có lí lẽ chặt chẽ để đi tới lời giải. Bạn đọc cần làm quen với loại toán này để phát triển tư duy toán học.

Bài 6. Các biểu thức sau có bằng nhau không:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $(x + 1)^2$ và $x^2 + 1$; | c) $(x - 1)^2$ và $(1 - x)^2$; |
| b) $(x - 1)^3$ và $(1 - x)^3$; | d) $(x - y)^2$ và $(y - x)^2$. |

● **Tìm hiểu đề bài**

Mỗi câu của đề bài gồm hai biểu thức, phải xét xem hai biểu thức đó có bằng nhau hay không?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cách thức chung để giải bài toán trên là biến đổi biểu thức này về biểu thức kia dựa vào định nghĩa về lũy thừa, quy tắc đổi dấu các thừa số của một tích để có kết luận rằng, hai biểu thức này có bằng nhau hay không. Nếu không biến đổi được có thể cho biến một giá trị số nào đó, rồi tính giá trị mỗi biểu thức, từ đó có kết luận, cần chú ý rằng với cách làm này chỉ có thể kết luận được cho hai biểu thức không bằng nhau.

Với câu a và câu b hãy cho x một giá trị số rồi tính giá trị mỗi

biểu thức. Các câu c, d có thể biến đổi được.

● Cách giải

a) Hai biểu thức đã cho không bằng nhau. Chẳng hạn với $x = 2$ thì $(x + 1)^2 = (2 + 1)^2 = 9$, còn $x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$. Rõ ràng $9 \neq 5$ nên $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.

b) Hai biểu thức đã cho không bằng nhau. Chẳng hạn với $x = 3$ thì $(x - 1)^3 = (3 - 1)^3 = 8$, còn $(1 - x)^3 = (1 - 3)^3 = (-2)^3 = -8$. Rõ ràng $8 \neq -8$ nên $(x - 1)^3 \neq (1 - x)^3$.

c) Hai biểu thức đã cho bằng nhau, vì:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= (x - 1)(x - 1) \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)} \\ &= (1 - x)(1 - x) \text{ (quy tắc đổi dấu hai thừa số của tích)} \\ &= (1 - x)^2 \text{ (theo định nghĩa lũy thừa).}\end{aligned}$$

d) Hai biểu thức đã cho bằng nhau, vì:

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= (x - y)(x - y) \text{ (theo định nghĩa lũy thừa)} \\ &= (y - x)(y - x) \text{ (quy tắc đổi dấu hai thừa số của tích)} \\ &= (y - x)^2 \text{ (theo định nghĩa lũy thừa).}\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Ta biết rằng $2 \neq -2$, nhưng $2 = -(-2)$. Vận dụng nhận xét này, ta nhận thấy: hai biểu thức ở câu b trong bài 6 là hai biểu thức đối nhau. Thật vậy:

$$(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

Đổi dấu ba thừa số của tích ta được:

$$-(1 - x)(1 - x)(1 - x) = -(1 - x)^3$$

Do vậy, ta có: $(x - 1)^3 = -(1 - x)^3$.

Có thể nêu tổng quát như sau:

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì:

$$(a - b)^{2n+1} = -(b - a)^{2n+1}$$

$$(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}, \text{ tức là:}$$

- + Lũy thừa lẻ cùng bậc của hai số đối nhau thì đối nhau.
- + Lũy thừa chẵn cùng bậc của hai số đối nhau thì bằng nhau.

CỘNG, TRỪ ĐƠN THỨC, ĐA THỨC

Bài 7

a) Cho $A = 3x - 4 - |2x - 1|$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Với giá trị nào của x thì $A = 10$?

b) Cho $B = |3x - 3| + (x - 5)$.

1) Rút gọn biểu thức B

2) Với giá trị nào của x thì $B = 2$?

• Tìm hiểu đề bài

Câu a của đề bài là trừ hai đa thức, sau đó là tìm giá trị của x (nếu có) để $A = 10$.

Câu b của đề bài là cộng hai đa thức, sau đó là tìm giá trị của x (nếu có) để $B = 2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để rút gọn biểu thức A, B đã cho phải khử được dấu giá trị tuyệt đối với lưu ý là:

$$|P| = \begin{cases} P & \text{với } P \geq 0 \\ -P & \text{với } P < 0 \end{cases}$$

Để tìm giá trị của x (nếu có) phải căn cứ vào các biểu thức A, B đã được rút gọn cùng với điều kiện của x khi khử dấu giá trị tuyệt đối.

• Cách giải

a) 1) Rút gọn biểu thức A.

- Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $2x - 1 \geq 0$ nên $|2x - 1| = 2x - 1$. Khi đó, có:

$$A = 3x - 4 - (2x - 1)$$

$$= 3x - 4 - 2x + 1 = x - 3.$$

- Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $2x - 1 < 0$ nên $|2x - 1| = 1 - 2x$. Khi đó, có:

$$A = 3x - 4 - (1 - 2x)$$

$$= 3x - 4 - 1 + 2x = 5x - 5$$

2) Tìm giá trị của x để $A = 10$.

Phải xét hai trường hợp sau:

$$+ \text{ Trường hợp 1: } \begin{cases} x - 3 = 10 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 13$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \begin{cases} 5x - 5 = 10 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Không tồn tại } x.$$

Vậy với $x = 13$ thì $A = 10$.

b) 1) Rút gọn biểu thức B

- Nếu $x \geq 1$ thì $3x - 3 \geq 0$ nên $|3x - 3| = 3x - 3$. Khi đó, có:

$$B = 3x - 3 + (x - 5)$$

$$= 3x + x - 3 - 5 = 4x - 8$$

- Nếu $x < 1$ thì $3x - 3 < 0$ nên $|3x - 3| = 3 - 3x$. Khi đó, có:

$$B = 3 - 3x + (x - 5)$$

$$= 3 - 3x + x - 5 = -2x - 2.$$

2) Tìm giá trị của x để $B = 2$

Phải xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 4x - 8 = 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

+ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} -2x - 2 = 2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 4 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy với $x = \frac{5}{2}$; $x = -2$ thì $B = 2$.

● Khai thác bài toán

a) Để tự tin và khẳng định tính đúng đắn của đáp số một bài toán đã tìm được, nên có thói quen thử lại. Dưới đây ta thử lại đối với câu b như sau:

- Với $x = \frac{5}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= |3x - 3| + (x - 5) \\ &= \left| 3 \cdot \frac{5}{2} - 3 \right| + \left(\frac{5}{2} - 5 \right) = \left| \frac{15-6}{2} \right| + \left(\frac{5-10}{2} \right) \\ &= \left| \frac{9}{2} \right| + \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

- Với $x = -2$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= |3x - 3| + (x - 5) \\ &= |3 \cdot (-2) - 3| + (-2 - 5) \\ &= |-6 - 3| + (-7) = |-9| + (-7) \\ &= 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

b) Cần lưu ý khi trình bày việc khử dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn, với câu b, để tìm điều kiện về x , ta làm như sau:

$$|3x - 3| = \begin{cases} 3x - 3 & \text{với } 3x - 3 \geq 0 \\ -(3x - 3) & \text{với } 3x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\text{Với } 3x - 3 < 0 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow x < 1$$

Việc tìm điều kiện của x do làm nhiều, thành quen, nên có thể

viết ngay được kết quả cần có. Nếu không, phải viết ra như đã trình bày như trên ở vở nháp, còn khi trình bày bài làm phải bắt đầu từ: nếu $x \geq 1$ (hoặc nếu $x < 1$)...

Trên đây trình bày các lưu ý về cách làm bài, trình bày lời giải để bạn đọc suy ngẫm mà thực hành tốt.

Bài 8. Tìm P biết:

a) $P + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$;

b) $(25xy^2 - 13x^2y + x^3) - P = 11xy^2 - 2x^3$;

c) $(8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) + P = 0$;

d) $P - (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) = 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải tìm đa thức P, trong đó P là một số hạng của một tổng (câu a, câu c), hay P là số trừ (câu b), hay P là số bị trừ (câu d).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Vận dụng mối quan hệ giữa các số hạng và tổng trong phép cộng, số bị trừ, số trừ và hiệu trong phép trừ.

• Cách giải

a) $P + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

$$P = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$= 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

b) $(25xy^2 - 13x^2y + x^3) - P = 11xy^2 - 2x^3$

$$P = (25xy^2 - 13x^2y + x^3) - (11xy^2 - 2x^3)$$

$$= 25xy^2 - 13x^2y + x^3 - 11xy^2 + 2x^3 = 3x^3 + 14xy^2 - 13x^2y$$

c) $(8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) + P = 0$

$$P = 0 - (8xyz + 20x^2yz^2 - 5xy^3) = -8xyz - 20x^2yz^2 + 5xy^3$$

d) $P - (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) = 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz$

$$\begin{aligned}
 P &= 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz + (3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz) \\
 &= 2x^3y^2 + 4xyz^2 - 2xyz + 3x^3y^2 - 5xyz^2 + 3xyz \\
 &= 5x^3y^2 - xyz^2 + xyz.
 \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Như đã biết hai số đối nhau hay hai biểu thức đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau còn dấu khác nhau.

Với câu c, tổng của hai biểu thức bằng 0, chắc chắn rằng đó là hai biểu thức đối nhau, từ đó có thể viết ra ngay $P = -8xyz - 20x^2yz^2 + 5xy^3$. Biểu thức này chính là biểu thức đã cho trong bài toán nhưng được viết với dấu ngược lại.

Đây là một nhận xét, lưu ý bạn đọc có thể làm nhầm bài toán và trong tính toán đòi hỏi phải làm nhanh.

Bài 9. Cho các đa thức:

$$f(x) = 6x^3 - 3x^2 + x - 5;$$

$$g(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4;$$

$$h(x) = 4x^3 + 8x.$$

Tính: a) $f(x) + g(x) - h(x)$

b) $f(x) - g(x) + h(x)$

c) $g(x) + h(x) - f(x)$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho ba đa thức một biến, phải tìm tổng và hiệu của các đa thức đã cho.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Vận dụng quy tắc về phép trừ số hữu tỉ: muốn trừ đi đa thức $h(x)$ (hoặc $g(x)$), ta cộng với $-h(x)$ (hoặc $-g(x)$).

Khi cộng các đa thức đã sắp xếp, cần viết các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột, rồi cộng các hệ số của các đơn thức với nhau.

● Cách giải

a) Tính $f(x) + g(x) - h(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 6x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ g(x) & = & 3x^3 - 4x^2 \quad + 4 \\ -h(x) & = & -4x^3 \quad - 8x \end{array}$$

$$f(x) + g(x) - h(x) = 5x^3 - 7x^2 - 7x - 1$$

b) Tính $f(x) - g(x) + h(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 6x^3 - 3x^2 + x - 5 \\ -g(x) & = & -3x^3 + 4x^2 \quad - 4 \\ h(x) & = & 4x^3 \quad + 8x \end{array}$$

$$f(x) - g(x) + h(x) = 7x^3 + x^2 + 9x - 9$$

c) Tính $g(x) + h(x) - f(x)$:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & 3x^3 - 4x^2 \quad + 4 \\ h(x) & = & 4x^3 \quad + 8x \\ -f(x) & = & -6x^3 + 3x^2 - x + 5 \end{array}$$

$$g(x) + h(x) - f(x) = x^3 - x^2 + 7x + 9$$

● Khai thác bài toán

Các đa thức đã cho trong đề bài là các đa thức đã được sắp xếp, nếu các đa thức cho chưa sắp xếp, ta cần sắp xếp theo lũy thừa tăng (hoặc giảm) rồi làm phép tính. Chẳng hạn: cho các đa thức $f(x) = x^4 + 3x^5 - x^3 + 2x^2 - 7$ và $g(x) = -x - 7 + x^4$, tính $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ và $g(x) - f(x)$.

Trước hết ta sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần, có:

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

- Tính tổng $f(x) + g(x)$

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

$$f(x) + g(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 14$$

- Tính hiệu $f(x) - g(x)$:

$$f(x) = 3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7$$

$$-g(x) = -x^4 + x + 7$$

$$f(x) - g(x) = 3x^5 - x^3 + 2x^2 + x$$

- Tính hiệu $g(x) - f(x)$:

$$g(x) = x^4 - x - 7$$

$$-f(x) = -3x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 7$$

$$g(x) - f(x) = -3x^5 + x^3 - 2x^2 - x$$

Chú ý: Khi phải tính hiệu của $g(x)$ và $f(x)$ thì ta đã tính tổng của $g(x)$ với đa thức đối của đa thức $f(x)$ chính là $-f(x)$.

Bài 10. Thu gọn các đa thức sau rồi tìm nghiệm của chúng:

a) $(9x + 1) - (4x + 2)$; b) $(2x^2 - 5x + 1) - (x^2 + 3x + 1)$

c) $(3x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x + 5)$; d) $x(x + 4) - (x^2 + 4x)$;

e) $x^2 + 2x + 2$; f) $x^2 + x + 1$

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu thu gọn các đa thức đã cho, sau đó tìm nghiệm của đa thức sau khi đã thu gọn.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Thu gọn các đa thức bằng cách thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng. Riêng đối với các câu e, f phải biến đổi để làm xuất hiện các số hạng đồng dạng.

Để tìm nghiệm của đa thức cần giải phương trình $f(x) = 0$,

nếu tồn tại giá trị của x thì giá trị này là nghiệm của đa thức.

Với câu a, cần bỏ ngoặc, thu gọn đa thức, sau đó xét $f(x) = 0$.

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, bỏ ngoặc, thu gọn, sẽ được một hằng số không thể bằng 0 nên không có nghiệm.

Với câu d, bỏ ngoặc, thu gọn, sẽ được số 0, hãy xét nghiệm.

Với các câu e, f cần biến đổi để làm xuất hiện các số hạng đồng dạng, rồi xem xét nghiệm.

● Cách giải

$$a) (9x + 1) - (4x + 2) = 9x + 1 - 4x - 2 = 5x - 1.$$

$$\text{Xét } 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Nghiệm của đa thức là } x = \frac{1}{5}.$$

$$b) (2x^2 - 5x + 1) - (x^2 + 3x + 1)$$

$$= 2x^2 - 5x + 1 - x^2 - 3x - 1 = x^2 - 8x.$$

$$\text{Xét } x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\text{Nghiệm của đa thức là } x = 0; x = 8.$$

$$c) (3x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 2x + 5)$$

$$= 3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 2x - 5 = -4, \text{ không thể bằng } 0.$$

Đa thức này không có nghiệm.

d) $x(x + 4) - (x^2 + 4x) = x^2 + 4x - x^2 - 4x = 0$. Đa thức này có vô số nghiệm.

$$e) x^2 + 2x + 2 = x^2 + x + x + 1 + 1$$

$$= (x^2 + x) + (x + 1) + 1$$

$$= x(x + 1) + (x + 1) + 1$$

$$= (x + 1)(x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

Vì $(x + 1)^2 \geq 0$ nên $(x + 1)^2 + 1 > 0$. Vậy đa thức $x^2 + 2x + 2$

không có nghiệm.

$$\begin{aligned}f) x^2 + x + 1 &= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\&= (x^2 + \frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} \\&= x(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} \\&= (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$\text{Vì } (x + \frac{1}{2})^2 \geq 0 \text{ nên } (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Vậy đa thức $x^2 + x + 1$ không có nghiệm.

● Khai thác bài toán

Qua cách giải bài toán trên, ta thấy:

- Đa thức ở câu c bằng -4, đó là "đa thức bậc 0" ($-4 = -4x^0$).

Đa thức bậc 0 thì không có nghiệm.

- Đa thức ở câu d bằng 0, đa thức này được gọi là "đa thức 0" (đa thức này không có bậc). Đa thức 0 thì có vô số nghiệm.

Thật vậy, nếu:

$$x = 1, \text{ ta có } 1(1 + 4) - (1^2 + 4 \cdot 1) = 5 - 5 = 0$$

$$x = 2, \text{ ta có } 2(2 + 4) - (2^2 + 4 \cdot 2) = 12 - 12 = 0, \dots$$

Rõ ràng đa thức luôn bằng 0 với mọi giá trị của x

- Các đa thức ở hai câu e, f được thu gọn có dạng là tổng của một bình phương và một số. Biết bình phương của một số là luôn lớn hơn hay bằng 0, khi cộng thêm một số vào, thì nó luôn lớn hơn 0, tức không bằng 0, nên không thể có nghiệm được.

Ở câu e, f, đa thức đã cho gồm ba đơn thức. Ta đã tách $2x$ và 2 cũng như x và 1 để biến đổi đa thức đã cho thành 5 đơn thức. Bằng cách kết hợp các số hạng ta đã làm xuất hiện các thừa số

chung từ đó theo định nghĩa lũy thừa, đã biến đổi mỗi đa thức về dạng tổng của một bình phương và một số. Đây là một thủ thuật trong biến đổi đồng nhất một biểu thức rất hay dùng, tuy khó nhưng làm nhiều lần sẽ thành quen.

Bài 11. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $3x - 2$;

b) $8 - 3x$;

c) $x^2 - 4$;

d) $x^2 + 1$;

e) $x^2 - 2x$;

f) $x^3 - x^2 + x - 1$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu tìm xem trong các đa thức đã cho đa thức nào có nghiệm, đa thức nào không có nghiệm. Nếu có nghiệm thì nghiệm đó bằng bao nhiêu?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần xét xem mỗi đa thức đã cho có bằng 0 hay không? Chỉ có đa thức nào bằng 0 mới có thể tìm nghiệm được.

● **Cách giải**

a) $3x - 2 = 0$ từ đó $x = \frac{2}{3}$.

Đa thức $3x - 2$ có nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

b) $8 - 3x = 0$ từ đó $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Đa thức $8 - 3x$ có nghiệm $x = 2\frac{2}{3}$.

c) $x^2 - 4 = 0$ từ đó $x = \pm 2$

Đa thức $x^2 - 4$ có nghiệm $x = 2$; $x = -2$.

d) Vì $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 > 0$.

Đa thức $x^2 + 1$ không có nghiệm.

$$e) x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đa thức $x^2 - 2x$ có nghiệm $x = 0$; $x = 2$.

f) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0$. Trường hợp $x - 1 = 0$ cho $x = 1$. Trường hợp $x^2 + 1 = 0$ không xảy ra.

Đa thức $x^3 - x^2 + x - 1$ có nghiệm $x = 1$.

● Khai thác bài toán

Qua cách giải bài toán trên, nhận thấy:

- Đa thức $x^2 - 4$ và đa thức $x^2 - 2x$ là hai đa thức có nghiệm.
- Đa thức $x^2 + 1$ là đa thức không có nghiệm.

Như vậy, một đa thức gồm 2 đơn thức, trong đó đơn thức thứ nhất là một bình phương, nếu đơn thức thứ hai mang dấu trừ thì chắc chắn đa thức gồm 2 đơn thức đó sẽ có nghiệm; còn nếu đơn thức thứ hai mang dấu cộng thì đa thức gồm 2 đơn thức này sẽ vô nghiệm. Bạn đọc hãy tự thử lại.

NHÂN ĐA THỨC

Bài 12. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến y :

a) $A = (3y - 5)(2y + 11) - (2y + 3)(3y + 7);$

b) $B = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y^3.$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a đã cho hiệu của hai tích các đa thức với biến y , phải chứng minh rằng biểu thức A không phụ thuộc y .

Đề bài câu b đã cho tích của hai đa thức cộng với một đơn thức, phải chứng minh rằng biểu thức B không phụ thuộc y .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, thực hiện các phép nhân đa thức, sau đó bỏ dấu

ngoặc trước có dấu trừ, rồi ước lược các đơn thức đồng dạng. Với câu b, làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (3y - 5)(2y + 11) - (2y + 3)(3y + 7) \\ &= 6y^2 + 33y - 10y - 55 - (6y^2 + 14y + 9y + 21) \\ &= 6y^2 + 33y - 10y - 55 - 6y^2 - 14y - 9y - 21 = -76. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức A không phụ thuộc vào biến y.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y^3 \\ &= x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3 + 8y^3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức B không phụ thuộc vào biến y.

● **Khai thác bài toán**

Ta nhận thấy:

- Ở câu a, kết quả biến đổi biểu thức A là một hằng số, vậy biểu thức A luôn có giá trị là -76, giá trị này chứng tỏ rằng A không phụ thuộc vào y.

- Còn ở câu b, kết quả biến đổi biểu thức B là một đơn thức x^3 , vậy biểu thức B luôn có giá trị là x^3 , giá trị này chứng tỏ rằng B không phụ thuộc vào y, nhưng B có phụ thuộc vào giá trị của x.

Bạn đọc hãy xem xét kết quả của biểu thức:

$$C = 3x(2x - 5y) - (3x - 1)2x - x(2 - 15y) - 2$$

để rút ra kết luận về giá trị của C và các biến x, y.

Bài 13. Sắp xếp đa thức theo một biến chính rồi làm phép nhân:

- a) $(xy^2 + x^2y + x^3 + y^3)(x - y);$
- b) $(x^3 - y^3 - 2xy^2)(y^3 - 2x^2y + x^3);$
- c) $(x - y)(y^4 + x^2y^2 + xy^3 + x^3y + x^4);$
- d) $(16 + 4x^2 - 2x^3 - 8x + x^4)(x + 2).$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi phải sắp xếp các đa thức đã cho cùng theo lũy thừa tăng hoặc giảm của một biến nào đó, rồi thực hiện phép nhân đa thức với đa thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, ở đa thức thứ hai, biến x có bậc một, bậc không, tức biến x được xếp theo thứ tự giảm dần, do đó đa thức thứ nhất cũng cần được sắp xếp theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có: $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.

Sau đó viết đa thức thứ hai dưới đa thức thứ nhất, rồi thực hiện phép nhân.

Với các câu b, c, d làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 x^3 & + x^2y + xy^2 + y^3 \\
 x & \quad x - y
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 \\
 + \quad - x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4 \\
 \hline
 x^4 \qquad \qquad \qquad - y^4
 \end{array}
 \end{array}$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 & x^3 & - 2xy^2 - y^3 \\
 x & x^3 - 2x^2y & + y^3
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 x^6 \qquad \qquad - 2x^4y^2 - x^3y^3 \\
 + \quad - 2x^5y \qquad \qquad + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x^3y^3 \qquad \qquad - 2xy^5 - y^6 \\
 \hline
 x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 - 2xy^5 - y^6
 \end{array}
 \end{array}$$

c) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\
 \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x - y \\
 \hline
 x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 \\
 + \quad \quad - x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 \\
 \hline
 x^5 \quad \quad \quad - y^5
 \end{array}$$

d) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x , ta có:

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \\
 \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x + 2 \\
 \hline
 x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x \\
 + \quad \quad \quad 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 32 \\
 \hline
 x^5 \quad \quad \quad + 32
 \end{array}$$

● Khai thác bài toán

- Bốn câu a, b, c, d của bài toán trên ta đã quan tâm đến biến chính là x , thử làm câu b khi coi y là biến chính để xem kết quả thế nào.

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad -y^3 - 2xy^2 \quad \quad \quad + x^3 \\
 \quad \quad \quad x \quad y^3 \quad \quad \quad - 2x^2y + x^3 \\
 \hline
 -y^6 - 2xy^5 \quad \quad \quad + x^3y^3 \\
 + \quad \quad \quad 2x^2y^4 + 4x^3y^3 \quad \quad \quad - 2x^5y \\
 \quad \quad \quad - x^3y^3 - 2x^4y^2 \quad \quad \quad + x^6 \\
 \hline
 -y^6 - 2xy^5 + 2x^2y^4 + 4x^3y^3 - 2x^4y^2 - 2x^5y + x^6
 \end{array}$$

Kết quả này và kết quả trong cách giải đều có các đơn thức như nhau, nhưng thứ tự của chúng khác nhau. Cụ thể là:

+ Khi chọn biến chính là x thì ở kết quả, các đơn thức có bậc đối với biến x từ 6 xuống 0, còn đối với biến y có bậc từ 0 đến 6.

+ Khi chọn biến chính là y , thì ở kết quả, các đơn thức có bậc đối với biến y từ 6 xuống 0, còn đối với biến x có bậc từ 0 đến 6.

Vậy việc chọn biến nào là biến chính không ảnh hưởng gì tới kết quả của bài toán.

- Trong lời giải các câu trên ta đều sắp xếp đa thức bị nhân và đa thức nhân theo cùng một biến chính. Vấn đề đặt ra là sắp xếp mỗi đa thức theo một lũy thừa của biến chính, có gì xảy ra?

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & x^3 & & - & 2xy^2 & - y^3 \\
 x & & y^3 & & - & 2x^2y & & + x^3
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & x^3y^3 & & - 2xy^5 - y^6 \\
 + & & - 2x^5y & & + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 \\
 x^6 & & - 2x^4y^2 & & - x^3y^3
 \end{array} \\
 \hline
 x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 4x^3y^3 + 2x^2y^4 - 2xy^5 - y^6
 \end{array}$$

Kết quả này với kết quả ở câu b trong lời giải giống hệt nhau.

- Một điều cần hết sức lưu ý khi làm phép nhân hai đa thức là phải viết các đơn thức đồng dạng của các tích riêng theo cùng một cột. Nếu tích riêng nào khuyết bậc trung gian thì để trống một khoảng ứng với bậc khuyết ấy, nhờ vậy việc tính toán sẽ nhanh chóng hơn.

Bài 14. Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của a , b , c :

a) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;

b) $(a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 2a(b^2 + c^2) - abc$.

- **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu chứng minh rằng, với mọi giá trị của a, b, c hai đẳng thức đã cho là đúng.

- **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần biến đổi về trái, thực chất là thực hiện phép nhân hai đa thức, nếu tích tìm được đúng bằng đa thức ở vế phải, thì đẳng thức được chứng minh.

- **Cách giải**

a) Thực hiện phép nhân hai đa thức ở vế trái:

$$\begin{array}{r}
 a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\
 \times \qquad \qquad \qquad a + b + c \\
 \hline
 a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c \\
 + \quad - ab^2 \qquad \quad + a^2b - abc \qquad \quad + bc^2 + b^3 - b^2c \\
 \qquad \qquad \quad - ac^2 \qquad \quad - abc + a^2c - bc^2 \qquad \quad + b^2c + c^3 \\
 \hline
 a^3 \qquad \qquad \qquad - 3abc \qquad \qquad \qquad + b^3 \qquad \qquad + c^3
 \end{array}$$

Vế trái là đa thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, đúng bằng vế phải, vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Thực hiện phép nhân hai đa thức ở vế trái:

$$\begin{array}{r}
 a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca \\
 \times \qquad \qquad \qquad a - b - c \\
 \hline
 a^3 + a^2b - ab^2 - ac^2 + abc + ca^2 \\
 + \quad - a^2b - ab^2 \qquad \quad - abc \qquad \quad + b^3 + bc^2 - b^2c \\
 \qquad \qquad \quad - ac^2 - abc - ca^2 \qquad \quad - bc^2 + b^2c + c^3 \\
 \hline
 a^3 \qquad \quad - 2ab^2 - 2ac^2 - abc \qquad \quad + b^3 \qquad \quad + c^3
 \end{array}$$

Có thể viết gọn tích trên như sau:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 2a(b^2 + c^2) - abc.$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

● Khai thác bài toán

Theo trên, để chứng minh một đẳng thức, ta đã biến đổi (tức là thực hiện các phép tính) ở vế trái để được một biểu thức bằng biểu thức ở vế phải.

Trong một số trường hợp, để chứng minh một đẳng thức, ta phải biến đổi cả hai vế sao cho chúng cùng bằng một biểu thức thứ ba, đó cũng là một cách chứng minh đẳng thức.

Chẳng hạn, hãy chứng minh đẳng thức sau:

$$(3a + 2b - 1)(a + 5) - (a - 2) \cdot 2b = (3a + 5)(a + 3) + 2(7b - 10).$$

Ta có thể làm như sau:

- Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned}(3a + 2b - 1)(a + 5) - (a - 2) \cdot 2b \\&= 3a^2 + 15a + 2ab + 10b - a - 5 - (2ab - 4b) \\&= 3a^2 + 15a + 2ab + 10b - a - 5 - 2ab + 4b \\&= 3a^2 + 14a + 14b - 5\end{aligned}$$

- Biến đổi vế phải:

$$\begin{aligned}(3a + 5)(a + 3) + 2(7b - 10) \\&= 3a^2 + 9a + 5a + 15 + 14b - 20 \\&= 3a^2 + 14a + 14b - 5\end{aligned}$$

Vế trái và vế phải cùng bằng biểu thức $3a^2 + 14a + 14b - 5$.
Vậy đẳng thức được chứng minh.

Chú ý. Cũng có thể lấy biểu thức ở vế trái trừ đi biểu thức ở vế phải, nếu kết quả bằng 0 thì chúng tỏ đẳng thức đã cho là đúng. Vậy đẳng thức được chứng minh. Bạn đọc hãy tự làm.

Bài 15

a) Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của số thứ hai và số thứ ba hơn tích của số thứ nhất và số thứ hai là 100. Tìm ba số tự nhiên ấy.

b) Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 46. Tìm bốn số tự nhiên ấy.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho 3 số tự nhiên liên tiếp, biết tích của số thứ hai và số thứ ba hơn tích của số thứ nhất và số thứ hai là 100, phải tìm 3 số đó.

Câu b lại cho bốn số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số đầu (tức số thứ nhất và số thứ hai) nhỏ hơn tích của hai số sau (tức là số thứ ba và số thứ tư) là 46. Tìm 4 số đó.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Ta biết rằng, hai số tự nhiên liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị, do đó nếu gọi số tự nhiên thứ nhất là a ($a \neq 0$) thì số tự nhiên thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt là $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$.

Với câu a, tích của số thứ hai và số thứ ba là $(a + 1)(a + 2)$; tích của số thứ nhất và số thứ hai là $a(a + 1)$. Dựa vào đề bài ta được một đẳng thức đúng. Từ đó tìm ra kết quả bài toán.

Với câu b, tích của hai số đầu là $a(a + 1)$, tích của hai số sau là $(a + 2)(a + 3)$. Cũng dựa vào đề bài ta được một đẳng thức đúng. Từ đó tìm ra kết quả bài toán.

• Cách giải

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là a , $a + 1$, $a + 2$ (với $a \neq 0$) thì tích của số thứ hai và số thứ ba là $(a + 1)(a + 2)$, tích của số thứ nhất và số thứ hai là $a(a + 1)$. Theo đề bài ta có đẳng thức sau:

$$(a + 1)(a + 2) - a(a + 1) = 100$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái, ta có:

$$a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - a = 100;$$

$$2a + 2 = 100; 2a = 100 - 2 = 98; a = 98 : 2 = 49.$$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 49; 50; 51.

b) Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a + 1, a + 2, a + 3$ (với $a \neq 0$), thì tích của hai số đầu là $a(a + 1)$, tích của hai số sau là $(a + 2)(a + 3)$. Theo đề bài ta có đẳng thức sau:

$$(a + 2)(a + 3) - a(a + 1) = 46$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái, ta có:

$$a^2 + 3a + 2a + 6 - a^2 - a = 46;$$

$$4a + 6 = 46; 4a = 40; a = 10.$$

Vậy bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 10; 11; 12; 13.

● Khai thác bài toán

- Làm loại bài toán này, bạn đọc nên thử lại để kiểm tra kết quả theo như đề bài đã ra.

Với câu a, ta có:

$$50. 51 - 49. 50 = 2550 - 2450 = 100$$

Với câu b, ta có:

$$12. 13 - 10. 11 = 156 - 110 = 46$$

Bạn đọc nên có thói quen thử lại kết quả mọi bài toán đã giải để khẳng định và tin tưởng vào bài làm của bản thân.

- Vẫn là đề bài tìm 4 số tự nhiên liên tiếp được cho như sau:

Cho bốn số tự nhiên liên tiếp. Biết rằng tích của số thứ hai và thứ tư hơn tích của số thứ nhất và thứ ba là 9. Tìm 4 số tự nhiên ấy.

Tương tự như cách giải trên, ta có:

$$(n + 1)(n + 3) - n(n + 2) = 9 \text{ hay}$$

$$n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 2n = 9;$$

$$2n + 3 = 9; n = 3.$$

Bốn số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 3; 4; 5; 6.

Thử lại: $4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 24 - 15 = 9$.

HÀNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Bài 16. Tìm x biết

a) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 172$;

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 14$;

c) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 23$;

d) $(x + 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3(x^2 - 1) = 8$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải tìm được giá trị của x trong các đẳng thức đã cho.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước bằng cách sử dụng các hằng đẳng thức: bình phương của một tổng hai số $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, bình phương của một hiệu hai số $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, tích của tổng hai số với hiệu hai số ấy $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Cần chú ý đến quy tắc bỏ ngoặc đẳng trước có dấu trừ.

Với câu b, sử dụng các hằng đẳng thức: hiệu của hai lập phương $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, tích của tổng hai số với hiệu hai số ấy $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đẳng trước có dấu trừ.

Với câu c, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một hiệu $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$, tổng hai lập phương $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$. Cũng cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đẳng trước có dấu trừ.

Với câu d, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một tổng $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, tổng của hai lập

phương $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$. Cần chú ý đến quy tắc bỏ dấu ngoặc đằng trước có dấu trừ.

● Cách giải

a) $3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) = 172$

$$3(x^2 + 4x + 4) + (4x^2 - 4x + 1) - 7(x^2 - 9) = 172$$

$$3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 - 4x + 1 - 7x^2 + 63 = 172$$

hay $8x + 76 = 172$ từ đó $x = 12$.

b) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) = 14$

$$x^3 - 1 - x(x^2 - 4) = 14; \quad x^3 - 1 - (x^3 - 4x) = 14$$

$$x^3 - 1 - x^3 + 4x = 14; \quad \text{hay } 4x - 1 = 14.$$

Từ đó $x = 3\frac{3}{4}$.

c) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 23$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 27) + (3x^2 - 12) = 23$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 27 + 3x^2 - 12 = 23$$

hay $3x - 40 = 23$. Từ đó $x = 21$

d) $(x + 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3(x^2 - 1) = 8$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 8) - (3x^2 - 3) = 8$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 8 - 3x^2 + 3 = 8$$

hay $3x - 4 = 8$. Từ đó $x = 4$.

● Khai thác bài toán

- Trong bài 16, ta đã vận dụng cả 7 hằng đẳng thức đã học, đó là:

1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

4) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

$$6) A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$7) A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

Đối với bạn đọc có trình độ PTCS, đòi hỏi phải thuộc lòng và vận dụng thành thạo 7 hằng đẳng thức trên theo cả hai chiều, từ trái sang phải và từ phải sang trái. Chẳng hạn, cho các biểu thức ở vế trái, yêu cầu viết tiếp vào vế phải:

$$\begin{aligned} \text{a) } (2xy)^3 + (3x^2y^2)^3 &= (2xy + 3x^2y^2)[(2xy)^2 - 2xy \cdot 3x^2y^2 + (3x^2y^2)^2] \\ &= (2xy + 3x^2y^2)(4x^2y^2 - 6x^3y^3 + 9x^4y^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 125x^3y^3 + 225x^2y^3 + 135xy^3 + 27y^3 \\ &= (5xy)^3 + 3 \cdot (5xy)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 5xy(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= (5xy + 3y)^3. \end{aligned}$$

Trên đây chỉ đưa ra hai ví dụ cụ thể để chứng tỏ một điều rằng: cần phải sử dụng 7 hằng đẳng thức kể trên theo cả "hai chiều" một cách thành thạo.

- Sau khi tìm được giá trị của x , cần thử lại. Chẳng hạn với câu b, ta thử lại như sau:

Với $x = 3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, ta thay vào vế trái của đẳng thức:

$$\begin{aligned} (x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x - 2)(x + 2) \\ &= \left(\frac{15}{4} - 1\right)\left(\frac{15^2}{4^2} + \frac{15}{4} + 1\right) - \frac{15}{4}\left(\frac{15}{4} - 2\right)\left(\frac{15}{4} + 2\right) \\ &= \left(\frac{15^3}{4^3} - 1\right) \cdot \frac{15}{4}\left(\frac{15^2}{4^2} - 4\right) = \frac{15^3}{4^3} - 1 \cdot \frac{15^3}{4^3} + 15 = 14. \end{aligned}$$

Ta được kết quả ở vế phải, chứng tỏ giá trị $x = 3\frac{3}{4}$ là đúng.

Bài 17. Giá trị của các biểu thức sau có phụ thuộc vào biến x không?

$$\text{a) } (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) - 3(x - 20);$$

$$\text{b) } 4x(7x^2 - 1) - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - x(x - 2)(x + 2);$$

$$\text{c) } (x + 3)^3 - (x - 3)^3.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài đòi hỏi xét xem trong các biểu thức đã cho, biểu thức nào phụ thuộc biến x , biểu thức nào không phụ thuộc biến x .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một hiệu $(A - B)^3$, tổng của hai lập phương $A^3 + B^3$, tích của tổng hai số và hiệu của hai số ấy $(A + B)(A - B)$ và sau cùng là nhân đơn thức với đa thức. Chú ý đến dấu đối với phép trừ. Từ đó có kết quả.

Với câu b, thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức, sau đó áp dụng các hằng đẳng thức: hiệu của hai lập phương $A^3 - B^3$, tích của hiệu 2 số và tổng của hai số ấy $(A - B)(A + B)$, sau đó là phép nhân đơn thức với đa thức. Cần chú ý đến dấu đối với phép trừ. Từ đó có kết quả.

Với câu c, vận dụng hằng đẳng thức hiệu hai lập phương $A^3 - B^3$. Từ đó có kết quả.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } & (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4) - 3(x - 20) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 8) + 3(x^2 - 16) - (3x - 60) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 8 + 3x^2 - 48 - 3x + 60 = 3. \end{aligned}$$

Biểu thức có giá trị bằng 3, như vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned} \text{b) } & 4x(7x^2 - 1) - (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - x(x - 2)(x + 2) \\ &= 28x^3 - 4x - (27x^3 - 1) - x(x^2 - 4) \\ &= 28x^3 - 4x - 27x^3 + 1 - x^3 + 4x = 1 \end{aligned}$$

Biểu thức có giá trị bằng 1, như vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x .

$$\begin{aligned} \text{c) } & (x + 3)^3 - (x - 3)^3 \\ &= (x + 3 - x + 3)[(x + 3)^2 + (x + 3)(x - 3) + (x - 3)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6(x^2 + 6x + 9 + x^2 - 9 + x^2 - 6x + 9) \\
 &= 6(3x^2 + 9) = 18x^2 + 54
 \end{aligned}$$

Giá trị của biểu thức đã cho phụ thuộc vào biến x .

● **Khai thác bài toán**

- Câu c bài 16 có thể sử dụng các hằng đẳng thức: lập phương của một tổng, lập phương của một hiệu như sau:

$$\begin{aligned}
 &(x + 3)^3 - (x - 3)^3 \\
 &= x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 - (x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3) \\
 &= x^3 + 9x^2 + 81x + 27 - (x^3 - 9x^2 + 81x - 27) \\
 &= x^3 + 9x^2 + 81x + 27 - x^3 + 9x^2 - 81x + 27 = 18x^2 + 54.
 \end{aligned}$$

- Với bài toán loại này có thể thử lại được không?

Hoàn toàn được, bằng cách:

+ Có thể sử dụng các hằng đẳng thức khác mà vẫn có kết quả như đã làm là được.

+ Hoặc làm lại một lần nữa, mà vẫn có kết quả như đã làm là được.

Bài 18. Tìm giá trị của x và y biết rằng:

a) $x^3 + y^3 = 72$, $x^2 - xy + y^2 = 12$ và $x - y = 2$;

b) $x^3 - y^3 = 98$, $x^2 + xy + y^2 = 49$ và $x + y = 8$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài câu a cho $x^3 + y^3 = 72$, $x^2 - xy + y^2 = 12$ và $x - y = 2$, đòi hỏi tìm giá trị của x và y .

Đề bài câu b cho $x^3 - y^3 = 98$, $x^2 + xy + y^2 = 49$ và $x + y = 8$, đòi hỏi tìm giá trị của x và y .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, hãy sử dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3$ rồi thay giá trị đã biết của các biểu thức, từ đó tính được giá trị của $A + B$, kết

hợp với hiệu $x - y = 2$ đã cho sẽ có kết quả.

Với câu b, hãy sử dụng hằng đẳng thức $A^3 - B^3$ rồi thay giá trị đã biết của các biểu thức, từ đó tính được giá trị của $A - B$, kết hợp với tổng $x + y = 8$ đã cho sẽ có kết quả.

● **Cách giải**

a) Sử dụng hằng đẳng thức tổng của hai lập phương, ta có:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Thay các giá trị của các biểu thức đã cho, có:

$$72 = (x + y) \cdot 12, \text{ suy ra } x + y = \frac{72}{12} = 6 \quad (1)$$

Biết $x - y = 2$ suy ra $x = y + 2$ (2). Thay (2) vào (1) có:

$$y + 2 + y = 2y + 2 = 6 \Rightarrow 2y = 6 - 2 = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Do đó } x = y + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Vậy $x = 4$ và $y = 2$.

b) Sử dụng hằng đẳng thức hiệu của hai lập phương, ta có:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Thay các giá trị của các biểu thức đã cho, có:

$$98 = (x - y) \cdot 49 \text{ suy ra } x - y = \frac{98}{49} = 2 \quad (1).$$

Biết $x + y = 8$ suy ra $y = 8 - x$ (2). Thay (2) vào (1) có:

$$x - y = x - (8 - x) = x - 8 + x = 2x - 8 = 2, \text{ suy ra}$$

$$2x = 8 + 2 = 10, \text{ nên } x = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\text{Do đó } y = 8 - x = 8 - 5 = 3$$

Vậy $x = 5$ và $y = 3$.

● **Khai thác bài toán**

- Bạn đọc cần thử lại các giá trị của x và y đã tìm được. Dưới đây trình bày cách thử câu a:

$$x^3 + y^3 = 4^3 + 2^3 = 64 + 8 = 72.$$

$$x^2 - xy + y^2 = 4^2 - 4 \cdot 2 + 2^2 = 16 - 8 + 4 = 20 - 8 = 12.$$

Ta tìm lại được các giá trị 72 và 12 từ $x = 4$ và $y = 2$. Vậy giá trị x, y tìm được là đúng.

- Hãy vận dụng các hằng đẳng thức đã học để làm bài toán sau đây: Cho $x - y = 4$, $x^2 + y^2 = 36$. Tính $x^3 - y^3$.

Ta có thể làm như sau:

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Thay giá trị của các biểu thức đã biết, có:

$$x^3 - y^3 = 4.(36 + xy) \quad (1).$$

Biết $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4^2 = 16$. Thay giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 = 36$, có:

$x^2 + y^2 - 2xy = 36 - 2xy = 16$, suy ra $2xy = 36 - 16 = 20$, nên $xy = 10$ (2).

Thay (2) vào (1), có:

$$x^3 - y^3 = 4.(36 + 10) = 4.46 = 184.$$

Bài 19. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = (x + y + 3)^3 - (x + y - 3)^3 - 18(x + y)^2.$$

• Tìm hiểu đề bài

Biểu thức A là dãy các phép trừ các lũy thừa bậc 3, bậc 2 của các đa thức mà ta phải rút gọn.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Theo định nghĩa lũy thừa thì:

$$(x + y + 3)^3 = (x + y + 3)(x + y + 3)(x + y + 3), \text{ và}$$

$$(x + y - 3)^3 = (x + y - 3)(x + y - 3)(x + y - 3)$$

Hãy làm lần lượt các phép nhân đa thức kể trên để có kết quả của hai lũy thừa bậc 3 đó. Còn số hạng thứ 3 của biểu thức A là tích của 18 với bình phương của tổng x và y .

Hãy tính riêng từng lũy thừa rồi gộp vào để tính A.

● Cách giải

$$\begin{aligned}
 (x + y + 3)^3 &= (x + y + 3)(x + y + 3)(x + y + 3) \\
 &= (x + y + 3)(x^2 + xy + 3x + xy + y^2 + 3y + 3x + 3y + 9) \\
 &= (x + y + 3)(x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 6y + 9) \\
 &= x^3 + xy^2 + 2x^2y + 6x^2 + 6xy + 9x + y^3 + 2xy^2 + x^2y + \\
 &\quad + 6xy + 6y^2 + 9y + 3x^2 + 6xy + 18x + 3y^2 + 18y + 27 \\
 &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 + 27y + 27
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x + y - 3)^3 &= (x + y - 3)(x + y - 3)(x + y - 3) \\
 &= (x + y - 3)(x^2 + xy - 3x + xy + y^2 - 3y - 3x - 3y + 9) \\
 &= (x + y - 3)(x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 9) \\
 &= x^3 + xy^2 + 2x^2y - 6x^2 - 6xy + 9x + y^3 + 2xy^2 + x^2y - \\
 &\quad - 6xy - 6y^2 + 9y - 3x^2 - 6xy + 18x - 3y^2 + 18y - 27 \\
 &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 9x^2 - 18xy + 27x - 9y^2 + 27y - 27.
 \end{aligned}$$

$$18(x + y)^2 = 18(x^2 + 2xy + y^2) = 18x^2 + 36xy + 18y^2.$$

Vậy có:

$$\begin{aligned}
 A &= (x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 \\
 &\quad + 27y + 27) - (x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 9x^2 - 18xy + 27x \\
 &\quad - 9y^2 + 27y - 27) - (18x^2 + 36xy + 18y^2). \\
 &= x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 9x^2 + 18xy + 27x + 9y^2 \\
 &\quad + 27y + 27 - x^3 - y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + 9x^2 + 18xy - 27x + \\
 &\quad 9y^2 - 27y + 27 - 18x^2 - 36xy - 18y^2 = 54.
 \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

a) Cách giải bài toán như đã trình bày tuy đúng nhưng còn dài, có thể có cách giải ngắn hơn và áp dụng được hằng đẳng thức đã học, nếu đặt $x + y$ có mặt trong cả 3 số hạng của đa thức A bằng Z , ta có:

$$A = (Z + 3)^3 - (Z - 3)^3 - 18Z^2$$

Áp dụng lập phương của một tổng, một hiệu, có:

$$\begin{aligned}A &= Z^3 + 9Z^2 + 27Z + 27 - (Z^3 - 9Z^2 + 27Z - 27) - 18Z^2 \\&= Z^3 + 9Z^2 + 27Z + 27 - Z^3 + 9Z^2 - 27Z + 27 - 18Z^2 = 54.\end{aligned}$$

b) Cách giải bài toán trên được rút gọn hơn, nếu biết:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)(x + y + 3) &= (x + y + 3)^2 \\&= [(x + y) + 3]^2 = (x + y)^2 + 2(x + y).3 + 3^2 \\&= x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 6y + 3^2 \\&= x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x.3 + 2y.3 \quad (1)\end{aligned}$$

Như vậy, bình phương của một tổng gồm 3 số hạng bằng tổng các bình phương của mỗi số hạng đó cộng với hai lần tích số thứ nhất với số thứ hai, cộng với hai lần tích số thứ nhất với số thứ ba, cộng với hai lần tích số thứ hai với số thứ ba.

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } (x + y + 3)^3 &= \\&= (x + y + 3)(x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x.3 + 2y.3) \\ \text{và } (x + y - 3)^3 &= \\&= (x + y - 3)[x^2 + y^2 + 3^2 + 2xy + 2x(-3) + 2y(-3)].\end{aligned}$$

Bạn đọc hãy làm tiếp bài toán theo hướng giải này.

c) Cũng có thể áp dụng hằng đẳng thức hiệu của hai lập phương đối với 2 số hạng đầu của A, có:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^3 - (x + y - 3)^3 &= \\&= (x + y + 3 - x - y + 3)[(x + y + 3)^2 + \\&\quad (x + y + 3)(x + y - 3) + (x + y - 3)^2] \\&= 6[(x + y + 3)^2 + (x + y + 3)(x + y - 3) + (x + y - 3)^2].\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)^2 &= x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y \\(x + y - 3)^2 &= x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y.\end{aligned}$$

Đối với tích $(x + y + 3)(x + y - 3)$ có thể làm như sau:

$$\begin{aligned}(x + y + 3)(x + y - 3) &= [(x + y) + 3][(x + y) - 3] \\ &= (x + y)^2 - 3^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 9.\end{aligned}$$

Như vậy, ta có:

$$\begin{aligned}A &= 6[x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y + x^2 + y^2 + 9 + 2xy \\ &\quad - 6x - 6y + x^2 + 2xy + y^2 - 9] - 18(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 6(3x^2 + 3y^2 + 6xy + 9) - 18(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= 18x^2 + 18y^2 + 36xy + 54 - 18x^2 - 36xy - 18y^2 = 54.\end{aligned}$$

Bài toán này đã giới thiệu 4 cách giải, có lẽ cách giải a ở phần khai thác bài toán là lời giải hay nhất. Bạn đọc nên suy nghĩ và tìm lời giải hay cho mỗi bài toán mình làm.

Bài 20. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử (thừa số):

- a) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x$; b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$;
 c) $x^4 + x^3 + x^2 - 1$; d) $x^4 - x^2 + 2x - 1$;
 đ) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1$; e) $x^3 - y^3 - 3x + 3y$;
 h) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$; i) $(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2$;
 k) $4x^4 - 64$; l) $x^5 + 27x^2$;
 m) $x^4 - 8x$; n) $x^8 - 1$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải phân tích mỗi đa thức đã cho thành nhân tử tức là biến mỗi tổng đã cho thành một tích gồm hai hay nhiều thừa số.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Ta đã biết ba phương pháp phân tích một đa thức thành nhân tử là: đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử. Thông thường phải phối hợp cả ba phương pháp một cách linh hoạt để phân tích một đa thức thành nhân tử.

Trong ba phương pháp kể trên thì thường thường ưu tiên số một là dùng cách đặt nhân tử chung, rồi đến dùng hằng đẳng thức

và sau đó là nhóm các hạng tử. Lưu ý rằng, ở mỗi bài cụ thể cần vận dụng ba phương pháp một cách thích hợp.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x &= x(x^3 - 4x^2 - 8x + 8) = \\ &= x[(x^3 + 8) - (4x^2 + 8x)] = x[(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x(x + 2)] \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4x) = x(x + 2)(x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^3 + x^2 - 4x - 4 &= (x^3 + x^2) - (4x + 4) = \\ &= x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) = \\ &= (x + 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^4 + x^3) + (x^2 - 1) = \\ &= x^3(x + 1) + (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^4 - x^2 + 2x - 1 &= x^4 - (x^2 - 2x + 1) = (x^2)^2 - (x - 1)^2 = \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (2x + 2y) + 1 = \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = (x + y - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^3 - y^3 - 3x + 3y &= (x^3 - y^3) - (3x - 3y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^3 - 4x^2 + 4x - 1 &= (x^3 - 1) - (4x^2 - 4x) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4x(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } (x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 - z^2y^2 - z^2x^2 \\ &= [(x^2 + y^2 + xy)^2 - (xy)^2] - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + xy + xy)(x^2 + y^2 + xy - xy) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)[(x + y)^2 - z^2] = (x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 4x^4 - 64 &= 4(x^4 - 16) = 4[(x^2)^2 - 4^2] \\ &= 4(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 4(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } x^5 + 27x^2 &= x^2(x^3 + 27) = x^2(x^3 + 3^3) \\ &= x^2(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } x^4 - 8x &= x(x^3 - 8) = x(x^3 - 2^3) \\ &= x(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } x^8 - 1 &= (x^4)^2 - 1 = (x^4 + 1)[(x^2)^2 - 1] \\ &= (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Một bài toán phân tích đa thức thành nhân tử có thể có những cách làm khác nhau, chẳng hạn:

$$\begin{aligned} \text{Câu a) } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x &= (x^4 + 8x) - (4x^3 + 8x^2) = \\ &= x(x^3 + 8) - 4x^2(x + 2) \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 4x^2(x + 2) \\ &= (x + 2)[x(x^2 - 2x + 4) - 4x^2] \\ &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 4x) \\ &= x(x + 2)(x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu c) } x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^4 - 1) + (x^3 + x^2) = \\ &= [(x^2)^2 - 1] + x^2(x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + x^2(x + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) + x^2(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1 + x^2) = (x + 1)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Câu k) } 4x^4 - 64 &= (2x^2)^2 - 8^2 = (2x^2 + 8)(2x^2 - 8) \\ &= 2(x^2 + 4)2(x^2 - 4) = 4(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2). \end{aligned}$$

Nêu ra nhận xét này, mong rằng khi làm loại toán này, bạn đọc hãy tìm các cách giải khác nhau và khi làm bài, hãy chọn cách làm ngắn gọn nhất.

- Một chú ý khác cần lưu ý là 7 hằng đẳng thức đã học đều là

lũy thừa bậc 2 hoặc bậc 3, không có bậc 4, bậc 5, bậc 8 v.v... Để có thể áp dụng được các hằng đẳng thức đã học, cần phải hạ bậc bằng cách:

a) Đặt nhân tử chung, chẳng hạn câu 1:

$$x^5 + 27x^2 = x^2(x^3 + 27) = x^2(x^3 + 3^3)$$

b) Dùng lũy thừa của một lũy thừa, chẳng hạn câu k:

$$4x^4 - 64 = (2x^2)^2 - 8^2 \text{ hoặc}$$

$$4x^4 - 64 = 4(x^4 - 16) = 4[(x^2)^2 - 4^2].$$

Câu n: $x^8 - 1 = (x^4)^2 - 1.$

Bài 21. Phân tích các đa thức thành nhân tử (bằng vài phương pháp khác):

a) $x^2 - 2x - 3;$

b) $x^2 - 4x + 3;$

c) $x^2 - 10x + 24;$

d) $x^2 - 2x - 8;$

đ) $2x^2 + 7x + 3;$

e) $x^2 - 4xy + 3y^2;$

i) $x^4 + x^2 + 1;$

k) $x^4y^4 + 4.$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài cho các đa thức, đòi hỏi phân tích các đa thức đó thành nhân tử. Ngoài ba phương pháp đã biết, còn phải vận dụng thêm vài phương pháp khác như:

- Tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử. Chẳng hạn:

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4$$

$$= (x^2 + x) + (4x + 4) = x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4).$$

- Thêm rồi bớt cùng một hạng tử. Chẳng hạn:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= [(x^2)^2 + 2.x^2.2 + 2^2] - (2x)^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).$$

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Căn cứ vào từng bài, hãy làm thử rồi chọn cách tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử hoặc chọn cách thêm rồi bớt cùng một hạng tử.

Trong quá trình giải mỗi bài cũng vẫn phải vận dụng linh hoạt ba phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử đã biết.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x \cdot 2 \cdot 1 = (x^2 - 1) - (2x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2) \\ &= (x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 4 - 1 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 1 \\ &= (x - 2)^2 - 1 = (x - 2 + 1)(x - 2 - 1) \\ &= (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 - 10x + 24 &= x^2 - 4x - 6x + 24 = (x^2 - 4x) - (6x - 24) \\ &= x(x - 4) - 6(x - 4) = (x - 4)(x - 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 2x - 8 &= x^2 + 2x - 4x - 8 = (x^2 + 2x) - (4x + 8) \\ &= x(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + 6x + x + 3 = (2x^2 + 6x) + (x + 3) \\ &= 2x(x + 3) + (x + 3) = (x + 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - 4xy + 3y^2 &= x^2 - xy - 3xy + 3y^2 = (x^2 - xy) - (3xy - 3y^2) \\ &= x(x - y) - 3y(x - y) = (x - y)(x - 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } x^4y^4 + 4 &= x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4) - 4x^2y^2 = (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2y^2 + 2 + 2xy)(x^2y^2 + 2 - 2xy). \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Nếu chịu khó suy nghĩ và tìm tòi, các câu trong bài 21 có thể có những cách giải khác nhau. Chẳng hạn:

- Với câu a) ngoài cách giải trên có thể giải theo ba cách sau:

* *Cách 2.* Thêm 1 và bớt 1

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = \\&= (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 2^2 = \\&= (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3)\end{aligned}$$

* *Cách 3.* Thêm 6 và bớt 6

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 3 + 6 - 6 = x^2 - 9 - 2x + 6 = \\&= (x^2 - 9) - (2x - 6) = (x - 3)(x + 3) - 2(x - 3) \\&= (x - 3)(x + 3 - 2) = (x - 3)(x + 1)\end{aligned}$$

* *Cách 4.* Thêm x và bớt x

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= x^2 - 2x - 3 + x - x = x^2 + x - 3x - 3 = \\&= (x^2 + x) - (3x + 3) = x(x + 1) - 3(x + 1) \\&= (x + 1)(x - 3).\end{aligned}$$

- Với câu b) ngoài cách giải trên có thể giải theo ba cách sau:

* *Cách 2.* Thêm 1 và bớt 1

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 = x^2 - 1 - 4x + 4 = \\&= (x^2 - 1) - (4x - 4) = (x - 1)(x + 1) - 4(x - 1) \\&= (x - 1)(x + 1 - 4) = (x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

* *Cách 3.* Thêm 9 và bớt 9

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 3 + 9 - 9 = x^2 - 9 - 4x + 12 = \\&= (x^2 - 9) - (4x - 12) = (x - 3)(x + 3) - 4(x - 3) = \\&= (x - 3)(x + 3 - 4) = (x - 3)(x - 1)\end{aligned}$$

* *Cách 4:* Tách $-4x$ thành $-x$ và $-3x$

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = \\&= x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

Nhận thấy: Thêm và bớt cùng một hạng tử hoặc tách một hạng tử thành hai hay nhiều hạng tử nhằm làm xuất hiện hằng đẳng thức hoặc giúp cho nhóm hạng tử thuận lợi hơn trong quá trình phân tích đa thức thành nhân tử.

Bạn đọc có thể tìm thêm các cách giải khác ở bài toán này.

Bài 22

a) Rút gọn biểu thức A rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -\frac{2}{3}$:

$$A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1).$$

b) Rút gọn biểu thức B rồi tính giá trị của biểu thức với $x = -1$, $y = -2001$:

$$B = \frac{4x^2 - 4}{xy - y + x - 1}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Biểu thức A là một dãy tính cộng trừ nhân chia các đơn, đa thức, phải rút gọn rồi tính giá trị.

Biểu thức B là phép chia đa thức cho đa thức, cần biến đổi, rút gọn rồi tính giá trị.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần thực hiện phép tính nhân chia trước, cộng trừ sau để rút gọn biểu thức đã cho, sau đó tính giá trị.

Với câu b, cần phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn, sau đó tính giá trị.

• Cách giải

a) Rút gọn:

$$A = 3\left(\frac{2x}{3} - 1\right) + (15x^2 - 10x) : (-5x) - (3x - 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x - 3 + (-3x + 2) - (3x - 1) \\
 &= 2x - 3 - 3x + 2 - 3x + 1 = -4x.
 \end{aligned}$$

Tính giá trị

$$A = -4x = -4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

b) Rút gọn

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{4x^2 - 4}{xy - y + x - 1} \\
 &= \frac{4(x^2 - 1)}{(xy - y) + (x - 1)} = \frac{4(x + 1)(x - 1)}{y(x - 1) + (x - 1)} \\
 &= \frac{4(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(y + 1)} = \frac{4(x + 1)}{y + 1}
 \end{aligned}$$

(với điều kiện $x - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$)

Vì $x = -1$ nên $x - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Tính giá trị

$$B = \frac{4(x + 1)}{y + 1} = \frac{4(-1 + 1)}{-2001 + 1} = \frac{4 \cdot 0}{-2000} = \frac{0}{-2000} = 0.$$

● Khai thác bài toán

- Đối với phép chia, cần lưu ý:

a) Khi số bị chia là số 0 và số chia khác 0, phép chia bao giờ cũng thực hiện được và kết quả của phép tính luôn bằng 0:

$$\frac{0}{a} = 0 \text{ (với } a \neq 0\text{)}$$

b) Khi số bị chia là số khác 0 và số chia là 0, thì không bao giờ có phép chia này, hay đây là phép tính không có nghĩa

$$\frac{a}{0} : \text{không có nghĩa (với } a \neq 0\text{)}$$

Ở trường hợp b, không ít bạn đọc vẫn cho đây là một phép tính và ghi kết quả bằng a hoặc bằng 0 (!)

- Với câu a, ta đã:

a) thực hiện phép nhân đơn thức với đa thức $3.(\frac{2x}{3} - 1)$

b) thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức

$$(15x^2 - 10x) : (-5x)$$

c) thực hiện phép cộng, trừ.

Như vậy, với một dãy tính gồm dấu ngoặc rồi cộng trừ nhân chia thì phải làm phép tính trong dấu ngoặc trước, rồi làm tính nhân, chia, sau đó làm cộng trừ từ trái sang phải.

- Với câu b, để thực hiện được việc rút gọn, phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn các nhân tử chung. Nhân tử được rút gọn phải đảm bảo là khác 0.

CHIA ĐA THỨC

Bài 23. Sắp xếp các đa thức sau theo lũy thừa giảm dần và theo một biến chính rồi làm phép chia:

a) $(5x^3 + 6x - 3x^4 - 10) : (5 - 3x);$

b) $(x^4 + 2x - 2x^3 - 1) : (x^2 + 1 - 2x);$

c) $(13x^4y^2 - 7x^5y + 2x^3y^3 - 5x^6 - xy^5) : (y^2 - 2xy - x^2);$

d) $(20x^3y^2 - 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y - 13x^2y^3) : (2x^2y - 3x^3 + 5xy^2);$

e) $(3x^4 + 9x - 8x^3 - 7 - 10x^2) : (1 - 2x + 3x^2).$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi phải sắp xếp đa thức bị chia, đa thức chia theo lũy thừa giảm dần của một biến chính rồi làm phép chia.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Chia hai đa thức đã sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của một biến chính thực hiện tương tự như chia hai số tự nhiên. Cụ thể là:

- Chia hạng tử cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử cao nhất của đa thức chia, ta được hạng tử cao nhất của thương.

- Chia hạng tử cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử cao nhất

$$\begin{array}{r}
3x^5y + 8x^4y^2 + 2x^3y^3 - xy^5 \\
3x^5y + 6x^4y^2 - 3x^3y^3 \\
\hline
2x^4y^2 + 5x^3y^3 - xy^5 \\
2x^4y^2 + 4x^3y^3 - 2x^2y^4 \\
\hline
x^3y^3 + 2x^2y^4 - xy^5 \\
x^3y^3 + 2x^2y^4 - xy^5 \\
\hline
0
\end{array}$$

d) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$\begin{array}{r}
20x^3y^2 - 20xy^4 - 6x^5 + 7x^4y - 13x^2y^3 = \\
-6x^5 + 7x^4y + 20x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \\
2x^2y - 3x^3 + 5xy^2 = -3x^3 + 2x^2y + 5xy^2 \\
-6x^5 + 7x^4y + 20x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \quad \left| \begin{array}{l} -3x^3 + 2x^2y + 5xy^2 \\ \hline 2x^2 - xy - 4y^2 \end{array} \right. \\
-6x^5 + 4x^4y + 10x^3y^2 \\
\hline
3x^4y + 10x^3y^2 - 13x^2y^3 - 20xy^4 \\
3x^4y - 2x^3y^2 - 5x^2y^3 \\
\hline
12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 20xy^4 \\
12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 20xy^4 \\
\hline
0
\end{array}$$

e) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần đối với biến x:

$$\begin{array}{r}
3x^4 + 9x - 8x^3 - 7 - 10x^2 = 3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 9x - 7 \\
1 - 2x + 3x^2 = 3x^2 - 2x + 1 \\
3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 9x - 7 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^2 - 2x - 5 \end{array} \right. \\
3x^4 - 2x^3 + x^2 \\
\hline
-6x^3 - 11x^2 + 9x - 7 \\
-6x^3 + 4x^2 - 2x \\
\hline
-15x^2 + 11x - 7 \\
-15x^2 + 10x - 5 \\
\hline
x - 2
\end{array}$$

Đây là phép chia có dư.

Bài 24

a) Tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

b) Tìm giá trị của a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

• Tìm hiểu đề bài

Với câu a, đề bài đòi hỏi phải tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n + 1$.

Với câu b, phải tìm giá trị của a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết hãy tìm số dư của phép chia đa thức $2n^2 - n + 2$ cho đa thức $2n + 1$. Để tìm các giá trị nguyên của n thì số dư của phép chia này phải là bội của $2n + 1$ tức $2n + 1$ là ước của số dư. Từ đó, bằng lập luận sẽ suy ra n .

Với câu b, trước hết hãy làm phép chia đa thức $x^3 + ax + b$ cho đa thức $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ để có hạng tử thứ nhất ở thương. Sau đó cần biến đổi đa thức dư cho gọn hơn, rồi tiếp tục làm phép chia để có hạng tử thứ hai ở thương. Để có phép chia hết thì tích của hạng tử thứ hai với số chia phải bằng đa thức dư sau lần chia thứ nhất. Từ đó suy ra giá trị của a, b .

• Cách giải

a) Ta làm phép chia

$$\begin{array}{r} 2n^2 - n + 2 \\ - 2n^2 + n \\ \hline -2n + 2 \\ - 2n - 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2n + 1 \\ n - 1 \end{array} \right.$$

Nhận thấy đa thức $2n^2 - n + 2$ không chia hết cho đa thức $2n + 1$, nhưng có thể tìm được các giá trị nguyên của n để giá trị của $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của $2n + 1$. Muốn vậy thì $2n + 1$ phải là ước của 3.

Các ước của 3 là $\pm 1; \pm 3$. Do đó, với:

$$2n + 1 = 1 \text{ thì } n = 0$$

$$2n + 1 = -1 \text{ thì } n = -1$$

$$2n + 1 = 3 \text{ thì } n = 1$$

$$2n + 1 = -3 \text{ thì } n = -2.$$

Vậy với $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì giá trị của đa thức $2n^2 - n + 2$ chia hết cho giá trị của đa thức $2n + 1$.

b) Ta làm phép chia

$$\begin{array}{r|l} x^3 + ax + b & x^2 - 2x + 1 \\ - x^3 + x - 2x^2 & \\ \hline 2x^2 + ax - x + b & \text{hay} \\ 2x^2 + (a - 1)x + b & \\ 2x^2 - 4x + 2 & \end{array}$$

Để có phép chia hết thì $2x^2 + (a - 1)x + b$ trừ đi đa thức $2x^2 - 4x + 2$ phải bằng 0, tức là:

$$2x^2 + (a - 1)x + b = 2x^2 - 4x + 2$$

Từ đó suy ra:

$$a - 1 = -4 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{và } b = 2$$

Vậy, với $a = -3$ và $b = 2$ thì $(x^3 + ax + b) : (x^2 - 2x + 1)$.

● Khai thác bài toán

- Dễ dàng thử lại để kiểm tra kết quả câu b, bằng cách thay

$a = -3$ và $b = 2$ vào đa thức dư $2x^2 + (a - 1)x + b$ được đa thức $2x^2 - 4x + 2$. Rõ ràng $2x^2 - 4x + 2 - (2x^2 - 4x + 2) = 0$. Ta có phép chia hết.

- Bạn đọc hãy tự thử kết quả tìm được trong câu a.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 25. Sắp xếp đa thức theo biến chính rồi làm tính nhân:

a) $(-xy^2 + x^2y + x^3 - y^3)(2x + y)$;

b) $(x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - 5y^3)(3x - 7y)$.

Bài 26. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 10x + 21$;

b) $3x^2 - 7x + 2$;

c) $324x^4 + 1$;

d) $x^3 + y^3 + z^3 - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 - 4xyz$.

Bài 27. Rút gọn biểu thức:

a) $[(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y)$;

b)
$$\frac{125 \cdot 5^5 \cdot 64 - 25^3 \cdot 10 \cdot 4}{5^7 \cdot 8} ;$$

c*)
$$\frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{x^2 + y^2 + (x + y)^2} \quad \text{biết } x^2 + y^2 + xy = 7.$$

Bài 28

a) Rút gọn rồi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = 3x^2 - (-20x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1).$$

b) Rút gọn rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = 8x^2 + 6x - (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) - 3x(x + 2).$$

Bài 29. Sắp xếp các đa thức theo một biến chính rồi làm phép chia:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 24x^4y^2 + 9x^3y^3 - 12x^6 - 10x^5y + 3x^2y^4 - 2xy^5 : \\ & (6x^4 - 3x^2y^2 - 2xy^3 - 4x^3y); \end{aligned}$$

$$\text{b) } 10x^4y - 9x^3y^2 - 8x^5 + 6x^2y^3 + 9xy^4 : (2x^2 + 3y^2 - xy).$$

Bài 30

a*) Tính giá trị của biểu thức

$$(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \text{ biết } x + y = 2.$$

b*) Cho $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab$, trong đó x và y là các số khác 0 nhưng có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $a = b$.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 25. • Hướng dẫn. Chú ý viết các đơn thức đồng dạng dưới cùng một cột khi làm tính.

• Cách giải

a) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x :

$$-xy^2 + x^2y + x^3 - y^3 = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 \\ \times \quad 2x + y \\ \hline 2x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 \\ + \quad x^3y + x^2y^2 - xy^3 - y^4 \\ \hline 2x^4 + 3x^3y - x^2y^2 - 3xy^3 - y^4 \end{array}$$

b) Sắp xếp đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x :

$$x^3 - 4xy^2 + 3x^2y - 5y^3 = x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 5y^3$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 5y^3 \\
 \times \quad 3x - 7y \\
 \hline
 3x^4 + 9x^3y - 12x^2y^2 - 15xy^3 \\
 + \quad - 7x^3y - 21x^2y^2 + 28xy^3 + 35y^4 \\
 \hline
 3x^4 + 2x^3y - 33x^2y^2 + 13xy^3 + 35y^4
 \end{array}$$

Bài 26. • Hướng dẫn. Vận dụng các điều hướng dẫn ở bài 20 và bài 21.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x^2 - 10x + 21 &= x^2 - 3x - 7x + 21 = (x^2 - 3x) - (7x - 21) = \\
 &= x(x - 3) - 7(x - 3) = (x - 3)(x - 7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 3x^2 - 7x + 2 &= 3x^2 - 6x - x + 2 = (3x^2 - 6x) - (x - 2) = \\
 &= 3x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(3x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 324x^4 + 1 &= 324x^4 + 36x^2 + 1 - 36x^2 \\
 &= [(18x^2)^2 + 2 \cdot 18x^2 \cdot 1 + 1] - (6x)^2 \\
 &= (18x^2 + 1)^2 - (6x)^2 \\
 &= (18x^2 + 6x + 1)(18x^2 - 6x + 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } x^3 + y^3 + z^3 - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 - 4xyz \\
 &= [x^3 - x(y - z)^2] + [y^3 - y(z - x)^2] + [z^3 - z(x - y)^2 - 4xyz] \\
 &= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - (x^2 - 2xy + y^2) - 4xy] \\
 &= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 4xy] \\
 &= x[x^2 - (y - z)^2] + y[y^2 - (z - x)^2] + z[z^2 - (x + y)^2] \\
 &= x(x + y - z)(x - y + z) + y(y + z - x)(y - z + x) + \\
 &\quad + z(z + x + y)(z - x - y) \\
 &= (x + y - z)[x(x - y + z) + y(y + z - x) - z(x + y + z)] \\
 &= (x + y - z)(x^2 - xy + xz + y^2 + yz - xy - xz - yz - z^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x + y - z)(x^2 - 2xy + y^2 - z^2) \\
&= (x + y - z)[(x - y)^2 - z^2] \\
&= (x + y - z)(x - y + z)(x - y - z).
\end{aligned}$$

Bài 27. • Hướng dẫn. Với câu a, hãy thực hiện phép chia đa thức cho đa thức, sau đó làm phép cộng, trừ. Chú ý đến hằng đẳng thức.

Với câu b, hãy viết các số đã cho thành lũy thừa của 2 và 5.

Với câu c, hãy biến đổi tử và mẫu theo điều kiện đã cho là $x^2 + y^2 + xy = 7$. Đặc biệt lưu ý đến lũy thừa của một đa thức, chẳng hạn như: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & [(x^3 - y^3) + 2(x^2 - y^2) - 2(x - y)^2] : (x - y) \\
&= [(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y)(x + y) - 2(x - y)^2] : (x - y) \\
&= (x^2 + xy + y^2) + 2(x + y) - 2(x - y) \\
&= x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y - 2x + 2y \\
&= x^2 + xy + y^2 + 4y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & \frac{125 \cdot 5^5 \cdot 64 - 25^3 \cdot 10 \cdot 4}{5^7 \cdot 8} = \frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot 2^6 - 5^6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2}{5^7 \cdot 2^3} \\
&= \frac{5^8 \cdot 2^6 - 5^7 \cdot 2^3}{5^7 \cdot 2^3} = \frac{5^8 \cdot 2^6}{5^7 \cdot 2^3} - \frac{5^7 \cdot 2^3}{5^7 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2^3 - 1 \\
&= 40 - 1 = 39
\end{aligned}$$

c*) Biến đổi mẫu và tính toán theo điều kiện bài toán

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + xy = 7 \quad (1) \\
&x^2 + y^2 + (x + y)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 \\
&= 2(x^2 + y^2 + xy) = 2 \cdot 7 = 14
\end{aligned}$$

Biến đổi tử và tính toán:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + (x + y)^4 &= x^4 + y^4 + [(x + y)^2]^2 \\&= x^4 + y^4 + (x^2 + 2xy + y^2)^2 = \\&= x^4 + y^4 + x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 \\&= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3) \quad (2)\end{aligned}$$

Bình phương hai vế của (1) có:

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 &= 49 \\ \text{hay } x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 &= 49 \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) có:

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2 \cdot 49 = 98$$

$$\text{Vậy } \frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{x^2 + y^2 + (x + y)^2} = \frac{98}{14} = 7.$$

Bài 28. • Hướng dẫn

Với câu a, hãy thực hiện phép nhân, phép chia trước, rồi rút gọn biểu thức. Căn cứ vào biểu thức đã được rút gọn để suy luận tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Với câu b, làm tương tự như câu a để có biểu thức gọn, từ đó suy luận tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B.

• Cách giải

$$\begin{aligned}A &= 3x^2 - (-20x^3 + 15x^2 - 5x) : (-5x) - 3(x - 1) \\&= 3x^2 - (4x^2 - 3x + 1) - (3x - 3) \\&= 3x^2 - 4x^2 + 3x - 1 - 3x + 3 \\&= -x^2 + 2.\end{aligned}$$

Biết rằng bình phương của bất kì số nào cũng không âm, do đó $x^2 \geq 0$, suy ra $-x^2 \leq 0$.

Thêm vào hai vế của bất đẳng thức số 2, ta có:

$$-x^2 + 2 \leq 2.$$

Biểu thức $-x^2 + 2$ luôn luôn nhỏ hơn hay bằng 2 nên $-x^2 + 2$ hay biểu thức A đã cho có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 0$.

Vậy biểu thức A có giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 8x^2 + 6x - (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) - 3x(x + 2) \\ &= 8x^2 + 6x - (x^2 - 1) - (3x^2 + 6x) \\ &= 8x^2 + 6x - x^2 + 1 - 3x^2 - 6x \\ &= 4x^2 + 1 \end{aligned}$$

Biết rằng $x^2 \geq 0$, nên $4x^2 + 1 \geq 1$.

Biểu thức $4x^2 + 1$ luôn luôn lớn hơn hay bằng 1 nên $4x^2 + 1$ hay biểu thức B đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 0$.

Vậy biểu thức B có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 0$.

Bài 29. • Hướng dẫn. Sau khi đã sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x , hãy lấy hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, rồi làm tiếp theo hướng dẫn bài 23.

a)

$$\begin{array}{r|l} -12x^6 - 10x^5y + 24x^4y^2 + 9x^3y^3 + 3x^2y^4 - 2xy^5 & 6x^4 - 4x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3 \\ -12x^6 + 8x^5y + 6x^4y^2 + 4x^3y^3 & \hline -18x^5y + 18x^4y^2 + 5x^3y^3 + 3x^2y^4 - 2xy^5 & \\ -18x^5y + 12x^4y^2 + 9x^3y^3 + 6x^2y^4 & \\ \hline & 6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 3x^2y^4 - 2xy^5 \\ & \hline & 6x^4y^2 - 4x^3y^3 - 3x^2y^4 - 2xy^5 \\ & \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \text{b)} & \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 -8x^5 + 10x^4y - 9x^3y^2 + 6x^2y^3 + 9xy^4 \\
 -8x^5 + 4x^4y - 12x^3y^2 \\
 \hline
 6x^4y + 3x^3y^2 + 6x^2y^3 + 9xy^4 \\
 -6x^4y - 3x^3y^2 + 9x^2y^3 \\
 \hline
 6x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9xy^4 \\
 -6x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9xy^4 \\
 \hline
 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 2x^2 - xy + 3y^2 \\
 \hline
 -4x^3 + 3x^2y + 3xy^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Bài 30. • Hướng dẫn

Với câu a, hãy áp dụng hằng đẳng thức dạng tổng hai lập phương, lưu ý sử dụng $x + y = 2$ sẽ có được kết quả bài toán.

Với câu b, từ $x + y = 1$ suy ra $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ hay $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Hãy vận dụng kết quả này vào biểu thức đã cho, rồi biến đổi sẽ có được kết quả bài toán.

• Cách giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (x^3 + y^3) - (x^2 + y^2) + 4xy \\
 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x^2 + y^2) + 4xy
 \end{aligned}$$

Biết $x + y = 2$, nên có:

$$\begin{aligned}
 &= 2(x^2 - xy + y^2) - x^2 - y^2 + 4xy \\
 &= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - x^2 - y^2 + 4xy \\
 &= x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (x + y)^2 = 2^2 = 4.$$

b) Từ $x + y = 1$ suy ra $x^2 + y^2 + 2xy = 1$ do đó $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Từ đó có:

$$\begin{aligned}
 &ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab \\
 &ab(1 - 2xy) + xy(a^2 + b^2) = ab; \\
 &ab(1 - 2xy) + xy(a^2 + b^2) - ab = 0;
 \end{aligned}$$

$$ab - 2abxy + xy(a^2 + b^2) - ab = 0;$$

$$-2abxy + xy(a^2 + b^2) = 0;$$

$$xy(a^2 + b^2 - 2ab) = 0;$$

$$xy(a - b)^2 = 0. \text{ Do } x \neq 0; y \neq 0 \text{ nên } a - b = 0 \text{ hay } a = b.$$

Đó là điều phải chứng minh.

III. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ VÀ CÁC PHÉP TÍNH

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

PHÂN THỨC. TẬP XÁC ĐỊNH

Bài 1. Tìm tập xác định của các phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2};$$

$$\text{b) } B = \frac{5x + 2}{x^2 - x};$$

$$\text{c) } C = \frac{4x}{x - 2y};$$

$$\text{d) } D = \frac{x + y}{xy - 2x - y + 2}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Tìm tập xác định (TXĐ) của phân thức là tìm các giá trị của biến sao cho giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Nói chung, để tìm tập xác định của một phân thức, trước hết cho mẫu bằng 0 rồi giải phương trình để tìm ra các giá trị của biến làm cho mẫu bằng 0; sau đó để phân thức có nghĩa thì mẫu phải khác không, muốn vậy thì giá trị của biến phải khác giá trị vừa tìm được ở trên. Chẳng hạn:

$$M = 2x - 2; M = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $M \neq 0$ khi $x \neq 1$.

Để giải phương trình mà mẫu của phân thức là vế trái còn vế phải là 0 thường phải phân tích mẫu thành nhân tử.

● Cách giải

$$a) x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x) - (2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) = 0; (x + 1)(x - 2) = 0$$

khi $x = -1$; $x = 2$.

Ta thấy $x^2 - x - 2 \neq 0$ khi $x \neq -1$; $x \neq 2$.

Phân thức $A = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2}$ có tập xác định là:

$$\text{TXĐ} = \{x | x \in \mathbb{Q}, x \neq -1; x \neq 2\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq -1$; $x \neq 2$.

$$b) x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \text{ khi } x = 0; x = 1$$

Ta thấy $x^2 - x \neq 0$ khi $x \neq 0$; $x \neq 1$.

Phân thức $B = \frac{5x + 2}{x^2 - x}$ có tập xác định là

$$\text{TXĐ} = \{x | x \in \mathbb{Q}, x \neq 0; x \neq 1\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq 0$; $x \neq 1$.

$$c) x - 2y = 0 \text{ khi } x = 2y$$

Ta thấy $x - 2y \neq 0$ khi $x \neq 2y$.

Phân thức $C = \frac{4x}{x - 2y}$ có tập xác định là:

$$\text{TXĐ: } \{(x, y) | x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x \neq 2y\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq 2y$.

$$d) xy - 2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (xy - 2x) - (y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - (y - 2) = 0; (y - 2)(x - 1) = 0$$

khi $y = 2$; $x = 1$.

Phân thức $D = \frac{x + y}{xy - 2x - y + 2}$ có tập xác định

$$\text{TXĐ: } \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x \neq 1; y \neq 2\}$$

hoặc TXĐ: $x \neq 1; y \neq 2$.

• Khai thác bài toán

- Trong cách ghi tập xác định của một phân thức ở cách giải trên đã trình bày hai cách:

a) Cách viết trực tiếp (viết tập xác định dưới dạng tập hợp, chẳng hạn với câu d), đã viết:

$$\text{TXĐ} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x \neq 1; y \neq 2\}$$

hoặc TXĐ = $\{(x, y) \mid x \neq 1; y \neq 2\}$ (gọn hơn nhưng phải hiểu rằng $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$).

b) Cách viết gián tiếp

$$\text{TXĐ: } x \neq 1; y \neq 2$$

Trong hai cách viết này, ta chọn cách viết nào cũng được. Cần chú ý rằng, cũng có những phân thức có mẫu luôn khác 0, chẳng hạn:

a) Phân thức $\frac{-2x^2}{x^2 + 1}$ có $x^2 + 1 \neq 0$ với mọi giá trị của $x \in \mathbb{Q}$.

Vậy phân thức có TXĐ: mọi $x \in \mathbb{Q}$.

b) Phân thức $\frac{x(x + 3)}{x^2 - 2x + 2}$ có $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \neq 0$

với mọi giá trị của $x \in \mathbb{Q}$.

Vậy phân thức có TXĐ: mọi $x \in \mathbb{Q}$.

- Sở dĩ có loại toán "tìm tập xác định của một phân thức" vì đối với mọi phân thức mà ta xem xét, trước hết phải thỏa mãn định nghĩa: "Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đơn hoặc đa thức và $B \neq 0$ ".

Do vậy, trước khi thực hiện các biến đổi về phân thức phải tìm

tập xác định của nó. Cần đặc biệt lưu ý điều này khi xem xét các phân thức.

Bài 2. Với giá trị nào của biến thì phân thức sau có giá trị bằng 0?

a) $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5}$;

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 1}$;

c) $\frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 + 4}$;

d) $\frac{-15xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 8}$.

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức, đòi hỏi xét xem với giá trị nào của biến thì các phân thức bằng 0.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết rằng, $\frac{0}{a} = 0$ khi $a \neq 0$. Như vậy, phân thức $\frac{A}{B} = 0$ khi

nào? Rõ ràng là nếu $A = 0$ và $B \neq 0$ thì $\frac{A}{B} = 0$.

Do vậy, để có $\frac{A}{B} = 0$ thì trước hết phải tìm tập xác định của phân thức, sau đó giải phương trình $A = 0$, nếu các giá trị của biến tìm được đều thuộc tập xác định của phân thức, thì đó là các giá trị của biến làm cho phân thức bằng 0.

• **Cách giải**

a) TXĐ = $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{5}{2}\}$

Tử $(x+2)(x-3)$ bằng 0 khi $x = -2$ hoặc $x = 3$. Các giá trị này của biến đều thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5}$ bằng 0 khi $x = -2$ hoặc $x = 3$.

b) TXĐ: mọi $x \in \mathbb{Q}$

Tử $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ bằng 0 khi $x = 3$. Giá trị này của biến thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 1}$ bằng 0 khi $x = 3$.

c) TXĐ: mọi $x, y \in \mathbb{Q}$

Từ $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$ bằng 0 khi $x = 1$; $y = 1$. Các giá trị này của biến thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 + 4}$ bằng 0 khi $x = 1$, y bất kì, hoặc x bất kì, $y = 1$.

d) TXĐ: mọi $x, y, z \in \mathbb{Q}$

Từ $-15xyz$ bằng 0 khi $x = 0$ hoặc $y = 0$ hoặc $z = 0$. Các giá trị này thuộc tập xác định của phân thức đã cho.

Vậy phân thức $\frac{-15xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 8}$ bằng 0 khi ít nhất một trong các biến x, y, z bằng 0.

● Khai thác bài toán

- Do việc tìm giá trị của biến để mẫu khác 0 nhiều khi không dễ dàng, vì thế để xét xem với giá trị nào của biến thì phân thức bằng 0, trong nhiều trường hợp ta có thể làm như sau:

- Tìm các giá trị của biến để tử bằng 0
- Trong các giá trị tìm được đó của biến, sẽ chọn (bằng cách thử) các giá trị làm cho mẫu khác 0.

Ví dụ:

1) Tìm các giá trị của biến để phân thức $\frac{x-3}{x^2-2x-7}$ có giá trị bằng 0.

Ta thấy, tử bằng 0 khi $x = 3$. Với $x = 3$ thì mẫu khác 0 (vì $3^2 - 2 \cdot 3 - 7 = 9 - 6 - 7 = -4 \neq 0$)

Vậy với $x = 3$ thì phân thức $\frac{x-3}{x^2-2x-7}$ có giá trị bằng 0.

2) Tìm các giá trị của biến để phân thức $\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x-4}$ có giá trị bằng 0.

Ta thấy tử $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$ bằng 0 khi $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Với $x = 1$ hoặc $x = 3$ thì mẫu khác 0 (vì $1^3 - 2 \cdot 1 - 4 = -5 \neq 0$ hoặc $3^3 - 2 \cdot 3 - 4 = 17 \neq 0$).

Vậy với $x = 1$ hoặc $x = 3$ thì phân thức $\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x-4}$ có giá trị bằng 0.

- Cũng có thể trình bày lời giải bài 2 theo cách khác, chẳng hạn với câu a :

Phân thức có giá trị bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0, tức là có:

$$\begin{cases} (x + 2)(x - 3) = 0 \\ 2x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ hoặc } x = 3 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy với $x = -2$ hoặc $x = 3$ thì phân thức $\frac{(x+2)(x-3)}{2x-5} = 0$

Bài 3. Tính giá trị các phân thức sau:

a) $A = \frac{5xy - 7y^2 + 2}{2y^3 + 3x^2y - y + 5}$, với $x = -\frac{2}{5}$, $y = 0$;

b) $B = \frac{2x^2 - 8x + 5}{x^2 - 3}$, với $x = 0,25$;

c) $C = \frac{5|x| - 1}{x - 2}$, với $|x| = \frac{1}{2}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức hai biến hoặc một biến và giá trị của các biến, đòi hỏi tính giá trị của phân thức.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, khi $y = 0$, biểu thức không phụ thuộc giá trị của x .

Với câu b, thay $x = 0,25 = \frac{1}{4}$ vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

Với câu c, khi $|x| = \frac{1}{2}$ phải xét hai trường hợp $x = \frac{1}{2}$ và

$$x = -\frac{1}{2} \text{ vì } |x| = \frac{1}{2} = \left| -\frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|.$$

• Cách giải

a) Với $y = 0$ phân thức A có giá trị bằng $\frac{2}{5}$ (không phụ thuộc vào giá trị của x).

b) Với $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{16} - 2 + 5}{\frac{1}{16} - 3} = \frac{\frac{1}{8} + 3}{-2\frac{15}{16}} \\ &= \frac{25}{8} : \left(-\frac{47}{16}\right) = -\frac{25}{8} \cdot \frac{16}{47} = -\frac{50}{47} = -1\frac{3}{47}. \end{aligned}$$

c) Cần phải xét hai trường hợp:

- Với $x = \frac{1}{2}$ có:

$$C = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

- Với $x = -\frac{1}{2}$ có:

$$C = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{-2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

● Khai thác bài toán

Tính giá trị một phân thức là bài toán mà ta đã làm quen từ lâu. Thật vậy, với phân thức $\frac{2x^2-8x+5}{x^2-3}$ có thể viết thành

$$(2x^2 - 8x + 5) : (x^2 - 3)$$

Thay giá trị $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, ta có dãy tính sau:

$$[2 \cdot (\frac{1}{4})^2 - 8 \cdot \frac{1}{4} + 5] : [(\frac{1}{4})^2 - 3] = (2 \cdot \frac{1}{16} - 2 + 5) : (\frac{1}{16} - 3)$$

$$= (\frac{1}{8} + 3) : (-2\frac{15}{16}) = \frac{25}{8} : (-\frac{47}{16}) = -\frac{25}{8} \cdot \frac{16}{47} = -\frac{50}{47} = -1\frac{3}{47}$$

Như vậy, bài toán này không có gì xa lạ, điều cần lưu ý là phải làm thật đúng các phép tính và phải thực hiện theo thứ tự các phép tính đối với một dãy tính.

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

Bài 4. Các phân thức sau có bằng nhau không? Vì sao?

$$\text{a) } A = \frac{-x}{x-2} \quad \text{và} \quad B = \frac{x}{2-x};$$

$$\text{b) } A = \frac{-x}{x-4} \quad \text{và} \quad B = \frac{-x(x-4)}{(x-4)^2};$$

$$\text{c) } A = \frac{-x}{(x-5)^2} \quad \text{và} \quad B = \frac{x}{(5-x)^2};$$

$$\text{d) } A = \frac{x(x-2)}{x-2} \quad \text{và} \quad B = x.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các cặp phân thức A và B, đòi hỏi xét xem cặp nào bằng nhau, cặp nào không bằng nhau, vì sao?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần dựa vào tính chất cơ bản của phân thức có dạng tổng quát là:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C} ; \frac{A}{B} = \frac{A:C}{B:C} \text{ với } B \neq 0, C \neq 0, \text{ và dựa vào quy tắc}$$

đối dấu của một phân thức theo dạng tổng quát là: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$ để xét xem cặp phân thức nào bằng nhau, cặp nào không bằng nhau.

● **Cách giải**

a) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu biến đổi dấu tử và mẫu của phân thức A thì được phân thức B:

$$\frac{-(-x)}{-(x-2)} = \frac{x}{2-x}$$

b) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu nhân tử và mẫu của phân thức A với $x-4$ ta được phân thức B:

$$\frac{-x(x-4)}{(x-4)(x-4)} = \frac{-x(x-4)}{(x-4)^2}$$

c) Hai phân thức A và B có mẫu bằng nhau nhưng tử của chúng đối nhau nên chúng không bằng nhau.

d) Hai phân thức A và B bằng nhau vì nếu chia tử và mẫu của phân thức A cho $x-2$ (với $x \neq 2$) ta được phân thức B:

$$\frac{x(x-2):(x-2)}{(x-2):(x-2)} = x \text{ (với } x \neq 2).$$

● **Khai thác bài toán**

- Quy tắc đổi dấu của một phân thức được suy ra từ việc áp dụng tính chất cơ bản của phân thức là nhân tử và mẫu với -1:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot (-1)}{B \cdot (-1)} = \frac{-A}{-B}$$

- Ở câu c dùng vôi kết luận hai phân thức A và B bằng nhau do áp dụng quy tắc đổi dấu phân thức.

Khi đổi dấu cơ số của lũy thừa bậc chẵn thì lũy thừa không đổi, chẳng hạn $(7 - 5)^2 = (5 - 7)^2$ vì cùng bằng 4. Các biểu thức $(x - 5)^2$ và $(5 - x)^2$ là bằng nhau chứ không phải đối nhau.

Bài 5. Giải thích rằng các đẳng thức sau là đúng:

$$\text{a) } \frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} ;$$

$$\text{b) } \frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} .$$

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu giải thích rằng các đẳng thức đã cho là đúng, nghĩa là có thể biến đổi được vế trái thành vế phải hay ngược lại.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết ta đổi dấu phân thức ở vế trái đẳng thức, sau đó vận dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ để chọn được đa thức để nhân với tử và mẫu của phân thức đã được đổi dấu. Lưu ý lập luận đa thức trên khác 0.

- Với câu b, làm tương tự như câu a và dùng hằng đẳng thức $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

• **Cách giải**

a) Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{-(-x - 2)}{-(x - 1)} = \frac{x + 2}{1 - x} \quad (1)$$

Biết rằng $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \neq 0$ với mọi x nên áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta được:

$$\frac{x + 2}{1 - x} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{-x - 2}{x - 1} = \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)}$$

b) Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{-(3 - x)}{-(x - 4)} = \frac{x - 3}{4 - x} \quad (1)$$

Biết rằng $x^2 + 3x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 9 = (x + \frac{3}{2})^2 + 6\frac{3}{4} \neq 0$ với mọi x , nên áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta được:

$$\frac{x - 3}{4 - x} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3 - x}{x - 4} = \frac{x^3 - 27}{(4 - x)(x^2 + 3x + 9)}$$

● Khai thác bài toán

Trong cách giải, ta chỉ trình bày cách biến đổi phân thức ở vế trái bằng phân thức ở vế phải. Ở phần này, ta biến đổi ngược lại.

$$a) \frac{x^3 + 8}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(1 - x)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x + 2}{1 - x} \quad (1)$$

vì đã thực hiện chia tử và mẫu cho phân thức $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \neq 0$.

Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{x + 2}{1 - x} = \frac{-(x + 2)}{-(1 - x)} = \frac{-x - 2}{x - 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{-x-2}{x-1} = \frac{x^3+8}{(1-x)(x^2-2x+4)}.$$

$$\text{b) } \frac{x^3-27}{(4-x)(x^2+3x+9)} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(4-x)(x^2+3x+9)} = \frac{x-3}{4-x} \quad (1),$$

vì đã thực hiện chia tử và mẫu cho đa thức

$$x^2+3x+9 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{4} \neq 0.$$

Theo quy tắc đổi dấu một phân thức, ta có:

$$\frac{x-3}{4-x} = \frac{-(x-3)}{-(4-x)} = \frac{3-x}{x-4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3-x}{x-4} = \frac{x^3-27}{(4-x)(x^2+3x+9)}.$$

Bài 6. Rút gọn các phân thức sau:

$$\text{a) } \frac{-3x+3y}{x-y};$$

$$\text{b) } \frac{x^2+3x-y^2-3y}{x^2-y^2};$$

$$\text{c) } \frac{25-10x+x^2}{xy-5y};$$

$$\text{d) } \frac{2xy-x^2+z^2-y^2}{x^2+z^2-y^2+2xz}.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các phân thức, đòi hỏi phải rút gọn các phân thức đó tức là chia tử và mẫu cho cùng một đơn thức hoặc đa thức khác không nào đó.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Dựa vào tính chất cơ bản của phân thức mà ta có thể chia cả tử và mẫu cho cùng một đa thức khác 0. Muốn vậy trước hết phải

phân tích tử và mẫu thành nhân tử, sau đó chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

• Cách giải

$$a) \frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3 \text{ (với } x \neq y)$$

$$b) \frac{x^2 + 3x - y^2 - 3y}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2) + (3x - 3y)}{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{(x - y)(x + y) + 3(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{(x - y)(x + y + 3)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x + y + 3}{x + y}$$

(với $x \neq y$)

$$c) \frac{25 - 10x + x^2}{xy - 5y} = \frac{x^2 - 10x + 25}{y(x - 5)} = \frac{(x - 5)^2}{y(x - 5)} = \frac{x - 5}{y}$$

(với $x \neq 5$; $y \neq 0$)

$$d) \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz} = \frac{z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xz + z^2) - y^2} =$$

$$= \frac{z^2 - (x - y)^2}{(x + z)^2 - y^2} = \frac{(z + x - y)(z - x + y)}{(x + z + y)(x + z - y)} = \frac{z - x + y}{x + z + y}$$

• Khai thác bài toán

- Ở câu a nếu đặt 3 làm nhân tử chung ở tử thì để rút gọn phân thức, ta cần:

+ đổi dấu cả tử và mẫu:

$$\frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{3(y - x)}{x - y} = \frac{-3(y - x)}{y - x} = -3$$

+ hoặc đổi dấu hai nhân tử ở tử:

$$\frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{3(y - x)}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3.$$

- Cũng có thể phải rút gọn một phân thức mà ở tử có dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn:

$$\text{Rút gọn phân thức } \frac{3|x-4|}{3x^2-3x-36}$$

$$\text{Ta có } \frac{3|x-4|}{3x^2-3x-36} = \frac{3|x-4|}{3(x^2-x-12)} = \frac{|x-4|}{x^2-x-12} \text{ và mẫu}$$

$$x^2-x-12 = x^2-9-x-3 = (x-3)(x+3) - (x+3) = (x+3)(x-4)$$

a) Nếu $x > 4$ tức là $x-4 > 0$ thì $|x-4| = x-4$. Do đó:

$$\frac{|x-4|}{x^2-x-12} = \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \frac{1}{x+3}$$

b) Nếu $x < 4$ tức là $x-4 < 0$ thì $|x-4| = -(x-4)$. Do đó:

$$\frac{|x-4|}{x^2-x-12} = \frac{-(x-4)}{(x+3)(x-4)} = -\frac{1}{x+3}$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8} = \frac{a+1}{a-2};$$

$$\text{b) } \frac{a^4+a^3+a+1}{a^4-a^3+2a^2-a+1} = \frac{(a+1)^2}{a^2+1}$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu phải chứng minh các đẳng thức trên, muốn vậy phải biến đổi phân thức ở vế trái sao cho bằng phân thức ở vế phải.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử,

sau đó áp dụng tính chất cơ bản của phân thức.

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned}\frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} &= \frac{(a^3 - a) - (4a^2 - 4)}{(a^3 - 8) - (7a^2 - 14a)} = \\&= \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 7a(a - 2)} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} \\&= \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)[(a^2 - a) - (4a - 4)]} = \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \\&= \frac{a + 1}{a - 2}.\end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned}\frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} &= \frac{(a^4 + a^3) + (a + 1)}{(a^4 - a^3 + a^2) + (a^2 - a + 1)} = \\&= \frac{a^3(a + 1) + (a + 1)}{a^2(a^2 - a + 1) + (a^2 - a + 1)} = \frac{(a + 1)(a^3 + 1)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} \\&= \frac{(a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1}.\end{aligned}$$

Vế phải bằng vế trái, đẳng thức được chứng minh.

● Khai thác bài toán

- Trong quá trình biến đổi vế trái, ta đã coi phân thức ở vế trái luôn có mẫu khác 0 và ngầm hiểu rằng:

+ Câu a có TXĐ: $a \neq 1$; $a \neq 2$; $a \neq 4$.

+ Câu b có TXĐ: với mọi a vì

$a^2 + 1$ luôn khác 0 và

$$\begin{aligned} a^2 - a + 1 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ cũng luôn khác } 0. \end{aligned}$$

- Vấn đề đặt ra là: có thể biến đổi sao cho vế phải bằng vế trái được không? Hoàn toàn được.

Thường là viết lại chẳng hạn với câu b, từ

$$\frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \dots = \frac{a^4 + a^3 + a + 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1},$$

tức là viết theo thứ tự ngược lại với cách giải bài này. Nhưng không ai lại làm như vậy, vì phải làm từ trái sang phải rồi viết lại từ phải sang trái.

Bài 8. Tính giá trị của các phân thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x} \text{ với } x = -2,75;$$

$$\text{b) } B = \frac{x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}{x^2 + y^2 - 2xy} \text{ với } x = -6,75; y = -3,25.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho phân thức và giá trị của biến, đòi hỏi phải tính giá trị của phân thức bằng cách ngắn gọn, hợp lý nhất.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, trước hết cần phân tích tử và mẫu thành nhân tử, rồi rút gọn, sau cùng là tính giá trị của phân thức theo giá trị của biến đã cho.

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

a) Rút gọn

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x} = \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2(x - 1) - x(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 - x)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x - 1)x(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1} \end{aligned}$$

Tính giá trị :

$$A = \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2,75 - 1}{-2,75 + 1} = \frac{-3,75}{-1,75} = \frac{375}{175} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$$

b) Rút gọn

$$\begin{aligned} B &= \frac{x^3 - y^3 - 3xy(x - y)}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{(x - y)^3}{(x - y)^2} = \\ &= x - y. \end{aligned}$$

Tính giá trị:

$$B = x - y = -6,75 - (-3,25) = -6,75 + 3,25 = -3,5.$$

● Khai thác bài toán

Ở loại bài toán này, đã cho giá trị của biến để tính giá trị của phân thức, nên mẫu của phân thức đã cho là khác không nên không cần tìm TXĐ của phân thức nữa.

Xét thêm bài toán rút gọn, chẳng hạn:

a) Rút gọn phân thức $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$

Ta có thể làm như sau:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 3x - 5x + 15} = \\ &= \frac{(x - 3)^2}{x(x - 3) - 5(x - 3)} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 5)} \end{aligned}$$

$$\text{TXĐ: } x \neq 3; x \neq 5$$

Vậy $A = \frac{x - 3}{x - 5}$.

b) Rút gọn phân thức $B = \frac{|x| - 3}{x^2 - 9}$.

Trước hết, tìm TXĐ: $x \neq \pm 3$

Nếu $x \geq 0$ thì $|x| - 3 = x - 3$, do đó $B = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}$

Nếu $x < 0$ thì $|x| - 3 = -(x + 3)$, do đó $B = \frac{-(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} =$
 $= \frac{-1}{x - 3} = \frac{1}{3 - x}$.

Như vậy, bài toán tính giá trị phân thức tuy cũng phải rút gọn nhưng không cần xét TXĐ, còn với bài toán rút gọn phân thức thường phải tìm TXĐ của phân thức, điều kiện cần có của biến.

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $2ax + 1 = 4a^2 + x \quad (a \neq \frac{1}{2})$;

b) $ax - b^2 + 2ab = a^2 + bx \quad (a \neq b)$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình đã cho có ẩn là x , còn a và b là các chữ. Giải các phương trình này chính là tìm giá trị của x phụ thuộc vào a và b .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, dựa vào mối quan hệ giữa phép cộng và phép trừ để đưa x từ vế phải sang vế trái, đưa 1 từ vế trái sang vế phải. Sau đó biến đa thức thành tích rồi tìm x .

Với câu b, làm tương tự câu a.

● Cách giải

$$a) 2ax + 1 = 4a^2 + x$$

$$2ax - x = 4a^2 - 1$$

$$(2a - 1)x = (2a - 1)(2a + 1).$$

Vì $a \neq \frac{1}{2}$ nên $2a - 1 \neq 0$, do đó có:

$$x = \frac{(2a - 1)(2a + 1)}{2a - 1} = 2a + 1.$$

$$b) ax - b^2 + 2ab = a^2 + bx$$

$$ax - bx = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)x = (a - b)^2$$

Vì $a \neq b$ nên $a - b \neq 0$, do đó có:

$$x = \frac{(a - b)^2}{a - b} = a - b.$$

● Khai thác bài toán

- Sau này khi học về phương trình, việc đưa x từ vế phải sang vế trái, cũng như đưa 1 từ vế trái sang vế phải ở câu a, được gọi là chuyển vế số hạng từ vế này sang vế kia nhưng phải đổi dấu số hạng đó. Ở đây do chưa học nên dựa vào mối quan hệ giữa hai phép tính cộng và trừ như đã nói ở phần hướng dẫn cách tìm lời giải.

- Nên thử lại nghiệm x đã tìm được khi làm toán giải phương trình. Dưới đây, trình bày cách thử lại với câu a:

$$2ax + 1 = 2a.(2a + 1) + 1 = 4a^2 + 2a + 1$$

$$4a^2 + x = 4a^2 + 2a + 1$$

Hai vế cùng bằng $4a^2 + 2a + 1$, chứng tỏ rằng $x = 2a + 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 10. Quy đồng mẫu các phân thức:

$$a) \frac{3x}{9y^2z^2}, \frac{-3y}{15xz}, \frac{14z}{63x^2y^5};$$

$$b) \frac{30}{4x^3 - x}, \frac{8}{x - 2x^2}, \frac{12}{2x^2 + x};$$

$$c) \frac{x}{x^3 - 27}, \frac{2x}{x^2 - 6x + 9}, \frac{1}{x^2 + 3x + 9}.$$

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, đòi hỏi phải quy đồng mẫu các phân thức đó.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Để quy đồng mẫu ta phải:

- Tìm mẫu chung
- Nhân tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ của nó (nhân tử phụ là thương của mẫu chung với từng mẫu).

• **Cách giải**

$$a) \text{BCNN}(9; 15; 63) = 315$$

$$\text{Mẫu chung: } 315x^2y^5z^2$$

$$\text{Nhân tử phụ của 3 mẫu: } 35x^2y^3, 21xy^5z, 5z^2.$$

$$\text{Ta có: } \frac{3x}{9y^2z^2} = \frac{3x \cdot 35x^2y^3}{9y^2z^2 \cdot 35x^2y^3} = \frac{105x^3y^3}{315x^2y^5z^2}$$

$$\frac{-3y}{15xz} = \frac{-3y \cdot 21xy^5z}{15xz \cdot 21xy^5z} = \frac{-63xy^6z}{315x^2y^5z^2}$$

$$\frac{14z}{63x^2y^5} = \frac{14z \cdot 5z^2}{63x^2y^5 \cdot 5z^2} = \frac{70z^3}{315x^2y^5z^2}.$$

b) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$4x^3 - x = x(4x^2 - 1) = x(2x + 1)(2x - 1)$$

$$2x^2 - x = x(2x - 1)$$

$$2x^2 + x = x(2x + 1)$$

Mẫu chung: $x(2x + 1)(2x - 1)$

Nhân tử phụ của 3 mẫu: 1; $2x + 1$; $2x - 1$

Ta có:

$$\frac{30}{4x^3 - x} = \frac{30}{x(2x + 1)(2x - 1)}$$

$$\frac{8}{x - 2x^2} = \frac{-8}{2x^2 - x} = \frac{-8}{x(2x - 1)} = \frac{-8(2x + 1)}{x(2x - 1)(2x + 1)}$$

$$\frac{12}{2x^2 + x} = \frac{12}{x(2x + 1)} = \frac{12(2x - 1)}{x(2x + 1)(2x - 1)}$$

c) Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Mẫu chung: $(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)$

Nhân tử phụ của ba mẫu: $x - 3$; $x^2 + 3x + 9$; $(x - 3)^2$

Ta có:

$$\frac{x}{x^3 - 27} = \frac{x}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x(x - 3)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x}{(x - 3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

● Khai thác bài toán

Trong việc quy đồng mẫu các phân thức, cần lưu ý đến việc đổi dấu phân thức, chẳng hạn:

- Trong câu b của bài toán trên ta thấy:

Mẫu của phân thức thứ nhất là $x(2x + 1)(2x - 1)$

Mẫu của phân thức thứ ba là $x(2x + 1)$

Do đó phải đổi dấu phân thức thứ hai thành $\frac{-8}{2x^2 - x}$, để có mẫu là $x(2x - 1)$.

Từ đó có mẫu chung là $x(2x + 1)(2x - 1)$

- Bạn đọc hãy làm tương tự đối với ví dụ sau:

Quy đồng mẫu các phân thức: $\frac{x - 1}{2x + 2}$, $\frac{x + 1}{2x - 2}$, $\frac{1}{1 - x^2}$.

BỐN PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

Bài 11. Cộng các phân thức sau:

a) $\frac{1}{y^3 - x^2y} + \frac{1}{x^3 - xy^2}$;

b) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

c) $\frac{1}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{2}{(2 - x)(3 - x)} + \frac{3}{(1 - x)(x - 3)}$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, yêu cầu phải làm tính cộng các phân thức, muốn vậy phải quy đồng các mẫu rồi làm phép cộng giống như cộng các phân thức có cùng mẫu.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải phân tích mẫu thành nhân tử, rồi tìm mẫu chung; sau đó tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức, nhân tử và mẫu của phân thức với nhân tử phụ tương ứng rồi làm tính cộng.

Với câu b, làm tương tự câu a.

Với câu c, các mẫu đã cho ở dạng một tích cần lựa chọn tích của 3 nhân tử nào đó làm mẫu chung và đổi dấu các phân thức có thừa số ở mẫu phải đổi dấu.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{y^3 - x^2y} + \frac{1}{x^3 - xy^2} = \frac{1}{y(y^2 - x^2)} + \frac{1}{x(x^2 - y^2)} = \\ & = \frac{-1}{y(x^2 - y^2)} + \frac{1}{x(x^2 - y^2)} = \frac{-x + y}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{-(x - y)}{xy(x - y)(x + y)} \\ & = \frac{-1}{xy(x + y)} \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \pm y$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Trước hết, phân tích mẫu thành nhân tử:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)(x - 3)} \\ & = \frac{(x - 2)(x - 3) + (x - 3) + (x - 1)}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + x - 3 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}
\end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$.

$$\begin{aligned}
c) \quad & \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
&= \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} + \frac{-3}{(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{(x-3) + 2(x-1) - 3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{x-3+2x-2-3x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}
\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Sau khi cộng các phân thức, ở câu a được phân thức $\frac{-(x-y)}{xy(x-y)(x+y)}$, ở câu b được phân thức $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, cần lưu ý rút gọn phân thức theo TXĐ của mỗi phân thức đó và ta có kết quả $\frac{-1}{xy(x+y)}$ và $\frac{1}{x-3}$.

Hãy theo dõi thêm ví dụ sau: cộng các phân thức

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2-x} \\
&= \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-2} \\
&= \frac{x^2 + (x-2) - 2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + x - 2 - 2x - 4}{(x+2)(x-2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 - 4 - x - 2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x^2 - 4) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \frac{(x+2)(x-2-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}
 \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 2$.

Bài 12. Trừ các phân thức sau:

a) $\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{x + 3}{3x + 3}$;

b) $\frac{1}{2x - 2y} - \frac{1}{2x + 2y} + \frac{1}{y^2 - x^2}$;

c) $\frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{(x-3)(x-1)}$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho các phân thức không cùng mẫu, để trừ các phân thức phải quy đồng mẫu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a và b, cần phân tích mẫu thành nhân tử để quy đồng mẫu và làm phép trừ.

Với câu c mẫu là tích của ba nhân tử mà ta cần xác định từ các mẫu đã cho.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{x + 3}{3x + 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x^2 - 2x + 1)} - \frac{x + 3}{3(x+1)} \\
 &= \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)^2} - \frac{x + 3}{3(x+1)} \quad \text{TXĐ: } x \neq \pm 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+1}{3(x-1)} - \frac{x+3}{3(x+1)} = \frac{(x+1)^2 - (x+3)(x-1)}{3(x-1)(x+1)} = \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - x + 3x - 3)}{3(x-1)(x+1)} = \\
&= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + x - 3x + 3}{3(x^2 - 1)} = \frac{4}{3(x^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & \frac{1}{2x-2y} - \frac{1}{2x+2y} + \frac{1}{y^2-x^2} \\
&= \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{x^2-y^2} \\
&= \frac{(x+y) - (x-y) - 2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{x+y-x+y-2}{2(x^2-y^2)} = \frac{2(y-1)}{2(x^2-y^2)} \\
&= \frac{y-1}{x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{(x-3)(x-1)} \\
&= \frac{3(x-3) - 2(x-1) - (x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{3x-9-2x+2-x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{(x-1)(x-2)(x-3)}.
\end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Cần lưu ý rút gọn phân thức trước khi thực hiện phép tính chẳng hạn ở câu a bài toán trên, ta có $\frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)^2} = \frac{x+1}{3(x-1)}$. Nhờ rút gọn phân thức này nên mẫu chung chỉ là $3(x-1)(x+1)$, nếu không rút gọn thì mẫu chung sẽ là $3(x-1)^2(x+1)$, khi đó tính toán sẽ phức tạp hơn có khi còn gây ra nhầm lẫn.

Ta làm thêm bài sau đây, để thấy nhờ rút gọn phân thức và

nhóm các phân thức mà không phải quy đồng các mẫu. Ví dụ phải thực hiện phép tính sau:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\
 &= \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) - \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) \\
 &= \frac{x^3-1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{TXĐ: } x \neq \pm 1 \\
 &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\
 &= x^2 + x + 1 - (x-1) = x^2 + 2.
 \end{aligned}$$

Bài 13

a) Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

b) Áp dụng kết quả trên để tính tổng:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+3}; \\
 B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6}.
 \end{aligned}$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức đã cho, sau đó áp dụng kết quả để tính tổng các phân thức A và B đã cho.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, ta biến đổi vế phải, chính là làm phép trừ hai phân thức không cùng mẫu, để có kết quả bằng vế trái.

Với câu b, vận dụng kết quả câu a, giúp cho việc làm phép cộng các phân thức không cùng mẫu đã cho một cách nhanh chóng.

● Cách giải

a) Biến đổi vế phải

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) - Ta thấy mẫu của biểu thức A là các đa thức, để áp dụng được kết quả câu a, cần phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$x^2 + x = x(x+1)$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= x^2 + x + 2x + 2 = x(x+1) + 2(x+1) = \\ &= (x+1)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x+2) + 3(x+2) = \\ &= (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

Do đó có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

- Ta nhận thấy:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{x+4-x-2}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+2)(x+4)}$$

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = \frac{x+6-x-4}{(x+4)(x+6)} = \frac{2}{(x+4)(x+6)}$$

Do đó có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{x+6} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Bài 14

a) Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \quad \text{với } x = \frac{1}{4},$$

$$\text{với } x = -\frac{1}{2}.$$

b) Biết rằng $2x - y = 7$, hãy tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{5x-y}{3x+7} - \frac{3y-2x}{2y-7}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho biểu thức A gồm cộng, trừ các phân thức không cùng mẫu. Phải quy đồng mẫu, làm các phép tính rồi tính giá trị theo biến x đã cho.

Câu b cho biểu thức B gồm hiệu của 2 phân thức, phải tính giá trị của B biết $2x - y = 7$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, trước hết phải tìm mẫu chung của các phân thức, sau đó rút gọn các phân thức, chú ý tìm TXĐ của các phân thức, cuối cùng là tính giá trị của A theo các biến đã cho.

Với câu b hãy thay $7 = 2x - y$ vào các mẫu của 2 phân thức đã cho, từ đó có kết quả bài toán.

● Cách giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \\
 &= \frac{2x+1}{2(2x-1)} + \frac{1-2x}{2(2x+1)} + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2 + 4}{2(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1+2x-1)(2x+1-2x+1) + 4}{2(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \frac{8x+4}{2(2x-1)(2x+1)} = \frac{4(2x+1)}{2(2x-1)(2x+1)}, \text{ TXĐ: } x \neq \pm \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{2x-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{4} \text{ thì } A = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{4} - 1} = \frac{2}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$$

Với $x = -\frac{1}{2} \notin \text{TXĐ}$, nên không có giá trị của A.

b) Thay $7 = 2x - y$ vào mẫu của 2 phân thức có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{5x-y}{3x+(2x-y)} - \frac{3y-2x}{2y-(2x-y)} \\
 &= \frac{5x-y}{5x-y} - \frac{3y-2x}{3y-2x}, \text{ TXĐ: } x \neq \frac{1}{5}y, x \neq \frac{3}{2}y \\
 &= 1 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Trong câu a bài toán trên đã áp dụng quy tắc đổi dấu:

$$-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$$

$$-\frac{A}{-B} = \frac{A}{B}$$

$$\begin{aligned}\text{Cụ thể là } + \frac{1 - 2x}{4x + 2} &= - \frac{-(1 - 2x)}{4x + 2} = - \frac{2x - 1}{4x + 2} \\ &- \frac{2}{1 - 4x^2} = - \left(- \frac{2}{-(1 - 4x^2)} \right) = \frac{2}{4x^2 - 1}\end{aligned}$$

Lưu ý là việc đổi dấu một phân thức giúp cho việc tìm mẫu chung của các phân thức thêm nhanh chóng.

- Ở câu b, ta có thể giải bài toán theo một cách khác là thay $2x - y = 7$ vào các tử bằng cách viết lại các tử để xuất hiện đa thức $2x - y$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } B &= \frac{5x - y}{3x + 7} - \frac{3y - 2x}{2y - 7} \\ &= \frac{3x + (2x - y)}{3x + 7} - \frac{2y - (2x - y)}{2y - 7} \\ &= \frac{3x + 7}{3x + 7} - \frac{2y - 7}{2y - 7} = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Bài 15

a) Thực hiện phép tính rồi tìm các giá trị của biến để biểu thức

$$A = (x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^4 - x^2 y^2} \text{ có giá trị âm.}$$

b) Thực hiện phép tính rồi tìm các giá trị của biến để biểu thức

$$B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1} \text{ có giá trị dương.}$$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a là phép nhân một đa thức với một phân thức. Sau khi nhân, tìm các giá trị của biến để $A < 0$.

Câu b là phép nhân một phân thức với một phân thức. Sau khi nhân, tìm các giá trị của biến để $B > 0$.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, cần áp dụng quy tắc $A \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{D}$, rồi phân tích mẫu thành nhân tử, rút gọn phân thức thỏa mãn TXD của nó.

Với câu b, cần áp dụng quy tắc $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$, rồi phân tích tử và mẫu thành nhân tử, rút gọn phân thức thỏa mãn TXD của nó.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (x^2 - y^2) \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^4 - x^2 y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{y^2(y^2 - x^2)} \\ &= - \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{y^2(x^2 - y^2)} = - \frac{x^2 + y^2}{y^2} \end{aligned}$$

TXD: $y \neq 0$; $x \neq \pm y$.

Ta thấy, do $y \neq 0$ nên $y^2 > 0$; do $x^2 + y^2 > 0$ nên suy ra

$$- \frac{x^2 + y^2}{y^2} < 0.$$

Vậy biểu thức A đã cho có giá trị âm với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, tức là $y \neq 0$; $x \neq \pm y$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{2(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \frac{2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$(\text{Vì } x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0)$$

TXD: $x \neq 1$

Ta thấy, do $x \neq 1$ nên $(x - 1)^2 > 0$, và với $x \neq -1$ thì $(x + 1)^2 > 0$

nên $2(x + 1)^2 > 0$, suy ra $\frac{2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} > 0$

Vậy biểu thức B đã cho có giá trị dương với mọi giá trị của biến thuộc tập xác định, tức là $x \neq \pm 1$.

● **Khai thác bài toán**

Nhận xét thêm về các biến:

- Với câu a, điều kiện để biểu thức A đã cho có giá trị âm là $y \neq 0, x \neq \pm y$. Nhưng điều kiện để biểu thức rút gọn $-\frac{x^2 + y^2}{y^2}$ có giá trị âm chỉ là $y \neq 0$.

- Với câu b, điều kiện để biểu thức B đã cho có giá trị không âm (tức là lớn hơn hoặc bằng 0) là $x \neq 1$. Nhưng để biểu thức rút gọn $\frac{2(x+1)^2}{(x-1)^2}$ có giá trị dương là $x \neq -1$.

Bài 16. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)} \cdot \frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} = \frac{2}{(a + b - c)^2}$$

$$b) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4} = \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu chứng minh đẳng thức, có thể biến đổi vế này sao cho bằng vế kia, hoặc biến đổi cả hai vế để cùng bằng một số nào đó. Ở câu b vế trái chứa biến x còn vế phải lại chứa biến y .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, hãy biến đổi vế trái để được một biểu thức bằng vế phải.

Với câu b, hãy biến đổi cả hai vế (vì hai vế có biến khác nhau) để chúng cùng bằng một số nào đó.

● Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \frac{a + b + c}{(a + b)^2 - c(a + b)} \cdot \frac{2a + 2b}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} \\ &= \frac{a + b + c}{(a + b)(a + b - c)} \cdot \frac{2(a + b)}{(a + b)^2 - c^2} \\ &= \frac{(a + b + c) \cdot 2(a + b)}{(a + b)(a + b - c)(a + b + c)(a + b - c)} = \frac{2}{(a + b - c)^2} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4} \\ &= \frac{(x^2 - 1) + (x - 1)}{(x^2 - 4) - (x + 2)} \cdot \frac{(x^2 - 9) + (x - 3)}{(x^2 - x) + (4x - 4)} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} \cdot \frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)} = 1. \end{aligned}$$

Biến đổi vế phải:

$$\begin{aligned} & \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6} \\ &= \frac{y^2 - 5y + 3y - 15}{y^2 - 5y + 2y - 10} \cdot \frac{y^2 - 2^2}{y^2 - 4 + y - 2} \\ &= \frac{y(y - 5) + 3(y - 5)}{y(y - 5) + 2(y - 5)} \cdot \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y^2 - 4) + (y - 2)} \\ &= \frac{(y - 5)(y + 3)}{(y - 5)(y + 2)} \cdot \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y - 2)(y + 3)} = 1. \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải vì cùng bằng 1, đẳng thức được chứng minh.

● Khai thác bài toán

- Bài toán câu b, có thể ra cách khác như sau:

Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$a) A = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x - 4};$$

$$b) B = \frac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 3y - 10} \cdot \frac{y^2 - 4}{y^2 + y - 6}.$$

Hãy nêu nhận xét về hai biểu thức A và B.

- Cũng ở câu b này, có thể nêu ra nhận xét về phân tích đa thức thành nhân tử, chẳng hạn:

Với $y^2 - 2y - 15$, không thể đặt nhân tử chung, nhóm số hạng hoặc dùng hằng đẳng thức, mà phải thêm bớt hạng tử. Thêm và bớt thế nào? Hãy để ý đến 15 có các ước là 3 và 5, từ đó có $y^2 - 2y - 15 = y^2 - 5y + 3y - 15$.

Với $y^2 - 3y - 10$ cũng vậy, để ý đến 10 có các ước là 2 và 5, từ đó có $y^2 - 3y - 10 = y^2 - 5y + 2y - 10$.

Với $y^2 + y - 6$ có thể:

a) Thêm $2y$, bớt $2y$, có:

$$y^2 - 2y + 3y - 6 = y(y - 2) + 3(y - 2) = (y - 2)(y + 3)$$

b) Tách hạng tử 6, có:

$$y^2 - 4 + y - 2 = (y - 2)(y + 2) + (y - 2) = (y - 2)(y + 3).$$

Bài 17. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{5x + 5y}{3x - 3y} : \frac{10x}{x^2 - y^2}; \quad b) \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4};$$

$$c) \frac{x - y}{x} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy}; \quad d) \frac{1 - x^4}{x + 1} : (x^2 - 1).$$

● **Tim hiểu đề bài**

Đề bài yêu cầu thực hiện phép chia phân thức cho phân thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần áp dụng quy tắc sau:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad (\text{với } \frac{C}{D} \neq 0)$$

$$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{B \cdot C} \quad (\text{với } C \neq 0).$$

Để có thể thực hiện các quy tắc trên cần biến đổi tử và mẫu thành nhân tử. Chú ý khi rút gọn cần lưu ý đến biến phải thuộc TXĐ.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5x + 5y}{3x - 3y} : \frac{10x}{x^2 - y^2} &= \frac{5(x + y)}{3(x - y)} : \frac{10x}{(x + y)(x - y)} \\ &= \frac{5(x + y)}{3(x - y)} \cdot \frac{(x + y)(x - y)}{10x} = \frac{(x + y)^2}{6x}. \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm y$; $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} &= \frac{x - 2}{x + 2} : \frac{(x - 2)^2}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{x - 2}{x + 2} \cdot \frac{(x + 2)^2}{(x - 2)^2} = \frac{x + 2}{x - 2}. \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 2$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x - y}{x} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} &= \frac{x - y}{x} : \frac{(x - y)^2}{xy} \\ &= \frac{x - y}{x} \cdot \frac{xy}{(x - y)^2} = \frac{y}{x - y}. \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x \neq y$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1-x^4}{x+1} : (x^2-1) &= \frac{-(x^4-1)}{x+1} : (x^2-1) = \\ &= \frac{-(x^2-1)(x^2+1)}{x+1} : (x^2-1) = -\frac{x^2+1}{x+1}. \end{aligned}$$

TXD: $x \neq \pm 1$.

● Khai thác bài toán

Vấn đề đặt ra là làm thế nào mà biết kết quả tìm được là đúng?

Câu trả lời là: hãy thử lại.

Ta thử lại với câu a chẳng hạn:

$$\frac{10x}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{6x} = \frac{10x(x+y)(x+y)}{6x(x+y)(x-y)} = \frac{5(x+y)}{3(x-y)} = \frac{5x+5y}{3x-3y}$$

Qua thử lại, ta tìm được phân thức bị chia $\frac{5x+5y}{3x-3y}$.

Bài 18. Chứng minh các đẳng thức:

$$\text{a) } \left[\frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} = \frac{a-1}{a^2+a+1} \text{ với } a \neq 1;$$

$$\text{b) } \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} = (1-x)^2(1+x^2)$$

với $x \neq \pm 1$.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài đòi hỏi hãy biến đổi vế trái bằng vế phải, ngầm hiểu vế phải là đáp số của biểu thức ở vế trái.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần phải thực hiện các phép tính ở vế trái theo thứ tự: làm tính trong ngoặc, trong móc vuông trước, ở đó phép tính nhân và chia làm trước rồi mới làm phép tính cộng trừ.

● Cách giải

a) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \left[\frac{a^2+1}{(a^2+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \frac{a^2-2a+1}{(a^2+1)(a-1)} : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} \\ &= \frac{(a-1)^2}{(a^2+1)(a-1)} \cdot \frac{a^2+1}{a^2+a+1} = \frac{a-1}{a^2+a+1} \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} \\ &= \left[\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} - x \right] : \frac{1+x}{(1+x^3)-x(1+x)} \\ &= (1+x+x^2-x) : \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1+x}{(1+x)(1-x+x^2-x)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{(1-x)^2} = (1+x^2) \cdot (1-x)^2 \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Biết rằng, nếu có $A = B$ thì có $A - B = 0$. Do đó để chứng minh hai đẳng thức đã cho có thể chứng minh hai đẳng thức sau:

$$a) \left[\frac{1}{a-1} - \frac{2a}{(a^2+1)(a-1)} \right] : \frac{a^2+a+1}{a^2+1} - \frac{a-1}{a^2+a+1} = 0;$$

$$b) \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1+x}{1-x-x^2+x^3} - (1-x)^2(1+x^2) = 0.$$

Coi đây như 2 bài tập, bạn đọc hãy tự làm.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 19. Cho phân thức $A = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3}$.

- a) Tìm tập xác định của phân thức;
- b) Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0.

Bài 20. Viết các biểu thức sau dưới dạng những phân thức có cùng tử:

a) $\frac{x+y}{y}$ và $\frac{x-y}{x}$;

b) $\frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2 - xy)y}$ và $\frac{x+y}{x}$.

Bài 21. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên. Tìm giá trị nguyên đó của phân thức.

a) $A = \frac{5x+19}{x+2}$; b) $B = \frac{2x^3 - 9x^2 + 10x + 4}{2x-1}$.

Bài 22. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{x^6 - 1}{(x-1)(2x^2 + 4x + 2)}$; b) $\frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}$.

Bài 23. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{9x + 7}{2} - (x - \frac{x - 2}{7}) = 36;$

b) $\frac{x - 1}{4} - \frac{1}{8} (\frac{x - 5}{4} - \frac{14 - 2x}{5}) = \frac{x - 9}{2} - \frac{7}{8}.$

Bài 24. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

$$\frac{(x - y)^2 + xy}{(x + y)^2 - xy} \cdot \left[1 : \frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)} \right]$$

với $x = 1, y = -3,25.$

Bài 25. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} \right) : \frac{2x}{5x - 5}.$$

a) Rút gọn A;

b) Tính giá trị của biểu thức A với $x = -3,5;$

c) Với giá trị nào của x để $A = 4?$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 19. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, hãy giải phương trình $x^2 + 4x + 3 = 0$ để tìm giá trị của biến, sau đó để phân thức có nghĩa thì $x^2 + 4x + 3$ phải khác 0, từ đó có TXĐ.

Với câu b, để tìm các giá trị của x sao cho phân thức bằng 0 cần giải phương trình $3x^2 + 3x - 18 = 0.$

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 + 4x + 3 &= x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3) \\ &= x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3) = 0 \text{ khi} \end{aligned}$$

$$x = -1 \text{ hoặc } x = -3$$

Vậy TXĐ: $x \neq -1; x \neq -3.$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 + 3x - 18 &= 3(x^2 + x - 6) = 3(x^2 - 4 + x - 2) \\ &= 3[(x^2 - 4) + (x - 2)] = 3(x - 2)(x + 3) = 0 \end{aligned}$$

khí $x = 2$ hoặc $x = -3$.

Vì $x = -3 \notin \text{TXĐ}$ nên chỉ có $x = 2$ thì $\frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x + 3} = 0$.

Bài 20. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Vận dụng tính chất cơ bản của phân thức để biến phân thức đã cho thành phân thức mới có tử phù hợp.

• Cách giải

$$\text{a) } \frac{x + y}{y} = \frac{(x + y)(x - y)}{y(x - y)} = \frac{x^2 - y^2}{y(x - y)}$$

$$\text{và } \frac{x - y}{x} = \frac{(x - y)(x + y)}{x(x + y)} = \frac{x^2 - y^2}{x(x + y)}$$

Ta được hai phân thức cùng tử.

$$\text{b) } \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2 - xy)y} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x^2 + y^2 - xy)y} = \frac{x + y}{y}$$

Như vậy $\frac{x + y}{y}$ và $\frac{x + y}{x}$ là hai phân thức có cùng tử.

Bài 21. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện phép chia tử cho mẫu để tách được phần nguyên của phân thức. Muốn phân thức có giá trị nguyên thì phân thức đi sau phần nguyên phải là số nguyên. Từ đó lập bảng tìm các giá trị x nguyên và giá trị nguyên của phân thức.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{5x + 19}{x + 2} = \frac{5(x + 2) + 9}{x + 2} = \frac{5(x + 2)}{x + 2} + \frac{9}{x + 2} \\ &= 5 + \frac{9}{x + 2} \end{aligned}$$

Do x là số nguyên nên A là số nguyên nếu $x + 2$ là ước của 9. Ước của 9 là $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Do đó:

$x + 2$	-1	1	-3	3	-9	9
x	-3	-1	-5	1	-11	7
A	-4	14	2	8	4	6

b) Thực hiện phép chia $2x^3 - 9x^2 + 10x + 4$ cho $2x - 1$ được thương là $x^2 - 4x + 3$ và dư 7.

$$\text{Từ đó có } B = x^2 - 4x + 3 + \frac{7}{2x - 1}.$$

Do x là số nguyên nên B là số nguyên nếu $2x - 1$ là ước của 7. Ước của 7 là $\pm 1, \pm 7$. Do đó:

$2x - 1$	-1	1	-7	7
x	0	1	-3	4
B	-4	7	23	4

Bài 22. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Xem hướng dẫn bài 6 mục "Phân thức đại số và các phép tính".

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^6 - 1}{(x - 1)(2x^2 + 4x + 2)} &= \frac{(x^2)^3 - 1}{(x - 1)2(x^2 + 2x + 1)} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{2(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{2(x - 1)(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 1}{2(x + 1)} \end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} &= \frac{(x^3 - 4x^2) - (x - 4)}{(x^3 - 8) - (7x^2 - 14x)} \\
&= \frac{x^2(x - 4) - (x - 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 7x(x - 2)} = \frac{(x - 4)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4 - 7x)} \\
&= \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 4)} = \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x^2 - x - 4x + 4)} \\
&= \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)[x(x - 1) - 4(x - 1)]} = \frac{(x - 4)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)(x - 4)} = \\
&= \frac{x + 1}{x - 2}
\end{aligned}$$

TXĐ: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 4$.

Bài 23. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết hãy thực hiện phép tính trong dấu ngoặc, sau đó quy đồng mẫu rồi khử mẫu. Chuyển vế rồi thực hiện các phép tính để tìm nghiệm.

• Cách giải

$$\text{a) } \frac{9x + 7}{2} - \left(x - \frac{x - 2}{7}\right) = 36$$

$$\frac{9x + 7}{2} - \frac{7x - x + 2}{7} = 36$$

$$\frac{9x + 7}{2} - \frac{6x + 2}{7} = 36$$

$$7(9x + 7) - 2(6x + 2) = 36 \cdot 14$$

$$63x + 49 - 12x - 4 = 504$$

$$63x - 12x = 504 - 49 + 4$$

$$\text{hay } 51x = 459; \quad x = 9$$

$$b) \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{5x-25-56+8x}{20} = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{13x-81}{160} = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$40x - 40 - 13x + 81 = 80x - 720 - 140;$$

$$40x - 13x - 80x = -720 - 140 - 81 + 40;$$

$$53x = 901; \quad x = \frac{901}{53} = 17.$$

Bài 24. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Có thể đặt A là biểu thức bị nhân và đặt B là biểu thức nhân (trong móc vuông). Nên thực hiện riêng từng biểu thức A, B rồi ghép lại để có kết quả rút gọn của bài toán.

• Cách giải

$$A = \frac{(x-y)^2 + xy}{(x+y)^2 - xy} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + xy}{x^2 + 2xy + y^2 - xy} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

$$\begin{aligned} B &= 1 : \frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)} \\ &= 1 : \frac{(x^5 + x^3y^2) + (x^2y^3 + y^5)}{(x^3 - y^3)[(x^3 + x^2y) + (xy^2 + y^3)]} \\ &= 1 : \frac{x^3(x^2 + y^2) + y^3(x^2 + y^2)}{(x^3 - y^3)[x^2(x+y) + y^2(x+y)]} \\ &= 1 : \frac{(x^2 + y^2)(x^3 + y^3)}{(x^3 - y^3)(x+y)(x^2 + y^2)} \\ &= 1 : \frac{(x^2 + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

$$= 1 : \frac{x^2 - xy + y^2}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2}$$

$$\text{Vậy } A \cdot B = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2} = x - y.$$

Tính giá trị:

$$x - y = 1 - (-3,25) = 1 + 3,25 = 4,25.$$

Bài 25. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Để rút gọn cần thực hiện phép tính trong dấu ngoặc trước, sau đó làm phép chia. Chú ý đến TXĐ.

Để tìm x cần phải giải phương trình mà vế trái là biểu thức đã được rút gọn và vế phải bằng 4. Giá trị tìm được phải thuộc TXĐ.

• Cách giải

a) Rút gọn A

$$A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \frac{2x}{5x-5}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} : \frac{2x}{5(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1+x-1)(x+1-x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{5(x-1)}{2x}$$

$$= \frac{4x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{5(x-1)}{2x} = \frac{10}{x+1}.$$

TXĐ: $x \neq 0$; $x \neq \pm 1$.

b) Tính giá trị của A

$$A = \frac{10}{x+1} = \frac{10}{-3,5+1} = \frac{10}{-2,5} = -4.$$

c) Tìm giá trị của x để $A = 4$.

$$\frac{10}{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4x + 4 = 10 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = 1,5.$$

$$x = 1,5 \in \text{TXĐ}.$$

IV. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

Bài 1. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

a) Điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau:

x	0,5	1		3	
y	-1		-4		-8

b) y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ nào ? viết công thức.

c) x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ nào ? viết công thức.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho một số giá trị của x và y ở trong bảng, biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, phải điền tiếp các số vào các ô trống trong bảng.

Câu b cho y tỉ lệ thuận với x, phải tìm hệ số tỉ lệ a theo các giá trị có trên bảng, sau đó viết công thức về mối tương quan giữa y và x.

Câu c, tương tự như câu b với x tỉ lệ thuận với y.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, biết rằng x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau

tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $y = ax$ (1) trong đó a là hệ số tỉ lệ. Từ (1) suy ra $a = \frac{y}{x}$ (2). Căn cứ vào hai giá trị của x , y ở cột thứ nhất suy ra $a = \frac{-1}{0,5} = -2$. Từ đó tính được giá trị của y ở cột 3 và cột 5 theo công thức (1). Muốn tìm giá trị của x ở cột 4 và cột 6 cần biến đổi công thức (1), ta có $x = \frac{y}{a}$ (3).

Với câu b, biết y tỉ lệ thuận với x tức là có $y = ax$, hãy căn cứ vào một cặp giá trị bất kì của x , y có trong bảng để tìm hệ số tỉ lệ a , từ đó viết được công thức.

Với câu c, làm tương tự câu b.

● Cách giải

a) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $y = ax$ (1).

Từ (1) suy ra $a = \frac{y}{x}$ (2). Thay x , y bởi cặp giá trị ở cột 1 trong bảng, ta có $a = \frac{-1}{0,5} = -2$. Do đó:

Giá trị của y ở cột 3 là $y_3 = a \cdot x = -2 \cdot 1 = -2$

Giá trị của y ở cột 5 là $y_5 = a \cdot x = -2 \cdot 3 = -6$.

Từ (1) suy ra $x = \frac{y}{a}$ (3). Thay giá trị của y ở cột 4, cột 6 lần lượt vào (3) với $a = -2$, có:

Giá trị của x ở cột 4 là: $x_4 = \frac{y_4}{a} = \frac{-4}{-2} = 2$

Giá trị của x ở cột 6 là: $x_6 = \frac{y_6}{a} = \frac{-8}{-2} = 4$.

Vậy bảng đã cho được điền đầy đủ như sau:

x	0,5	1	2	3	4
y	-1	-2	-4	-6	-8

b) Biết y tỉ lệ thuận với x tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $y = ax$. Thay bất kì cặp giá trị nào của x, y trong bảng trên ta sẽ có hệ số tỉ lệ a:

$$-6 = a \cdot 3 \Rightarrow a = -6 : 3 = -2.$$

Ta có công thức $y = -2x$.

c) Biết x tỉ lệ thuận với y tức là chúng liên hệ với nhau theo công thức $x = ay$. Thay bất kì cặp giá trị nào của x, y trong bảng trên ta sẽ có hệ số tỉ lệ a:

$$2 = a \cdot (-4) \Rightarrow a = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Ta có công thức $x = -\frac{1}{2}y$.

● Khai thác bài toán

Không nên cho rằng: nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị của đại lượng này tăng làm cho giá trị tương ứng của đại lượng kia cũng tăng.

Chẳng hạn, với trường hợp hệ số tỉ lệ là số âm như ở bài toán trên, khi giá trị của x tăng từ 1 đến 4, thì giá trị của y lại giảm từ -2 xuống -8.

Nhận thấy rằng, khi hệ số tỉ lệ là số âm, có thể dùng giá trị tuyệt đối để phát biểu về hai đại lượng tỉ lệ thuận như sau: nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì khi giá trị tuyệt đối của đại lượng này tăng (hoặc giảm) làm cho giá trị tuyệt đối tương ứng của đại lượng kia cũng tăng (hoặc giảm). Chẳng hạn, với bài toán trên, rõ ràng khi giá trị tuyệt đối của x tăng từ 1 đến 4, thì giá trị tuyệt đối tương ứng của y cũng tăng từ $|-2|$ đến $|-8|$.

Bài 2

a) Một công nhân làm được 20 dụng cụ trong 30 phút. Hỏi trong 75 phút người đó làm được bao nhiêu dụng cụ?

b) Cứ 100 kg thóc có 64 kg gạo. Hỏi 15 thùng thóc cho bao nhiêu kilôgam gạo biết rằng mỗi thùng thóc có 20 kg thóc?

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài câu a cho: 30 phút thì làm được 20 dụng cụ, hỏi trong 75 phút làm được bao nhiêu dụng cụ. Thời gian và số dụng cụ là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Câu b cho: cứ 100 kg thóc có 64 kg gạo. Hỏi trong 20 kg . 15 = 300 kg thóc có bao nhiêu kg gạo. Số kilôgam thóc và số kg gạo là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Với câu a, đại lượng thứ nhất là số phút (x) có hai giá trị $x_1 = 30$ phút, $x_2 = 75$ phút; đại lượng thứ hai là số dụng cụ (y), mới có giá trị $y_1 = 20$ dụng cụ, cần phải tìm giá trị y_2 .

Biết hai đại lượng x, y tỉ lệ thuận với nhau, nên theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận có $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Từ đó suy ra được y_2 .

Với câu b, suy luận tương tự như câu a.

• Cách giải

a) Ta có thể lập bảng tóm tắt đề bài như sau:

Thời gian (x)	Số dụng cụ (y)
30 phút (x_1)	20 dụng cụ (y_1)
75 phút (x_2)	y_2

Biết rằng, thời gian làm việc và số dụng cụ làm được là hai đại lượng tỉ lệ thuận, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{30}{75} = \frac{20}{y_2}$$

Từ đó $y_2 = \frac{20 \cdot 75}{30} = 50$. Như vậy trong 75 phút người công nhân làm được 50 dụng cụ.

b) Ta có thể lập bảng tóm tắt đề bài như sau:

Số kilôgam thóc (x)	Số kilôgam gạo (y)
100 kg (x_1)	64 kg (y_1)
300 kg (x_2)	y_2
(20 · 15 = 300)	.

Biết rằng, số kilôgam thóc đem xay xát và số kilôgam gạo thu được là hai đại lượng tỉ lệ thuận, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{100}{300} = \frac{64}{y_2}$$

Từ đó $y_2 = \frac{64 \cdot 300}{100} = 192$. Như vậy, trong 300 kg thóc có 192 kg gạo.

• Khai thác bài toán

Trong bảng tóm tắt câu a chẳng hạn, có hai giá trị của đại lượng x và hai giá trị của đại lượng y:

$$x_1 = 30 \text{ phút} \quad y_1 = 20 \text{ dụng cụ}$$

$$x_2 = 75 \text{ phút} \quad y_2 = ?$$

Tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận được vận dụng là:

$$\frac{30}{75} = \frac{20}{y_2} \text{ hay tổng quát } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Vận dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận để giải mọi bài toán thuộc loại kể trên, chẳng hạn:

Dùng 8 máy thì tiêu thụ hết 70 lít xăng. Hỏi dùng 12 máy cùng

loại thì số xăng tiêu thụ là bao nhiêu?

$$\begin{array}{lll} \text{Ta có:} & x_1 = 8 \text{ máy} & y_1 = 70 \text{ lít xăng} \\ & x_2 = 12 \text{ máy} & y_2 = ? \end{array}$$

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ thuận có:

$$\frac{8}{12} = \frac{70}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{70 \cdot 12}{8} = 105 \text{ (lít)}.$$

Bài 3. Ba người thợ cùng làm việc với nhau và đã nhận được số tiền công là 950 000 đ. Số tiền công nhận được của mỗi người tỉ lệ thuận với số ngày công đã làm. Biết tỉ số tiền công của người thứ nhất và người thứ hai là 4:3, tỉ số tiền công của người thứ hai và người thứ ba là 6:5. Tính số tiền công của mỗi người.

● **Tìm hiểu đề bài**

Ba người thợ đã nhận được 950 000 đ tiền công. Số tiền công mỗi người được nhận tỉ lệ thuận với số ngày công, nghĩa là làm nhiều công sẽ được lĩnh nhiều tiền hơn. Mặt khác còn cho biết tỉ số tiền công giữa người thứ nhất và người thứ hai, giữa người thứ hai và người thứ ba. Phải tính số tiền công của mỗi người.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Gọi số tiền công của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là a , b , c đồng thời ta có $a + b + c = 950\,000$ đ.

Mặt khác, ta có $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ và $\frac{b}{c} = \frac{6}{5}$ hay $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$ (1) và $\frac{b}{6} = \frac{c}{5}$ (2).

Phải tìm cách biến dãy (1), dãy (2) thành một dãy các tỉ số bằng nhau, rồi áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm các kết quả của bài toán.

● **Cách giải**

Gọi số tiền công được nhận của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba theo thứ tự là a , b , c đồng thời ta có $a + b + c = 950\,000$ đ.

Theo đầu bài, ta có $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ và $\frac{b}{c} = \frac{6}{5}$ suy ra $\frac{a}{4} = \frac{b}{3}$ (1) và $\frac{b}{6} = \frac{c}{5}$ (2).

Biết rằng, nếu nhân hai vế của một đẳng thức với cùng một số khác không thì được một đẳng thức tương đương với nó, do đó:

$$\text{Từ } \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{a}{8} = \frac{b}{6} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{8+6+5} = \frac{950000}{19} = 50\,000$$

$$\text{Do đó có: } \frac{a}{8} = 50000 \Rightarrow a = 50000 \cdot 8 = 400\,000 \text{ (đ)}$$

$$\frac{b}{6} = 50000 \Rightarrow b = 50000 \cdot 6 = 300\,000 \text{ (đ)}$$

$$\frac{c}{5} = 50000 \Rightarrow c = 50000 \cdot 5 = 250\,000 \text{ (đ)}$$

Vậy số tiền công của người thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là 400 000 đ; 300 000 đ và 250 000 đ.

● Khai thác bài toán

Ở bài toán trên, ta đã biến đổi dãy tỉ số (1) (hoặc tỉ lệ thức 1) và dãy tỉ số (2) thành một dãy các tỉ số bằng nhau là $\frac{a}{8} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$.

Vấn đề đặt ra là nếu có $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$ (3) và $\frac{b}{c} = \frac{8}{9}$ (4) thì có thể biến dãy (3) và dãy (4) về một dãy các tỉ số mới bằng nhau được không?

Được, ta làm như sau: Trước hết tìm BCNN(12; 8) = 24; $24 : 12 = 2$; $24 : 8 = 3$. Sau đó, nhân hai vế của dãy (3) với $\frac{1}{2}$ và nhân hai

vế của dãy (4) với $\frac{1}{3}$, ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24}, \quad \frac{b}{24} = \frac{c}{27}$$

Từ đó suy ra dãy các tỉ số bằng nhau là:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{24} = \frac{c}{27}.$$

Bạn đọc có thể tự làm bài toán sau: Ba người thợ cùng làm việc với nhau và đã nhận được số tiền công là 1 220 000 đ. Số tiền công nhận được của mỗi người tỉ lệ thuận với số ngày công đã làm. Biết tỉ số tiền công của người thứ nhất và người thứ hai là 5 : 12, tỉ số tiền công của người thứ hai và người thứ ba là 8 : 9. Tính số tiền công của mỗi người.

Đáp số: 200 000 đ; 480 000 đ; 540 000 đ.

Bài 4. Chia số 828 thành ba phần:

a) Tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5;

b) Tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Phải chia số 828 thành ba phần, chẳng hạn a, b, c, tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5 tức là $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ (câu a).

Phải chia số 828 thành ba phần, chẳng hạn a, b, c, tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ tức là $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{2}{3}} = \frac{c}{\frac{3}{4}}$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy dựa vào tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để tìm kết quả bài toán.

● Cách giải

a) Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a , b , c ; biết ba phần này tỉ lệ thuận với 3; 4 và 5 nên có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

Do $a + b + c = 828$ và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{828}{12} = 69.$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{3} = 69 \Rightarrow a = 69.3 = 207$$

$$\frac{b}{4} = 69 \Rightarrow b = 69.4 = 276.$$

$$\frac{c}{5} = 69 \Rightarrow c = 69.5 = 345.$$

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là 207; 276 và 345.

b) Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a , b , c ; biết ba phần này tỉ lệ với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ hay với $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$ và $\frac{9}{12}$, nên có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}}$$

Do $a + b + c = 828$ và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = \frac{b}{\frac{8}{12}} = \frac{c}{\frac{9}{12}} = \frac{a+b+c}{\frac{6+8+9}{12}} = \frac{828}{\frac{23}{12}} = 36.12$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{\frac{6}{12}} = 36.12 \Rightarrow a = 36.12 \cdot \frac{6}{12} = 216$$

$$\frac{b}{\frac{8}{12}} = 36.12 \Rightarrow b = 36.12 \cdot \frac{8}{12} = 288$$

$$\frac{c}{\frac{9}{12}} = 36.12 \Rightarrow c = 36.12 \cdot \frac{9}{12} = 324.$$

Vậy ba phần phải tìm lần lượt là 216; 288 và 324.

● **Khai thác bài toán**

- Chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ như đã trình bày ở trên, ta cần quy đồng mẫu của các phân số đã cho. Khi các phân số đã được quy đồng mẫu thì vấn đề cần quan tâm là các tử, do vậy có thể coi bài toán trên như sau: chia số 828 thành ba phần tỉ lệ thuận với 6, 8 và 9.

Ta sẽ giải bài toán này như sau:

Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a, b, c, biết ba phần này tỉ lệ với $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$ hay với $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$ và $\frac{9}{12}$ hoặc với 6; 8 và 9 nên ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9}$$

Do $a + b + c = 828$ và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9} = \frac{a+b+c}{6+8+9} = \frac{828}{23} = 36.$$

Từ đó có:

$$\frac{a}{6} = 36 \Rightarrow a = 36.6 = 216$$

$$\frac{b}{8} = 36 \Rightarrow b = 36.8 = 288$$

$$\frac{c}{9} = 36 \Rightarrow c = 36.9 = 324.$$

Nhận xét: Khi chia một số thành các phần tỉ lệ thuận với các phân số, ta quy đồng mẫu các phân số, sau đó đưa bài toán về dạng chia một số thành các phần tỉ lệ với các số nguyên (chính là tử của các phân số đã quy đồng).

- Với bài toán sau đây: chia số 129 thành bốn phần tỉ lệ thuận với 0,5; 0,75; 0,8; và 0,1 thì có thể giải như thế nào ?

Ta có thể giải bằng hai cách như sau:

+ Giữ nguyên các số thập phân đã cho, rồi lập dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{0,5} = \frac{b}{0,75} = \frac{c}{0,8} = \frac{d}{0,1}.$$

+ Đổi các số thập phân ra phân số:

$$0,5 = \frac{1}{2}; 0,75 = \frac{3}{4}; 0,8 = \frac{4}{5}; 0,1 = \frac{1}{10}, \text{ sau đó quy đồng mẫu,}$$

được các phân số: $\frac{10}{20}; \frac{15}{20}, \frac{16}{20}$ và $\frac{2}{20}$, rồi lập dãy các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{16} = \frac{d}{2}.$$

Hai cách làm trên (theo số thập phân hay theo số nguyên) sẽ cho cùng một kết quả, bạn đọc hãy tự làm tiếp bài toán này.

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

Bài 5

a) Với kí hiệu x (cm) và y (cm) là độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng của một hình tam giác có diện tích bằng

60 cm^2 , hãy xét xem giữa x và y có mối liên hệ như thế nào ? Lập bảng các giá trị của y ứng với các giá trị sau của x : 10; 20; 30; 40; 50; 60.

b) Biết độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2; 3; 4. Hỏi độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác tỉ lệ thuận với ba số nào ?

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài câu a cho một hình tam giác có diện tích $S = 60 \text{ cm}^2$. Độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng của hình tam giác đó lần lượt là $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$, cần xác định mối liên hệ giữa x và y . Mặt khác đã cho một số giá trị của x , phải lập bảng để tìm các giá trị tương ứng của y .

Câu b cho ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2; 3; 4, tìm xem độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác tỉ lệ thuận với ba số nào ?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Với câu a, áp dụng công thức tính diện tích S của một tam giác có độ dài cạnh đáy là $x \text{ cm}$ và độ dài đường cao tương ứng là $y \text{ cm}$:

$$S = \frac{1}{2} xy \text{ (cm}^2\text{)}$$

Biết $S = 60 \text{ cm}^2$ suy ra $xy = 120 \text{ (cm}^2\text{)}$. Từ đây xác định được mối quan hệ giữa x và y . Lập bảng với các giá trị đã cho của x để tính các giá trị tương ứng của y .

Với câu b, khi tam giác đã cho có độ dài ba cạnh là a, b, c và độ dài các đường cao tương ứng với mỗi cạnh đó là h_a, h_b, h_c , và S là diện tích của tam giác, ta có:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Từ đó suy ra kết quả bài toán.

● Cách giải

a) Với tam giác có diện tích $S = 60 \text{ cm}^2$, độ dài cạnh đáy và độ dài đường cao tương ứng lần lượt là $x \text{ cm}$, $y \text{ cm}$, thì công thức tính diện tích tam giác là : $S = \frac{1}{2} xy = 60 (\text{cm}^2)$ suy ra $2 S = xy = 120 (\text{cm}^2)$

Mối liên hệ giữa x và y được cho bởi công thức $xy = 120$ là liên hệ tỉ lệ nghịch của hai đại lượng x và y .

Dựa vào công thức $xy = 120$ và các giá trị của x đã cho, ta có thể lập nên bảng sau:

x	10	20	30	40	50	60
y	12	6	4	3	2,4	2

b) Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c , theo đầu bài ta có:

$$a : b : c = 2 : 3 : 4 \text{ hay } \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}.$$

Gọi các đường cao tương ứng với ba cạnh a, b, c là h_a, h_b, h_c , diện tích tam giác là S , ta có:

$$\begin{aligned} h_a : h_b : h_c &= \frac{2S}{a} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{c} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \\ &= \frac{12}{2} : \frac{12}{3} : \frac{12}{4} = 6 : 4 : 3. \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

- Không nên nghĩ rằng, nếu độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ thuận với 2:3:4 thì các đường cao tương ứng tỉ lệ thuận với 4:3:2.

Thực ra thì các đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với 2:3:4 tức là tỉ lệ thuận với $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. Biến đổi tỉ số giữa ba phân số trên

thành tỉ số giữa ba số nguyên bằng cách nhân mỗi số với 12 (BCNN của 2; 3; 4) ta được 6:4:3.

- Ở bảng đã lập trong cách giải có thể rút ra những nhận xét gì ?

Ta có 2 nhận xét sau:

1) Tích một giá trị của đại lượng này (x) với giá trị tương ứng của đại lượng kia (y) là một hằng số.

Chẳng hạn: $10 \cdot 12 = \dots = 50 \cdot 2,4 = \dots = 120$

Tổng quát: $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \dots = a$ (với a là hằng số khác 0)

2) Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này (y) bằng tỉ số nghịch đảo của hai giá trị tương ứng của đại lượng kia (x).

Chẳng hạn:

$$\frac{12}{6} = \frac{20}{10}; \quad \frac{4}{3} = \frac{40}{30}, \dots$$

Tổng quát: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}; \quad \frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1}; \dots$

Chú ý: Hai nhận xét kể trên chính là hai tính chất thường được áp dụng trong các bài toán về tỉ lệ nghịch.

Bài 6. Cho ba đại lượng p, q, r. Hãy tìm mối tương quan giữa p với r biết rằng:

- a) p và q tỉ lệ nghịch, p và r tỉ lệ nghịch;
- b) p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ thuận;
- c) p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ nghịch.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho

a) p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ nghịch, tìm mối tương quan giữa p và r.

b) p và q tỉ lệ nghịch, q và r tỉ lệ thuận, tìm mối tương quan giữa p và r.

c) p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ nghịch, tìm mối tương quan giữa p và r.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Cần dựa vào công thức về mối liên hệ giữa hai đại lượng tỉ lệ thuận, tỉ lệ nghịch.

Với câu a thì:

- Khi p và q tỉ lệ nghịch ta có $p = \frac{a}{q}$ (1)

- Khi q và r tỉ lệ nghịch ta có $q = \frac{b}{r}$ (2)

Từ đó suy ra được mối quan hệ giữa p và r bằng cách thay (2) vào (1)

Với câu b, c làm tương tự câu a.

● **Cách giải**

a) p và q tỉ lệ nghịch nên $p = \frac{a}{q}$ (1).

q và r tỉ lệ nghịch nên $q = \frac{b}{r}$ (2).

Thay (2) vào (1) có: $p = \frac{a}{\frac{b}{r}} = a \cdot \frac{r}{b} = \frac{a}{b} \cdot r$.

Vậy p và r tỉ lệ thuận.

b) p và q tỉ lệ nghịch nên $p = \frac{a}{q}$ (1)

q và r tỉ lệ thuận nên $q = br$ (3)

Thay (3) vào (1) có:

$$p = \frac{a}{br} = \frac{\frac{a}{b}}{r}$$

Vậy p và r tỉ lệ nghịch.

c) p và q tỉ lệ thuận nên $p = aq$ (4)

q và r tỉ lệ nghịch nên $q = \frac{b}{r}$ (2)

Thay (2) vào (4) có:

$$p = a \cdot \frac{b}{r} = \frac{ab}{r}$$

Vậy p và r tỉ lệ nghịch.

● Khai thác bài toán

Hãy xét xem với 3 đại lượng p, q, r đã được xác lập các mối tương quan trong bài toán còn có thể xảy ra mối tương quan nào nữa không ?

Ta thấy còn mối tương quan sau: nếu p và q tỉ lệ thuận, q và r tỉ lệ thuận thì mối tương quan q và r thế nào ? Vì p và q tỉ lệ thuận nên $p = aq$ (4), q và r tỉ lệ thuận nên $q = br$ (3). Thay (3) vào (4) ta có:

$$p = a.br = ab.r$$

Vậy p và r tỉ lệ thuận.

Bài 7. Ba đội máy cày gồm 13 máy làm việc trên ba cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội một hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội hai trong 6 ngày, đội ba trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có mấy máy cày biết rằng năng suất của các máy như nhau ?

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho biết, có ba cánh đồng có diện tích bằng nhau, với 13 máy cày phân chia cho 3 đội, trong đó đội một, đội hai và đội ba đã hoàn thành công việc lần lượt trong 4; 6; 8 ngày. Hỏi mỗi đội

có mấy máy cày, biết rằng năng suất của các máy như nhau ?

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Biết rằng diện tích ở ba cánh đồng bằng nhau, năng suất của các máy như nhau, nên nếu gọi số máy của đội một, đội hai, đội ba lần lượt là x, y, z , ta có: $4x = 6y = 8z$ (vì số máy tỉ lệ nghịch với ngày hoàn thành).

Từ đó suy ra được dãy các tỉ số bằng nhau, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau sẽ suy ra kết quả bài toán.

● Cách giải

Gọi số máy cày của ba đội lần lượt là x, y, z (với x, y, z là các số nguyên dương), ta có $x + y + z = 13$.

Vì số máy cày tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc nên ta có:

$$4x = 6y = 8z, \text{ suy ra}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} &= \frac{x+y+z}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{x+y+z}{\frac{6}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24}} = \frac{13}{\frac{13}{24}} = 24. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6; y = 24 \cdot \frac{1}{6} = 4; z = 24 \cdot \frac{1}{8} = 3.$$

Số máy của đội một, đội hai, đội ba theo thứ tự là 6; 4; 3 máy.

● Khai thác bài toán

Có thể thay tỉ số giữa phân số $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ bằng tỉ số giữa ba số

nguyên bằng cách nhân mỗi số với 24 (BCNN của 4; 6; 8).

Khi đó:

$$x:y:z = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = \frac{6}{24} : \frac{4}{24} : \frac{3}{24} = 6:4:3.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{6} : \frac{y}{4} : \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1.$$

$$\text{Do đó: } x = 1.6 = 6$$

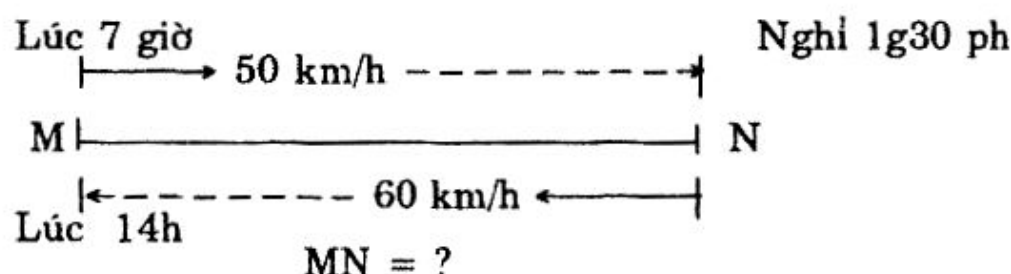
$$y = 1.4 = 4$$

$$z = 1.3 = 3.$$

Bài 8. Một ô tô đi từ M đến N, xe khởi hành lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến N xe nghỉ lại 1 giờ 30 phút rồi trở về M với vận tốc 60 km/h. Ô tô về đến M lúc 14 giờ. Tính độ dài quãng đường MN.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài toán đã cho được minh họa trên hình vẽ sau:



● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết thời gian khởi hành từ M của xe ô tô, biết thời gian nghỉ tại N và biết thời gian về đến M, do đó biết được thời gian xe lần bánh trên quãng đường MN không đổi cả đi lẫn về.

Trên quãng đường không đổi MN thì thời gian đi t_1 , thời gian về

$$t_2 \text{ tỉ lệ nghịch với vận tốc đi } v_1 \text{ và về } v_2, \text{ tức là có } \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50}$$

(theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch).

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và các dữ kiện đã cho, có kết quả bài toán.

● **Cách giải**

Thời gian ô tô đi trên quãng đường MN và NM là:

$$14 - 7 - 1,5 = 5,5 \text{ (giờ)}$$

Gọi thời gian và vận tốc xe ô tô đi từ M đến N là t_1 và v_1 , thời gian và vận tốc xe ô tô đi từ N về M là t_2 và v_2 ; như vậy thời gian t và vận tốc v là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5} \text{ hay } \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 + t_2}{6 + 5} = \frac{5,5}{11} = 0,5.$$

Suy ra $t_1 = 0,5.6 = 3$ (giờ)

Vậy quãng đường MN dài: $50.3 = 150$ (km).

● **Khai thác bài toán**

Cần lưu ý rằng, đối với toán chuyển động đều loại có khoảng cách giữa hai địa điểm là một số không đổi, chỉ cần quan tâm đến hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau là v và t mà thôi.

Bài toán trên được thay đổi một số chi tiết và đề bài như sau: "Một ô tô đi từ M đến N, xe khởi hành lúc 7 giờ sáng với vận tốc 50 km/h. Đến N xe nghỉ lại 30 phút rồi trở về M với vận tốc 60 km/h. Trên đường về xe đã dừng lại 1 giờ 30 phút để sửa xe nên đã về đến M lúc 14g30 phút. Tính quãng đường MN". Không giải tỉ mỉ bài này, hãy cho biết kết quả bài toán.

Ta thấy, thời gian xe lăn bánh khi đi và lúc về vẫn là 5,5 giờ ($= 14,5 - (0,5 + 1,5 + 7)$), vì hai đại lượng v , t không thay đổi.

đáp số bài toán này giống bài toán trước.

Bài 9. Hai xe ô tô cùng khởi hành từ M đến N. Vận tốc xe I là 54 km/h, vận tốc xe II là 36 km/h. Thời gian xe I đi quãng đường MN ít hơn xe II là 30 phút. Tính thời gian mỗi xe đã đi quãng đường MN và chiều dài quãng đường MN.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài toán đã cho được minh họa trên hình vẽ sau:

Xe I $\rightarrow$ 54 km/h = v_1 ----- $\rightarrow$ t_1

M-----N

Xe II $\rightarrow$ 36 km/h = v_2 ----- $\rightarrow$ t_2 ; $t_2 - t_1 = 0,5$ (giờ)

MN = ?

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Biết hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ M và đi với vận tốc $v_1 = 54$ km/h và $v_2 = 36$ km/h, nhưng hai xe đến N không cùng một lúc, tức là xe đi với vận tốc lớn hết t_1 giờ còn xe đi với vận tốc bé hơn hết t_2 giờ ($t_1 < t_2$). Do quãng đường MN không đổi nên $v_1 t_1 = v_2 t_2 = s$, s là độ dài quãng đường MN.

Từ đó nhận thấy hai đại lượng v và t tỉ lệ nghịch với nhau, nên

$$\text{từ } v_1 t_1 = v_2 t_2 \text{ suy ra } \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau và các dữ kiện đã cho sẽ có kết quả bài toán.

● **Cách giải**

Gọi thời gian và vận tốc của xe I đi trên quãng đường MN là t_1 và v_1 , của xe II đi trên quãng đường MN là t_2 và v_2 , trong đó $t_1 < t_2$, ta có:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 = s \text{ (s : độ dài quãng đường MN)}$$

Dạng thức trên chứng tỏ hai đại lượng vận tốc v và thời gian t

tỉ lệ nghịch với nhau, nên theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, có:

$$\frac{t_2}{3} = \frac{t_1}{2} = \frac{t_2 - t_1}{3 - 2} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ (vì 30 phút = 0,5 giờ)}$$

Do đó: $t_1 = 0,5.2 = 1$ (giờ)

$$t_2 = 0,5.3 = 1,5 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường MN dài là:

$$54 \cdot 1 = 54 \text{ (km).}$$

● Khai thác bài toán

Nếu cho biết xe I và xe II đến N cùng một lúc thì cần thay đổi điều kiện nào của đề bài để kết quả bài toán vẫn không thay đổi?

Ta thấy, nếu hai xe khởi hành cùng một lúc thì thời gian xe I đi quãng đường MN ít hơn xe II là 30 phút = 0,5 giờ. Bây giờ muốn cho hai xe đến N cùng một lúc thì phải cho xe II khởi hành trước xe I là 0,5 giờ.

Bài 10. Chia số 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 3; 5 và 6.

● Tìm hiểu đề bài

Phải chia số 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch với các số 3; 5 và 6.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Biết rằng, muốn chia một số thành các phần tỉ lệ nghịch với x , y , z , ta chỉ việc chia số đó thành các phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ và $\frac{1}{z}$.

Hãy vận dụng gợi ý trên để giải bài toán này.

● Cách giải

Gọi ba phần phải tìm lần lượt là a , b , c (với a , b , c là các số

nguyên dương). Cần chia 630 thành ba phần tỉ lệ nghịch a với 3; 5 và 6, ta sẽ chia 630 thành ba phần tỉ lệ thuận với $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ và $\frac{1}{6}$; tức

là có: $\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}}$. Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{630}{\frac{10}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30}} = \frac{630}{\frac{21}{30}} = 900.$$

Suy ra $a = 900 \cdot \frac{1}{3} = 300$; $b = 900 \cdot \frac{1}{5} = 180$; $c = 900 \cdot \frac{1}{6} = 150$.

Vậy ba số cần tìm tỉ lệ nghịch với 3; 5 và 6 là 300; 180 và 150.

HÀM SỐ

Bài 11. Cho hai hàm số:

$$g(x) = 2 \text{ và } f(x) = \begin{cases} x & \text{với } x > 0 \\ -x & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ;
- Quy tắc f nói trên có thể diễn đạt bởi công thức nào nữa?
- Căn cứ vào đồ thị tìm các giá trị của x sao cho $|x| < 2$.

• Tìm hiểu đề bài

Cho hai hàm số $g(x)$ và $f(x)$ cần phải vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ hay trên một mặt phẳng tọa độ.

Hàm số $f(x)$ đã cho còn có thể viết cách nào nữa để gọn hơn.

Sau khi đã vẽ được đồ thị hai hàm số trên, từ đó tìm các giá trị của x thỏa mãn bất đẳng thức: $|x| < 2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

- Để vẽ được đồ thị hai hàm số đã cho, đối với mỗi hàm số cần

phải lập bảng giá trị của x và giá trị tương ứng của y . Mỗi cặp số (x, y) ở bảng giá trị cho ta một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Nối các điểm có tọa độ là (x, y) ta được đồ thị của hàm số.

b) Cần vận dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức để có câu trả lời hợp lí.

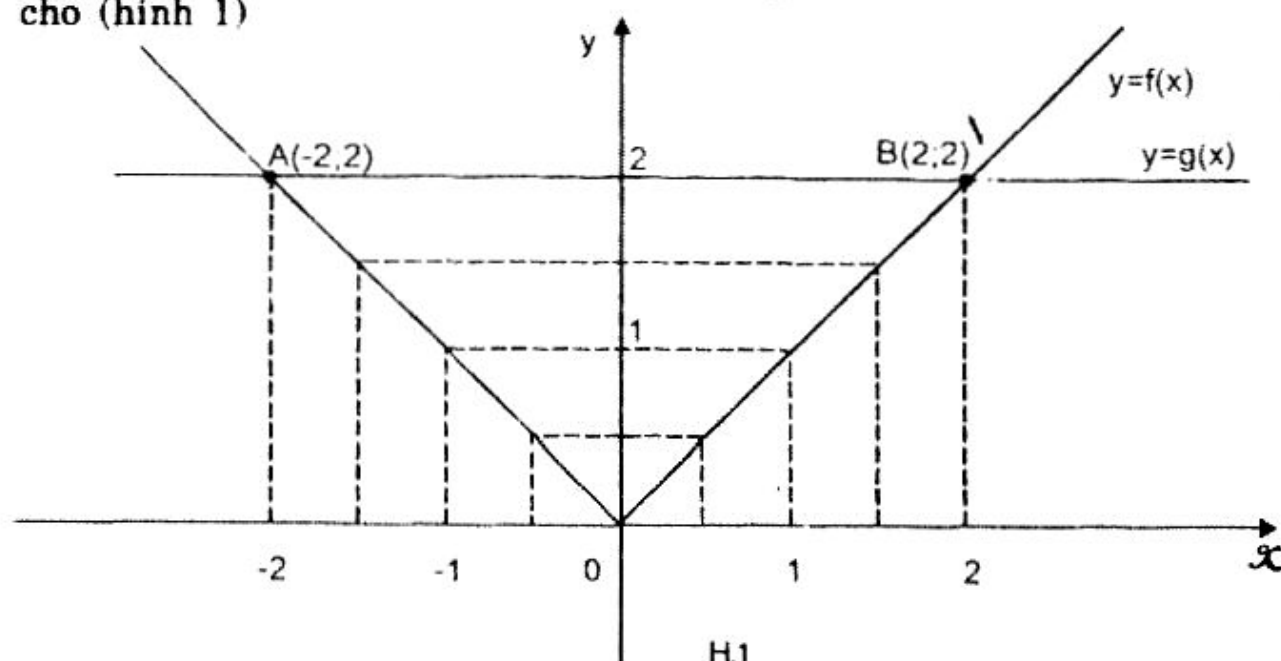
c) Bất đẳng thức $|x| < 2$ chính là bất đẳng thức $-2 < x < 2$.

● Cách giải

a) Trước hết cần lập bảng giá trị của x và giá trị tương ứng của y đối với hai hàm số đã cho như sau:

x	-2	-1,5	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2
$f(x)$	2	1,5	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2
$g(x)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Sau đó, trên mặt phẳng tọa độ xác định các điểm bởi các cặp số (x, y) đã được xác lập ở bảng trên, sẽ vẽ được đồ thị hai hàm số đã cho (hình 1)



b) Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số hay một biểu thức, quy tắc f còn được biểu diễn bởi $f(x) = |x|$.

c) Các giá trị x phải tìm là hoành độ của các điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = |x|$ nằm phía dưới đường thẳng $y = 2$, đó là

$$-2 < x < 2.$$

● Khai thác bài toán

- Hãy tìm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đã cho.

Ta thấy hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại hai điểm A và B mà tọa độ là:

$$A(-2;2) \text{ và } B(2;2).$$

- Nếu hàm số $y = g(x)$ được cho bởi công thức $g(x) = -2$, hãy tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x) = |x|$ và $y = g(x) = -2$.

Ta thấy, với $g(x) = -2$, đồ thị của nó nằm phía dưới trục hoành Ox, cách Ox một đoạn bằng 2 đơn vị, như vậy hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trong trường hợp này không cắt nhau tức là không có giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho.

- Nếu hàm số $y = g(x)$ được cho bởi công thức $g(x) = 0$, hãy tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x) = |x|$ và $y = g(x) = 0$.

Ta thấy, với $g(x) = 0$, đồ thị của nó chính là trục hoành Ox, giao điểm của hai đồ thị là điểm gốc tọa độ $O(0;0)$.

Tóm lại, đồ thị của hai hàm số đã cho có thể có 2 giao điểm, 1 giao điểm hoặc không có giao điểm nào cả.

Bài 12. Cho bảng giá trị sau:

x	-2	-1	1	2	3	4	6
y				-6			

a) Điền các số vào các ô trống trong bảng để y tỉ lệ thuận với x .
Viết hàm số $f(x)$ cho liên hệ giữa y và x .

b) Điền các số vào các ô trống trong bảng để y tỉ lệ nghịch với x .
Viết hàm số $g(x)$ cho liên hệ giữa y và x .

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

• Tìm hiểu đề bài

Cho bảng giá trị, hãy điền vào ô trống để có y tỉ lệ thuận với x , viết hàm số $f(x)$ cho liên hệ giữa y và x (câu a); y tỉ lệ nghịch với x , viết hàm số $g(x)$ cho liên hệ giữa y và x (câu b); sau đó vẽ đồ thị của cả hai hàm số kể trên (câu c).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Biết y tỉ lệ thuận với x tức là có $y = ax$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, suy ra giá trị của a , từ đó tính được các số để điền vào các ô trống trong bảng giá trị đã cho.

b) Biết y tỉ lệ nghịch với x tức là có $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, suy ra giá trị của a , từ đó tính được các số để điền vào các ô trống trong bảng giá trị đã cho.

c) Dựa vào bảng giá trị trên để xác định các điểm thuộc từng hàm số, nối các điểm có cùng tính chất, sẽ được đồ thị của hàm số.

• Cách giải

a) Biết y tỉ lệ thuận với x tức là có $y = ax$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, ta có $-6 = 2a$ suy ra $a = -6:2 = -3$. Lấy -3 nhân với các giá trị của x đã cho trong bảng, có giá trị của y tương ứng. Ta có bảng sau:

x	-2	-1	1	2	3	4	6
y	6	3	-3	-6	-9	-12	-18

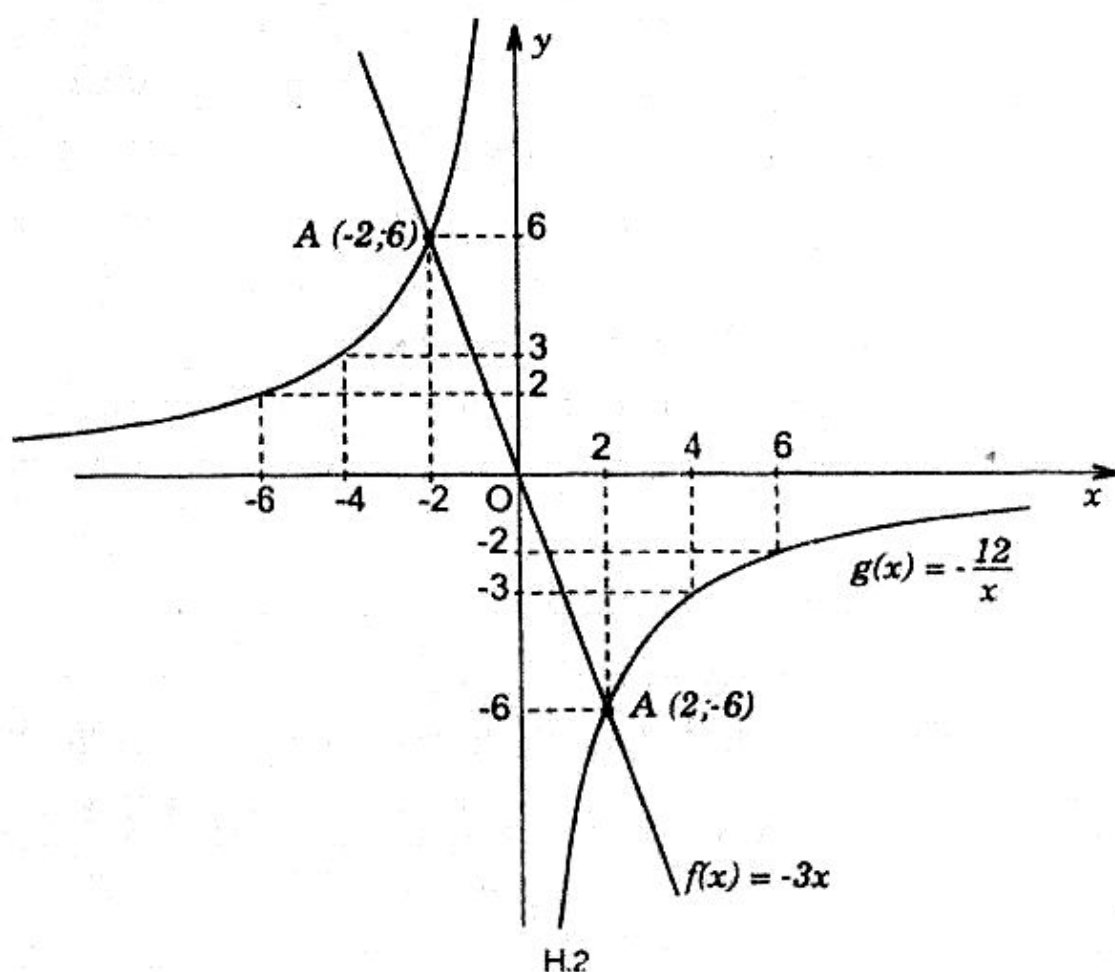
Hàm số $f(x)$ cho liên hệ giữa y và x kể trên là $y = f(x) = -3x$.

b) Biết y tỉ lệ nghịch với x tức là có $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$. Thay giá trị $x = 2$; $y = -6$, ta có $-6.2 = -12 = a$. Lấy $a = -12$ chia cho các giá trị của x đã cho trong bảng, có giá trị của y tương ứng. Ta có bảng sau:

x	-2	-1	1	2	3	4	6
y	6	12	-12	-6	-4	-3	-2

Hàm số $g(x)$ cho liên hệ giữa y và x kể trên là $y = -\frac{12}{x}$.

c) Căn cứ vào hai bảng giá trị trên, ta vẽ được đồ thị của hai hàm số $y = -3x$ và $y = g(x) = -\frac{12}{x}$ như sau (hình 2)



● Khai thác bài toán

Có thể tìm giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng cách nào ?

Có thể tìm được giao điểm của hai đồ thị bằng cách:

a) Căn cứ vào hai bảng giá trị ta có $A(2; -6)$ và $B(-6; 2)$

b) Căn cứ vào hai đồ thị đã vẽ có $A(2; -6)$ và $B(-6; 2)$.

c) Cũng có thể tìm giao điểm của hai đồ thị bằng cách giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = -\frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow 3x = \frac{12}{x} \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Từ $x = 2 \Rightarrow y = -6$; $x = -2 \Rightarrow y = 6$.

Bài 13

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị các hàm số $y = \frac{2}{x}$, $y = 2x$ và tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{|x|}$.

• Tìm hiểu đề bài

a) Hàm số $y = \frac{2}{x}$ là một tương quan tỉ lệ nghịch, còn hàm số $y = 2x$ là một tương quan tỉ lệ thuận, phải vẽ đồ thị hai hàm số này trên cùng một hệ trục tọa độ, sau đó tìm giao điểm của hai đồ thị.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{|x|}$ với chú ý là phải xét $x > 0$ và $x < 0$ để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Để vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x}$ cần lập bảng giá trị của y ứng với các giá trị của x , sau đó sẽ căn cứ vào từng cặp giá trị (x, y) để xác định các điểm thuộc đồ thị.

Còn đồ thị hàm số $y = 2x$ luôn đi qua gốc tọa độ nên chỉ xét một điểm nữa là đủ.

Hai đồ thị trên cắt nhau, cho ta tọa độ của giao điểm đó.

b) Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{|x|}$ nằm phía trên trục hoành, lưu ý xét với $x < 0$ và $x > 0$, sau đó lập bảng giá trị của x, y với chú ý là $y > 0$.

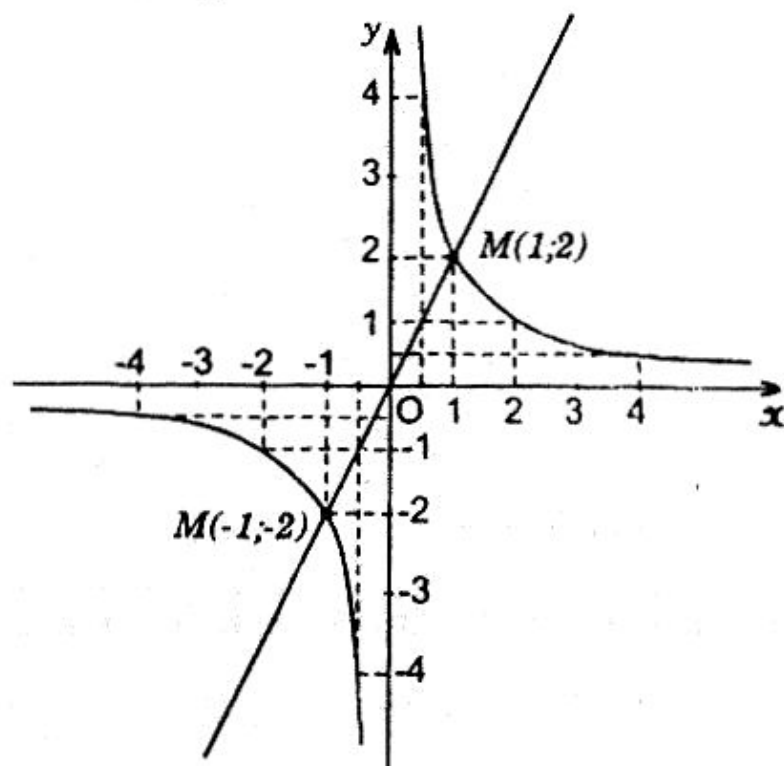
● Cách giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số $y = \frac{2}{x}$.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4		4	2	1	$\frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số $y = 2x$ đi qua điểm $O(0;0)$ và $M(1;2)$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x}$ và $y = 2x$ được vẽ như sau (hình 3):



H.3

Đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại $M(1;2)$ và $N(-1;-2)$.

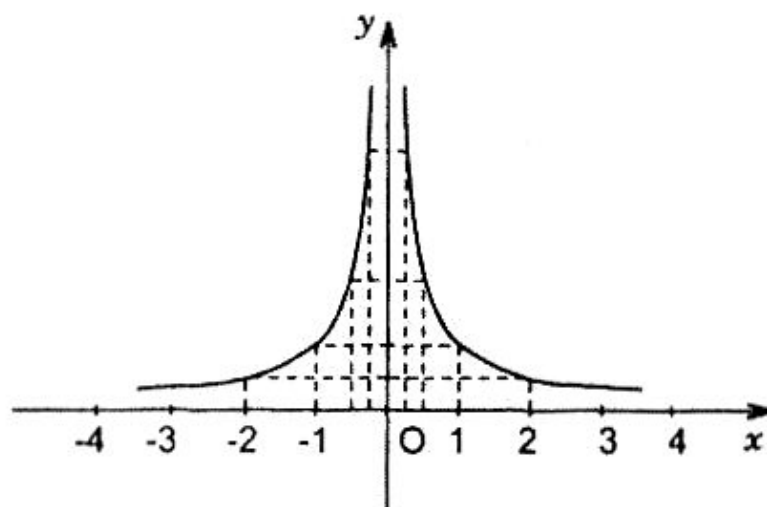
b) Ta có

$$y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{với } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

Lập bảng giá trị:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4		4	2	1	$\frac{1}{2}$

Đồ thị như ở hình 4.



H.4

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 14. Viết công thức cho sự tương ứng giữa:

- Chu vi C của đường tròn và bán kính R của nó;
- Diện tích S của hình tròn và bán kính R của nó;
- Chu vi C của hình vuông và cạnh a của nó;

d) Diện tích S của hình vuông và cạnh a của nó;

e) Đáy d của tam giác và đường cao tương ứng h của nó biết diện tích tam giác là 152 cm^2 .

Bài 15. Cho $X = \{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\}$ và hàm số $y = f(x) = -x^2 + 3$.

a) Lập bảng giá trị của x và giá trị tương ứng của y .

b) Tính $f(-4)$, $f(2\frac{1}{2})$.

Bài 16. Cho các hàm số $y = -x$ và $y = -\frac{1}{x}$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số ấy trên một hệ trục tọa độ.

b) Viết tọa độ giao điểm của hai đồ thị theo kết quả câu a.

c) Kiểm tra lại kết quả câu b bằng tính toán.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 14. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Chu vi C của đường tròn và bán kính R là một tương quan tỉ lệ thuận.

b) Diện tích S của đường tròn và bán kính R là một tương quan tỉ lệ thuận.

c) Chu vi hình vuông C và cạnh hình vuông a là một tương quan tỉ lệ thuận.

d) Diện tích hình vuông S và cạnh hình vuông a cũng là một tương quan tỉ lệ thuận.

e) Một tam giác có diện tích là 152 cm^2 thì cạnh đáy d và đường cao tương ứng h là một tương quan tỉ lệ nghịch.

• Cách giải

a) $C = 2\pi R$;

b) $S = \pi R^2$;

c) $C = 4a$;

d) $S = a^2$.

$$e) d = \frac{2.152}{h} \text{ hay } d = \frac{304}{h}.$$

Bài 15. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Thay các giá trị của $x \in X$ vào hàm số $y = f(x) = -x^2 + 3$ để tính các giá trị của y .

b) Làm tương tự câu a.

• Cách giải

$$a) \text{ Ta có: } f(-2) = -(-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^2 + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = 2\frac{3}{4}$$

$$f(0) = -(0)^2 + 3 = 3$$

$$f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^2 + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = 2\frac{3}{4}$$

$$f(1) = -(1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f(2) = -(2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1.$$

Do đó có bảng các giá trị của x với các giá trị tương ứng của y :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	2	$2\frac{3}{4}$	3	$2\frac{3}{4}$	2	-1

$$b) \text{ Ta có } f(-4) = -(-4)^2 + 3 = -16 + 3 = -13$$

$$f(2\frac{1}{2}) = -(2\frac{1}{2})^2 + 3 = -(\frac{5}{2})^2 + 3$$

$$= -\frac{25}{4} + 3 = -6\frac{1}{4} + 3 = -3\frac{1}{4}.$$

Bài 16. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hàm số $y = -x$ là một tương quan tỉ lệ thuận, có đồ thị là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, nên chỉ cần xác định

một điểm bất kì thứ hai, thì vẽ được đường thẳng $y = -x$.

Hàm số $y = -\frac{1}{x}$ là một tương quan tỉ lệ nghịch có đồ thị gồm 2 nhánh đường cong nằm trong góc vuông II và IV, cần lập bảng các giá trị của x và các giá trị tương ứng của y .

b) Từ giao điểm hai đồ thị của các hàm số $y = -x$ và $y = -\frac{1}{x}$, hạ các đường vuông góc Ox , Oy ta có tọa độ các giao điểm.

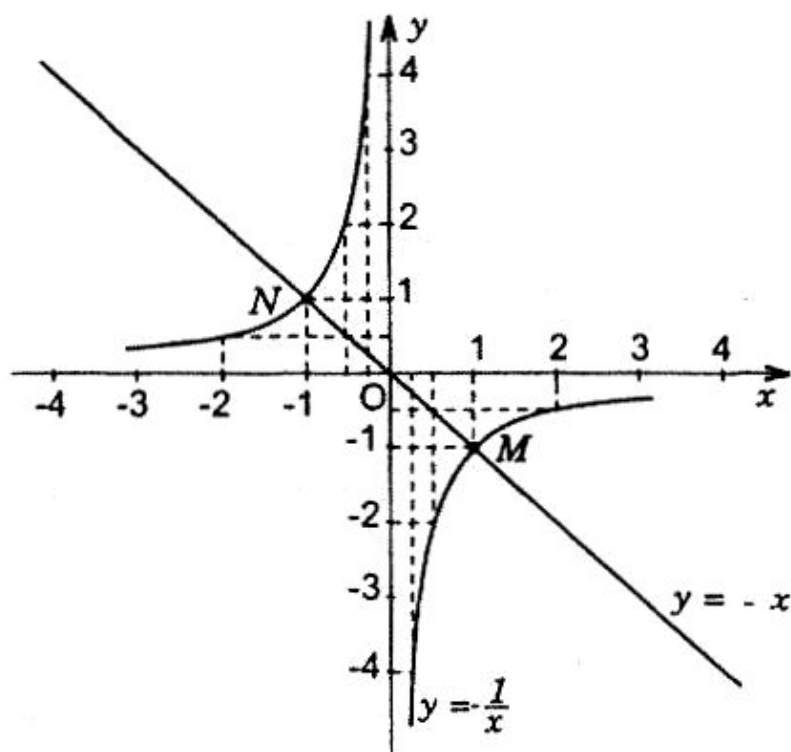
c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

● Cách giải

a) Khi $x = 1$ thì $y = -x = -1$. Như vậy đồ thị hàm số $y = -x$ đi qua điểm $O(0;0)$ và điểm $M(1;-1)$.

Lập bảng giá trị của hàm số $y = -\frac{1}{x}$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4		-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$



H.5

b) Từ M và N hạ các đường vuông góc xuống hai trục tọa độ, ta có tọa độ các giao điểm M và N là $M(1;1)$, $N(-1;1)$.

$$c) \text{ Từ } \begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy khi $x = 1$ thì $y = -x = -1$ có $M(1;-1)$

$x = -1$ thì $y = -x = 1$ có $N(-1;1)$.

V. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

PHƯƠNG TRÌNH. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1. Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau:

$$a) |y| = -7; \frac{5}{y-5} = 0;$$

$$b) 5(y-2) + y + 9 = 6y - 1; \left| \frac{y}{3} \right| = \left| \frac{-y}{3} \right|.$$

• Tìm hiểu đề bài

Tìm tập hợp nghiệm của phương trình là tìm tất cả giá trị của ẩn để giá trị tương ứng của hai vế bằng nhau. Tập hợp nghiệm thường được kí hiệu bởi chữ S.

Một phương trình có thể có 1; 2; 3;... nghiệm, hoặc vô số nghiệm, hoặc vô nghiệm. Nếu là vô số nghiệm thì $S = \mathbb{Q}$, nếu là vô nghiệm thì $S = \emptyset$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý đến định nghĩa của giá trị tuyệt đối của một số: $|y|$ phải là một số không âm (tức là $|y| \geq 0$).

Đối với biểu thức $\frac{5}{y-5}$ thì $y = 5$ biểu thức không xác định, còn với tất cả giá trị khác 5 thì giá trị biểu thức như thế nào.

b) Với phương trình thứ nhất hãy thực hiện phép tính ở vế trái rồi rút ra nhận xét. Với phương trình thứ hai lưu ý là hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

● Cách giải

a) - Vì giá trị tuyệt đối của một số luôn là một số không âm nên vế trái $|y|$ của phương trình là một số không âm, còn vế phải (-7) là một số âm. Do đó hai vế không bằng nhau với mọi giá trị của y . Vậy $S = \emptyset$.

- Với $y = 5$ thì biểu thức ở vế trái không xác định vì mẫu $y - 5$ phải khác 0. Còn với tất cả các giá trị khác 5 thì vế trái là âm hoặc dương nên không thể bằng 0. Do đó $S = \emptyset$.

b) - Thực hiện phép tính ở vế trái ta có :

$5(y - 2) + y + 9 = 5y - 10 + y + 9 = 6y - 1$, đúng bằng vế phải. Do đó với mọi giá trị của y , các giá trị tương ứng ở hai vế luôn bằng nhau. Vậy $S = \mathbb{Q}$.

- Ta biết rằng hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau, mà $\frac{y}{3}$ và $\frac{-y}{3}$ là hai số đối nhau, nên với mọi giá trị của y thì hai vế của phương trình luôn bằng nhau. Vậy $S = \mathbb{Q}$.

● Khai thác bài toán

Có thể xét thêm hai câu của bài toán trên:

a) $S = \{11; 33\}$ có phải là tập hợp nghiệm của phương trình $|y - 22| = 11$ hay không ?

b) $S = \{-4; 4\}$ có phải là tập hợp nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = 0$ hay không ?

+ Để giải câu a của bài toán này ta lần lượt thay $y = 11$ và $y = 33$ vào phương trình và thấy rằng:

Với $y = 11$, vế trái có giá trị $|11 - 22| = |-11| = 11$ đúng bằng giá trị của vế phải, vậy 11 là nghiệm của phương trình.

Với $y = 33$, vế trái có giá trị $|33 - 22| = |11| = 11$ cũng đúng bằng giá trị của vế phải, vậy 33 cũng là nghiệm của phương trình.

Do đó $S = \{11; 33\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình đã cho.

+ Để giải câu b của bài toán, ta nhận thấy rằng $-4 \notin \text{TXĐ}$ của phương trình $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = 0$, vậy -4 không là nghiệm của phương trình. Do đó $S = \{-4; 4\}$ không phải là tập hợp nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 2. Các cặp phương trình sau có tương đương không ?

a) $|x - 7| = 9$ và $(x - 16)(x + 2) = 0$;

b) $5y - 7 = 8$ và $14 - 2y = 3y - 1$;

c) $\frac{9z^2 - 144}{3z + 12} = 0$ và $3z - 12 = 0$.

• **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài hỏi các cặp phương trình a), b) và c) có tương đương không, tức là phải chứng tỏ rằng hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm. Ở đây cặp a có ẩn là x , vế trái là $|x - 7|$ và tích $(x - 16)(x + 2)$, cặp b có ẩn là y , vế trái $(5y - 7)$ chứa ẩn và cả hai vế đều chứa ẩn $14 - 2y = 3y - 1$, cặp c có ẩn là z , vế trái là một phân thức đại số và một nhị thức bậc nhất.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình để thấy rằng cả hai phương trình đều có cùng một tập hợp nghiệm.

b) Tương tự hãy tìm nghiệm của mỗi phương trình.

c) Lưu ý tìm TXĐ của phương trình $\frac{9z^2-144}{3z+12} = 0$ rồi tìm nghiệm của phương trình để thấy rằng phương trình này chính là phương trình thứ hai $3z - 12 = 0$.

● Cách giải

a) Phương trình $|x - 7| = 9$ có hai nghiệm là 16 và -2. Phương trình $(x - 16)(x + 2) = 0$ cũng có hai nghiệm là 16 và -2.

Vậy cặp phương trình này tương đương.

b) Phương trình $5y - 7 = 8$ có nghiệm là $y = 3$. Phương trình $14 - 2y = 3y - 1$ có thể viết $14 + 1 = 3y + 2y$ hay $5y = 15$ có nghiệm là $y = 3$. Vậy cặp phương trình này tương đương.

c) Phương trình $\frac{9z^2-144}{3z+12} = 0$ có TXĐ là $3z + 12 \neq 0$ hay $z \neq -4$.

Do $\frac{9z^2-144}{3z+12} = 0$ khi $9z^2 - 144 = 0$ và $3z + 12 \neq 0$ hay $(3z + 12)(3z - 12) = 0$ và $3z + 12 \neq 0$ nên phương trình trở thành $3z - 12 = 0$. Đó chính là phương trình thứ hai $3z - 12 = 0$.

Vậy cặp phương trình này tương đương.

● Khai thác bài toán

Có thể chứng minh những cặp phương trình sau là không tương đương:

a) $4x - 3 = 3x + 4$ và $4x - 3 + \frac{2}{x-7} = 3x + 4 + \frac{2}{x-7}$;

b) $4y - 1 = 15$ và $\frac{4y-1}{y-4} = \frac{15}{y-4}$.

Thật vậy:

a) Ta tìm nghiệm của phương trình $4x - 3 = 3x + 4$, ta có $x = 7$.

Với $x = 7$ thì $x - 7 = 0$ nên phương trình thứ hai không xác định. Do đó hai phương trình đã cho không có cùng một tập hợp nghiệm. Vậy chúng không tương đương.

b) Phương trình $4y - 1 = 15$ có nghiệm là $y = 4$.

Với $y = 4$ thì $y - 4 = 0$ nên phương trình thứ hai không xác định. Vậy chúng không có cùng một tập hợp nghiệm nên không tương đương.

Bài 3. Cho ba phương trình:

$$4x + 3 = 0 \quad (1); \quad 2x + 8 = 0 \quad (2); \quad (4x + 3)(2x + 8) = 0 \quad (3).$$

Các phương trình trên có tương đương với nhau không nếu:

a) $x \in \mathbb{N}$; b) $x \in \mathbb{Z}$?

● **Tìm hiểu đề bài**

Khác với hai bài 1 và 2, đề bài này cho ba phương trình và yêu cầu xét xem chúng có tương đương với nhau không nếu ẩn x là số tự nhiên và nếu ẩn x là số nguyên.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy tìm nghiệm của từng phương trình, rồi xét xem nếu x là số tự nhiên, x là số nguyên thì các nghiệm này có thỏa mãn không, tức là mỗi phương trình có nghiệm là số tự nhiên không, là số nguyên không. Từ đó mà rút ra kết luận.

● **Cách giải**

Phương trình (1) có nghiệm là $x = -\frac{3}{4}$, phương trình (2) có nghiệm là $x = -4$, phương trình (3) có nghiệm là $x = -\frac{3}{4}$ và $x = -4$.

a) Nếu $x \in \mathbb{N}$ thì cả ba phương trình đã cho đều vô nghiệm, tức là có chung tập hợp nghiệm $S = \emptyset$. Vậy chúng tương đương với nhau.

b) Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì hai phương trình (2) và (3) có nghiệm duy nhất là $x = -4$ nên chúng tương đương với nhau.

● Khai thác bài toán

Nếu $x \in \mathbb{Q}$ thì ba phương trình trên có tương đương với nhau không?

Rõ ràng hai phương trình (1) và (2) không tương đương, hai phương trình (1) và (3) không tương đương và hai phương trình (2) và (3) cũng không tương đương. Vậy cả ba phương trình đã cho từng đôi một không tương đương.

CÁC LOẠI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Bài 4. Giải các phương trình có hệ số bằng số:

a) $2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2;$

b) $x + 1\frac{1}{2}x + 9 = \frac{2}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5};$

c) $1\frac{4}{5}x - 2\frac{1}{2}x - 2 = -2\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}.$

● Tìm hiểu đề bài

Các phương trình đã cho đều có thể có hệ số bằng số và đều đưa được về phương trình bậc nhất dạng $ax + b = 0$ với a, b là hằng, $a \neq 0$, b là số hạng tự do. Các hệ số là số nguyên, phân số, hỗn số.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Quá trình giải một phương trình bậc nhất gồm 2 bước:

Bước 1. Quy đồng mẫu hai vế rồi khử mẫu;

Bước 2. Thực hiện các phép tính và chuyển vế để đưa phương trình về dạng $ax = c$.

Ở hai câu b và c trước khi quy đồng mẫu hãy đổi các hỗn số thành phân số.

● Cách giải

a) Mẫu chung (MC): 10

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có:

$$20x - 6x = 15x - 5 - 4x + 20$$

hay $14x = 11x + 15$; $3x = 15$. Vậy $x = 5$.

b) Đổi hỗn số ra phân số ta có:

$$x + \frac{3}{2}x + 9 = \frac{2}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5}$$

MC: 30. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$30x + 45x + 270 = 20x + 120 + 25x - 36x + 6$$

hay $75x + 270 = 9x + 126$; $66x = -144$.

$$\text{Vậy } x = -144 : 66 = -2\frac{12}{11} = -2\frac{2}{11}.$$

c) Đổi hỗn số ra phân số ta có:

$$\frac{9}{5}x - \frac{5}{2}x - 2 = -\frac{7}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}$$

MC: 30. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$54x - 75x - 60 = -70x - 5 - 6$$

hay $-21x - 60 = -70x - 11$;

$$49x = 49. \text{ Vậy } x = 1.$$

● Khai thác bài toán

Các hệ số có thể cho dưới dạng số thập phân, chẳng hạn:

Giải các phương trình sau mà ẩn là y:

$$\text{a) } 5,76 + 4,8y - 0,05y = 6,99y - 1,995y + 5,13;$$

$$\text{b) } 5y + 3,48 - 2,35y = 5,381 - 2,9y + 10,42.$$

Trong trường hợp này không phải qua bước 1, tức là không phải quy đồng mẫu rồi khử mẫu. Ta thực hiện phép tính và chuyển vế:

$$a) 5,76 + 4,75y = 4,995y + 5,13$$

$$\text{hay } 5,76 - 5,13 = 4,995y - 4,75y; 0,63 = 0,245y.$$

$$\text{Vậy } y = 0,63 : 0,245 \approx 2,57 \text{ (dấu } \approx \text{ đọc là gần bằng)}$$

$$b) 2,65y + 3,48 = -2,9y + 15,801$$

$$\text{hay } 2,65y + 2,9y = 15,801 - 3,48; 5,55y = 12,321.$$

$$\text{Vậy } y = 12,321 : 5,55 = 2,22.$$

Bài 5

Giải các phương trình chứa hằng đẳng thức:

$$a) (3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2;$$

$$b) 5(y-1)^2 - 2(y+3)^2 = 3(y+2)^2 - 7(6y-1);$$

$$c) 2z^2 + (z+5)^2 - 2(z+7)^2 = 2(3z-72,5) + (z-6)^2.$$

• Tìm hiểu đề bài

Các phương trình trên đều chứa hằng đẳng thức dạng $(A \pm B)^2$ và phép nhân đa thức ở cả hai vế. Vì vậy muốn giải phải khai triển các hằng đẳng thức này.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện các phép tính về hằng đẳng thức và phép nhân đa thức ở cả hai vế rồi chuyển vế để đưa về dạng $ax = c$ (nếu ẩn là x). Từ đó mà tìm được các nghiệm x, y, z . Lưu ý đến các phép tính trừ đằng trước dấu ngoặc và tránh nhầm dấu.

• Cách giải

$$\begin{aligned} a) 9x^2 - 6x + 1 - 5(4x^2 + 4x + 1) + 12x^2 + 6x - 6x - 3 &= \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hay } 9x^2 - 6x + 1 - 20x^2 - 20x - 5 + 12x^2 + 6x - 6x - 3 &= \\ x^2 - 2x + 1; x^2 - 26x - 7 = x^2 - 2x + 1; -24x &= 8. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}.$$

b) $5(y^2 - 2y + 1) - 2(y^2 + 6y + 9) = 3(y^2 + 4y + 4) - 7(6y - 1),$
hay

$$5y^2 - 10y + 5 - 2y^2 - 12y - 18 = 3y^2 + 12y + 12 - 42y + 7;$$

$$3y^2 - 22y - 13 = 3y^2 - 30y + 19; 8y = 32. \text{ Vậy } y = 4.$$

c) $2z^2 + z^2 + 10z + 25 - 2(z^2 + 14z + 49) =$

$$= 6z - 145 + z^2 - 12z + 36, \text{ hay}$$

$$3z^2 + 10z + 25 - 2z^2 - 28z - 98 = -6z + z^2 - 109;$$

$$z^2 - 18z - 73 = z^2 - 6z - 109; -12z = -36. \text{ Vậy } z = 3.$$

● Khai thác bài toán

Ngoài các hằng đẳng thức dạng $(A \pm B)^2$, đề bài có thể cho các phương trình chứa các hằng đẳng thức dạng $(A \pm B)^3$ và $A^3 \pm B^3$. Chẳng hạn, giải các phương trình:

a) $3(x + 1)^2 + (x - 4)^3 = 101 + (x - 3)^3;$

b) $(y + 1)^3 - (y - 1)^3 = 6(y^2 + y + 1).$

Ta có cách giải sau đây (tránh làm tắt):

a) $3(x^2 + 2x + 1) + x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3 =$

$$= 101 + x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3;$$

$$3x^2 + 6x + 3 + x^3 - 12x^2 + 48x - 64 =$$

$$= 101 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27, \text{ hay}$$

$$x^3 - 9x^2 + 54x - 61 = x^3 - 9x^2 + 27x + 74;$$

$$27x = 135. \text{ Vậy } x = 135 : 27 = 5.$$

b) Nếu vận dụng công thức $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ thì cách giải sẽ dài. Do đó hãy khai triển $(y + 1)^3$ và $(y - 1)^3$. Ta có:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) = 6y^2 + 6y + 6, \text{ hay}$$

$$6y^2 + 2 = 6y^2 + 6y + 6; 6y = -4. \text{ Vậy } y = -\frac{2}{3}.$$

Bài 6. Giải các phương trình mà mẫu là các số tự nhiên:

$$\text{a) } 3x - \frac{2x+5}{7} + \frac{7x+19}{2} + \frac{2x+1}{3} = 16;$$

$$\text{b) } \frac{5y-1}{7} + \frac{4y-3}{2} - \frac{3-2y}{2} = 6;$$

$$\text{c) } 2z + \frac{3z-1}{2} - \frac{5z-2}{3} = 2.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình ở đây đều chứa phân thức mà mẫu là các số tự nhiên. Lưu ý đến các phân thức có dấu trừ đằng trước như $-\frac{2x+5}{7}$, $-\frac{3-2y}{2}$, $-\frac{5z-2}{3}$ để tính toán tránh nhầm dấu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Việc giải các phương trình đã cho phải qua 2 bước. Đặc biệt lưu ý đến các phân thức có dấu trừ đằng trước như $-\frac{2x+5}{7}$ cần hiểu là $\frac{-(2x+5)}{7}$ để tránh nhầm dấu hoặc $-\frac{3-2y}{2}$ cần hiểu là $\frac{-(3-2y)}{2}$.

Trong khi thực hiện các phép tính tránh làm tắt vì dễ nhầm dấu.

● **Cách giải**

a) MC: 42. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$3x \cdot 42 - 6(2x+5) + 21(7x+19) + 14(2x+1) = 16 \cdot 42, \text{ hay}$$

$$126x - 12x - 30 + 147x + 399 + 28x + 14 = 672;$$

$$289x + 383 = 672; 289x = 289. \text{ Vậy } x = 1.$$

b) MC: 14. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2(5y-1) + 7(4y-3) - 7(3-2y) = 6 \cdot 14, \text{ hay}$$

$$10y - 2 + 28y - 21 - 21 + 14y = 84; 52y - 44 = 84;$$

$$52y = 128. \text{ Vậy } y = 128 : 52 = 2\frac{6}{13}.$$

c) MC:6. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2z.6 + 3(3z - 1) - 2(5z - 2) = 2.6, \text{ hay}$$

$$12z + 9z - 3 - 10z + 4 = 12; 11z + 1 = 12. \text{ Vậy } z = 1.$$

● Khai thác bài toán

Sau đây là đề toán tương tự nhưng tử của các phân thức có phức tạp hơn, chẳng hạn giải các phương trình sau:

$$\text{a) } x + 2 - \frac{2x - \frac{4-3x}{5}}{15} = \frac{7x - \frac{x-3}{2}}{5};$$

$$\text{b) } 1 - \frac{y - \frac{1+y}{3}}{3} = \frac{y}{2} - \frac{2y - \frac{10-7y}{3}}{2}.$$

Khi giải lưu ý đến các dấu trừ đằng trước mỗi phân thức. Ta có cách giải sau đây:

$$\text{a) } x + 2 - \frac{10x - 4 + 3x}{75} = \frac{14x - x + 3}{10}, \text{ hay}$$

$$\frac{75x + 150 - 13x + 4}{75} = \frac{13x + 3}{10}$$

MC: 150. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2(62x + 154) = 15(13x + 3); 124x + 308 = 195x + 45;$$

$$263 = 71x. \text{ Vậy } x = \frac{263}{71} = 3\frac{50}{71}.$$

$$\text{b) } 1 - \frac{3y - 1 - y}{9} = \frac{y}{2} - \frac{6y - 10 + 7y}{6}$$

MC: 18. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$18 - 2(2y - 1) = 9y - 3(13y - 10), \text{ hay } 18 - 4y + 2 = 9y - 39y + 30; 26y = 10. \text{ Vậy } y = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}.$$

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Bài 7. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

$$a) \frac{14}{3x - 12} - \frac{2 + x}{x - 4} = \frac{3}{8 - 2x} - \frac{5}{6};$$

$$b) \frac{12}{1 - 9y^2} = \frac{1 - 3y}{1 + 3y} - \frac{1 + 3y}{1 - 3y};$$

$$c) 5 + \frac{96}{z^2 - 16} = \frac{2z - 1}{z + 4} + \frac{3z - 1}{z - 4}$$

• Tìm hiểu đề bài

Các phương trình trên đều chứa ẩn ở mẫu vì thế khi giải việc đầu tiên là phải tìm điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa, tức là tìm TXĐ của phương trình. Ở cả hai phương trình cuối có phân thức mà mẫu là hiệu hai bình phương dạng $A^2 - B^2$.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Muốn giải một phương trình chứa ẩn ở mẫu, việc đầu tiên là phải tìm TXĐ của phương trình. Sau đó mới giải theo hai bước. Cuối cùng khi tìm được giá trị của ẩn phải đối chiếu với TXĐ để xem giá trị này có thuộc TXĐ hay không. Tóm lại quá trình giải như sau:

- Tìm TXĐ
- Quy đồng mẫu rồi khử mẫu
- Giải phương trình vừa tìm được

- Nghiệm của phương trình là các giá trị tìm được của x thuộc TXĐ.

Lưu ý ở câu a phải đổi dấu của phân thức $\frac{3}{8-2x}$ để tìm MC, ở câu b và câu c thì mẫu $1 - 9y^2$ và $z^2 - 16$ đều là dạng $A^2 - B^2$ nên có thể tìm được dễ dàng MC.

• Cách giải

a) TXĐ: $x \neq 4$. Phương trình có thể viết:

$$\frac{14}{3(x-4)} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{-3}{2(x-4)} - \frac{5}{6} \text{ (đổi dấu của phân thức } \frac{3}{8-2x} \text{)}.$$

MC: $6(x-4)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2.14 - 6(2+x) = -3.3 - 5.(x-4), \text{ hay } 28 - 12 - 6x = -9 - 5x + 20; -6x + 16 = -5x + 11. \text{ Vậy } x = 5.$$

Vì $5 \in \text{TXĐ}$ nên phương trình có nghiệm $x = 5$.

b) TXĐ: $y \neq \pm \frac{1}{3}$. MC: $(1+3y)(1-3y) = 1-9y^2$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$12 = (1-3y)^2 - (1+3y)^2 \text{ hay } 12 = -12y. \text{ Vậy } y = -1.$$

Vì $-1 \in \text{TXĐ}$ nên phương trình có nghiệm là $y = -1$.

c) TXĐ: $z \neq \pm 4$. MC: $(z+4)(z-4) = z^2 - 16$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$5(z^2 - 16) + 96 = (2z-1)(z-4) + (3z-1)(z+4), \text{ hay}$$

$$5z^2 - 80 + 96 = 2z^2 - 8z - z + 4 + 3z^2 + 12z - z - 4;$$

$$16 = 2z. \text{ Vậy } z = 8.$$

Vì $8 \in \text{TXĐ}$ nên phương trình có nghiệm là $z = 8$.

• Khai thác bài toán

Loại phương trình này có thể ra dưới dạng sau:

a) Với giá trị nào của m thì giá trị của biểu thức sau bằng 1:

$$\frac{9m - 7}{3m - 2} + \frac{5 - 4m}{2m - 3} ?$$

b) Với giá trị nào của p thì giá trị của biểu thức sau bằng 2

$$\frac{2p - 9}{2p - 5} - \frac{3p}{2 - 3p} ?$$

Ans ở đây là m (câu a) và p (câu b). Ta có cách giải sau:

$$a) \frac{9m - 7}{3m - 2} + \frac{5 - 4m}{2m - 3} = 1.$$

$$\text{TXĐ: } m \neq \frac{2}{3}, m \neq \frac{3}{2}. \text{ MC: } (3m - 2)(2m - 3).$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$(9m - 7)(2m - 3) + (5 - 4m)(3m - 2) = (3m - 2)(2m - 3),$$

hay

$$18m^2 - 27m - 14m + 21 + 15m - 10 - 12m^2 + 8m = \\ = 6m^2 - 9m - 4m + 6;$$

$$6m^2 - 18m + 11 = 6m^2 - 13m + 6; 5m = 5. \text{ Vậy } m = 1.$$

Vì $1 \in \text{TXĐ}$ nên giá trị phải tìm của m là 1.

$$b) \frac{2p - 9}{2p - 5} - \frac{3p}{2 - 3p} = 2.$$

$$\text{TXĐ: } p \neq \frac{5}{2}, p \neq \frac{2}{3}. \text{ MC: } (2p - 5)(2 - 3p).$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$(2p - 9)(2 - 3p) - 3p(2p - 5) = 2(2p - 5)(2 - 3p), \text{ hay}$$

$$4p - 6p^2 + 27p - 18 - 6p^2 + 15p = 8p - 12p^2 - 20 + 30p; \\ -12p^2 + 46p - 18 = -12p^2 + 38p - 20; 8p = -2. \text{ Vậy } p = -\frac{1}{4}.$$

Vì $-\frac{1}{4} \in \text{TXĐ}$ nên giá trị phải tìm của p là $-\frac{1}{4}$.

Bài 8. Giải phương trình:

a) $\frac{15 - x}{x - 7} - \frac{8}{x - 7} + 2 = 0;$

b) $\frac{x + 5}{x^2 - 5x} - \frac{x + 25}{2x^2 - 50} = \frac{x - 5}{2x^2 + 10x}$

● **Tìm hiểu đề bài**

Mẫu của phương trình a là đơn giản nhưng các mẫu của phương trình b đều khác nhau, do đó cần lưu ý để tìm TXĐ của phương trình.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Trước hết tìm TXĐ và cuối cùng phải đối chiếu giá trị tìm được của ẩn với TXĐ để rút ra kết luận là phương trình có nghiệm hay vô nghiệm.

● **Cách giải**

a) TXĐ: $x \neq 7$. MC: $x - 7$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$15 - x - 8 + 2(x - 7) = 0, \text{ hay } 15 - x - 8 + 2x - 14 = 0;$$

$$x - 7 = 0. \text{ Vậy } x = 7.$$

Vì $7 \notin$ TXĐ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $x^2 - 5x = x(x - 5) \neq 0$ khi $x \neq 0, x \neq 5;$

$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) \neq 0 \text{ khi } x \neq \pm 5;$$

$$2x^2 + 10x = 2x(x + 5) \neq 0 \text{ khi } x \neq 0, x \neq -5. \text{ Do đó:}$$

TXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq \pm 5$.

Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{x + 5}{x(x - 5)} - \frac{x + 25}{2(x + 5)(x - 5)} = \frac{x - 5}{2x(x + 5)}; \text{ MC: } 2x(x + 5)(x - 5)$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2(x + 5)^2 - x(x + 25) = (x - 5)^2, \text{ hay}$$

$$2(x^2 + 10x + 25) - x^2 - 25x = x^2 - 10x + 25;$$

$$2x^2 + 20x + 50 - x^2 - 25x = x^2 - 10x + 25;$$

$$- 5x + 50 = - 10x + 25; 5x = - 25. \text{ Vậy } x = - 5.$$

Vì $- 5 \notin \text{TXĐ}$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

• Khai thác bài toán

Qua việc giải hai phương trình trên ta thấy rằng khi giải một phương trình chứa ẩn ở mẫu thì cần đặc biệt lưu ý đến khâu đối chiếu giá trị tìm được của ẩn với TXĐ. Ở đây cả hai giá trị tìm được của ẩn x đều không thuộc TXĐ nên không phải là nghiệm của phương trình đó, nói cách khác cả hai phương trình đều vô nghiệm.

Với loại phương trình vô nghiệm này có thể giải phương trình mà mẫu có dạng $A^3 \pm B^3$, chẳng hạn các phương trình:

$$\text{a) } \frac{4}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1};$$

$$\text{b) } \frac{2}{y + 2} - \frac{2y^2 + 16}{y^3 + 8} = \frac{5}{y^2 - 2y + 4}.$$

Do $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ và $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 8$ nên ta có cách giải sau:

$$\text{a) TXĐ: } x \neq 1. \text{ MC: } (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1.$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$4(x - 1) - (x^2 + x + 1) = 2x^2 - 5,$$

$$\text{hay } 4x - 4 - x^2 - x - 1 = 2x^2 - 5;$$

$$3x - x^2 - 5 = 2x^2 - 5; 3x - 3x^2 = 0; 3x(1 - x) = 0.$$

$$\text{Vậy } x = 0, x = 1.$$

Vì $0 \in \text{TXĐ}$, nên phương trình đã cho chỉ có một nghiệm là $x = 0$.

b) TXĐ: $y \neq -2$. MC: $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 8$.

Quy đồng mẫu số rồi khử mẫu:

$$2(y^2 - 2y + 4) - (2y^2 + 16) = 5(y + 2), \text{ hay}$$

$$2y^2 - 4y + 8 - 2y^2 - 16 = 5y + 10; -9y - 8 = 10. \text{ Vậy } y = -2.$$

Vì $-2 \notin \text{TXĐ}$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $(x^2 + 5)(x - 7)(9x + 27) = 0$;

b) $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$;

c) $z^2 - 2z + 1 - 36 = 0$.

• Tìm hiểu đề bài

Các phương trình đã cho tuy có các số hạng bậc ba như y^3 , bậc hai như x^2 , y^2 , z^2 nhưng đều có thể biến đổi phương trình để đưa về dạng phương trình tích mà mỗi thừa số ở vế trái là một nhị thức bậc nhất dạng $ax + b$, còn vế phải là 0.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Áp dụng tính chất của một tích nhiều thừa số bằng 0 khi và chỉ khi một trong các thừa số bằng 0.

Ở câu a lưu ý thừa số $x^2 + 5$ luôn dương. Ở hai câu b và c phải biến đổi vế trái thành một tích. Lưu ý câu b ở vế trái là hằng đẳng thức dạng $(A - B)^3$ và vế trái của câu c có hằng đẳng thức dạng $A^2 - B^2$.

• Cách giải

a) Do tích của ba thừa số bằng 0 nên một trong các thừa

số bằng 0 và mỗi nghiệm của phương trình là một nghiệm của $x^2 + 5 = 0$, của $x - 7 = 0$, của $9x + 27 = 0$.

Vì $x^2 + 5$ luôn dương nên phương trình $x^2 + 5 = 0$ vô nghiệm.

Phương trình $x - 7 = 0$ có nghiệm là $x = 7$, phương trình $9x + 27 = 0$ có nghiệm là $x = -3$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 7$ và $x = -3$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức ta có: $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = (y - 1)^3 = 0$.

Vậy phương trình có ba nghiệm bằng nhau là $y = 1$.

c) Vế trái có thể viết: $(z - 1)^2 - 6^2$. Vậy ta có phương trình tích $(z - 1 + 6)(z - 1 - 6) = 0$ hay $(z + 5)(z - 7) = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $z = -5$, $z = 7$.

• Khai thác bài toán

Phương trình tích có thể cho dưới dạng chứa ẩn ở mẫu, chẳng hạn giải các phương trình:

$$\frac{121 - 22x + x^2}{(x - 8)^2} = 0 \quad (1) \text{ và } \frac{9y^2 - y}{16 - (y - 1)^2} = 0 \quad (2)$$

Để giải phương trình ta phải tìm TXĐ. Phương trình (1) có TXĐ: $x \neq 8$, phương trình (2) có mẫu là $4^2 - (y - 1)^2 = (4 + y - 1)(4 - y + 1)$ hay $(y + 3)(5 - y)$ nên có TXĐ là $y \neq -3$, $y \neq 5$.

Như vậy phương trình (1) tương đương với $121 - 22x + x^2 = 0$ hay $(x - 11)^2 = 0$ mà nghiệm là $x = 11$. Phương trình (2) tương đương với $9y^2 - y = 0$ hay $y(9y - 1) = 0$ mà nghiệm là $y = 0$, $y = \frac{1}{9}$. Các giá trị 11; 0 và $\frac{1}{9}$ đều thuộc TXĐ của các phương trình.

PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ CHỮ

Bài 10. Giải các phương trình:

$$a) x + \frac{b^2}{a} = \frac{b}{a}x + a;$$

$$b) \frac{y+n}{m+n} + \frac{y-n}{m-n} = \frac{1}{m+n} - \frac{y-n}{m^2-n^2} + \frac{2y}{m};$$

$$c) \frac{3az + 12ab + 5b^2}{9a^2 - b^2} = \frac{2z - 3b}{3a + b} - \frac{3z - 4a}{b - 3a}.$$

• Tìm hiểu đề bài

Ngoài các ẩn theo thứ tự là x, y, z các hệ số trong các phương trình đã cho là các chữ a, b, m, n (không phải là các số). Tất cả mẫu ở đây đều là chữ (không chứa ẩn).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Khi giải một phương trình có hệ số chữ ta cũng theo hai bước như giải phương trình có hệ số bằng số. Điều cần lưu ý là khi biến đổi đến dạng $Ax = B$ thì phép chia thực hiện được khi số chia khác 0, do đó muốn tìm x thì phải có điều kiện $A \neq 0$ để được $x = \frac{B}{A}$.

Trước tiên giải theo hai bước vẫn phải tìm TXĐ của phương trình. Đó là $a \neq 0$ (câu a), $m \neq \pm n$ (câu b), $a \neq \pm \frac{b}{3}$ (câu c).

• Cách giải

a) TXĐ: $a \neq 0$, MC: a .

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$ax + b^2 = bx + a^2, \text{ hay } (a - b)x = a^2 - b^2.$$

$$\text{Nếu } a - b \neq 0, \text{ tức là } a \neq b \text{ thì } x = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

Vậy với $a \neq 0, a \neq b$ thì phương trình có nghiệm là $x = a + b$.

b) TXD: $m \neq \pm n$, MC: $(m + n)(m - n)m = (m^2 - n^2)m$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$\begin{aligned} m(y + n)(m - n) + (y - n)(m + n)m &= \\ &= m(m - n) - m(y - n) + 2y(m^2 - n^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hay } (y + n)(m^2 - mn) + (y - n)(m^2 + mn) &= \\ &= m^2 - mn - my + mn + 2m^2y - 2n^2y; \\ m^2y - mny + m^2n - mn^2 + m^2y + mny - m^2n - mn^2 &= \\ &= m^2 - my + 2m^2y - 2n^2y; \end{aligned}$$

$$- 2mn^2 = m^2 - my - 2n^2y; 2n^2y + my = m^2 + 2mn^2$$

$$\text{hay } (m + 2n^2)y = m(m + 2n^2).$$

Nếu $m + 2n^2 \neq 0$ thì $y = m$.

Vậy với $m \neq \pm n$ và $m + 2n^2 \neq 0$ thì phương trình có nghiệm là $y = m$.

c) TXD: $a \neq \pm \frac{b}{3}$, MC: $9a^2 - b^2$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu (sau khi đổi dấu của $-\frac{3z - 4a}{b - 3a}$ thành

$$-\frac{4a - 3z}{3a - b};$$

$$3az + 12ab + 5b^2 = (2z - 3b)(3a - b) - (4a - 3z)(3a + b),$$

hay

$$\begin{aligned} 3az + 12ab + 5b^2 &= \\ &= 6az - 2bz - 9ab + 3b^2 - 12a^2 - 4ab + 9az + 3bz; \end{aligned}$$

$$12az + bz = 12a^2 + 25ab + 2b^2, \text{ hay}$$

$$(12a + b)z = 12a^2 + 25ab + 2b^2 = (12a + b)(a + 2b).$$

Nếu $12a + b \neq 0$ tức là $a \neq -\frac{b}{12}$ thì $z = a + 2b$.

Vậy với $a \neq \pm \frac{b}{3}$ và $a \neq -\frac{b}{12}$ thì phương trình có nghiệm là $z = a + 2b$.

● Khai thác bài toán

Ta có thể xét một phương trình tương tự với mẫu phức tạp hơn như sau:

$$\text{Giải phương trình } \frac{2m + x}{4m^2 - 9p^2} = \frac{m + 3x}{4m^2 + 6mp} - \frac{2x - m}{6mp - 9p^2}.$$

Ở vế phải mẫu các phân thức có thể viết như sau:

$$4m^2 + 6mp = 2m(2m + 3p); \quad 6mp - 9p^2 = 3p(2m - 3p);$$

$$\text{TXĐ: } m \neq 0, p \neq 0, 2m \neq \pm 3p; \quad \text{MC: } 6mp(4m^2 - 9p^2).$$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$6mp(2m + x) = 3p(2m - 3p)(m + 3x) - 2m(2m + 3p)(2x - m),$$

$$\text{hay } 12m^2p + 6mpx =$$

$$= 6m^2p + 18mpx - 9mp^2 - 27p^2x - 3m^2x + 4m^3 - 12mpx + 6m^2p;$$

$$8m^2x + 27p^2x = 4m^3 - 9mp^2, \text{ hay}$$

$$(8m^2 + 27p^2)x = m(4m^2 - 9p^2).$$

$$\text{Do } m \text{ và } p \text{ khác } 0 \text{ nên } 8m^2 + 27p^2 \neq 0. \text{ Từ đó } x = \frac{m(4m^2 - 9p^2)}{8m^2 + 27p^2}$$

(với điều kiện $m \neq 0, p \neq 0, 2m \neq \pm 3p$).

Bài 11. Giải phương trình:

$$\text{a) } \frac{m}{x + m} - \frac{p}{x + p} = \frac{m - p}{x - p};$$

$$\text{b) } \frac{y}{n(m - y)} + \frac{p}{q(y - m)} = \frac{mq - np}{3mnq}.$$

● Tìm hiểu đề bài

Hai phương trình này đều là phương trình có hệ số chữ, ngoài ra lại còn chứa ẩn ở mẫu.

Ở phương trình a cả ba mẫu đều chứa ẩn x, ở phương trình b chỉ có các mẫu ở vế trái là chứa ẩn y.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước tiên phải tìm TXĐ của mỗi phương trình. với câu a, mẫu chung là $(x + m)(x + p)(x - p)$. Với câu b hãy đổi dấu phân thức $\frac{P}{q(y - m)}$ thành $-\frac{P}{q(m - y)}$ để tìm được mẫu chung là $3mnq(m - y)$.

● Cách giải

a) TXĐ: $x \neq -m, x \neq \pm p$; MC: $(x + m)(x + p)(x - p)$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$m(x + p)(x - p) - p(x + m)(x - p) = (m - p)(x + m)(x + p),$$

hay

$$m(x^2 - p^2) - (px + pm)(x - p) = (mx + m^2 - px - mp)(x + p);$$

$$mx^2 - mp^2 - px^2 + p^2x - mpx + mp^2 =$$

$$= mx^2 + mpx + m^2x + m^2p - px^2 - p^2x - mpx - mp^2;$$

$$p^2x - mpx = m^2x + m^2p - p^2x - mp^2;$$

$$p^2x - mpx - m^2x + p^2x = m^2p - mp^2;$$

$$(2p^2 - mp - m^2)x = mp(m - p);$$

$$\text{hay } [(p - m)(2p + m)]x = mp(m - p).$$

Nếu $m \neq p$ và $m \neq -2p$ thì $x = \frac{-mp}{2p + m}$ với điều kiện $p \neq 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-mp}{2p + m}$ với $x \neq -m, x \neq \pm p,$

$m \neq p, m \neq -2p, p \neq 0$.

b) TXĐ: $y \neq m$; MC: $3mnq(m - y)$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu (sau khi đổi dấu phân thức thứ hai thành $-\frac{P}{q(m - y)}$):

$$3mqy - 3mnp = (mq - np)(m - y), \text{ hay}$$

$$3mqy - 3mnp = m^2q - mqy - mnp + npy;$$

$$4mqy - npy = m^2q + 2mnp; \quad (4mq - np)y = m(mq + 2np).$$

Nếu $4mq - np \neq 0$ tức là $4mq \neq np$ thì $y = \frac{m(mq + 2np)}{4mq - np}$.

Vậy với $y \neq m$ và $4mq \neq np$ thì phương trình có nghiệm là

$$y = \frac{m(mq + 2np)}{4mq - np}.$$

● Khai thác bài toán

Có thể xét thêm bài toán tương tự với điều kiện phải xét phức tạp hơn:

Giải phương trình $\frac{a}{ac + bc} + \frac{a - b}{2bx} = \frac{a + b}{2bc} - \frac{b}{ax + bx}$.

Ở đây TXĐ là $x \neq 0$. Phương trình đã cho có thể viết:

$$\frac{a}{c(a + b)} + \frac{a - b}{2bx} = \frac{a + b}{2bc} - \frac{b}{(a + b)x}.$$

MC: $2bc(a + b)x$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2abx + c(a + b)(a - b) = (a + b)^2x - 2b^2c, \text{ hay}$$

$$2abx + a^2c - b^2c = a^2x + 2abx + b^2x - 2b^2c;$$

$$a^2x + b^2x = a^2c - b^2c + 2b^2c, \text{ hay}$$

$$(a^2 + b^2)x = a^2c + b^2c = c(a^2 + b^2).$$

Muốn phương trình đã cho có nghĩa thì a, b phải khác 0, do đó $a^2 + b^2 \neq 0$. Vậy $x = c$.

Nghiệm này thích hợp nếu $c \neq 0$. Nhưng phương trình đã cho có chứa c ở mẫu, nên rõ ràng $c \neq 0$ để phương trình có nghĩa.

Vậy với $x \neq 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ thì phương trình có nghiệm là $x = c$.

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 12

Giải phương trình:

a) $|x - 21| = x$;

b) $|12 - 5x| = 4 - x$;

c) $|1 - 2x| = |x + 1|$.

• Tìm hiểu đề bài

Ba phương trình nói trên được cho với ba mức độ khác nhau: điểm giống nhau là ở vế trái là biểu thức dạng $ax + b$ có chứa dấu giá trị tuyệt đối, điểm khác nhau là ở vế phải hoặc chỉ có ẩn x (câu a) hoặc có biểu thức $ax + b$ (câu b) hoặc có biểu thức $ax + b$ có chứa dấu giá trị tuyệt đối (câu c).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Lưu ý định nghĩa của giá trị tuyệt đối

$$|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

Chẳng hạn với câu a ta có

$$|x - 21| = \begin{cases} x - 21 & \text{khi } x - 21 \geq 0 \text{ hay } x \geq 21 \\ -(x - 21) & \text{khi } x - 21 < 0 \text{ hay } x < 21. \end{cases}$$

Với câu c thì: Nếu $|A| = |B|$ thì $A = B$ hoặc $A = -B$ (hai trường hợp).

• Cách giải

a) Phương trình đã cho có dạng:

$$x - 21 = x \text{ khi } x - 21 \geq 0 \text{ hay } x \geq 21$$

$$\text{hoặc } -x + 21 = x \text{ khi } x - 21 < 0 \text{ hay } x < 21.$$

Với phương trình $x - 21 = x$ hay $0x = 21$ thì phương trình này vô nghiệm.

Với phương trình $-x + 21 = x$ hay $2x = 21$, $x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$,
thỏa mãn điều kiện $x < 21$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 10\frac{1}{2}$.

b) Phương trình có dạng:

$$12 - 5x = 4 - x \text{ khi } 12 - 5x \geq 0 \text{ hay } x \leq \frac{12}{5} = 2,4$$

hoặc $-12 + 5x = 4 - x$ khi $12 - 5x < 0$ hay $x > 2,4$.

Giải $12 - 5x = 4 - x$ ta có $4x = 8$; $x = 2$ thỏa mãn điều kiện
 $x \leq 2,4$.

Giải $-12 + 5x = 4 - x$ ta có $6x = 16$; $x = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$ thỏa mãn
 $x > 2,4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 2\frac{2}{3}$.

c) Ta có 2 trường hợp :

$$1 - 2x = x + 1$$

hoặc $1 - 2x = -x - 1$.

Giải $1 - 2x = x + 1$ ta có $3x = 0$, suy ra $x = 0$

Giải $1 - 2x = -x - 1$ ta có $x = 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$, $x = 2$.

● Khai thác bài toán

- Nếu đề bài là: giải phương trình $|x| = |-15|$ thì ta có
 $x = \pm (-15)$

Vậy $x = -15$, $x = 15$.

- Nếu đề bài là $|12 - 5x| = -1$ thì phương trình vô nghiệm vì
 $|12 - 5x| \geq 0$ với mọi x .

- Nếu đề bài là $|x| = |x(x - 1)|$ thì như ở câu c ta có hai
trường hợp :

$x = x(x - 1)$, tức là $x(x - 2) = 0$, suy ra $x = 0$, $x = 2$;

hoặc $x = -x(x - 1)$, tức là $x^2 = 0$, suy ra $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0, x = 2$.

- Nếu đề bài là $\frac{|x| - 6}{x^2 - 36} = 0$ thì điều kiện là $x \neq \pm 6$. Từ

$|x| - 6 = 0$ hay $|x| = 6$. Vậy $x = \pm 6$. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 13. Tìm những giá trị của x và $y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn các phương trình:

$$\text{a) } \frac{x+y}{12} = \frac{7}{12}; \quad \text{b) } \frac{11}{x+2y} = 1.$$

• **Tìm hiểu đề bài**

Khác với phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình này cũng là bậc nhất nhưng chứa hai ẩn mà yêu cầu là tìm những giá trị tự nhiên của các ẩn thỏa mãn phương trình.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Thực chất bài này là tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng.

Với câu a ta phải tìm hai số tự nhiên x và y biết tổng của chúng là 7, với câu b thì cho biết tổng $x + 2y = 11$.

• **Cách giải**

a) Ta có $x + y = 7$. Lần lượt cho x các giá trị tự nhiên từ 0 đến 7 sẽ tìm được các giá trị tương ứng của y theo bảng sau:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0

b) Ta có $x + 2y = 11$. Vì tổng 11 là số lẻ và $2y$ phải là số chẵn nên lần lượt cho x các giá trị tự nhiên lẻ từ 1 đến 11 sẽ tìm được các giá trị tương ứng của $2y$, rồi của y theo bảng sau:

x	1	3	5	7	9	11
$2y$	10	8	6	4	2	0
y	5	4	3	2	1	0

● Khai thác bài toán

Ta có thể đổi đề bài như sau:

- Tìm các giá trị nguyên của x sao cho y lấy các giá trị từ 15 đến 20.

Khi đó đối với câu a ta có bảng sau:

y	15	16	17	18	19	20
x	-8	-9	-10	-11	-12	-13

Đối với câu b ta có bảng sau:

y	15	16	17	18	19	20
$2y$	30	32	34	36	38	40
x	-19	-21	-23	-25	-27	-29

- Tìm các cặp số nguyên (x, y) sao cho tổng $x + y = -7$.

Khi đó $x = -7 - y$, với mọi $y \in \mathbb{Z}$ ta đều tìm được giá trị tương ứng của x . Do đó sẽ có vô số cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $x + y = -7$.

GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 14

a) Mẫu của một phân số lớn hơn tử là 4. Thêm 11 vào tử và bớt mẫu đi 1 thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

b) Tìm một số có hai chữ số mà chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị biết rằng nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì sẽ được một số mới nhỏ hơn số cũ là 36.

● Tìm hiểu đề bài

Câu a là tìm một phân số nhỏ hơn 1 vì mẫu lớn hơn tử là 4, biết rằng nếu cộng thêm 11 vào tử và trừ mẫu đi 1 sẽ được phân

số nghịch đảo lớn hơn 1.

Câu b là tìm một số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết hai điều kiện: chữ số hàng chục a gấp ba chữ số hàng đơn vị b và nếu viết theo thứ tự ngược lại thì được số mới ba nhỏ hơn số ban đầu $\overline{ab}$ là 36.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Muốn giải một bài toán bằng cách lập phương trình ta làm như sau:

Bước 1: Lập phương trình gồm:

- Chọn ẩn và xác định điều kiện cho ẩn
- Biểu thị các số liệu chưa biết qua ẩn
- Tìm các mối liên quan giữa các số liệu để lập phương trình.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Chọn kết quả thích hợp và trả lời.

Đối với câu a, nên chọn ẩn x là tử, từ đó có ngay mẫu bằng tử cộng với 4 tức là $x + 4$.

Đối với câu b thì có thể chọn ẩn x là chữ số hàng đơn vị để có ngay chữ số hàng chục là $3x$.

Ta hãy giải chi tiết câu a và giải sơ lược câu b.

● **Cách giải**

a) Bước 1. Gọi x là tử, x nguyên dương, mẫu là $x + 4$. Phân số phải tìm là $\frac{x}{x + 4}$.

Nếu cộng thêm 11 vào tử và bớt mẫu đi 1 thì tử sẽ là $x + 11$, mẫu sẽ là $x + 4 - 1 = x + 3$. Ta sẽ được phân số $\frac{x + 11}{x + 3}$.

Theo bài ra phân số mới bằng phân số nghịch đảo của phân số ban đầu tức là bằng $\frac{x + 4}{x}$. Vậy ta có phương trình:

$$\frac{x + 11}{x + 3} = \frac{x + 4}{x}$$

Bước 2. Phương trình có dạng một tỉ lệ thức nên ta có ngay:

$$x(x + 11) = (x + 3)(x + 4)$$

$$\text{hay } x^2 + 11x = x^2 + 4x + 3x + 12; \quad 11x = 7x + 12.$$

$$\text{Từ đó } 4x = 12; \quad x = 3.$$

Bước 3. Giá trị 3 nguyên dương thỏa mãn điều kiện xác định cho ẩn.

Vậy phân số phải tìm là $\frac{3}{7}$.

Thử lại: Mẫu hơn tử là $7 - 3 = 4$. Thêm 11 vào tử và trừ mẫu đi 1 được phân số $\frac{3 + 11}{7 - 1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ đúng là phân số nghịch đảo của phân số ban đầu $\frac{3}{7}$.

Đáp số: Phân số phải tìm là $\frac{3}{7}$.

b) Gọi chữ số hàng đơn vị là x ($0 < x \leq 9$, x nguyên), chữ số hàng chục sẽ là $3x$. Số phải tìm là $30x + x$, số sau khi đổi chỗ hai chữ số của nó là $10x + 3x$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$10x + 3x + 36 = 30x + x, \text{ hay } 13x + 36 = 31x;$$

$$18x = 36; \quad x = 2, \text{ thỏa mãn điều kiện đã nêu.}$$

Vậy số đó là 62.

● Khai thác bài toán

- Đối với câu a, có thể chọn ẩn x là mẫu, khi đó tử sẽ là $x - 4$.

Phân số phải tìm là $\frac{x-4}{x}$, phân số nghịch đảo là $\frac{x}{x-4}$.

Cộng 11 vào tử và trừ mẫu đi 1 ta được $\frac{x-4+11}{x-1} = \frac{x+7}{x-1}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x+7}{x-1} = \frac{x}{x-4}.$$

Giải ra sẽ tìm được $x = 7$, từ đó phân số ban đầu là $\frac{3}{7}$.

- Đối với câu b, có thể chọn ẩn x là chữ số hàng chục, khi đó chữ số hàng đơn vị sẽ là $\frac{x}{3}$. Số đó là $10x + \frac{x}{3}$ và số viết theo thứ tự ngược lại là $\frac{10x}{3} + x$. Theo bài ra ta có phương trình

$$10x + \frac{x}{3} + 36 = \frac{10x}{3} + 3.$$

Sau khi giải sẽ tìm được $x = 6$, từ đó số phải tìm là 62. Tuy nhiên việc chọn ẩn là chữ số hàng chục sẽ làm cho việc giải phương trình phức tạp hơn, do phải quy đồng mẫu rồi khử mẫu, vì thế cách chọn ẩn x là chữ số hàng đơn vị vẫn thuận tiện hơn.

Bài 15

a) Một thị trấn hiện có 40 804 dân. Biết rằng mỗi năm dân số tăng lên 1%. Tìm số dân của thị trấn cách đây 2 năm.

b) Một đội sản xuất ngày đầu gặt được $\frac{1}{2}$ cánh đồng và 2 ha, ngày sau gặt 25% phần còn lại và 6 ha cuối cùng. Tìm diện tích của cánh đồng.

• Tìm hiểu đề bài

Loại toán này liên quan về phần trăm (%). Câu a cho số dân hiện nay là 40 804 người và phải tìm số dân cách đây 2 năm khi dân số mỗi năm tăng 1%.

Câu b yêu cầu tìm diện tích của một cánh đồng khi biết sau 2 ngày thì gặt xong lúa của nó trong đó ngày đầu gặt $\frac{1}{2}$ cánh đồng và 2 ha và ngày sau gặt 25% diện tích còn lại và 6 ha cuối cùng.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Đối với câu a nên chọn ẩn là số dân cách đây 2 năm, rồi tìm xem sau 1 năm rồi sau 2 năm dân số đã tăng bao nhiêu. Từ đó mà lập phương trình theo bài ra.

Ở câu b nên chọn ẩn là diện tích cánh đồng bằng ha. Rồi lần lượt tìm xem ngày đầu gặt được bao nhiêu, ngày thứ hai gặt được

bao nhiêu. Từ đó mà lập phương trình trên cơ sở diện tích gặt được trong 2 ngày chính bằng diện tích cánh đồng.

● Cách giải

a) Gọi số dân cách đây hai năm là x (x nguyên dương). Sau năm thứ nhất dân số tăng 1% tức $\frac{x}{100}$ và dân số cuối năm là $x + \frac{x}{100} = \frac{101}{100}x$. Sau năm thứ hai dân số tăng 1% tức $\frac{101}{100 \cdot 100}x = \frac{101}{10\,000}x$ và dân số cuối năm thứ hai sẽ là $\frac{101}{100}x + \frac{101}{10\,000}x$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{101}{100}x + \frac{101}{10\,000}x = 40\,804,$$

$$\text{hay } \frac{10\,100 + 101}{10\,000}x = 40\,804; \quad \frac{10\,201}{10\,000}x = 40\,804.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{40\,804 \cdot 10\,000}{10\,201} = 40\,000.$$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện ở trên

Đáp số: Số dân cách đây 2 năm là 40 000 người.

b) Gọi diện tích cánh đồng là x ha ($x > 0$). Ngày đầu đội sản xuất gặt được $\frac{x}{2} + 2$, ngày sau gặt được $(x - \frac{x}{2} - 2) \cdot \frac{1}{4} + 6$ (đối 25%, $= \frac{1}{4}$). Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{2} + 2 + (\frac{x}{2} - 2) \cdot \frac{1}{4} + 6 = x$$

$$\text{hay } \frac{x}{2} + 8 + \frac{x}{8} - \frac{1}{2} = x; \quad \frac{5x}{8} + \frac{15}{2} = x;$$

$5x + 60 = 8x$, từ đó $x = 20$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Đáp số: Diện tích cánh đồng là 20 ha.

● Khai thác bài toán

a) Đáng lẽ tìm số dân của một thị trấn ta có thể đổi bài ra thành tìm số dân của hai thị trấn như sau:

Hai thị trấn M và P năm ngoái có tổng số dân là 12 vạn người. Năm nay dân số thị trấn M tăng 1%, dân số thị trấn P tăng 0,9%. Do đó tổng dân số năm nay của hai thị trấn là 121 130 người. Tính số dân của mỗi thị trấn năm ngoái và năm nay.

Nếu gọi số dân thị trấn M năm ngoái là x vạn người (x nguyên dương) thì số dân thị trấn P năm ngoái sẽ là $12 - x$.

Năm nay số dân thị trấn M tăng $\frac{x}{100}$ nên số dân sẽ là $x + \frac{x}{100} = \frac{101}{100}x$;

số dân thị trấn P tăng $(12 - x) \cdot \frac{0,9}{100}$ nên số dân sẽ là $(12 - x) \cdot \frac{100,9}{100}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{101}{100}x + \frac{(12 - x) \cdot 100,9}{100} = 12,1130$$

$$\text{hay } 101x + 1210,8 - 100,9x = 1211,3$$

Từ đó $0,1x = 1211,3 - 1210,8 = 0,5$. Suy ra $x = 5$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy năm ngoái số dân thị trấn M là 5 vạn người, số dân thị trấn P là 7 vạn người. Năm nay số dân thị trấn M là $5 \cdot \frac{101}{100} = 5,05$

vạn người, số dân thị trấn P là $7 \cdot \frac{100,9}{100} = 7,063$ vạn người.

b) Để nguyên số liệu ta có thể đổi nội dung bài toán như sau:

Trong hai ngày một tổ công nhân làm được một số sản phẩm.

Ngày đầu số lượng sản phẩm làm được bằng $\frac{1}{2}$ số sản phẩm của cả hai ngày và 2 sản phẩm. Ngày sau làm được 25% số sản phẩm còn lại và 6 sản phẩm. Tìm số sản phẩm mà tổ công nhân làm được trong hai ngày.

Bài 16

a) Một ô tô du lịch đi từ tỉnh A đến tỉnh B mất 10 giờ 40 phút. Do vận tốc giảm đi 10 km/h nên ô tô đến tỉnh B chậm mất 2 giờ 8 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc ô tô.

b) Một sợi dây chuyền luôn qua hai ròng rọc cố định. Chu vi ròng rọc thứ nhất là 60 cm, ròng rọc thứ hai là 35 cm. Mỗi phút ròng rọc thứ nhất quay được 84 vòng. Hỏi mỗi phút ròng rọc thứ hai quay được bao nhiêu vòng?

• Tìm hiểu đề bài

Hai bài toán này thuộc loại toán về chuyển động. Lưu ý ở câu a là ô tô đi từ A đến B mất 10 giờ 40 phút nhưng do vận tốc giảm đi 10km/h nên đến B chậm mất 2 giờ 8 phút tức là đi từ A đến B mất 12 giờ 48 phút.

Ở câu b là chuyển động của hai ròng rọc mà chu vi theo thứ tự là 60 cm và 35 cm. Mỗi phút nếu ròng rọc chu vi dài hơn quay được 84 vòng thì ròng rọc chu vi nhỏ hơn sẽ quay được bao nhiêu vòng?

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy chọn ẩn là vận tốc ô tô, rồi đổi 10 giờ 40 phút = $\frac{32}{3}$ giờ và 12 giờ 48 phút = $\frac{64}{5}$ giờ, để lập phương trình dựa vào mối quan hệ giữa vận tốc v , thời gian t và quãng đường s : $s = v.t$

b) Chọn ẩn là số vòng quay của ròng rọc thứ hai trong 1 phút và lưu ý rằng số vòng quay tỉ lệ nghịch với chu vi ròng rọc (chu vi nhỏ thì số vòng quay lớn).

• Cách giải

a) Gọi vận tốc ô tô là x km/h ($x > 0$). Quãng đường AB khi vận tốc chưa giảm là $\frac{32}{3}.x$. Khi vận tốc giảm còn $x - 10$ thì quãng

đường AB là $(x - 10) \cdot \frac{64}{5}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{32}{3}x = (x - 10) \cdot \frac{64}{5}.$$

hay $160x = 192x - 1920$; $32x = 1920$; $x = 60$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy vận tốc ô tô là 60km/h và khoảng cách AB là $\frac{60 \cdot 32}{3} = 640$ (km).

b) Gọi số vòng quay của ròng rọc thứ hai là x vòng/phút ($x > 0$). Do số vòng quay tỉ lệ nghịch với chu vi của ròng rọc nên theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{60}{35} = \frac{x}{84}; x = \frac{84 \cdot 60}{35} = 144, \text{ thỏa mãn điều kiện ở trên.}$$

Vậy trong 1 phút ròng rọc thứ hai quay được 144 vòng.

● Khai thác bài toán

Loại toán về chuyển động này có thể cho dưới dạng sau:

Một đoàn vận động viên đi qua một dãy phố với vận tốc 3km/h. Một người đi xe đạp với vận tốc 15 km/h từ lúc gặp người đi đầu đoàn cho đến khi gặp người đi cuối đoàn phải mất 2 phút. Tính chiều dài của đoàn vận động viên.

Ở đây chiều dài đoàn người ta tính bằng mét. Gọi chiều dài này là x ($x > 0$). Trong 1 phút người đi xe đạp đi được $\frac{15000}{60} = 250$ (m)

và đoàn người đi được $\frac{3000}{60} = 50$ (m).

Sau 1 phút người đi xe đạp cách xa người đi đầu là $250 + 50 = 300$ (m). Thời gian người đi xe đạp kể từ khi gặp người đầu cho đến người cuối đoàn là $\frac{x}{300}$ phút. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{300} = 2; x = 600 \text{ thỏa mãn điều kiện ở trên.}$$

Vậy đoàn vận động viên dài 600m.

Bài 17

a) Hai bạn Trung và Tùng đứng trên một tấm ván đặt trên một thanh gỗ tròn làm trụ. Trung nặng 50 kg, Tùng nặng 30 kg. Hỏi hai bạn phải đứng ở vị trí nào cách thanh gỗ làm trụ để tấm ván được thăng bằng nếu khoảng cách giữa hai bạn trên tấm ván là 4m ?

b) Người ta trộn 10 lít dung dịch muối nồng độ 45% với 5 lít dung dịch muối nồng độ 60%. Tính nồng độ của dung dịch muối hỗn hợp.

● Tìm hiểu đề bài

Câu a thuộc loại toán liên hệ với vật lí (đòn bẩy), câu b thuộc loại toán liên hệ với hóa học (dung dịch muối).

Ở câu a cho biết khối lượng của hai người đứng cách nhau 4m trên tấm ván là 50 kg và 30 kg và phải tìm vị trí mỗi người đến điểm tựa (thanh gỗ trụ) để tấm ván được thăng bằng.

Ở câu b là trộn hai dung dịch muối nồng độ khác nhau 45% và 60% và yêu cầu tìm nồng độ của dung dịch muối hỗn hợp.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy áp dụng nguyên tắc cân bằng của đòn bẩy: nếu lực là l_1 , l_2 và cánh tay đòn tương ứng là d_1 , d_2 thì $l_1 d_1 = l_2 d_2$. Cánh tay đòn ở đây là các khoảng cách từ chỗ bạn Trung và bạn Tùng đứng đến thanh gỗ trụ (điểm tựa).

Chọn khoảng cách từ chỗ bạn Trung đứng đến thanh gỗ trụ (cánh tay đòn) làm ẩn.

b) Lưu ý khi trộn 10 lít dung dịch muối nồng độ 45% với 5 lít dung dịch muối nồng độ 60% thì sẽ được 15 lít dung dịch muối hỗn

hợp mà ta phải tìm nồng độ của nó. Dung dịch muối nồng độ 45% có nghĩa là cứ 100 lít dung dịch có 45 lít muối như thế 10 lít dung dịch sẽ có $10 \cdot \frac{45}{100}$ hay 10.45% lít muối. Tìm tiếp số lít muối trong 5 lít dung dịch muối nồng độ 60% và trong 15 lít dung dịch muối hỗn hợp. Từ đó mà lập phương trình.

● **Cách giải**

a) Gọi khoảng cách từ chỗ bạn Trung đứng đến thanh gỗ trụ là x ($x > 0$) để tấm ván được thăng bằng. Khoảng cách từ chỗ bạn Tùng đứng đến thanh gỗ trụ sẽ là $(4 - x)$.

Theo nguyên tắc đòn bẩy ta có tích $50x$ bằng tích $30(4 - x)$ vậy theo bài ra ta có phương trình:

$$50x = 30(4 - x)$$

hay $50x = 120 - 30x$; $80x = 120$; $x = 1,5$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy khoảng cách từ chỗ bạn Trung và bạn Tùng đứng đến thanh gỗ trụ theo thứ tự là 1,5m và 2,5m.

b) Gọi nồng độ của dung dịch muối hỗn hợp là $x\%$ ($x > 0$). Số lít muối trong 10 lít dung dịch nồng độ 45% là 10.45%, trong 5 lít dung dịch nồng độ 60% là 5.60% và trong 15 lít dung dịch hỗn hợp là $15.x\%$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$10.45\% + 5.60\% = 15.x\%$$

hay $450 + 300 = 15x$. Từ đó $x = 750 : 15 = 50$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy nồng độ của dung dịch muối hỗn hợp là 50%.

● **Khai thác bài toán**

a) Toán liên hệ với vật lí còn có loại toán về nhiệt học, chẳng hạn bài toán sau:

Phải trộn bao nhiêu lít nước sôi 100°C với bao nhiêu lít nước

nguội 16°C để được 100 lít nước ở 58°C ?

Muốn giải bài toán này phải nắm được nguyên tắc cân bằng nhiệt : nhiệt lượng tỏa ra bằng nhiệt lượng thu được.

Gọi số lít nước sôi là x ($x > 0$), số lít nước nguội sẽ là $100 - x$. Nhiệt lượng mà nước nguội thu được để tăng từ 16°C lên 58°C là : $(100 - x)42$ Kcalo, nhiệt lượng mà nước sôi tỏa ra khi giảm từ 100°C xuống 58°C là $42.x$ Kcalo.

Theo nguyên tắc cân bằng nhiệt ta có phương trình:

$$42.x = 42(100 - x)$$

hay $x = 100 - x$; $2x = 100$; $x = 50$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy phải trộn 50 lít nước nguội với 50 lít nước sôi..

b) Có thể cho bài toán về dung dịch muối dưới dạng tổng quát, chẳng hạn:

Trong a lít dung dịch muối có b gam nước. Hỏi phải thêm bao nhiêu nước để cho mỗi lít dung dịch có m gam muối ?

Theo bài ra thì tỉ số $\frac{b}{a}$ giữa số khối lượng muối và số lít dung dịch muối gọi là nồng độ dung dịch.

Gọi số lít nước phải thêm vào dung dịch là x ($x > 0$). Sau khi thêm nước, dung dịch có cả thảy $(a + x)$ lít nước và chứa b gam muối. Vậy mỗi lít dung dịch chứa $\frac{b}{a + x}$ gam muối, mà theo bài ra mỗi lít dung dịch có m gam muối nên ta có phương trình:

$$\frac{b}{a + x} = m, \text{ hay } b = am + mx; mx = b - am.$$

Nếu $m \neq 0$ thì $x = \frac{b - am}{m}$ (lít nước).

Bài 18

a) Hai vòi nước cùng chảy vào bể sau 4 giờ bể sẽ đầy nước. Nếu vòi thứ nhất chảy một mình thì phải 6 giờ mới đầy bể. Hỏi vòi thứ

hai chảy một mình thì phải mấy giờ mới đầy bể ?

b) Ba máy bơm A, B, C hút nước trong giếng. Nếu làm một mình thì máy bơm A hút hết nước trong 12 giờ, máy bơm B hút hết nước trong 15 giờ và máy bơm C trong 20 giờ. Trong 3 giờ đầu hai máy bơm A và C cùng làm việc sau đó mới dùng thêm máy bơm B. Tính xem trong bao lâu thì giếng sẽ hết nước.

● Tìm biểu đề bài

Bài toán này thuộc loại toán về vòi nước chảy mà cách giải là quy ước rằng dung tích bể được chọn làm đơn vị dung tích, tức là trong 1 giờ thì vòi chảy vào được mấy phần dung tích bể.

Ở câu b cũng vậy, trong 1 giờ thì máy bơm hút được mấy phần dung tích của giếng. Lưu ý là trong 3 giờ đầu chỉ hai máy bơm A và C làm việc chung và sau đó cả ba máy bơm mới cùng hút nước trong giếng.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy tính xem trong 1 giờ cả hai vòi cùng chảy vào được mấy phần bể, vòi thứ nhất chảy một mình được mấy phần bể, vòi thứ hai chảy một mình được mấy phần bể (chọn ẩn là số giờ mà vòi thứ hai chảy một mình sẽ đầy bể).

b) Chọn ẩn là lượng nước trong giếng, rồi tính xem trong 1 giờ mỗi máy bơm hút được mấy phần nước trong giếng, trong 3 giờ đầu hai máy bơm A và C hút được mấy phần nước trong giếng và còn lại bao nhiêu. Trong 1 giờ cả ba máy bơm cùng hút được bao nhiêu, từ đó mà tìm ra đáp số.

● Cách giải

a) Gọi số giờ để vòi thứ hai chảy một mình sẽ đầy bể là x ($x > 0$). Trong 1 giờ cả hai vòi chảy vào được $\frac{1}{4}$ bể, trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy vào được $\frac{1}{6}$ bể, vòi thứ hai chảy vào được $\frac{1}{x}$ bể.

Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$, hay $2x + 12 = 3x$. Từ đó $x = 12$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy vòi thứ hai chảy một mình phải 12 giờ mới đầy bể.

b) Gọi lượng nước trong giếng là x ($x > 0$). Trong 1 giờ máy bơm A hút được $\frac{x}{12}$ lượng nước trong giếng, máy bơm B hút được $\frac{x}{15}$ lượng nước và máy bơm C hút được $\frac{x}{20}$ lượng nước.

Trong 3 giờ đầu hai máy bơm A và C hút được $3(\frac{x}{12} + \frac{x}{20})$ lượng nước và sau đó lượng nước còn lại là:

$$x - 3(\frac{x}{12} + \frac{x}{20}) = \frac{60x - 15x - 9x}{60} = \frac{36}{60}x = \frac{3}{5}x.$$

Trong 1 giờ cả ba máy bơm cùng hút được lượng nước là:

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{15} + \frac{x}{20} = \frac{5x + 4x + 3x}{60} = \frac{12}{60}x = \frac{x}{5}.$$

Thời gian để 3 máy bơm cùng bơm hết nước còn lại trong giếng là:

$$\frac{3x}{5} : \frac{x}{5} = 3 \text{ (giờ)}.$$

Vậy giếng sẽ hết nước sau $3 + 3 = 6$ (giờ).

● Khai thác bài toán

Thuộc loại toán về vòi nước chảy này còn có toán về "việc làm đồng thời", chẳng hạn bài toán sau:

Hai ô tô tải chở vật liệu đến một công trường phải 24 giờ mới xong công việc. Ô tô thứ nhất làm một mình sẽ hoàn thành công việc 1,5 lần nhanh hơn ô tô thứ hai. Hỏi mỗi ô tô làm một mình phải bao nhiêu giờ mới xong công việc ?

Cách giải như sau: Gọi số giờ mà ô tô thứ nhất làm một mình

mới xong công việc là x ($x > 0$). Như thế số giờ mà ô tô thứ hai làm một mình xong công việc sẽ là $1,5x = \frac{3}{2}x$.

Trong 1 giờ ô tô thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, ô tô thứ hai làm được $1 : \frac{3x}{2} = \frac{2}{3x}$. Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{24}$ hay $24 + 16 = x$; $x = 40$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy nếu làm một mình thì ô tô thứ nhất phải 40 giờ, ô tô thứ hai phải 60 giờ mới xong công việc.

Câu b có thể giải cách khác như sau:

Gọi số giờ mà cả 3 máy bơm làm chung hút hết nước của giếng là x ($x > 0$). Trong 1 giờ hai máy bơm A và C cùng hút được $\frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ lượng nước trong giếng. Trong 3 giờ cả hai máy cùng hút được $3(\frac{1}{12} + \frac{1}{20}) = \frac{2}{5}$ lượng nước, vậy còn lại $\frac{3}{5}$ lượng nước.

Trong 1 giờ cả ba máy bơm cùng hút được $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ lượng nước.

Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = x$. Từ đó $x = 3$ (giờ) thỏa mãn điều kiện ở trên.

Cộng thêm 3 giờ trước đó hai máy bơm A và C cùng làm việc ta có thời gian mà giếng sẽ hết nước là $3 + 3 = 6$ (giờ).

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 19

a) Chọn hai phần tử bất kì của tập S để chứng tỏ là nghiệm của các bất phương trình sau:

$$S = \{x | x > -2\}; \quad 7x - 3 > 2x - 13.$$

$$S = \{y | y > 4\}; \quad 5y + 3 < 8y - 9.$$

b) Giải thích dãy phép biến đổi tương đương sau:

$$7x - 3 > 2x - 13 \Rightarrow 7x - 2x > -13 + 3; 5x > -10 \Rightarrow x > -2;$$

và $5y + 3 < 8y - 9 \Rightarrow 5y - 8y < -9 - 3; -3y < -12 \Rightarrow y > 4$

● Tìm hiểu đề bài

Bài toán trên thuộc bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng $A(x) < B(x)$ hoặc $A(x) > B(x)$, trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức chứa một biến x gọi là ẩn. Nghiệm là giá trị tìm được của ẩn.

Giải thích dãy phép biến đổi tương đương là chỉ rõ mỗi bất đẳng thức đi sau suy ra từ bất đẳng thức đi trước nhờ định lí hay hệ quả nào (kí hiệu $\Rightarrow$ đọc là suy ra hoặc kéo theo).

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy chọn hai số bất kì trong tập S đã cho thay vào hai vế của bất phương trình tương ứng và kiểm tra.

b) Các phép biến đổi tương đương bao gồm:

+ Định lí 1: Nếu cộng cùng một đa thức của ẩn vào hai vế của một bất phương trình thì được một bất phương trình tương đương.

Suy ra hai hệ quả sau:

- Có thể xóa hai số hạng giống nhau ở hai vế của một bất phương trình;

- Có thể chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia và đổi dấu của nó.

+ Định lí 2: - Nếu nhân cùng một số dương với hai vế của một bất phương trình thì được một bất phương trình tương đương.

- Nếu nhân cùng một số âm với hai vế của một bất phương trình và đổi chiều của bất phương trình thì được một bất phương trình tương đương.

Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm.

● Cách giải

a) - Với $x = 0$ thì vế trái của bất phương trình $7x - 3 > 2x - 13$ có giá trị -3 và vế phải có giá trị -13 , rõ ràng $-3 > -13$ vậy $x = 0$ là nghiệm.

Với $x = 1$ thì vế trái có giá trị 4 , vế phải có giá trị -11 , rõ ràng $4 > -11$ vậy $x = 1$ là nghiệm.

- Với $y = 5$ thì vế trái của bất phương trình $5y + 3 < 8y - 9$ có giá trị 28 , vế phải có giá trị 31 , rõ ràng $28 < 31$ vậy $y = 5$ là nghiệm.

Với $y = 10$ thì vế trái có giá trị 53 , vế phải có giá trị 71 , rõ ràng $53 < 71$ vậy $y = 10$ là nghiệm.

b) $7x - 3 > 2x - 13 \Rightarrow 7x - 2x > -13 + 3$ (chuyển $2x$ từ vế phải sang vế trái và đổi dấu, chuyển -3 từ vế trái sang vế phải và đổi dấu); $5x > -10$ (thực hiện phép tính ở hai vế); $x > -2$ (nhân hai vế với $\frac{1}{5}$).

$5y + 3 < 8y - 9 \Rightarrow 5y - 8y < -9 - 3$ (chuyển $8y$ từ vế phải sang vế trái và đổi dấu, chuyển 3 từ vế trái sang vế phải và đổi dấu); $-3y < -12$ (thực hiện phép tính ở hai vế); $y > 4$ (nhân hai vế với $-\frac{1}{3}$ và đổi chiều của bất phương trình).

● Khai thác bài toán

Về bất phương trình có thể khai thác các khía cạnh sau đây:

a) Có thể khẳng định rằng $m^2 > 0$ với mọi giá trị của m không?

b) Có thể khẳng định rằng bình phương của hiệu hai số bất kì là số dương không?

c) Nói tổng các bình phương của hai số lớn hơn hai lần tích của chúng là đúng hay sai ?

Sau đây là các câu trả lời:

a) $m^2 > 0$ với mọi giá trị của $m \neq 0$ (vì nếu $m = 0$ thì $m^2 = 0$).

b) Bình phương của hiệu hai số bất kì a và b chỉ là số dương khi hai số đó khác nhau, tức là $(a - b)^2 > 0$ khi $a \neq b$ (vì nếu $a = b$ thì $(a - b) = 0$).

c) Dựa vào hằng đẳng thức $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, ta thấy ngay rằng $(a - b)^2 > 0$ khi $a \neq b$, từ đó $a^2 + b^2 > 2ab$ (vì nếu $a = b$ thì $a^2 + b^2 = 2ab$).

Bài 20. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{2x - 1}{3} < \frac{x + 6}{2}$; b) $\frac{5(y - 1)}{6} - 1 > \frac{2(y + 1)}{3}$;

c) $2 + \frac{3(z + 1)}{8} < 3 - \frac{z - 1}{4}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Cả ba phương trình trên đều có mẫu là các số tự nhiên. Ở câu b có số hạng -1 , ở câu c có hai số hạng 2 và 3 là những số nguyên.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Quá trình giải một bất phương trình giống như quá trình giải phương trình, chỉ khác một điều là khi nhân hoặc chia hai vế của bất phương trình với một số âm thì phải đổi chiều của bất phương trình. Tóm lại giải bất phương trình là thực hiện một dãy các phép biến đổi tương đương.

● **Cách giải**

a) MC: 6. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2(2x - 1) < 3(x + 6), \text{ hay } 4x - 2 < 3x + 18; \quad 4x - 3x < 18 +$$

2.

Vậy $x < 20$ hay tập hợp nghiệm là $S = \{x \mid x < 20\}$.

b) MC: 6. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$5(y - 1) - 6 > 4(y + 1)$, hay $5y - 11 > 4y + 4$ Vậy $y > 15$ hay tập hợp nghiệm là $S = \{y \mid y > 15\}$.

c) MC: 8. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$16 + 3(z + 1) < 24 - 2(z - 1)$, hay $16 + 3z + 3 < 24 - 2z + 2$;
 $19 + 3z < 26 - 2z$; $5z < 7$

Vậy $z < 1,4$ hay tập hợp nghiệm là $S = \{z \mid z < 1,4\}$.

● Khai thác bài toán

Giải các bất phương trình như trên có thể phải vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ, chẳng hạn giải các bất phương trình sau:

$$a) \frac{(x - 2)^2}{5} + \frac{3(x - 1)^2}{10} \leq \frac{x^2 + 1}{2};$$

$$b) \frac{y(1,5y + 1)}{6} - \frac{(2 - y)^2}{4} \geq \frac{5y}{3} - 2.$$

Cách giải như sau:

a) MC: 10, ta có:

$$2(x - 2)^2 + 3(x - 1)^2 \leq 5(x^2 + 1), \text{ hay}$$

$$2(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 2x + 1) \leq 5x^2 + 5;$$

$$2x^2 - 8x + 8 + 3x^2 - 6x + 3 \leq 5x^2 + 5; \quad -14x + 11 \leq 5.$$

Vậy $x \geq \frac{3}{7}$ hay tập hợp nghiệm là $S = \{x \mid x \geq \frac{3}{7}\}$.

b) MC: 12, ta có:

$$2(1,5y^2 + y) - 3(2 - y)^2 \geq 20y - 24, \text{ hay}$$

$$3y^2 + 2y - 3(4 - 4y + y^2) \geq 20y - 24;$$

$$3y^2 + 2y - 12 + 12y - 3y^2 \geq 20y - 24;$$

$$14y - 12 \geq 20y - 24; \quad 6y \leq 12.$$

Vậy $y \leq 2$ hay tập hợp nghiệm là $S = \{y \mid y \leq 2\}$.

Bài 21. Chứng minh rằng với mọi m các bất phương trình sau đều đúng:

a) $(m - 2)^2 - m(m - 4) > 0$;

b) $(2m + 3)(2m + 1) > 4m(m + 2)$.

● **Tim hiểu đề bài**

Đây là một dạng khác của việc giải bất phương trình. Ở câu a phải biến đổi vế trái sao cho vế trái luôn dương với mọi m và ở câu b phải biến đổi hai vế sao cho vế trái luôn lớn hơn vế phải với mọi m .

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Biến đổi vế trái sao cho vế trái chỉ còn lại một số dương tức là vế trái không phụ thuộc vào giá trị của m (do đề bài là với mọi m).

b) Thực hiện phép tính ở hai vế và nhận xét với mọi m giá trị vế trái đều lớn hơn vế phải.

● **Cách giải**

a) Vế trái: $m^2 - 4m + 4 - m^2 + 4m = 4$. Rõ ràng $4 > 0$, tức là với mọi m bất phương trình đã cho đều đúng.

b) Vế trái: $4m^2 + 8m + 3$, vế phải: $4m^2 + 8m$.

Như vậy với mọi m giá trị vế trái luôn lớn hơn giá trị vế phải là 3 đơn vị, tức là bất phương trình đã cho đều đúng với mọi m .

● **Khai thác bài toán**

Ta còn có thể chứng minh các bất phương trình sau đều luôn đúng:

a) $25x + \frac{1}{x} < 10$ với $x < 0$;

b) $\frac{y}{5} + \frac{5}{y} \leq -2$ với $y < 0$.

Khác với bài toán trên, ở đây các bất phương trình đã cho không phải đều đúng với mọi x hoặc mọi y .

Cách giải như sau:

a) Với $x < 0$ bất phương trình đã cho có thể viết (đổi chiều của bất phương trình vì nhân hai vế với số âm x):

$25x^2 + 1 > 10x$, hay $25x^2 - 10x + 1 > 0$; $(5x - 1)^2 > 0$ luôn đúng.

b) Với $y < 0$ bất phương trình đã cho có thể viết (đổi chiều của bất phương trình):

$y^2 + 25 \geq -10y$, hay $y^2 + 10y + 25 \geq 0$; $(y + 5)^2 \geq 0$ luôn đúng (dấu $=$ xảy ra khi $y = -5$).

Bài 22. Biểu diễn tập hợp nghiệm của các bất phương trình sau trên trục số:

a) $\frac{2x - 1}{6} - 1 < 2 + \frac{x + 1}{3}$;

b) $\frac{2y - 5}{6} + \frac{6 - 7y}{4} > \frac{5 - 2y}{3} - y - \frac{y + 2}{4}$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu biểu diễn tập hợp nghiệm trên trục số, tức là trước hết phải giải bất phương trình để tìm tập hợp nghiệm của nó, sau đó mới biểu diễn trên trục số.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết hãy giải từng bất phương trình để tìm tập hợp nghiệm. Biểu diễn tập hợp nghiệm của bất phương trình trên trục số là vẽ trục số rồi gạch bỏ những đoạn của trục số không chứa các điểm biểu diễn nghiệm của bất phương trình.

• Cách giải

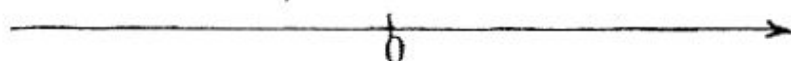
a) MC:6. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2x - 1 - 6 < 12 + 2(x + 1), \text{ hay } 2x - 7 < 14 + 2x ;$$

$$2x - 7 - 14 - 2x < 0; 0x - 21 < 0.$$

Với mọi giá trị của x , vế trái đều có giá trị bằng $-21 < 0$. Vậy mọi giá trị của x đều là nghiệm của bất phương trình.

Biểu diễn trên trục số:



Tập hợp nghiệm là toàn bộ trục số.

b) MC: 12. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

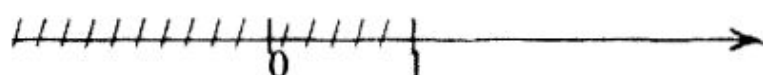
$$2(2y - 5) + 3(6 - 7y) > 4(5 - 2y) - 12y - 3(y + 2), \text{ hay}$$

$$4y - 10 + 18 - 21y > 20 - 8y - 12y - 3y - 6;$$

$$-17y + 8 > 14 - 23y; 6y > 6; y > 1$$

Tập hợp nghiệm là $S = \{y | y > 1\}$.

Biểu diễn trên trục số:



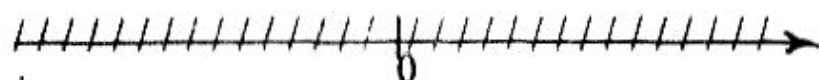
● Khai thác bài toán

a) Nếu đổi chiều của bất phương trình đã cho, tức là biểu diễn tập hợp nghiệm của bất phương trình:

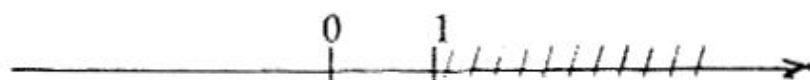
$$\frac{2x - 1}{6} - 1 > 2 + \frac{x + 1}{3}$$

thì cuối cùng ta sẽ được $0x - 21 > 0$. Với mọi giá trị của x vế trái đều có giá trị bằng $-21 < 0$. Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là $S = \emptyset$.

Khi đó trên trục số ta phải xóa toàn bộ như sau:



b) Tương tự nếu đổi chiều của bất phương trình đã cho thì tập hợp nghiệm sẽ là $S = \{y | y < 1\}$ và được biểu diễn trên trục số như sau:



Bài 23

a) Với những giá trị nào của x để giá trị của biểu thức

$$x - \frac{1 - \frac{3}{2}x}{4} \text{ nhỏ hơn giá trị của biểu thức } \frac{2 - \frac{1}{4}x}{3} + 2 ?$$

b) Chứng minh rằng biểu thức $y^2 + y + 1$ luôn dương với mọi y và biểu thức $6z - z^2 - 11$ luôn âm với mọi z .

• Tìm hiểu đề bài

a) Nếu gọi $A(x)$ là biểu thức thứ nhất và $B(x)$ là biểu thức thứ hai thì bài ra thực chất là giải bất phương trình $A(x) < B(x)$.

b) Bài ra yêu cầu chứng minh $y^2 + y + 1 > 0$ với mọi y và $6z - z^2 - 11 < 0$ với mọi z .

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Ta phải giải bất phương trình $x - \frac{1 - \frac{3}{2}x}{4} < \frac{2 - \frac{1}{4}x}{3} + 2$

b) Hãy phân tích 1 thành tổng $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ để biểu thức $y^2 + y + 1$ trở thành $y^2 + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ rồi viết $y^2 + y + \frac{1}{4}$ dưới dạng bình phương của một tổng $(A + B)^2$.

- Hãy nhân hai vế của bất phương trình $6z - z^2 - 11 < 0$ với -1 và đổi chiều của bất phương trình để được $z^2 - 6z + 11 > 0$, sau đó viết $11 = 9 + 2$ rồi biến đổi vế trái thành một biểu thức luôn dương.

• Cách giải

a) Bất phương trình đã cho có thể viết:

$$x - \frac{2 - 3x}{8} < \frac{8 - x}{12} + 2$$

MC: 24. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$24x - 3(2 - 3x) < 2(8 - x) + 48, \text{ hay}$$

$$24x - 6 + 9x < 16 - 2x + 48; 35x < 70. \text{ Từ đó } x < 2.$$

Vậy với những giá trị của x nhỏ hơn 2 thì giá trị biểu thức thứ nhất sẽ nhỏ hơn giá trị biểu thức thứ hai đã cho.

b) Biểu thức $y^2 + y + 1$ có thể viết $y^2 + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ luôn dương với mọi y .

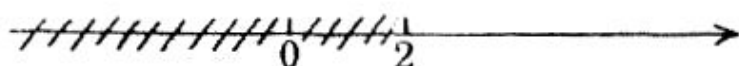
- Nhân hai vế của $6z - z^2 - 11 < 0$ với -1 và đổi chiều được $z^2 - 6z + 11 > 0$. Vế trái có thể viết:

$$z^2 - 6z + 9 + 2 = (z - 3)^2 + 2 \text{ luôn dương với mọi } z.$$

• Khai thác bài toán

a) Có thể đổi câu hỏi của đề bài như sau: Thay từ "nhỏ hơn" bằng từ "không nhỏ hơn" và yêu cầu "biểu diễn tập hợp nghiệm trên trục số".

Nếu thế thì đáp số sẽ là $x \geq 2$, tức là $S = \{x | x \geq 2\}$ được biểu diễn trên trục số như sau:



b) Có thể thay vế trái là một đa thức bằng một phân thức như sau:

Chứng minh rằng:

- Phân thức $\frac{x^2 + 6x + 10}{x^2 + 11}$ luôn dương với mọi x ;

- Phân thức $\frac{6y - y^2 - 15}{7 + y^2}$ luôn âm với mọi y .

Ở đây cả hai phân thức đều có mẫu luôn dương nên chỉ cần chứng minh tử $x^2 + 6x + 10 > 0$ với mọi x và tử $6y - y^2 - 15 < 0$ với mọi y .

Thật vậy $x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1 = (x + 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x ; còn $6y - y^2 - 15 = -(y^2 - 6y + 9 + 6) = -(y - 3)^2 + 6 < 0$ với mọi y .

Bài 24

a) Cho bốn số tự nhiên liên tiếp 0; 1; 2; 3. Cộng thêm vào mỗi số trên cùng một số m . Hãy so sánh tích hai số đầu và cuối với tích hai số giữa.

b) Một số có hai chữ số có chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị là 2. Tìm số đó biết rằng nó lớn hơn 21 nhưng nhỏ hơn 36.

• Tìm hiểu đề bài

a) Việc so sánh hai tích có thể là chúng bằng nhau hoặc tích này lớn hơn hay nhỏ hơn tích kia. Lưu ý là bài ra cho bốn số tự nhiên liên tiếp để có thể rút ra nhận xét.

b) Bài ra cho số phải tìm lớn hơn 21 nhưng nhỏ hơn 36 và chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị là 2 (trong khi ở số 21 thì 2 lớn hơn 1 là 1 còn ở số 36 thì 3 nhỏ hơn 6 là 3).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy viết bốn số liên tiếp đã cho khi đã cộng thêm m vào mỗi số rồi tính các tích như bài ra để so sánh.

b) Gọi chữ số hàng chục là x thì chữ số hàng đơn vị sẽ là $x + 2$.

Theo bài ra ta phải giải một bất phương trình kép dạng $21 < A(x) < 36$ trong đó $A(x) = 11x + 2$.

• Cách giải

a) Sau khi thêm cùng một số m vào bốn số tự nhiên liên tiếp ta được bốn số sau đây:

m ; $m + 1$; $m + 2$; $m + 3$.

Tích hai số đầu và cuối là: $m(m + 3) = m^2 + 3m$

Tích hai số giữa là: $(m + 1)(m + 2) = m^2 + 3m + 2$.

Ta thấy ngay $m^2 + 3m < m^2 + 3m + 2$, vậy tích hai số đầu và cuối nhỏ hơn tích hai số giữa.

b) Gọi chữ số hàng chục là x ($0 < x < 9$), chữ số hàng đơn vị sẽ là $x + 2$. Số phải tìm là $10x + x + 2 = 11x + 2$. Theo bài ra ta có bất phương trình kép:

$$21 < 11x + 2 < 36 \text{ hay } 19 < 11x < 34.$$

Ta thấy rằng x chỉ có thể bằng 2 hoặc 3. Vậy số phải tìm là 24 hoặc 35.

● Khai thác bài toán

a) Sau khi so sánh kết luận của bài toán vẫn đúng trong trường hợp bốn số tự nhiên liên tiếp bất kì, chẳng hạn với bốn số 5; 6; 7; 8 ta có sau khi thêm cùng một số m vào mỗi số: $5 + m$; $6 + m$; $7 + m$; $8 + m$.

Ta có tích $(5 + m)(8 + m) = 40 + 13m + m^2$ và tích $(6 + m)(7 + m) = 42 + 13m + m^2$. Rõ ràng $(5 + m)(8 + m) < (6 + m)(7 + m)$. Sở dĩ như vậy vì $5 \cdot 8 < 6 \cdot 7$ còn tổng số hạng còn lại $13m + m^2$ là giống nhau.

b) Nếu đổi một phần của đề bài: "Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2" thì đáp số của bài toán sẽ là 31 (vì $21 < 31 < 36$).

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 25

Giải phương trình:

$$a) \frac{x}{13} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = 52; \quad 45(225 - x) = 420(x + 240);$$

$$b) y\left(\frac{y}{3} + \frac{1}{5}\right) = 0; \quad (2y + 5)(y + 1)(-y + 1) = 0;$$

$$c) \frac{z - 1}{2} - 1 = \frac{z - 3}{2}; \quad \frac{z(z - 1)}{3} + \frac{z}{3} = \frac{1 + 2z^2}{6}.$$

Bài 26. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

$$a) \frac{1}{x - 3} = \frac{2}{x - 2}; \quad y + \frac{1}{y + 1} = \frac{y^2}{y + 1};$$

$$b) \frac{1}{(z - 2)(z - 3)} + \frac{1}{(z - 3)(z - 4)} = \frac{2}{(z - 2)(z - 4)}.$$

Bài 27

Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$a) |x - 7| + \frac{|x - 7|}{x - 7} = 9; \quad b) |x - 5| = |2x - 5|;$$

Giải phương trình có hệ số chữ:

$$c) \frac{a - x}{b - a} + \frac{3x}{a + b} = \frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2};$$

$$d) \frac{y - 1}{p - 1} + \frac{2p^2(1 - y)}{p^4 - 1} = \frac{2y - 1}{1 - p^4} - \frac{1 - y}{1 + p}.$$

Bài 28. Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

$$a) 3x(x - 16) + 192 + 5x^2 > 9x(x - 2) + 12 - x^2;$$

$$b) \frac{2y - 1}{2} - 2y > -(2y + 1).$$

Bài 29

Một bà mang xoài ra chợ bán, lần thứ nhất bán $\frac{1}{2}$ số xoài và bớt lại 6 quả, lần thứ hai bán $\frac{1}{3}$ số còn lại và bớt đi 6 quả, lần thứ ba bán $\frac{1}{4}$ số còn lại và bớt đi 6 quả. Sau khi bán như vậy thì bà ta còn

lại $\frac{1}{2}$ số xoài mang đi chợ. Hỏi bà ta đã mang đi chợ bao nhiêu quả xoài và mỗi lần bán đã bán bao nhiêu quả xoài ?

Bài 30

(Toán cổ) Yêu nhau cau sáu bồ ba,

Ghét nhau cau sáu bồ ra làm mười.

Số người tính đã tám mươi,

Cau mười lăm quả hỏi người ghét yêu ?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 25. • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Tính biểu thức trong ngoặc được $\frac{1}{4}$. Từ đó tìm được x.

- Hãy viết phương trình dưới dạng $\frac{225 - x}{420} = \frac{x + 240}{45}$ rồi áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

b) Cả hai phương trình đều là phương trình tích.

c) Lần lượt lấy MC là 2 và MC là 6.

• Cách giải

a) $\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. Từ đó $\frac{x}{52} = 52$. Suy ra $x = 52^2 = 2704$.

Ta có: $\frac{225 - x}{420} = \frac{x + 240}{45} = \frac{225 + 240}{420 + 45} = 1$.

Từ đó $225 - x = 420$. Vậy $x = -195$.

b) - Đây là phương trình tích nên ta có : $y = 0$ hoặc $\frac{y}{3} + \frac{1}{5} = 0$.

$0; y = -\frac{3}{5}$. Phương trình có hai nghiệm $y = 0, y = -\frac{3}{5}$.

- Phương trình tích này có ba nghiệm là $y = -2,5; y = -1, y = 1$.

c) Lấy MC: 2, quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$z - 1 - 2 = z - 3$ hay $0z = 0$. Phương trình có vô số nghiệm.

- Lấy MC: 6, quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$2(z - 1)z + 2z = 1 + 2z^2$ hay $2z^2 - 2z + 2z = 1 + 2z^2$;
 $0z = 1$. Phương trình vô nghiệm.

Bài 26 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Hãy tìm TXĐ của từng phương trình. Sau đó quy đồng mẫu rồi khử mẫu để tìm nghiệm.

• Cách giải

a) TXĐ: $x \neq 3, x \neq 2$. Lấy MC: $(x - 3)(x - 2)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$x - 2 = 2(x - 3)$, hay $x - 2 = 2x - 6$; $x = 4 \in \text{TXĐ}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

- TXĐ: $y \neq -1$. Lấy MC: $y + 1$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:
 $y(y + 1) + 1 = y^2$, hay $y^2 + y + 1 = y^2$. Từ đó $y + 1 = 0$;
 $y = -1 \notin \text{TXĐ}$. Vậy phương trình vô nghiệm.

b*) TXĐ: $z \neq 2; 3; 4$. Lấy MC: $(z - 2)(z - 3)(z - 4)$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$(z - 4) + (z - 2) = 2(z - 3)$, hay $2z - 6 = 2z - 6$;

$0z = 0$. Vậy nghiệm của phương trình là mọi giá trị của x khác 2; 3; 4 (vô số nghiệm).

Bài 27 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy xét hai trường hợp $x - 7 > 0$ và $x - 7 < 0$.

b) Lưu ý nếu $|A| = |B|$ thì $A = B$ hoặc $A = -B$.

c) Đổi dấu phân thức $\frac{a-x}{b-a}$ thành $\frac{-(a-x)}{a-b}$ để có MC là $a^2 - b^2$.

d*) Đổi dấu phân thức $\frac{2y-1}{1-p^4}$ thành $\frac{1-2y}{p^4-1}$

● Cách giải

a) Xét hai trường hợp $x - 7 > 0$ và $x - 7 < 0$ để tìm ra giá trị của x và đối chiếu với mỗi trường hợp xem có thích hợp không.

- Nếu $x - 7 > 0$ hay $x > 7$ thì $|x - 7| = x - 7$. Phương trình đã cho trở thành:

$$x - 7 + \frac{x - 7}{x - 7} = 9 \text{ hay } x - 7 + 1 = 9; x - 6 = 9. \text{ Từ đó } x = 15$$

 > 7 thỏa mãn điều kiện.

- Nếu $x - 7 < 0$ hay $x < 7$ thì $|x - 7| = 7 - x$. Phương trình trở thành:

$$7 - x + \frac{-(x - 7)}{x - 7} = 9 \text{ hay } 7 - x - 1 = 9; 6 - x = 9. \text{ Từ đó } x = -3$$

 < 7 thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 15, x_2 = -3$.

b) Phương trình đã cho có thể viết:

$$x - 5 = 2x - 5; x = 0$$

$$\text{hoặc } x - 5 = 5 - 2x; 3x = 10; x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0, x = 3\frac{1}{3}$.

c) Đối $\frac{a - x}{b - a}$ thành $\frac{-(a - x)}{a - b}$ để có $MC = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Điều kiện $a \neq \pm b$.

Phương trình đã cho có thể viết sau khi quy đồng mẫu và khử mẫu:

$$-(a - x)(a + b) + 3x(a - b) = 3a^2 - ab - 4b^2, \text{ hay}$$

$$(x - a)(a + b) + 3ax - 3bx = 3a^2 - ab - 4b^2;$$

$$ax + bx - a^2 - ab + 3ax - 3bx = 3a^2 - ab - 4b^2;$$

$$4ax - 2bx = 3a^2 - 4b^2 + a^2 = 4a^2 - 4b^2;$$

$$2ax - bx = 2(a^2 - b^2); (2a - b)x = 2(a^2 - b^2).$$

Nếu $2a - b \neq 0$ hay $a \neq \frac{b}{2}$ thì $x = \frac{2(a^2 - b^2)}{2a - b}$.

d)* Đổi dấu phân thức $\frac{2y - 1}{1 - p^4}$ thành $\frac{1 - 2y}{p^4 - 1}$ để có $MC = p^4 - 1$
 $= (p^2 + 1)(p + 1)(p - 1)$. Điều kiện $p \neq \pm 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có:

$$(y - 1)(p^2 + 1)(p + 1) + 2p^2(1 - y) = 1 - 2y - (1 - y)(p^2 + 1)(p - 1)$$

hay

$$(y - 1)(p^3 + p^2 + p + 1 - 2p^2) = 1 - 2y + (y - 1)(p^3 - p^2 + p - 1);$$

$$(y - 1)(p^3 - p^2 + p + 1) = 1 - 2y + (y - 1)(p^3 - p^2 + p - 1).$$

Từ đó chuyển $(y - 1)(p^3 - p^2 + p - 1)$ sang vế trái và đặt $(y - 1)$ thành thừa số chung:

$$(y - 1)(p^3 - p^2 + p + 1 - p^3 + p^2 - p + 1) = 1 - 2y; 2(y - 1) = 1 - 2y;$$

$$2y - 2 = 1 - 2y; 4y = 3. \text{ Vậy } y = \frac{3}{4}.$$

Bài 28 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Thực hiện các phép tính ở câu a, rồi khử các số hạng chứa x^2 để tìm nghiệm x

Ở câu b quy đồng mẫu (MC:2) rồi khử mẫu.

• Cách giải

a) $3x^2 - 48x + 192 + 5x^2 > 9x^2 - 18x + 12 - x^2$, hay

$$8x^2 - 48x + 192 > 8x^2 - 18x + 12;$$

$$-48x + 192 > -18x + 12; -30x > -180. \text{ Vậy } x < 6.$$

Biểu diễn nghiệm trên trục số:

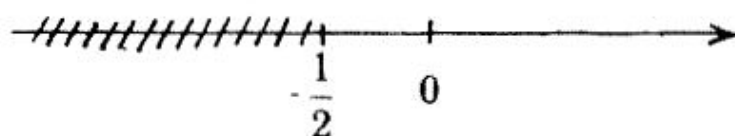


b) MC: 2. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$2y - 1 - 4y > -2(2y + 1), \text{ hay}$$

$$-2y - 1 > -4y - 2; 2y > -1. \text{ Vậy } y > -\frac{1}{2}$$

Biểu diễn nghiệm trên trục số:



Bài 29 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Hãy chọn ẩn x là số xoài mang đi chợ bán rồi tính số xoài đã bán mỗi lần. Từ đó mà lập phương trình của bài toán.

• Cách giải

Gọi số xoài mang đi chợ bán là x (x nguyên dương).

Lần thứ nhất bán $\frac{x}{2} - 6$ (quả), còn lại $\frac{x}{2} + 6$.

Lần thứ hai bán $\frac{1}{3}(\frac{x}{2} + 6) - 6$, tức là $\frac{x}{6} - 4$ (quả), còn lại

$$\frac{x}{2} + 6 - (\frac{x}{6} - 4) = \frac{x}{3} + 10.$$

Lần thứ ba bán $\frac{1}{4}(\frac{x}{3} + 10) - 6$, tức là $\frac{x}{12} - \frac{7}{2}$ (quả), còn lại

$$\frac{x}{3} + 10 - (\frac{x}{12} - \frac{7}{2}) = \frac{x}{4} + \frac{27}{2}.$$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{x}{4} + \frac{27}{2} = \frac{x}{2}, \text{ hay } x + 54 = 2x. \text{ Từ đó } x = 54, \text{ thỏa mãn điều}$$

kiện ở trên.

Vậy bà ta đã mang đi chợ 54 quả xoài. Lần thứ nhất bán $\frac{54}{2} - 6 =$

21 (quả), lần thứ hai bán $\frac{54 - 21}{3} - 6 = 5$ (quả), lần thứ ba bán

$$\frac{54 - 21 - 5}{4} - 6 = 1 \text{ (quả).}$$

Bài 30 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần hiểu đề bài như sau:

Có 15 quả cau sáu và 80 người. Với số người yêu thì mỗi quả cau được bỏ làm 3, với số người ghét thì mỗi quả cau được bỏ làm 10. Hỏi có bao nhiêu quả cau loại bỏ làm 3, loại bỏ làm 10 và có bao nhiêu người yêu, người ghét.

• Cách giải

Chọn ẩn x là số quả cau sáu được bỏ làm 3 (x nguyên dương). Số quả cau sáu được bỏ làm 10 sẽ là $15 - x$ (quả).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$3x + (15 - x) \cdot 10 = 80$$

hay $3x + 150 - 10x = 80$; $-7x = -70$. Từ đó $x = 10$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy số quả cau sáu được bỏ làm 3 là 10 quả, do đó số người yêu là $10 \cdot 3 = 30$ (người yêu) và số quả cau sáu được bỏ làm 10 là 5 quả, do đó số người ghét là $5 \cdot 10 = 50$ (người ghét).

VI. TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

SỐ VÔ TỈ. SỐ THỰC

Bài 1. Giải thích tại sao các mệnh đề sau là sai đối với phương trình $x^2 = m$:

- Nếu m là số hữu tỉ hoặc là số hữu tỉ không âm thì phương trình luôn có nghiệm trong $\mathbb{Q}$;
- Nếu m là số thực thì phương trình luôn có nghiệm trong $\mathbb{R}$.

• Tìm hiểu đề bài

Cần chứng tỏ đối với phương trình $x^2 = m$ thì hai mệnh đề sau

là sai:

- Nếu $m \in \mathbf{Q}$ hoặc $m \in \mathbf{Q}_+$ thì phương trình luôn có nghiệm trong $\mathbf{Q}$

- Nếu $m \in \mathbf{R}$ thì phương trình luôn có nghiệm trong $\mathbf{R}$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Muốn chứng tỏ một mệnh đề là sai chỉ cần chỉ ra một trường hợp sai là đủ.

a) Cho $m = -1 \in \mathbf{Q}$ và $m = 2 \in \mathbf{Q}_+$ rồi chứng tỏ rằng $x^2 = -1$ và $x^2 = 2$ là sai.

b) Cho m là một số âm bất kì rồi chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm trong $\mathbf{R}$ là sai.

● **Cách giải**

a) Cho $m = -1 \in \mathbf{Q}$. Khi đó $x^2 = -1$. Vậy mệnh đề là sai.

Cho $m = 2 \in \mathbf{Q}_+$. Khi đó ta có phương trình $x^2 = 2$, nhưng không có số hữu tỉ nào mà bình phương bằng 2. Vậy mệnh đề là sai.

b) Cho $m = -2$, phương trình $x^2 = -2$ vô nghiệm. Vậy mệnh đề là sai.

● **Khai thác bài toán**

Nếu $m \in \mathbf{R}_+$, tức là m thuộc tập hợp các số thực không âm thì phương trình luôn có nghiệm trong $\mathbf{R}$. Mệnh đề này đúng hay sai?

Rõ ràng nếu $m = 2$ thì phương trình $x^2 = 2$ luôn có nghiệm trong $\mathbf{R}$ là $x = \pm\sqrt{2}$ (mặc dầu không có nghiệm trong $\mathbf{Q}$).

Bài 2

$\frac{16}{49}$ a) Đổi ra số thập phân vô hạn tuần hoàn các phân số $\frac{13}{22}$ và

b) So sánh hai số thực 0,25 và $\frac{4}{15}$; $\frac{19}{30}$ và 0,65.

● **Tìm hiểu đề bài**

Khi một phân số tối giản có mẫu ngoài các thừa số nguyên tố 2 và 5, còn chứa các thừa số nguyên tố khác thì bao giờ cũng đổi ra được số thập phân vô hạn tuần hoàn, chẳng hạn bốn phân số đã

cho $\frac{13}{22}$; $\frac{16}{49}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{19}{30}$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy thực hiện phép chia sẽ thấy trong thương một số chữ số được lặp đi lặp lại. Các chữ số giống nhau được lặp lại vô hạn như thế gọi là chu kì của số thập phân vô hạn tuần hoàn.

● **Cách giải**

a) Chia 13 cho 22 được thương là 0,5909090..., vậy $\frac{13}{22} = 0,5(90)$.

Chia 16 cho 49 được thương là 0,32653063265306..., vậy $\frac{16}{49} = 0,(3265306)$.

b) Vì $\frac{4}{15} = 0,2666... = 0,2(6)$ nên $\frac{4}{15} > 0,25$;

Vì $\frac{19}{30} = 0,6333... = 0,6(3)$ nên $\frac{19}{30} < 0,65$.

● **Khai thác bài toán**

Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực. Tập hợp các số thực được kí hiệu là $\mathbf{R}$. Kí hiệu $\mathbf{R}_+$ chỉ tập hợp các số thực dương và kí hiệu $\mathbf{R}_-$ chỉ tập hợp các số thực âm, tức là $\mathbf{R} = \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_-$.

Ngoài dạng thập phân vô hạn tuần hoàn còn có dạng thập phân vô hạn không tuần hoàn. Số vô tỉ là số có dạng biểu diễn thập phân là vô hạn không tuần hoàn.

Chẳng hạn $\frac{13}{22} = 0,5(90)$ là dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn còn 0,5909009000... là dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Số $\pi = 3,141659265...$ cũng là dạng số thập phân vô hạn không

tuần hoàn. Phép so sánh ($<$, $>$, $=$) hai số thực biểu diễn được dưới dạng số thập phân tương tự như phép so sánh các số hữu tỉ dưới dạng số thập phân, vì thế có thể so sánh được số 0,25 với $\frac{4}{15}$ như ở câu b.

CĂN BẬC HAI

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9p^4 - 6p^2 + 1} - \sqrt{4p^4 - 12p^2 + 9}$ với $p = \sqrt{3}$;

b) $\frac{x+1}{x-1}$ với $x = 1 + \sqrt{2}$;

c) $(m-n) \cdot \sqrt{\frac{1}{(m-n)^2}}$ với $m > n$.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho các biểu thức dưới dạng có thể rút gọn được, sau đó yêu cầu tính giá trị ứng với các giá trị đã cho của các chữ.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Các biểu thức dưới căn đều là hằng đẳng thức đáng nhớ dạng $(A - B)^2$. Khi rút gọn lưu ý đến hằng đẳng thức $\sqrt{M^2} = |M|$.

b) Thay giá trị của x vào biểu thức $\frac{x+1}{x-1}$ và lưu ý cách viết $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ để rút gọn cho nhanh.

c) Điều kiện $m > n$ là để biểu thức đã cho có nghĩa và để $\sqrt{(m-n)^2} = m-n$ (không phải để $|m-n|$ nữa).

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{9p^4 - 6p^2 + 1} - \sqrt{4p^4 - 12p^2 + 9} &= \sqrt{(3p^2 - 1)^2} - \sqrt{(2p^2 - 3)^2} \\ &= |3p^2 - 1| - |2p^2 - 3| \end{aligned}$$

Thay giá trị $p = \sqrt{3}$ ta có giá trị của biểu thức là:

$$|3(\sqrt{3})^2 - 1| \cdot |2(\sqrt{3})^2 - 3| = 8 \cdot 3 = 5.$$

b) Thay $x = 1 + \sqrt{2}$ vào biểu thức đã cho được:

$$\frac{1 + \sqrt{2} + 1}{1 + \sqrt{2} - 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

(viết $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$).

c) Biểu thức $(m - n) \cdot \sqrt{\frac{1}{(m - n)}}$ với $m > n$ có thể viết:

$$(m - n) \cdot \frac{1}{|m - n|} = \frac{m - n}{m - n} = 1.$$

• Khai thác bài toán

Gặp trường hợp $\sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2}$ ta làm như sau:

$\sqrt{(1 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} = |1 - \sqrt{7}| + |3 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 1 + 3 - \sqrt{7} = 2$ (vì $1 < \sqrt{7}$ còn $3 > \sqrt{7}$). Ở câu b nếu ta cho $x = 2 + \sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức sẽ là:

$$\frac{2 + \sqrt{3} + 1}{2 + \sqrt{3} - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Ở câu a, nếu bài ra cho: Tìm điều kiện để biểu thức sau có nghĩa

$\sqrt{-9p^4 + 6p^2 - 1} - \sqrt{-4p^4 + 12p^2 - 9}$, tức là ta đổi dấu tất cả số hạng dưới căn, thì trước hết phải viết như sau:

$$\sqrt{-(9p^4 - 6p^2 + 1)} - \sqrt{-(4p^4 - 12p^2 + 9)} = \sqrt{-(3p^2 - 1)^2} - \sqrt{-(2p^2 - 3)^2}.$$

Biểu thức dưới căn thứ nhất chỉ có nghĩa khi $-(3p^2 - 1)^2 \geq 0$ tức là $(3p^2 - 1)^2 \leq 0$ nhưng $(3p^2 - 1)^2$ không thể âm nên $3p^2 - 1 = 0$

hay $p^2 = \frac{1}{3}$, $p = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$. Tương tự biểu thức dưới căn thứ hai chỉ

có nghĩa khi $-(2p^2 - 3)^2 \geq 0$, tức là $(2p^2 - 3)^2 \leq 0$ nhưng $(2p^2 - 3)^2$

không thể âm nên $2p^2 - 3 = 0$, hay $p^2 = \frac{3}{2}$, $p = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Như vậy khi biểu thức dưới dấu căn có dạng $-M^2$ với $M = f(x)$ chẳng hạn thì đừng vội cho rằng $\sqrt{-M^2}$ không tồn tại.

Bài 4. Rút gọn:

a) $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{p + 4\sqrt{p - 4}} + \sqrt{p - 4\sqrt{p - 4}}$ (với $p > 4$).

• Tìm hiểu đề bài

Các biểu thức dưới dấu căn đều có dạng $\sqrt{A + B} + \sqrt{A - B}$ và đề bài yêu cầu phải rút gọn để được biểu thức đơn giản hơn.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Hãy tách một số hạng hoặc thêm bớt cùng một số hạng thích hợp vào các biểu thức dưới dấu căn để được các hằng đẳng thức đáng nhớ dạng $(M \pm N)^2$.

Muốn vậy ở câu a phải tách $14 = 9 + 5$ để được $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 5 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}$, từ đó có dạng $\sqrt{(M + N)^2}$.

Ở câu b thì thêm và bớt đi 4 ở biểu thức dưới dấu căn để được: $\sqrt{(p - 4) + 4\sqrt{p - 4} + 4} + \sqrt{(p - 4) - 4\sqrt{p - 4} + 4}$, từ đó có dạng $\sqrt{(M + N)^2}$.

• Cách giải

a) Tách 14 thành $9 + 5$ ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{9 + 5 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 5 - 6\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} + \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} \\ &= |3 + \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6. \end{aligned}$$

b) Thêm và bớt 4 vào các biểu thức dưới dấu căn, ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(p - 4) + 4\sqrt{p - 4} + 4} + \sqrt{(p - 4) - 4\sqrt{p - 4} + 4} \\ &= \sqrt{(\sqrt{p - 4} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{p - 4} - 2)^2} \\ &= |\sqrt{p - 4} + 2| + |\sqrt{p - 4} - 2| \\ &= \sqrt{p - 4} + 2 + |\sqrt{p - 4} - 2|. \end{aligned}$$

Nếu $0 \leq \sqrt{p-4} \leq 2$ hay $4 \leq p \leq 8$ thì biểu thức trở thành:

$$\sqrt{p-4} + 2 + 2 \cdot \sqrt{p-4} = 4$$

Nếu $\sqrt{p-4} > 2$ hay $p > 8$ thì ta có:

$$\sqrt{p-4} + 2 + \sqrt{p-4} - 2 = 2\sqrt{p-4}.$$

● Khai thác bài toán

Ta có bài toán tương tự sau đây:

Rút gọn biểu thức $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Biểu thức này tuy phức tạp nhưng việc rút gọn sẽ dễ dàng nếu ta bắt đầu từ phải sang trái, tức là bắt đầu rút gọn biểu thức

$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$ bằng cách tách 29 thành $20 + 9$ như sau:

$$\sqrt{20 - 12\sqrt{5} + 9} = \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = 2\sqrt{5} - 3.$$

Như thế biểu thức đã cho trở thành:

$$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - (2\sqrt{5} - 3)} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6} - 2\sqrt{5}}.$$

Lại rút gọn $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ bằng cách tách 6 thành $5 + 1$:

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1.$$

Cuối cùng biểu thức đã cho trở thành :

$$\sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{1} = 1.$$

KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH, MỘT THUƠNG. NHÂN, CHIA HAI CĂN THỨC BẬC HAI

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a) $(4\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}); \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3})$

b) $(7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}) : \sqrt{35}; \quad (3\sqrt{27} + \sqrt{108} - 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}.$

● Tìm hiểu đề bài

a) Đề bài cho phép nhân hai biểu thức chứa căn bậc hai dạng $(A + B)(A - B)$.

b) Cần làm phép chia một biểu thức chứa căn bậc hai cho một căn thức bậc hai.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Lưu ý ở câu thứ hai biểu thức $A = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ còn $B = \sqrt{3}$.

b) Áp dụng phép chia một tổng cho một số và phép chia hai căn thức bậc hai $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$. Để tính toán cho nhanh lưu ý viết $\sqrt{35} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$.

● **Cách giải**

a) Biểu thức đã cho có dạng $(A - B)(A + B)$ trong đó $A = 4\sqrt{5}$, $B = 3\sqrt{2}$. Ta có:

$$(4\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 5 - 9 \cdot 2 = 80 - 18 = 62.$$

- Biểu thức đã cho có dạng trên trong đó $A = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ và $B = \sqrt{3}$. Ta có:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 - 3 = 4 + 2\sqrt{10}.$$

b) Ta có thể viết:

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{35}} \text{ mà } \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} \text{ và } \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Vậy biểu thức đã cho bằng: $\sqrt{7} + \sqrt{5}$.

- Ta thực hiện phép chia như sau:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{\frac{27}{3}} + \sqrt{\frac{108}{3}} - 4\sqrt{\frac{12}{3}} = 3\sqrt{9} + \sqrt{36} - 4\sqrt{4} \\ & = 3 \cdot 3 + 6 - 4 \cdot 2 = 9 + 6 - 8 = 7. \end{aligned}$$

● **Khai thác bài toán**

- Có khi phép chia lại là hằng đẳng thức dạng $(A + B)^2$ ở số bị chia còn số chia là biểu thức dạng $(A \cdot B)^2$, chẳng hạn:

Thực hiện phép chia

$$(\sqrt{7 + \sqrt{13}} + \sqrt{7 - \sqrt{13}})^2 : (\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}})^2.$$

Cách làm gọn nhất là khai triển các bình phương. Biểu thức bị chia là:

$$\begin{aligned} & 7 + \sqrt{13} + 2\sqrt{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} + 7 - \sqrt{13} \\ &= 14 + 2\sqrt{49 - 13} = 14 + 2\sqrt{36} = 14 + 12 = 26. \end{aligned}$$

Biểu thức chia là:

$$(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3}) = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 16 - 12 = 4.$$

Vậy thương của phép chia là: $26 : 4 = \frac{13}{2} = 6,5.$

- Ngoài ra phép nhân còn có dạng tích của hai đa thức chứa căn thức bậc hai như:

$$\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{10}{3}}\right) \cdot (\sqrt{1,2} + \sqrt{2} - 4\sqrt{0,2}).$$

Khi đó cần áp dụng quy tắc nhân hai đa thức để được:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}\sqrt{3,6} + \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{16}{3}\sqrt{0,6} + \sqrt{2,4} + \sqrt{4} - 4\sqrt{0,4} + \sqrt{\frac{12}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{9 \cdot 2}{5}} + \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{5}} + 2 - 4\sqrt{\frac{2}{5}} + 2 + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= 4\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{3}{5}} + 2 - 4\sqrt{\frac{2}{5}} + 2 + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{16}{15}\sqrt{15} + \frac{2}{5}\sqrt{15} + 2 + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{15} - \frac{4}{3}\sqrt{6} = 4. \end{aligned}$$

Bài 6

Giải phương trình:

a) $\sqrt{81(2 - x)^2} - 3 = 0; \quad \frac{1}{11}(17 - 3\sqrt{x-1}) = \frac{1}{15}(23 - 4\sqrt{x-1});$

b) $\sqrt{2 - y} = \sqrt{4 + y}; \quad \sqrt{2y - 1} = \sqrt{y - 2};$

c) $\sqrt{z^2 - 1} = 1 - z; \quad \sqrt{4 - 2z + z^2} = z - 2.$

● **Tim hiểu đề bài**

Ở câu a, phương trình chỉ có một căn thức và ẩn ở dưới dấu căn;

Ở câu b, phương trình có hai căn thức ở hai vế dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B}$;

Ở câu c, phương trình có một căn thức dạng $\sqrt{A} = C$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hãy tính ngay $\sqrt{81(2-x)^2} = 9\sqrt{(2-x)^2}$. Ở phép tính thứ hai hãy nhân chéo để tìm được giá trị của $\sqrt{x-1}$, từ đó mà tìm được x. Lưu ý điều kiện để các căn thức có nghĩa.

b) Các phương trình đều có dạng $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ mà cách giải có thể là bình phương hai vế để loại dấu căn bậc hai. Nhưng sau khi giải phải loại những giá trị không phù hợp với điều kiện để các căn thức có nghĩa.

c) Các phương trình đều có dạng $\sqrt{A} = C$. Muốn giải trước hết phải đặt điều kiện để $C \geq 0$. Sau đó bình phương hai vế để được phương trình $A = C^2$. Lưu ý loại những giá trị không phù hợp.

● **Cách giải**

a) Ta có: $9\sqrt{(2-x)^2} = 3$ hay $\sqrt{(2-x)^2} = \frac{1}{3}$. Bình phương hai vế được:

$$(2-x)^2 = \frac{1}{9}. \text{ Từ đó } 2-x = \pm \frac{1}{3}.$$

Vậy $x = \frac{5}{3}$ và $x = \frac{7}{3}$. Phương trình có hai nghiệm.

- Nhân chéo ta có (với điều kiện $x-1 > 0$ hay $x > 1$):

$$15(17 - 3\sqrt{x-1}) = 11(23 - 4\sqrt{x-1}), \text{ hay}$$

$$255 - 45\sqrt{x-1} = 253 - 44\sqrt{x-1}. \text{ Vậy } \sqrt{x-1} = 2.$$

Từ đó $x-1 = 4$; $x = 5$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = 5$.

b) Bình phương hai vế với điều kiện $2 - y \geq 0$ tức là $y \leq 2$ và $4 + y \geq 0$, tức là $y \geq -4$ ta có: $2 - y = 4 + y$

Từ đó $2y = -2$; $y = -1$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện ở trên. Vậy phương trình có một nghiệm là $y = -1$

- Với điều kiện $2y - 1 \geq 0$ tức là $y \geq \frac{1}{2}$ và $y - 2 \geq 0$ tức là $y \geq 2$, ta bình phương hai vế được:

$2y - 1 = y - 2$. Từ đó $y = -1$. Giá trị này không thích hợp với điều kiện ở trên. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Điều kiện $1 - z \geq 0$ tức là $z \leq 1$.

Bình phương hai vế được: $z^2 - 1 = 1 - 2z + z^2$, hay $2z = 2$; $z = 1$.

Giá trị $z = 1$ thỏa mãn điều kiện ở trên. Vậy phương trình có một nghiệm là $z = 1$.

- Điều kiện : $z - 2 \geq 0$ tức là $z \geq 2$.

Bình phương hai vế được:

$$4 - 2z + z^2 = z^2 - 4z + 4, \text{ hay } 2z = 0; z = 0.$$

Giá trị $z = 0$ không thỏa mãn điều kiện ở trên. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

● Khai thác bài toán

Câu a có thể giải cách khác như sau:

Bình phương hai vế của $\sqrt{81(2-x)^2} = 3$ được $81(2-x)^2 = 9$, hay $(2-x)^2 = \frac{1}{9}$ mà hai nghiệm là $\frac{5}{3}$ và $\frac{7}{3}$.

Các phương trình đã cho có ẩn nằm trong dấu căn nên gọi là *phương trình vô tỉ*. Khi giải loại phương trình vô tỉ này cần lưu ý đến điều sau đây về phương trình tương đương và phương trình hệ quả:

- Nếu thêm vào hai vế cùng một số hoặc cùng một đa thức (hoặc nhân hai vế với cùng một số khác 0) thì sẽ được một phương

trình tương đương.

- Nếu nhân hai vế với cùng một đa thức hoặc nâng hai vế lên cùng một lũy thừa, thì được một phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chẳng hạn nếu $A^2 = B^2$ (A và B là hai biểu thức của biến x) thì $A = B$ hoặc $A = -B$. Thành thử nghiệm của phương trình $A^2 = B^2$ có thể vừa là nghiệm của phương trình $A = B$, vừa là nghiệm của phương trình $A = -B$.

Ví dụ: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} = 3x - 1$.

Bình phương hai vế được: $x^2 + 3x = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$;
 $8x^2 - 9x + 1 = 0$, hay $(x - 1)(x - \frac{1}{8}) = 0$ mà nghiệm là $x = 1, x = \frac{1}{8}$.

Thay các giá trị này vào phương trình đã cho ta thấy rằng chỉ có giá trị $x = 1$ là nghiệm đúng phương trình. Sở dĩ như vậy vì phương trình $x^2 + 3x = (3x - 1)^2$ là hệ quả của phương trình đã cho đồng thời còn là hệ quả của phương trình $-\sqrt{x^2 + 3x} = 3x - 1$ mà nghiệm là $x = \frac{1}{8}$. Cả hai phương trình này, sau khi bình phương hai vế, đều cho cùng một phương trình $x^2 + 3x = (3x - 1)^2$.

BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN CÁC CĂN THỨC

Bài 7

a) Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn:

$$\sqrt{243(5 - m)^2}; \quad \sqrt{18(m - 1)^5}; \quad \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}}.$$

b) Đưa một thừa số vào trong dấu căn:

$$xy\sqrt{\frac{y}{x}}; \quad \frac{x - y}{x + y} \sqrt{\frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}}; \quad (x + 5) \sqrt{\frac{x}{25 - x^2}}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là hai cách biến đổi đơn giản các căn thức bậc hai. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn (chẳng hạn $\sqrt{567} = \sqrt{81 \cdot 7} = 9\sqrt{7}$) và đưa một thừa số vào trong dấu căn (chẳng hạn $9\sqrt{7} = \sqrt{81 \cdot 7} = \sqrt{567}$) là hai phép tính xuôi và ngược của nhau (đưa ra ngoài và đưa vào trong dấu căn).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Áp dụng công thức tổng quát $\sqrt{A^2 B} = |A| \cdot \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

b) Áp dụng công thức tổng quát $|A| \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (với $B \geq 0$). Ở câu a, lưu ý: $243 = 81 \cdot 3$; $(m - 1)^5 = (m - 1)^4 \cdot (m - 1)$.

Ở câu b, lưu ý đến các điều kiện. Khi đưa một thừa số vào trong dấu căn thì nhớ phải bình phương thừa số đó.

● **Cách giải**

$$a) \sqrt{243(5 - m)^2} = \sqrt{81 \cdot 3} \cdot \sqrt{(5 - m)^2} = 9\sqrt{3} \cdot |5 - m|.$$

$$\sqrt{18(m - 1)^5} = \sqrt{9 \cdot 2} \cdot \sqrt{(m - 1)^5} = 3\sqrt{2} \cdot (m - 1)^2 \cdot \sqrt{m - 1} \\ = 3(m - 1)^2 \cdot \sqrt{2(m - 1)} \text{ với điều kiện } m \geq 1.$$

$$\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}} = \sqrt{\frac{m - 1}{m^2}} = \frac{\sqrt{m - 1}}{m} \text{ với điều kiện } m \geq 1.$$

b) Biểu thức $xy \sqrt{\frac{y}{x}}$ với điều kiện $xy \geq 0$, $x \neq 0$, có thể viết:

$$\sqrt{x^2 y^2 \cdot \frac{y}{x}} = \sqrt{xy^3}.$$

$$\text{Biểu thức } \frac{x - y}{x + y} \sqrt{\frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}} \text{ với điều kiện } x \neq \pm y$$

có thể viết:

$$\sqrt{\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \cdot \frac{x(x + y)}{(x - y)^2}} = \sqrt{\frac{x}{x + y}}.$$

Biểu thức $(x + 5)\sqrt{\frac{x}{25-x^2}}$ với điều kiện $x \neq \pm 5$ có thể viết:

$$\sqrt{\frac{x(x+5)^2}{(5+x)(5-x)}} = \sqrt{\frac{x(x+5)}{5-x}}.$$

● Khai thác bài toán

- Việc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn giúp rút gọn các biểu thức, chẳng hạn:

Biểu thức $4m + \sqrt{(1-m)^4}$ có thể rút gọn như sau:

$$4m + (1-m)^2 = 4m + 1 - 2m + m^2 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

hoặc biểu thức $\sqrt{(m-2)^2} + \frac{\sqrt{(m-2)^2}}{m-2}$ có thể rút gọn thành:

$$|m-2| + \frac{|m-2|}{m-2} \quad (*)$$

Với $m > 2$ thì $|m-2| = m-2$ nên (*) trở thành

$$m-2 + 1 = m-1.$$

Với $m < 2$ thì $|m-2| = 2-m$ nên (*) trở thành

$$2-m-1 = 1-m.$$

- Việc đưa một thừa số vào trong dấu căn ngoài việc giúp so sánh dễ dàng $4\sqrt{3}$ với $\sqrt{47}$ chẳng hạn ($4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48} > \sqrt{47}$) cũng còn giúp cho việc rút gọn các biểu thức, chẳng hạn:

$\frac{\sqrt{m} + m\sqrt{p} - \sqrt{p} - p\sqrt{m}}{mp-1}$ (với $m, p \geq 0$ và $mp \neq 1$). Ta có:

$$m\sqrt{p} = \sqrt{m^2 p} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{mp}; \quad p\sqrt{m} = \sqrt{p^2 m} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{mp};$$

$$mp-1 = (\sqrt{mp})^2 - 1^2.$$

Do đó biểu thức trên có thể viết:

$$\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m} \cdot \sqrt{mp} - \sqrt{p} - \sqrt{p} \cdot \sqrt{mp}}{(\sqrt{mp})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{m}(1 + \sqrt{mp}) - \sqrt{p}(1 + \sqrt{mp})}{(\sqrt{mp} + 1)(\sqrt{mp} - 1)} =$$

$$\frac{(1 + \sqrt{mp})(\sqrt{m} - \sqrt{p})}{(\sqrt{mp} + 1)(\sqrt{mp} - 1)} = \frac{\sqrt{m} - \sqrt{p}}{\sqrt{mp} - 1}.$$

Bài 8. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{17}{288}}; \text{ b) } \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{7})^2}{243}}; \text{ c) } 3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}}; \text{ d) } \sqrt{x - \frac{3}{2x} + \frac{5}{3ax}}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Mỗi biểu thức dưới dấu căn đều có mẫu, đề bài yêu cầu phải khử các mẫu đó để biểu thức dưới dấu căn không còn chứa mẫu nữa.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy áp dụng công thức tổng quát:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \text{ (với } AB \geq 0; B \neq 0).$$

Hãy biến đổi biểu thức đã cho sao cho mẫu là bình phương của một số hoặc một biểu thức rồi khai phương và đưa ra ngoài dấu căn.

Đối với câu c hãy quy đồng mẫu của biểu thức dưới dấu căn rồi biến đổi mẫu thành bình phương của một biểu thức.

● **Cách giải**

$$\text{a) } \sqrt{\frac{17}{288}} = \sqrt{\frac{17}{144 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 2}{12^2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{24} \sqrt{34}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{7})^2}{243}} &= \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{7})^2}{81 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{7})^2 \cdot 3}{9^2 \cdot 3^2}} = \frac{1}{27} \sqrt{3(5 - \sqrt{7})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{27} |5 - \sqrt{7}| = \frac{\sqrt{3}(5 - \sqrt{7})}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x^2y \sqrt{\frac{12}{xy}} &= 3x^2y \cdot \sqrt{\frac{12}{xy} \cdot \frac{xy}{xy}} = \frac{3x^2y}{xy} \sqrt{12xy} = \\ &= 3x\sqrt{12xy} = 6x\sqrt{3xy}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{x - \frac{3}{2x} + \frac{5}{3ax}} &= \sqrt{\frac{6ax^3 - 9ax + 10x}{6ax^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x(6ax^2 - 9a + 10)}{6ax^2} \cdot \frac{6a}{6a}} = \sqrt{\frac{6ax(6ax^2 - 9a + 10)}{36a^2x^2}} \\ &= \frac{1}{6ax} \sqrt{6ax(6ax^2 - 9a + 10)}. \end{aligned}$$

● Khai thác bài toán

Việc khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn cũng là để rút gọn các biểu thức, chẳng hạn với biểu thức

$$\frac{2a^2}{b} \sqrt{\frac{b^2}{a^4} - \frac{b^4}{a^6}}$$

Ta có thể rút gọn như sau:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{b} \sqrt{\frac{a^2b^2 - b^4}{a^6}} &= \frac{2a^2}{b} \sqrt{\frac{b^2}{a^6} (a^2 - b^2)} = \frac{2a^2}{b} \cdot \frac{b}{a^3} \sqrt{a^2 - b^2} = \\ &= \frac{2}{a} \sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Bài 9. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{7}{6\sqrt{7}}; \text{ b) } \frac{4\sqrt{3} + 3}{8\sqrt{3}}; \text{ c) } \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}; \text{ d) } \frac{y + 3}{\sqrt{y^2 - 9}}.$$

● Tìm hiệu đề bài

Các biểu thức đã cho đều có mẫu là căn bậc hai của một đơn thức hoặc một đa thức (hiệu hai bình phương). Đề bài yêu cầu biến

đối sao cho mẫu không còn căn thức nữa, làm như vậy gọi là trục căn thức ở mẫu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Áp dụng công thức tổng quát $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{\sqrt{B} \cdot \sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

Nhân tử và mẫu với $\sqrt{7}$ (câu a), với $\sqrt{3}$ (câu b), với $\sqrt{x^2 - 4}$ (câu c) và với $\sqrt{y^2 - 9}$ (câu d). Do đó ở mẫu không còn căn thức bậc hai nữa.

● **Cách giải**

$$\text{a) } \frac{7}{6\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{6\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{6 \cdot 7} = \frac{\sqrt{7}}{6};$$

$$\text{b) } \frac{4\sqrt{3} + 3}{8\sqrt{3}} = \frac{(4\sqrt{3} + 3)\sqrt{3}}{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12 + 3\sqrt{3}}{24} = \frac{3(4 + \sqrt{3})}{24} = \frac{(4 + \sqrt{3})}{8};$$

$$\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2};$$

$$\text{d) } \frac{y + 3}{\sqrt{y^2 - 9}} = \frac{y + 3}{\sqrt{y^2 - 9}} \cdot \frac{\sqrt{y^2 - 9}}{\sqrt{y^2 - 9}} = \frac{(y + 3)\sqrt{y^2 - 9}}{y^2 - 9} = \frac{\sqrt{y^2 - 9}}{y - 3}.$$

● **Khai thác bài toán**

- Nếu mẫu có dạng $\sqrt{(A \pm B)^2}$ như $\frac{1}{\sqrt{1+2x+x^2}}$ hoặc $\frac{1}{\sqrt{1-2x+x^2}}$

thì cách khử căn thức ở mẫu sẽ như sau:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x)^2}} = \frac{1}{|1+x|} = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{nếu } 1+x > 0 \text{ tức là } x > -1 \\ \frac{1}{-1-x} \text{ hay } \frac{-1}{1+x} & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2}} = \frac{1}{|1-x|} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{nếu } 1-x > 0 \text{ tức là } x < 1 \\ \frac{1}{-1+x} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

- Ở câu c và câu d khi tìm được đáp số như ở trên, không nên tiếp tục biến đổi nữa vì:

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2} = \frac{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$$

ta sẽ gặp cân thức ở mẫu và lại phải trục căn (!).

$$\text{Tương tự } \frac{\sqrt{y^2-9}}{y-3} = \frac{\sqrt{y+3} \cdot \sqrt{y-3}}{\sqrt{y-3} \cdot \sqrt{y-3}} = \frac{\sqrt{y+3}}{\sqrt{y-3}}$$

Bài 10. Trục căn thức ở mẫu:

$$\text{a) } \frac{8}{\sqrt{5}-1}; \text{ b) } \frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}; \text{ c) } \frac{5x}{9+\sqrt{x}}; \text{ d) } \frac{3\sqrt{y}+1}{3\sqrt{y}-1}$$

• Tìm hiểu đề bài

Mẫu của các biểu thức ở đề bài đều là tổng hoặc hiệu của một số hữu tỉ và một căn thức bậc hai.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Hãy áp dụng công thức tổng quát:

$$\frac{A}{B+\sqrt{C}} = \frac{A}{B+\sqrt{C}} \cdot \frac{B-\sqrt{C}}{B-\sqrt{C}} = \frac{A(B-\sqrt{C})}{B^2-C} \quad \text{và}$$

$$\frac{A}{B-\sqrt{C}} = \frac{A(B+\sqrt{C})}{B^2-C} \quad \text{để có mẫu là hiệu hai bình phương.}$$

Các biểu thức $B+\sqrt{C}$ và $B-\sqrt{C}$ gọi là hai biểu thức liên hợp.

Đối với câu a thì biểu thức liên hợp của $\sqrt{5}-1$ là $\sqrt{5}+1$, đối với các câu b, c, d thì biểu thức liên hợp của $4-\sqrt{7}$ là $4+\sqrt{7}$, của $9+\sqrt{x}$ là $9-\sqrt{x}$, của $3\sqrt{y}-1$ là $3\sqrt{y}+1$

• Cách giải

$$a) \frac{8}{\sqrt{5}-1} = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{8(\sqrt{5}+1)}{5-1} = 2(\sqrt{5}+1);$$

$$b) \frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}} = \frac{(4+\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} = \frac{(4+\sqrt{7})^2}{16-7} = \frac{(4+\sqrt{7})^2}{9};$$

$$c) \frac{5x}{9+\sqrt{x}} = \frac{5x(9-\sqrt{x})}{(9+\sqrt{x})(9-\sqrt{x})} = \frac{5x(9-\sqrt{x})}{81-x};$$

$$d) \frac{3\sqrt{y}+1}{3\sqrt{y}-1} = \frac{(3\sqrt{y}+1)^2}{(3\sqrt{y}-1)(3\sqrt{y}+1)} = \frac{(3\sqrt{y}+1)^2}{9y-1}.$$

• Khai thác bài toán

Có khi gặp trường hợp mẫu có dạng $\sqrt{B} \pm \sqrt{C}$, chẳng hạn

$\frac{25}{\sqrt{7}-2\sqrt{6}}$ ta cũng vẫn phải nhân tử và mẫu với mẫu để khử bớt

$$\text{dấu căn: } \frac{25}{\sqrt{7}-2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{\sqrt{7}+2\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}}.$$

Ta trở lại dạng như ở các câu thuộc bài toán trên. Do đó để trục căn thức ở mẫu ta phải nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu là $7+2\sqrt{6}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{25\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}} \cdot \frac{7+2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} &= \frac{25\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{49-(2\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{25(7+2\sqrt{6})\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{49-24} = (7+2\sqrt{6})\sqrt{7}+2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Đến đây ta có thể viết gọn hơn bằng cách đưa thừa số $7+2\sqrt{6}$ vào trong dấu căn như sau:

$$\sqrt{(7+2\sqrt{6})^2(7-2\sqrt{6})} = \sqrt{(49-24)(7+2\sqrt{6})} = 5\sqrt{7+2\sqrt{6}}$$

Bài 11. Trục căn thức ở mẫu :

$$\text{a) } \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{11}}{8\sqrt{3} - 7\sqrt{11}}; \quad \text{b) } \frac{5 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}};$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Ở đây mẫu là tổng hoặc hiệu của hai căn thức bậc hai có dạng $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, khác với các bài 9 và 10.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy áp dụng công thức tổng quát

$$\frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{B} - \sqrt{C}}{\sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} - \sqrt{C})}{B - C}$$

và $\frac{A}{\sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C})}{B - C}$ để biến đổi mẫu thành $B - C$ không còn chứa căn thức nữa.

Các biểu thức liên hợp của $8\sqrt{3} - 7\sqrt{11}$ là $8\sqrt{3} + 7\sqrt{11}$, của $3\sqrt{5} - 4\sqrt{2}$ là $3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$, của $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$ là $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$, của $\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}$ là $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$.

● **Cách giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{11}}{8\sqrt{3} - 7\sqrt{11}} &= \frac{(7\sqrt{3} - 5\sqrt{11})(8\sqrt{3} + 7\sqrt{11})}{(8\sqrt{3} - 7\sqrt{11})(8\sqrt{3} + 7\sqrt{11})} \\ &= \frac{56.3 + 49\sqrt{33} - 40\sqrt{33} - 35.11}{(8\sqrt{3})^2 - (7\sqrt{11})^2} = \frac{168 + 9\sqrt{33} - 385}{192 - 539} \\ &= \frac{-217 + 9\sqrt{33}}{-347} = \frac{217 - 9\sqrt{33}}{347}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{5 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{5} - 4\sqrt{2}} = \frac{(5 - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})}{(3\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})}$$

$$= \frac{15\sqrt{5} + 20\sqrt{2} - 6\sqrt{10} - 16}{(3\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \frac{15\sqrt{5} + 20\sqrt{2} - 6\sqrt{10} - 16}{45 - 32}$$

$$= \frac{15\sqrt{5} + 20\sqrt{2} - 6\sqrt{10} - 16}{13}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})}$$

$$= \frac{a+b - 2\sqrt{(a+b)(a-b)} + a-b}{a+b - (a-b)} = \frac{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}}{2b}$$

$$= \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2})^2}{(\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2})(\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2})}$$

$$= \frac{x^2 - y^2 + 2\sqrt{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} + x^2 + y^2}{x^2 - y^2 - x^2 - y^2} = \frac{2x^2 + 2\sqrt{x^4 - y^4}}{-2y^2}$$

$$= \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - y^4}}{-y^2} = - \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - y^4}}{y^2}$$

● Khai thác bài toán

Ngoài trường hợp mẫu là tổng hoặc hiệu của hai căn thức bậc hai như ở trên còn có trường hợp mẫu là tổng đại số của ba hoặc nhiều căn thức.

Chẳng hạn : trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

(mẫu là tổng đại số của 3 căn thức). Khi đó ta đưa về trường hợp 2 căn thức bằng cách viết mẫu dưới dạng $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{5}$. Biểu thức liên hợp của mẫu sẽ là $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{5}$. Khi đó ta biến đổi như sau:

$$\frac{1}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 5}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{-2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{18} - \sqrt{30}}{-12} = \frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{12}$$

- Có khi mẫu là tổng của 6 căn thức bậc hai như bài toán sau:

Khử căn thức ở mẫu của
$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p}}$$

với điều kiện $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$. Cách giải như sau:

Đặt $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{1}{k}$ ta được $m = ak$, $n = bk$, $p = ck$, $k = \frac{m+n+p}{a+b+c}$. Như thế mẫu đã cho có thể viết:

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{k}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = (1 + \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$. Vậy biểu thức đã cho bây giờ có dạng:

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}$$

Nhân tử và mẫu với $(1 - \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$ ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(1 - k)(a + b - c + 2\sqrt{ab})} = \\ &= \frac{(1 - \sqrt{k})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(1 - k)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p})}{a + b + c - m - n - p} \times \\ & \times \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)} \end{aligned}$$

Bài 12. Phân tích ra thừa số :

a) $\sqrt{39} + \sqrt{52} - \sqrt{65}$; b) $7 - m$ (với $m \geq 0$);

c) $m + 7\sqrt{m} + 6$ (với $m \geq 0$) ; d) $p^2 - 3p\sqrt{m} + 2m$.

● **Tim hiểu đề bài**

Phân tích một biểu thức chứa căn thức bậc hai ra thừa số là biến đổi biểu thức đã cho dưới dạng một tích của hai hay nhiều thừa số bằng các phương pháp cơ bản: đặt thừa số chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm nhiều số hạng, phối hợp nhiều phương pháp.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Viết $\sqrt{39} = \sqrt{13 \cdot 3} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{3}$.

b) Sở dĩ có điều kiện $m \geq 0$ để có thể viết $m = \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = (\sqrt{m})^2$ và biến đổi hiệu $7 - m$ dưới dạng hiệu của hai bình phương.

c) Điều kiện $m \geq 0$ vừa để $\sqrt{m}$ có nghĩa vừa để có thể viết $m = \sqrt{m} \cdot \sqrt{m}$. Lưu ý tách $7\sqrt{m}$ thành $6\sqrt{m} + \sqrt{m}$.

d) Hãy tách $-3p\sqrt{m}$ thành $-2p\sqrt{m} - p\sqrt{m}$ để có thể đặt thành thừa số chung.

● **Cách giải**

a) $\sqrt{39} + \sqrt{52} - \sqrt{65} = \sqrt{13 \cdot 3} + \sqrt{13 \cdot 4} - \sqrt{13 \cdot 5}$
 $= \sqrt{13} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{13} \cdot \sqrt{4} - \sqrt{13} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{13}(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5});$

b) $7 - m = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{m})^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{m})(\sqrt{7} - \sqrt{m});$

c) $m + 7\sqrt{m} + 6 = \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} + 6\sqrt{m} + \sqrt{m} + 6$
 $= \sqrt{m}(\sqrt{m} + 6) + (\sqrt{m} + 6) = (\sqrt{m} + 6)(\sqrt{m} + 1);$

d) $p^2 - 3p\sqrt{m} + 2m = p^2 - 2p\sqrt{m} - p\sqrt{m} + 2m$
 $= p(p - 2\sqrt{m}) - \sqrt{m}(p - 2\sqrt{m}) = (p - 2\sqrt{m})(p - \sqrt{m}).$

● **Khai thác bài toán**

Việc phân tích ra thừa số còn có dạng sau: Chứng minh rằng

hai biểu thức $\frac{\sqrt{313^2 - 312^2}}{75}$ và $\frac{\sqrt{17^2 - 8^2}}{\sqrt{117^2 - 108^2}}$ bằng nhau.

Ở đây các biểu thức dưới dấu căn đều là hiệu của hai bình phương nên dễ dàng phân tích ra thừa số. Thật vậy ta lần lượt có:

$$\frac{\sqrt{313^2 - 312^2}}{75} = \frac{\sqrt{(313 + 312)(313 - 312)}}{75} = \frac{\sqrt{625}}{75} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{17^2 - 8^2}}{\sqrt{117^2 - 108^2}} = \frac{\sqrt{(17 + 8)(17 - 8)}}{\sqrt{(117 + 108)(117 - 108)}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 9}}{\sqrt{225 \cdot 9}} = \frac{5 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

Vậy hai biểu thức đã cho bằng nhau.

Bài 13. Phân tích ra thừa số

a) $\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} + \sqrt{x^3 - y^3}$; b) $\sqrt{m^3} + \sqrt{m^2n} - \sqrt{mn^2} - \sqrt{n^3}$;

c*) $\frac{1 - p\sqrt{p}}{1 - \sqrt{p}} + \sqrt{p}$; d*) $p^{95} + p^{94} + p^{93} + \dots + p^2 + p + 1$.

• Tìm hiểu đề bài

Ở câu a các biểu thức dưới dấu căn là những hằng đẳng thức đáng nhớ; ở câu b là những đơn thức có thể đưa một thừa số ra ngoài dấu căn. Còn ở câu c và d thì việc phân tích phức tạp hơn (câu d thuộc về lũy thừa).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Phân tích biểu thức dưới dấu căn thành thừa số rồi áp dụng công thức $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ để có thể đặt thành thừa số chung.

b) Tách $\sqrt{m^3} = m\sqrt{m}$, $\sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$, $\sqrt{m^2n} = m\sqrt{n}$, $\sqrt{mn^2} = n\sqrt{m}$ rồi nhóm các số hạng để đặt thành thừa số chung

c*) Trước hết hãy quy đồng mẫu sau đó mới tìm cách phân tích tử thành thừa số bằng cách nhóm các số hạng. Cuối cùng dùng hằng đẳng thức để phân tích thừa số ở tử

$$1 - p = (1 + \sqrt{p})(1 - \sqrt{p}) \quad \text{rồi rút gọn.}$$

d*) Hãy phân tích tổng đã cho sao cho xuất hiện thừa số chung $(p^{31} + p^{30} + p^{29} + \dots + p^2 + p + 1)$ như sau:

$$(p^{31} + p^{30} + \dots + p + 1) + p^{32}(p^{31} + p^{30} + \dots + p + 1) + p^{64}(p^{31} + p^{30} + \dots + p + 1)$$

từ đó mà phân tích được biểu thức ra thừa số.

• Cách giải

$$a) \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} + \sqrt{x^3 - y^3} = \sqrt{(x - y)^2} + \sqrt{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}$$

Vậy biểu thức đã cho có thể viết:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x - y} \cdot \sqrt{x - y} + \sqrt{x - y} \cdot \sqrt{x^2 + xy + y^2} \text{ với điều kiện } x \geq y. \\ & = \sqrt{x - y}(\sqrt{x - y} + \sqrt{x^2 + xy + y^2}). \end{aligned}$$

b) Ta lần lượt có: $\sqrt{m^3} = m\sqrt{m}$, $\sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$, $\sqrt{m^2n} = m\sqrt{n}$, $\sqrt{mn^2} = n\sqrt{m}$ với điều kiện $m, n \geq 0$. Biểu thức đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & m\sqrt{m} + m\sqrt{n} - n\sqrt{m} - n\sqrt{n} = (m\sqrt{m} + m\sqrt{n}) - (n\sqrt{m} + n\sqrt{n}) \\ & = m(\sqrt{m} + \sqrt{n}) - n(\sqrt{m} + \sqrt{n}) = (\sqrt{m} + \sqrt{n})(m - n). \end{aligned}$$

Nhưng $m - n = (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n})$ nên biểu thức cuối cùng có thể viết:

$$(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = (\sqrt{m} + \sqrt{n})^2(\sqrt{m} - \sqrt{n}).$$

c) Với điều kiện $p \geq 0$ ta quy đồng mẫu được:

$$\frac{1 - p\sqrt{p} + \sqrt{p} - p}{1 - \sqrt{p}} = \frac{(1 - p) + \sqrt{p}(1 - p)}{1 - \sqrt{p}}.$$

Nhưng $1 - p = (1 + \sqrt{p})(1 - \sqrt{p})$ nên biểu thức có thể viết:

$$\frac{(1 + \sqrt{p})(1 - \sqrt{p})(1 + \sqrt{p})}{1 - \sqrt{p}} = (1 + \sqrt{p})^2 \text{ (với } p \neq 1).$$

d*) Tổng đã cho có thể viết:

$$\begin{aligned} & p^{95} + p^{94} + p^{93} + \dots + p^2 + p + 1 \\ & = p^{64}(p^{31} + p^{30} + \dots + p + 1) + p^{32}(p^{31} + p^{30} + \dots + \\ & \quad + p + 1) + (p^{31} + p^{30} + \dots + p + 1). \end{aligned}$$

Từ đó có thể đặt thừa số chung:

$$(p^{31} + p^{30} + \dots + p + 1)(p^{64} + p^{32} + 1).$$

● **Khai thác bài toán**

Nhờ biết cách phân tích ra thừa số ta có thể tính toán nhanh mà không cần trục căn thức ở mẫu trong trường hợp sau đây:

$$\text{Rút gọn } \left(1 + \frac{7 - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}}\right) \left(1 + \frac{7 + \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}\right).$$

Ta phân tích $7 - \sqrt{7}$ thành thừa số như sau: $\sqrt{7}(\sqrt{7} - 1)$. Tương tự $7 + \sqrt{7} = \sqrt{7}(\sqrt{7} + 1)$. Như vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$\left[1 + \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} - 1)}{1 - \sqrt{7}}\right] \cdot \left[1 + \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} + 1)}{1 + \sqrt{7}}\right] = (1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7}) = 1 - 7 = -6.$$

CÁC PHÉP TÍNH VỀ BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC

Bài 14. Tính các biểu thức sau:

a) $\sqrt{18} + 2\sqrt{45} - 2\sqrt{50} - 3\sqrt{80}; (2\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{3})^2;$

b) $\frac{2}{3}m\sqrt{9m} + 6m\sqrt{\frac{m}{4}} - m^2\sqrt{\frac{1}{m}};$

c) $\left(\frac{3p}{2}\sqrt{\frac{p}{m}} - 0,4\sqrt{\frac{n}{pm}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{pm}{2}}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{3m}{2p}}.$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phép tính ở đây nhằm rút gọn biểu thức nên phải vận dụng các phép biến đổi đơn giản các căn thức bậc hai để tính toán và dùng hằng đẳng thức dạng $(a - b + c)^2$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Lưu ý điều kiện tất cả biểu thức dưới dấu căn phải không âm.

a) Hãy đưa một thừa số ra ngoài dấu căn để chỉ còn lại $\sqrt{2}$ và $\sqrt{5}$.

- Vận dụng hằng đẳng thức:

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc,$$

$$\text{do } (a - b + c)^2 = [(a - b) + c]^2 = (a - b)^2 + 2c(a - b) + c^2.$$

b) Biến đổi các căn thức sao cho chỉ còn $\sqrt{m}$ để dễ rút gọn.

c) Thực hiện phép chia một tổng cho một số và phép chia hai căn thức bậc hai $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{18} + 2\sqrt{45} - 2\sqrt{50} - 3\sqrt{80} &= \sqrt{9 \cdot 2} + 2\sqrt{9 \cdot 5} - 2\sqrt{25 \cdot 2} - 3\sqrt{16 \cdot 5} \\ &= 3\sqrt{2} + 6\sqrt{5} - 10\sqrt{2} - 12\sqrt{5} = -7\sqrt{2} - 6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

- Vận dụng hằng đẳng thức

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \text{ với } a = 2\sqrt{8},$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{6}, c = \sqrt{3} \text{ ta có:}$$

$$(2\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = 32 + \frac{6}{4} + 3 - 2\sqrt{48} + 4\sqrt{24} - \sqrt{18}$$

$$= 35 + \frac{3}{2} - 2\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{9 \cdot 2}$$

$$= 35 + \frac{3}{2} - 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} - 3\sqrt{2} = 36,5 - 3\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6}.$$

$$\text{b) } \frac{2}{3}m\sqrt{9m} + 6m\sqrt{\frac{m}{4}} - m^2\sqrt{\frac{1}{m}} \text{ với điều kiện } m > 0 \text{ có thể viết:}$$

$$\frac{2}{3}m \cdot 3\sqrt{m} + \frac{6m}{2} \cdot \sqrt{m} - m^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{m^2}}$$

$$= 2m\sqrt{m} + 3m\sqrt{m} - m\sqrt{m} = 4m\sqrt{m}.$$

$$\text{c) } \frac{3p}{2}\sqrt{\frac{p}{m}} : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{3m}{2p}} - 0,4\sqrt{\frac{n}{pm}} : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{3m}{2p}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{pm}{2}} : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{3m}{2p}}$$

(điều kiện $n, m, p > 0$)

$$= \frac{45}{8}p\sqrt{\frac{2p^2}{3m^2}} - \frac{3}{2m}\sqrt{\frac{2n}{3}} + \frac{5}{4}\sqrt{\frac{p^2}{3}}$$

$$= \frac{45}{8}p \cdot \frac{p}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2m}\sqrt{6n} + \frac{5p}{12}\sqrt{3}$$

$$= \frac{15p^2}{8m}\sqrt{6} - \frac{1}{2m}\sqrt{6n} + \frac{5p}{12}\sqrt{3}.$$

● Khai thác bài toán

Có thể xét thêm bài toán sau đây mà nếu biết cách giải nhanh thì sẽ cho kết quả bất ngờ:

"Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1 + 2p}{1 + \sqrt{1 + 2p}} + \frac{1 - 2p}{1 - \sqrt{1 - 2p}}$ với $p = \frac{\sqrt{3}}{4}$."

Trước hết ta tính $1 \pm 2p$, ta có:

$$1 - 2p = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)^2.$$

Tương tự $1 + 2p = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 1)^2$. Như thế $\sqrt{1 - 2p} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$,

$$\sqrt{1 + 2p} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1).$$

Thay vào biểu thức của P được:

$$P = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4(1 + \frac{\sqrt{3} + 1}{2})} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4(1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2})} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2(3 + \sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2(3 - \sqrt{3})}.$$

Với nhận xét $\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2(3 + \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}$.

Tương tự biểu thức thứ hai có thể rút gọn thành $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$.

Vậy tổng của hai biểu thức này trở thành $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = 1$. Do đó $P = 1$.

Bài 15. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{m^2 - 1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 - m}}{1 - m + \sqrt{1 - m}} + \frac{1 - \sqrt{1 - m}}{1 - m - \sqrt{1 - m}} \right) + \frac{\sqrt{m^2 - 9}}{\sqrt{m - 3}} = \sqrt{m + 3};$

b) $\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} \right) : \frac{4x\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2} = 1;$

$$c) \frac{15\sqrt{z} - 11}{z + 2\sqrt{z} - 3} + \frac{3\sqrt{z} - 2}{1 - \sqrt{z}} - \frac{2\sqrt{z} + 3}{\sqrt{z} + 3} = \frac{2 - 5\sqrt{z}}{\sqrt{z} + 3}$$

● **Tìm hiệu đề bài**

Các bài toán chứng minh đẳng thức là loại bài toán đã cho sẵn đáp số của các phép biến đổi ở vế trái là biểu thức ở vế phải. Lưu ý là các phân thức đã cho có tử và mẫu chỉ khác nhau về dấu, chẳng hạn:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - m}}{1 - m + \sqrt{1 - m}} \text{ và } \frac{1 - \sqrt{1 - m}}{1 - m - \sqrt{1 - m}}, \text{ hoặc}$$

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} \text{ và } \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Khi làm toán cần đặt điều kiện để căn thức có nghĩa, tức là biểu thức dưới dấu căn phải không âm.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Lưu ý đặt điều kiện để biểu thức dưới dấu căn luôn không âm và để biểu thức đã cho có nghĩa.

a) Hãy bắt đầu biến đổi biểu thức trong ngoặc để thấy rằng biểu thức này bằng 0 từ đó mà tính được giá trị vế trái đúng bằng vế phải.

b) Trước hết tìm mẫu chung của phân trong ngoặc được MC: y^2 rồi tính giá trị biểu thức trong ngoặc. Cuối cùng thực hiện phép chia để được kết quả.

c) Lấy mẫu chung là: $z + 2\sqrt{z} - 3 = (\sqrt{z} - 1)(\sqrt{z} + 3)$. Từ đó mà tính được vế trái bằng $\frac{-5z + 7\sqrt{z} - 2}{MC}$, rồi phân tích tử ra thừa số để được kết quả cuối cùng.

● **Cách giải**

a) Điều kiện: $1 - m > 0$, $1 - m - \sqrt{1 - m} \neq 0$, $m^2 - 9 \geq 0$ hay

$m < 1, m \neq 0, |m| \geq 3$. Kết hợp được: $m < -3$.

Biến đổi biểu thức trong ngoặc:

$$\frac{1 + \sqrt{1-m}}{\sqrt{1-m}(\sqrt{1-m}+1)} + \frac{1 - \sqrt{1-m}}{\sqrt{1-m}(\sqrt{1-m}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-m}} = 0.$$

Vậy biểu thức đã cho có vế trái bằng:

$$\frac{m^2-1}{2} \cdot 0 + \sqrt{\frac{m^2-9}{m-3}} = 0 + \sqrt{m+3} = \sqrt{m+3}.$$

Vế trái đúng bằng vế phải và đẳng thức được chứng minh.

b) Lấy mẫu chung của biểu thức trong ngoặc là:

$(x + \sqrt{x^2 - y^2})(x - \sqrt{x^2 - y^2}) = x^2 - (x^2 - y^2) = y^2$, với điều kiện $x^2 \neq y^2, x, y \neq 0$. Ta có:

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2 - (x - \sqrt{x^2 - y^2})^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{4x\sqrt{x^2 - y^2}} =$$

$$= \left(\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - y^2} + x^2 - y^2}{y^2} - \frac{x^2 - 2x\sqrt{x^2 - y^2} + x^2 - y^2}{y^2} \right) \cdot$$

$$\frac{y^2}{4x\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{4x\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2} \cdot \frac{y^2}{4x\sqrt{x^2 - y^2}} = 1.$$

Vế trái đúng bằng vế phải và đẳng thức được chứng minh.

c) Mẫu chung là: $z + 2\sqrt{z} - 3 = (\sqrt{z} - 1)(\sqrt{z} + 3)$ với điều kiện $z \geq 0, z \neq 1$. Ta có vế trái bằng:

$$\frac{15\sqrt{z} - 11 \cdot (3\sqrt{z} - 2)(\sqrt{z} + 3) - (2\sqrt{z} + 3)(\sqrt{z} - 1)}{(\sqrt{z} - 1)(\sqrt{z} + 3)}$$

$$= \frac{15\sqrt{z} - 11 \cdot 3z - 9\sqrt{z} + 2\sqrt{z} + 6 - 2z + 2\sqrt{z} - 3\sqrt{z} + 3}{(\sqrt{z} - 1)(\sqrt{z} + 3)}$$

$$= \frac{-5z + 7\sqrt{z} - 2}{(\sqrt{z} - 1)(\sqrt{z} + 3)} = \frac{(2 - 5\sqrt{z})(\sqrt{z} - 1)}{(\sqrt{z} - 1)(\sqrt{z} + 3)} = \frac{2 - 5\sqrt{z}}{\sqrt{z} + 3},$$

đúng bằng vế phải và đẳng thức được chứng minh.

• Khai thác bài toán

Câu b cho vế trái bằng 1 nên biểu thức ở vế trái được gọi là không phụ thuộc vào giá trị của các biến x và y. Nói cách khác câu b có thể ra như sau:

Chứng tỏ rằng biểu thức ở vế trái không phụ thuộc vào x và y. Ta có đề bài tương tự như sau:

"Chứng tỏ rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến a:

$$\left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{a} + 1}{\sqrt{3}} \right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{a} - 1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right] \cdot \frac{2(a^2 + a + 1)}{15(a + 1)}."$$

Muốn vậy ta phải chứng tỏ rằng sau khi biến đổi giá trị biểu thức sẽ được một số hữu tỉ (không còn chứa biến a).

Ta hãy tính giá trị biểu thức trong dấu []:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{3 + 4a + 4\sqrt{a} + 1} + \frac{3}{3 + 4a - 4\sqrt{a} + 1} \\ &= \frac{3}{4(a + \sqrt{a} + 1)} + \frac{3}{4(a - \sqrt{a} + 1)}. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho có thể viết:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{a + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a - \sqrt{a} + 1} \right) \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{a - \sqrt{a} + 1 + a + \sqrt{a} + 1}{(a + \sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{2(a + 1)}{(a + 1)^2 - (\sqrt{a})^2} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + 2a + 1 - a} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

không phụ thuộc vào biến a.

Bài 16. Rút gọn các biểu thức:

$$a) M = \left(1 - \frac{2\sqrt{m}}{m+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{m}+1} - \frac{2\sqrt{m}}{m\sqrt{m} + \sqrt{m} + m+1}\right);$$

$$b) N = \left(\frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{2\sqrt{n}-2}{n\sqrt{n}-\sqrt{n}+n-1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{2}{n-1}\right).$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các bài toán rút gọn này là sự phối hợp giải các phép tính về căn thức có tính chất tổng hợp, mỗi bài là một phép chia giữa hai biểu thức nằm trong dấu ngoặc, mỗi biểu thức đều phải rút gọn để kết quả cuối cùng được đơn giản.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Sau khi viết điều kiện để M có nghĩa, hãy phân tích mẫu $m\sqrt{m} + \sqrt{m} + m + 1$ thành $\sqrt{m} + 1 + m(\sqrt{m} + 1) = (\sqrt{m} + 1)(1 + m)$ để tìm được mẫu chung của biểu thức chia chính là $(\sqrt{m} + 1)(1 + m)$.

b) Tương tự mẫu $n\sqrt{n} - \sqrt{n} + n - 1$ có thể phân tích thành $n - 1 + \sqrt{n}(n - 1) = (n - 1)(1 + \sqrt{n})$ và mẫu $n - 1 = (\sqrt{n} + 1)(\sqrt{n} - 1)$, từ đó mà tìm được mẫu chung của biểu thức bị chia và biểu thức chia.

● **Cách giải**

a) Điều kiện để M có nghĩa: $m \geq 0$; Ta có biểu thức bị chia:

$$1 - \frac{2\sqrt{m}}{m+1} = \frac{m+1-2\sqrt{m}}{m+1}.$$

Biểu thức chia:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{m}+1} - \frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1+m(\sqrt{m}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}+1} - \frac{2\sqrt{m}}{(\sqrt{m}+1)(1+m)} = \frac{1+m-2\sqrt{m}}{(\sqrt{m}+1)(1+m)} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$M = \frac{m+1-2\sqrt{m}}{m+1} \cdot \frac{(\sqrt{m}+1)(1+m)}{m+1-2\sqrt{m}} = \sqrt{m} + 1.$$

b) Điều kiện để N có nghĩa: $n \geq 0$; $n \neq 1$.

Biểu thức bị chia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{2\sqrt{n}-2}{n-1+\sqrt{n}(n-1)} &= \frac{1}{\sqrt{n}+1} - \frac{2\sqrt{n}-2}{(\sqrt{n}+1)(n-1)} \\ &= \frac{n-1-2\sqrt{n}+2}{(\sqrt{n}+1)(n-1)} = \frac{(\sqrt{n}-1)^2}{(\sqrt{n}+1)(n-1)}. \end{aligned}$$

Biểu thức chia:

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{2}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)} = \frac{\sqrt{n}+1-2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{\sqrt{n}-1}{n-1}.$$

Vậy biểu thức đã cho trở thành:

$$\frac{(\sqrt{n}-1)^2}{(\sqrt{n}+1)(n-1)} \cdot \frac{n-1}{\sqrt{n}-1} = \frac{(\sqrt{n}-1)^2}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)} = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}.$$

● Khai thác bài toán

a) Có thể thêm câu hỏi sau đây:

Tính giá trị của M nếu $m = 2000 - 2\sqrt{1999}$.

Khi đó thay m bằng giá trị của nó vào biểu thức đã rút gọn

$M = \sqrt{m} + 1$ ta được:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{2000 - 2\sqrt{1999}} + 1 = \sqrt{1999 - 2\sqrt{1999} + 1} + 1 \\ &= \sqrt{(\sqrt{1999} - 1)^2} + 1 = \sqrt{1999} - 1 + 1 = \sqrt{1999}. \end{aligned}$$

b) Còn có thể thêm câu hỏi:

Tìm giá trị của n để N đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Cách giải như sau:

Viết biểu thức đã rút gọn của $N = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

dưới dạng một số nguyên trừ một phân thức, tức là tách phần nguyên của biểu thức N:

$$N = \frac{\sqrt{n} + 1 - 1 - 1}{\sqrt{n} + 1} = \frac{\sqrt{n} + 1 - 2}{\sqrt{n} + 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{n} + 1}$$

N đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{n} + 1$ nhỏ nhất. Do $n \geq 0$ nên $\sqrt{n} \geq 0$, suy ra $\sqrt{n} + 1 \geq 1$, do đó giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{n} + 1 = 1$ khi $n = 0$.

Vậy khi $n = 0$ thì N có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Bài 17. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{3\sqrt{p}}{p + \sqrt{pm} + m} - \frac{3p}{p\sqrt{p} - m\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{p} - \sqrt{m}} \right) : \\ &: \frac{(p - 1)(\sqrt{p} - \sqrt{m})}{2p + 2\sqrt{pm} + 2m}; \end{aligned}$$

$$\text{b) } Q = \left(\frac{2\sqrt{q} + q}{q\sqrt{q} - 1} - \frac{1}{\sqrt{q} - 1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{q} + 2}{q + \sqrt{q} + 1} \right).$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Rút gọn P và Q là thực hiện phép chia hai biểu thức trong dấu ngoặc, mỗi biểu thức gồm các phép tính về căn thức bậc hai. Riêng câu a biểu thức chia là một phân thức.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Viết điều kiện để P có nghĩa. Trong biểu thức bị chia hãy phân tích mẫu $p\sqrt{p} - m\sqrt{m} = (\sqrt{p})^3 - (\sqrt{m})^3 = (\sqrt{p} - \sqrt{m})(p + \sqrt{pm} + m)$ theo hằng đẳng thức $A^3 - B^3$ để tìm được mẫu chung.

b) Viết điều kiện để Q có nghĩa. Trong biểu thức bị chia hãy phân tích mẫu $q\sqrt{q} - 1$ có dạng $a^3 - 1$ với $a = \sqrt{q}$ như sau:

$$q\sqrt{q} - 1 = (\sqrt{q} - 1)(q + \sqrt{q} + 1)$$

Từ đó mà tính được biểu thức bị chia.

● Cách giải

a) Điều kiện để P có nghĩa: $p, m \geq 0$; $p \neq m$; $p \neq 1$.

Biểu thức bị chia:

Do mẫu $p\sqrt{p} - m\sqrt{m} = (\sqrt{p} - \sqrt{m})(p + \sqrt{pm} + m)$ nên lấy MC là mẫu này ta có:

$$\frac{3\sqrt{p}(\sqrt{p} - \sqrt{m}) - 3p + p + \sqrt{pm} + m}{(\sqrt{p} - \sqrt{m})(p + \sqrt{pm} + m)}$$

$$= \frac{3p - 3\sqrt{pm} - 3p + p + \sqrt{pm} + m}{MC} = \frac{p - 2\sqrt{pm} + m}{MC}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{p - 2\sqrt{pm} + m}{(\sqrt{p} - \sqrt{m})(p + \sqrt{pm} + m)} \cdot \frac{2(p + \sqrt{pm} + m)}{(p - 1)(\sqrt{p} - \sqrt{m})}$$

$$= \frac{(\sqrt{p} - \sqrt{m})^2}{\sqrt{p} - \sqrt{m}} \cdot \frac{2}{(p - 1)(\sqrt{p} - \sqrt{m})} = \frac{2}{p - 1}$$

b) Điều kiện để Q có nghĩa: $q \geq 0$; $q \neq 1$.

Do mẫu $q\sqrt{q} - 1$ có thể phân tích thành $(\sqrt{q} - 1)(q + \sqrt{q} + 1)$ nên biểu thức bị chia có thể viết:

$$\frac{2\sqrt{q} + q - (q + \sqrt{q} + 1)}{q\sqrt{q} - 1} = \frac{\sqrt{q} - 1}{(\sqrt{q} - 1)(q + \sqrt{q} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{q + \sqrt{q} + 1}$$

Biểu thức chia:

$$\frac{q + \sqrt{q} + 1 - (\sqrt{q} + 2)}{q + \sqrt{q} + 1} = \frac{q - 1}{q + \sqrt{q} + 1}$$

$$\text{Vậy } Q = \frac{1}{q + \sqrt{q} + 1} \cdot \frac{q + \sqrt{q} + 1}{q - 1} = \frac{1}{q - 1}$$

● Khai thác bài toán

a) Có thể hỏi thêm như sau:

Tìm những giá trị nguyên của p để P có giá trị nguyên.

Do P rút gọn có giá trị $\frac{2}{p-1}$ nên muốn P có giá trị nguyên thì $p-1$ phải là ước của 2, tức là $p-1$ phải bằng ± 1 hoặc ± 2 . Như thế:
 $p-1 = 1$ thì $p = 2$; $p-1 = -1$ thì $p = 0$;
 $p-1 = 2$ thì $p = 3$; $p-1 = -2$ thì $p = -1$.

Nhưng điều kiện để P có nghĩa phải là $p \geq 0$ nên chỉ có các giá trị $p = 0$, $p = 2$ và $p = 3$ là thích hợp (loại $p = -1$).

Vậy với $p = 0$, $p = 2$ hoặc $p = 3$ thì P có giá trị nguyên.

b) Có thể thêm câu hỏi sau:

Tính $\sqrt{Q}$ khi $q = 5 + 2\sqrt{3}$.

Do Q rút gọn có giá trị $\frac{1}{q-1}$ nên ta thay giá trị của q và được:

$$Q = \frac{1}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)^2}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{Q} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Bài 18. Sau khi rút gọn biểu thức:

$$M = \left(\frac{2m+1}{\sqrt{m^3}-1} - \frac{\sqrt{m}}{m+\sqrt{m}+1} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{m^3}}{1+\sqrt{m}} - \sqrt{m} \right)$$

hãy xét dấu của biểu thức $N = \sqrt{1-m} \cdot M$

● **Tìm hiểu đề bài**

Biểu thức M là tích của hai biểu thức trong đó có $\sqrt{m}$ và $\sqrt{m^3}$ và đề bài yêu cầu xét dấu của tích $N = \sqrt{1-m} \cdot M$, M là biểu thức đã được rút gọn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Sau khi tìm điều kiện để M có nghĩa hãy lưu ý $\sqrt{m^3}-1$ có dạng $(\sqrt{m})^3-1^3$ và $1+\sqrt{m^3}$ có dạng $1^3+(\sqrt{m})^3$ để áp dụng được hằng

dạng thức $A^3 \pm B^3$. Từ đó mà tìm được mẫu chung ở biểu thức thứ nhất và rút gọn được ở biểu thức thứ hai.

Khi xét dấu của tích $\sqrt{1-m}$. M hãy lưu ý đến điều kiện để $\sqrt{1-m}$ có nghĩa kết hợp với điều kiện để M có nghĩa đã tìm ở trên.

• Cách giải

Điều kiện để M có nghĩa: $m \geq 0$; $m \neq 1$.

Thừa số thứ nhất:

$$\begin{aligned} \frac{2m+1}{(\sqrt{m})^3 - 1^3} - \frac{\sqrt{m}}{m + \sqrt{m} + 1} &= \frac{2m+1 - \sqrt{m}(\sqrt{m}-1)}{(\sqrt{m}-1)(m + \sqrt{m} + 1)} \\ &= \frac{2m+1 - m + \sqrt{m}}{(\sqrt{m}-1)(m + \sqrt{m} + 1)} = \frac{m + \sqrt{m} + 1}{(\sqrt{m}-1)(m + \sqrt{m} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{m}-1} \end{aligned}$$

Thừa số thứ hai:

$$\begin{aligned} \frac{1^3 + (\sqrt{m})^3}{1 + \sqrt{m}} - \sqrt{m} &= \frac{(1 + \sqrt{m})(m - \sqrt{m} + 1)}{1 + \sqrt{m}} - \sqrt{m} \\ &= m - \sqrt{m} + 1 - \sqrt{m} = m - 2\sqrt{m} + 1 = (\sqrt{m} - 1)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{\sqrt{m}-1} \cdot (\sqrt{m}-1)^2 = \sqrt{m}-1.$$

Ta có tích $N = \sqrt{1-m}(\sqrt{m}-1)$. Để $\sqrt{1-m}$ có nghĩa thì $m \leq 1$, kết hợp với điều kiện để M có nghĩa là $0 \leq m \neq 1$ ta được điều kiện $0 \leq m < 1$.

Ta nhận thấy rằng $\sqrt{1-m} > 0$ và $\sqrt{m}-1 < 0$ (vì $\sqrt{m} < 1$), do đó tích $N = \sqrt{1-m}(\sqrt{m}-1) < 0$.

• Khai thác bài toán

- Ta có thể xét thêm câu hỏi sau:

Chứng minh rằng M luôn âm với mọi $m < 1$ và tính giá trị của M khi $m = 3 + 2\sqrt{2}$.

Ta thấy rằng $M = \sqrt{m} - 1$ nên nếu $m < 1$ thì $\sqrt{m} - 1 < 0$.

Khi $m = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $M = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - 1 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$.

- Nếu cho biểu thức $P = \frac{2(p + \sqrt{p} + 1)}{\sqrt{p}}$ và phải tìm giá trị của p để $P = 6$ thì ta có thể giải như sau:

$$\frac{2(p + \sqrt{p} + 1)}{\sqrt{p}} = 6 \text{ (với điều kiện } p > 0), \text{ hay } 2p + 2\sqrt{p} + 2 = 6\sqrt{p};$$

$$2p + 2\sqrt{p} + 2 - 6\sqrt{p} = 0; 2p - 4\sqrt{p} + 2 = 0; p - 2\sqrt{p} + 1 = 0.$$

Vế trái là hằng đẳng thức $(\sqrt{p} - 1)^2$, nên ta phải tìm p để cho $(\sqrt{p} - 1)^2 = 0$ tức là $\sqrt{p} = 1$. Từ đó $p = 1$ thỏa mãn điều kiện $p > 0$.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 19. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$ và $\sqrt{(4 - \sqrt{11})^2} - \sqrt{(3\sqrt{11} - 11)^2}$;

b) $\frac{p + 1}{p - 4}$ với $p = 4 + \sqrt{5}$ và $\frac{1}{m - 1} - \frac{1}{m + 1}$ với $m = \sqrt{3}$.

Bài 20. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}} + \sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}}$;

b) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18}} = \sqrt{128}$.

c) $\frac{4y - \sqrt{9y^2 - 6y + 1}}{49y^2 - 1}$ với $y < \frac{1}{3}$.

Bài 21. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{432} - \sqrt{363} + \sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{108} - \sqrt{147}$;

$$b) 6\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 4\sqrt{32} + 3\sqrt{128} - 2\sqrt{1250};$$

$$c) (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) (\sqrt{2} + \sqrt{1,6} + 3\sqrt{0,4}).$$

Bài 22. Phân tích ra thừa số:

$$a) \sqrt{mu} + \sqrt{pu} - \sqrt{mv} - \sqrt{pv}; \quad b) m^2 - \sqrt{m};$$

$$c) xy + y\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1; \quad d) \sqrt{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{x^3 - y^3}.$$

Bài 23. Trục căn thức ở mẫu:

$$a) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{5}};$$

$$b) \frac{4}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}; \frac{12}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}.$$

Bài 24. Cho biểu thức:

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{a} - 4a}{1 - 4a}\right) : \left(1 - \frac{1 + 2a}{1 - 4a} - \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}\right).$$

$$a) \text{ Chứng minh rằng } A \text{ có giá trị } \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

$$b) \text{ Tìm } a \text{ để biểu thức } A < A^2.$$

$$c) \text{ Tìm } a \text{ để } |A| \leq \frac{1}{4}.$$

Bài 25. Cho biểu thức :

$$B = \left(\frac{1 - b\sqrt{b}}{\sqrt{b} - b} + 1\right) \left(\frac{1 + b\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}} - \sqrt{b}\right) : \frac{(1 - b)^3}{1 + \sqrt{b}}.$$

$$a) \text{ Rút gọn } B.$$

$$b) \text{ Với giá trị nào của } b \text{ thì } B = -\frac{1}{2}.$$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 19 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

$$a) \text{ Lưu ý } \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0. \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

b) Thay giá trị của p vào biểu thức rồi rút gọn, lưu ý viết $5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$.

Thay giá trị của m vào biểu thức rồi rút gọn.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{3}| \\ & = 2 - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} = -1; \\ & \sqrt{(4 - \sqrt{11})^2} - \sqrt{(3\sqrt{11} - 11)^2} = |4 - \sqrt{11}| - |3\sqrt{11} - 11| \\ & = 4 - \sqrt{11} - (11 - 3\sqrt{11}) \\ & = 4 - \sqrt{11} - 11 + 3\sqrt{11} = 2\sqrt{11} - 7. \end{aligned}$$

b) - Thay $p = 4 + \sqrt{5}$ ta có:

$$\frac{4 + \sqrt{5} + 1}{4 + \sqrt{5} - 4} = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1;$$

- Thay $m = \sqrt{3}$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Bài 20 ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa. Thêm và bớt 9 vào các biểu thức dưới dấu căn để được hằng đẳng thức dạng $(A \pm B)^2$.

b) Biến đổi từ dưới lên, tức là bắt đầu từ $\sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$, rồi $\sqrt{18} - \sqrt{128} = \sqrt{16} - 8\sqrt{2} + 2 = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = 4 - \sqrt{2}$, v.v...

c) Viết biểu thức dưới dấu căn $9y^2 - 6y + 1 = (3y - 1)^2$ và lưu ý điều kiện $y < \frac{1}{3}$ để có $|3y - 1| = 1 - 3y$.

● Cách giải

a) Ta có: $x + 6\sqrt{x - 9} + 9 - 9 = (x - 9) + 6\sqrt{x - 9} + 9 = (\sqrt{x - 9} + 3)^2$ và

$x - 6\sqrt{x-9} + 9 - 9 = (x-9) - 6\sqrt{x-9} + 9 = (\sqrt{x-9} - 3)^2$ với điều kiện $x \geq 9$.

Vậy biểu thức đã cho có thể viết:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sqrt{x-9} + 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-9} - 3)^2} \\ &= |\sqrt{x-9} + 3| + |\sqrt{x-9} - 3| \\ &= \sqrt{x-9} + 3 + |\sqrt{x-9} - 3|. \end{aligned}$$

Nếu $0 \leq \sqrt{x-9} \leq 3$ hay $9 \leq x \leq 18$ thì biểu thức có giá trị:

$$\sqrt{x-9} + 3 + 3 - \sqrt{x-9} = 6$$

Nếu $\sqrt{x-9} > 3$ hay $x > 18$ thì biểu thức có giá trị:

$$\sqrt{x-9} + 3 + \sqrt{x-9} - 3 = 2\sqrt{x-9}.$$

b*) Ta bắt đầu từ phải sang trái, tức là bắt đầu rút gọn $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$;

$$\sqrt{18 - \sqrt{128}} = \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = 4 - \sqrt{2}.$$

Biểu thức đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & \sqrt{6 - 2\sqrt{2} + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{2}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{4} + \sqrt{12}} \\ &= \sqrt{6 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1} \\ &= \sqrt{6 - 2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}} = \sqrt{6 - 2(\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{4y - \sqrt{9y^2 - 6y + 1}}{49y^2 - 1} &= \frac{4y - \sqrt{(3y-1)^2}}{(7y+1)(7y-1)} = \frac{4y - |3y-1|}{(7y+1)(7y-1)} \\ &= \frac{4y - (1-3y)}{(7y+1)(7y-1)} = \frac{7y-1}{(7y+1)(7y-1)} = \frac{1}{7y+1} \quad \text{với điều kiện} \end{aligned}$$

$$y < \frac{1}{3} \text{ và } y \neq \pm \frac{1}{7}.$$

Bài 21 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Áp dụng cách đưa một thừa số ra ngoài dấu căn để biến đổi các căn thức bậc hai thành những căn thức đồng dạng chỉ chứa $\sqrt{3}$ (câu a), $\sqrt{2}$ (câu b).

Đối với câu c hãy rút gọn rồi thực hiện phép nhân hai đa thức và áp dụng công thức $\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{AB}$, sau đó đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

● Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{432} - \sqrt{363} + \sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{108} - \sqrt{147} \\ &= \sqrt{144.3} - \sqrt{121.3} + \sqrt{16.3} - \sqrt{25.3} + \sqrt{36.3} - \sqrt{49.3} \\ &= 12\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 22\sqrt{3} - 23\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 6\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + 4\sqrt{32} + 3\sqrt{128} - 2\sqrt{1250} \\ &= 6\sqrt{25.2} - 5\sqrt{4.2} + 4\sqrt{16.2} + 3\sqrt{64.2} - 2\sqrt{625.2} \\ &= 30\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 16\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 50\sqrt{2} \\ &= 70\sqrt{2} - 60\sqrt{2} = 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{1,6} + 3\sqrt{0,4}) \\ &= (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} + \sqrt{16.0,1} + 3\sqrt{4.0,1}) \\ &= (\sqrt{10} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 4\sqrt{0,1} + 6\sqrt{0,1}) \\ &= (\sqrt{10} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 10\sqrt{0,1}) = \sqrt{20} - 2 + 10 - 10\sqrt{0,2} \\ &= 8 - 10\sqrt{0,2} + 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Bài 22 ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Nhóm các số hạng thứ nhất và thứ ba, thứ hai và thứ tư rồi đặt thành thừa số chung

b) Viết $m^2 = (\sqrt{m})^4$ để được $m^2 - \sqrt{m} = (\sqrt{m})^4 - \sqrt{m} = (\sqrt{m}).(\sqrt{m})^3 - \sqrt{m} = \sqrt{m}(\sqrt{m})^3 - 1^3)$ rồi phân tích tiếp.

c) Nhóm hai số hạng đầu rồi đặt thành thừa số chung bằng cách viết $xy = \sqrt{x}.\sqrt{x}.y$ để được $xy + y\sqrt{x} = y\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$ rồi phân tích tiếp.

d) Phân tích $\sqrt{x^3 - y^3}$ bằng cách áp dụng hằng đẳng thức $A^3 - B^3$.

• Cách giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{mu} - \sqrt{mv} + \sqrt{pu} \cdot \sqrt{pv} &= \sqrt{m}(\sqrt{u} - \sqrt{v}) + \sqrt{p}(\sqrt{u} \cdot \sqrt{v}) \\ &= (\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{m} + \sqrt{p}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } m^2 - \sqrt{m} &= (\sqrt{m})^4 - \sqrt{m} = \sqrt{m}((\sqrt{m})^3 - 1^3) \\ &= \sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)(m + \sqrt{m} + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (xy + y\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 1) &= y\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + (\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} + 1)(y\sqrt{x} + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{x^3 - y^3} \\ &= \sqrt{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{(x - y)(x^2 + xy + y^2)} \\ &= \sqrt{x^2 + xy + y^2}(1 - \sqrt{x - y}). \end{aligned}$$

Bài 23 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu.

b) - Nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu $(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{2}$ tức là với $(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}$ để khử được $\sqrt{2}$. Sau đó mới khử $\sqrt{3}$ ở mẫu.

- Tương tự để khử $\sqrt{5}$ ta nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu $(3 + \sqrt{2}) - \sqrt{5}$ tức là với $(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}$. Sau đó mới khử $\sqrt{2}$.

- Nhân tử và mẫu với $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ để ở mẫu còn $5 + \sqrt{2}$, sau đó lại tiếp tục trục $5 + \sqrt{2}$ ở mẫu.

• Cách giải

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{3 - 2} = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6};$$

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{6})^2}{7 - 6} = 7 - 2\sqrt{42} + 6 = 13 - 2\sqrt{42};$$

$$\frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{8} + \sqrt{5}}{\sqrt{8} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{5}}{8 - 5} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{4}{(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{2}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}} = \frac{4[(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}]}{(1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ & = \frac{4(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{3}) - 2} = \frac{4(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{2(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Tiếp tục trục căn ở mẫu bằng cách nhân tử và mẫu với $1 - \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} & \frac{2(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}{1 - 3} \\ & = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

- Nhân tử và mẫu với biểu thức $(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} & \frac{12}{(3 + \sqrt{2}) - \sqrt{5}} \cdot \frac{(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}}{(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}} = \frac{12[(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}]}{(3 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ & = \frac{12(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{11 + 6\sqrt{2} - 5} = \frac{12(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{6(1 + \sqrt{2})} = \frac{2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{1 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Tiếp tục trục $1 + \sqrt{2}$ ở mẫu:

$$\begin{aligned} & \frac{2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2(3\sqrt{2} + 2 + \sqrt{10} - 3 - \sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 1} \\ & = 2(2\sqrt{2} - 1 + \sqrt{10} - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

- Nhân tử và mẫu với $\sqrt{5 + \sqrt{2}}$ được:

$$\frac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{5 + \sqrt{2}}}{\sqrt{5 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{2}}}{5 + \sqrt{2}}.$$

Lại tiếp tục trục $5 + \sqrt{2}$ ở mẫu:

$$\frac{\sqrt{5 + \sqrt{2}}}{5 + \sqrt{2}} \cdot \frac{5 - \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}} = \frac{(5 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 + \sqrt{2}}}{25 - 2} = \frac{(5 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 + \sqrt{2}}}{23}.$$

Bài 24 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Rút gọn biểu thức bị chia và biểu thức chia, riêng biểu thức chia lấy mẫu chung là $1 - 4a$.

b) Thay A bằng biểu thức $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ để giải bất phương trình $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{4a}$.

c) Hãy giải bất phương trình $|\frac{1}{2\sqrt{a}}| \leq \frac{1}{4}$, lưu ý $\frac{1}{2\sqrt{a}} > 0$, vì sao?

● Cách giải

a) Điều kiện để A có nghĩa: $a > 0, a \neq \frac{1}{4}$.

$$A = \left(\frac{1 - 4a - \sqrt{a} + 4a}{1 - 4a} \right) : \frac{1 - 4a - 1 - 2a + 2\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{1 - 4a}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{a}}{1 - 4a} \cdot \frac{1 - 4a}{2\sqrt{a}(1 - \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

b) Để biểu thức $A < A^2$ ta có $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{4a}$ hay $\frac{1}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{4a} < 0$;
 $\frac{2\sqrt{a} - 1}{4a} < 0$. Do $a > 0$ nên ta chỉ cần giải bất phương trình
 $2\sqrt{a} - 1 < 0$. Từ đó $\sqrt{a} < \frac{1}{2}$ hay $a < \frac{1}{4}$. Kết hợp với điều kiện
 $a > 0$ ta có: $0 < a < \frac{1}{4}$.

c) Để $|A| \leq \frac{1}{4}$ tức là $|\frac{1}{2\sqrt{a}}| \leq \frac{1}{4}$ thì ta có ngay $\frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{4}$ vì
 $\sqrt{a} > 0$ nên $|\frac{1}{2\sqrt{a}}| = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Từ đó $2\sqrt{a} \geq 4$. Vậy $\sqrt{a} \geq 2; a \geq 4$.

Bài 25 ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy rút gọn riêng biểu thức bị chia và để nguyên biểu thức chia. Cuối cùng mới rút gọn cho $(1 - b)^3$ của biểu thức chia

b) Thay giá trị $-\frac{1}{2}$ vào biểu thức rút gọn của B và giải phương trình bậc hai ẩn là b.

● Cách giải

a) Điều kiện để B có nghĩa: $b > 0, b \neq 1$.

Biểu thức bị chia:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - b\sqrt{b}}{\sqrt{b} - b} + 1 \right) \left(\frac{1 + b\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}} - \sqrt{b} \right) \\
&= \frac{1 - b\sqrt{b} + \sqrt{b} - b}{\sqrt{b}(1 - \sqrt{b})} \cdot \frac{1 + b\sqrt{b} - \sqrt{b}(1 + \sqrt{b})}{1 + \sqrt{b}} \\
&= \frac{[(1 - b) - \sqrt{b}(b - 1)][(1 - b) + \sqrt{b}(b - 1)]}{\sqrt{b}(1 - \sqrt{b})(1 + \sqrt{b})} = \frac{(1 - b)^2 - b(b - 1)^2}{\sqrt{b}(1 - b)} \\
&= \frac{(1 - b)^2(1 - b)}{\sqrt{b}(1 - b)} = \frac{(1 - b)^3}{\sqrt{b}(1 - b)} \\
\text{Vậy } B &= \frac{(1 - b)^3}{\sqrt{b}(1 - b)} : \frac{(1 - b)^3}{1 + \sqrt{b}} = \frac{(1 - b)^3}{\sqrt{b}(1 - b)} \cdot \frac{1 + \sqrt{b}}{(1 - b)^3} \\
&= \frac{1 + \sqrt{b}}{\sqrt{b}(1 + \sqrt{b})(1 - \sqrt{b})} = \frac{1}{\sqrt{b}(1 - \sqrt{b})}
\end{aligned}$$

b) Nếu $B = -\frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{\sqrt{b}(1 - \sqrt{b})} = -\frac{1}{2}$. Suy ra $\sqrt{b} - b = -2$.

Ta được phương trình $b - \sqrt{b} - 2 = 0$; $b - 1 - \sqrt{b} - 1 = 0$;
 $(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 1) - (\sqrt{b} + 1) = 0$; $(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 2) = 0$, vì
 $\sqrt{b} + 1 \neq 0$ nên ta có $\sqrt{b} - 2 = 0$; $\sqrt{b} = 2$; Vậy $b = 4$.

VII. HÀM SỐ BẬC NHẤT

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

HÀM SỐ BẬC NHẤT. TÍNH CHẤT VÀ ĐỒ THỊ

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 4x - 7$; $y = \frac{5}{x - 5}$; $y = \frac{6}{|x - 6|}$;

b) $y = \sqrt{3 - x}$; $y = \frac{\sqrt{8 - x}}{8x}$; $y = \sqrt{x^2 - 81}$.

● Tìm hiểu đề bài

Tìm tập xác định (TXĐ) của hàm số $y = f(x)$ ta tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Các hàm số đã cho ở đề bài đều có dạng khác nhau. Ở câu a là các dạng biểu thức nguyên và phân, ở câu b là các dạng chứa căn thức bậc hai của một nhị thức bậc nhất hoặc bậc hai.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Đối với hàm số dạng biểu thức nguyên thì dù cho x bất kì giá trị nào ta cũng tìm được giá trị tương ứng của y . Đối với hàm số dạng biểu thức phân thì nó không xác định nếu mẫu bằng 0.

b) Đối với hàm số chứa căn thức bậc hai thì hàm số chỉ có nghĩa khi các biểu thức dưới dấu căn là không âm. Đặc biệt đối với hàm số $y = \sqrt{x^2 - 81}$ thì nó xác định khi $x^2 - 81 \geq 0$ hay $x^2 \geq 81$, từ đó mà tìm ra TXĐ.

● Cách giải

a) Hàm số $y = 4x - 7$ có TXĐ là tập hợp số thực $\mathbf{R}$.

Hàm số $y = \frac{5}{x - 5}$ không xác định khi $x = 5$ nên TXĐ là tập hợp số thực $\mathbf{R}$ trừ $x = 5$.

Hàm số $y = \frac{6}{|x - 6|}$ không xác định khi $x = 6$ nên TXĐ là tập hợp số thực $\mathbf{R}$ trừ $x = 6$.

b) Hàm số $y = \sqrt{3 - x}$ xác định khi $3 - x \geq 0$ hay $x \leq 3$ nên TXĐ là tập hợp các số thực $x \leq 3$.

Hàm số $y = \frac{\sqrt{8 - x}}{8x}$ xác định khi $\begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ tức là $\begin{cases} x \leq 8 \\ x \neq 0 \end{cases}$ nên TXĐ là tập hợp các số thực $x \leq 8$ và $x \neq 0$.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 81}$ xác định khi $x^2 - 81 \geq 0$ hay $x^2 \geq 81$; $|x| \geq 9$, nên TXĐ là tập hợp các số thực $x \leq -9$ hoặc $x \geq 9$.

● Khai thác bài toán

Tập xác định (TXĐ) của các hàm số ở câu a và b còn có thể viết lần lượt như sau:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 5\} \text{ hay TXĐ : } x \neq 5$$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 6\} \text{ hay TXĐ : } x \neq 6$$

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\} \text{ hay TXĐ : } x \leq 3.$$

Nếu gặp trường hợp hàm số $y = \sqrt{5-x} + \frac{4}{x-4}$ thì hàm số

chỉ xác định khi $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases}$ tức là $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Vậy TXĐ: $x \leq 5, x \neq 4$.

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ tìm tập hợp các điểm:

- a) Có tọa độ bằng nhau;
- b) Có tọa độ đối nhau;
- c) Có tọa độ bằng 0;
- d) Có hoành độ bằng 0;
- e) Có tung độ bằng 0.

● Tìm hiểu đề bài

Khi nói mặt phẳng tọa độ thì hiểu rằng đó là mặt phẳng Oxy chứa hai trục tọa độ vuông góc tại O là trục tung $y'Oy$ và trục hoành $x'Ox$ và khi nói tọa độ của một điểm thì hiểu đó là hoành độ và tung độ của điểm đó.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Gọi $M(x, y)$ là một điểm có hoành độ x , tung độ y trong mặt phẳng tọa độ.

a) Nếu $x = y$ tức là điểm M cách đều hai trục Ox, Oy hoặc Ox', Oy' .

b) Nếu $x = -y$ hoặc $y = -x$ tức là điểm M cách đều hai trục Ox, Oy' hoặc Oy, Ox' .

Từ đó suy ra M phải nằm trên những đường thẳng nào.

c) Nếu $x = 0, y = 0$ thì điểm M phải trùng với điểm nào ?

d) Nếu $x = 0$ còn y bất kì thì M phải thuộc trục nào ?

e) Nếu $y = 0$ còn x bất kì thì M phải thuộc trục nào ?

● Cách giải

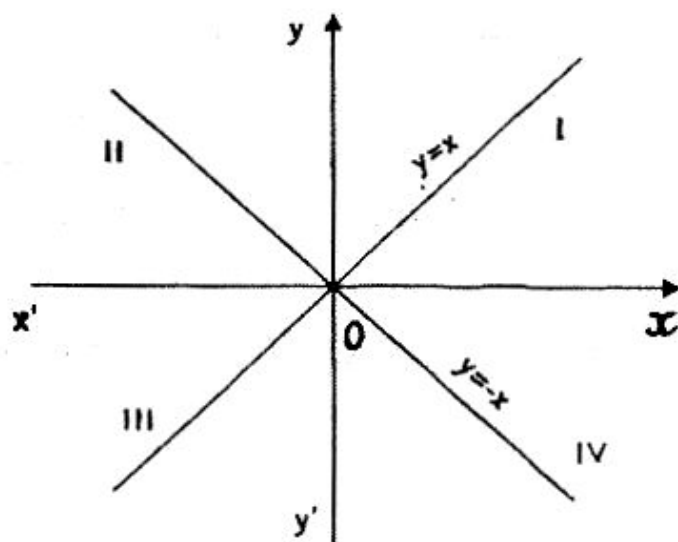
a) Nếu $y = x$ thì tập hợp các điểm $M(x, y)$ là phân giác thứ nhất của hai góc phần tư I và III.

b) Nếu $y = -x$ thì tập hợp các điểm $M(x, y)$ là phân giác thứ hai của hai góc phần tư II và IV.

c) Nếu $x = 0, y = 0$ thì tập hợp các điểm $M(0;0)$ chính là điểm gốc tọa độ O.

d) Nếu $x = 0$ còn y bất kì thì tập hợp các điểm $M(0;y)$ là trục tung.

e) Nếu $y = 0$ còn x bất kì thì tập hợp các điểm $M(x;0)$ là trục hoành.

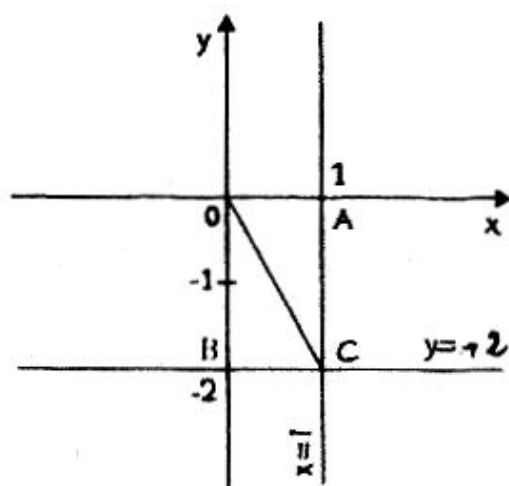


H.6

● Khai thác bài toán

Tập hợp các điểm có tung độ $y = -2$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm B có tung độ bằng -2.

Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 1 là đường



H.7

thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ bằng 1.

Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng $y = -2$ và $x = 1$. Tọa độ của C là $x = 1, y = -2$. Ta có thể tìm khoảng cách OC từ C đến gốc tọa độ như sau:

Xét tam giác vuông OBC theo định lý Pitago ta có:

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = 4 + 1 = 5. \text{ Vậy } OC = \sqrt{5}.$$

Do OACB là hình chữ nhật nên rõ ràng $AB = OC = \sqrt{5}$.

Ta nhận xét thêm là các phân giác thứ nhất và thứ hai vuông góc với nhau tại O.

Bài 3. Cho điểm $M(1; 3)$.

a) Tìm các điểm đối xứng của M qua Ox, Oy và qua gốc O. Từ đó rút ra nhận xét.

b) Viết phương trình của đường thẳng OM và tìm khoảng cách OM.

● **Tìm hiểu đề bài**

Tìm các điểm đối xứng của M qua Ox, chẳng hạn đó là điểm M_1 , qua Oy chẳng hạn đó là M_2 , qua O chẳng hạn đó là M_3 . Dựa vào tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 để so sánh với tọa độ của M mà rút ra nhận xét.

Đường thẳng OM là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O nên đề bài yêu cầu viết phương trình của đường thẳng này.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Trước tiên hãy xác định các điểm đối xứng để tìm được tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 . Từ đó rút ra nhận xét về các điểm đối xứng nhau qua Ox, Oy và qua gốc O.

b) Đường thẳng OM đi qua gốc O nên phương trình của đường thẳng này có dạng $y = ax$ ($a \neq 0$). Lưu ý do M nằm trong góc phần tư I nên hệ số $a > 0$.

Cách tìm khoảng cách OM dựa vào định lí Pitago như ở bài 2 (phần khai thác bài toán).

• Cách giải

a) Các điểm M_1, M_2, M_3 được xác định như trên hình 8. Ta có tọa độ của chúng theo thứ tự là:

$$M_1(x = 1, y = -3); M_2(x = -1, y = 3);$$

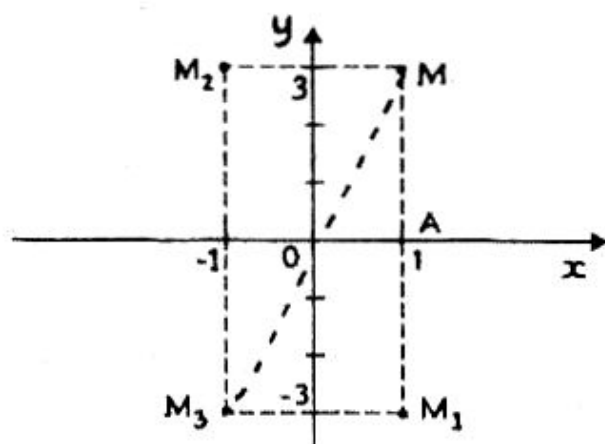
$$M_3(x = -1, y = -3).$$

Ta rút ra nhận xét sau đây:

- Các điểm đối xứng nhau qua Ox có hoành độ bằng nhau và tung độ đối nhau;

- Các điểm đối xứng nhau qua Oy có tung độ bằng nhau và hoành độ đối nhau;

- Các điểm đối xứng nhau qua gốc O có tung độ đối nhau và hoành độ đối nhau.



H.8

b) Đường thẳng OM đi qua gốc O có phương trình dạng $y = ax$ (với $a > 0$ vì M nằm trong góc phần tư I). Do đường thẳng đi qua M nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình $y = ax$, tức là $3 = a.1$. Suy ra $a = 3$. Vậy phương trình của đường thẳng OM là $y = 3x$.

Gọi A là giao điểm của MM_1 với Ox. Xét tam giác vuông OAM theo định lí Pitago ta có:

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 = 1 + 9 = 10. \text{ Vậy } OM = \sqrt{10}.$$

• Khai thác bài toán

Ta còn có thể:

- Tìm phương trình của đường thẳng OM_2 . Khi đó tọa độ của M_2 phải thỏa mãn phương trình $y = ax$ tức là $3 = a \cdot (-1)$. Suy ra $a = -3$ (hệ số $a < 0$ vì điểm M_2 nằm trong góc phần tư II). Vậy phương trình đường thẳng OM_2 là $y = -3x$.

- Tìm khoảng cách OM_2 . Rõ ràng hai khoảng cách $OM = OM_2 = \sqrt{10}$.

- Tìm phương trình của đường thẳng vuông góc với đường thẳng OM tại M . Muốn vậy ta phải biết thêm tính chất sau đây:

"Hai đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ vuông góc với nhau khi tích hai hệ số góc $a \cdot a' = -1$ "

Do phương trình của đường thẳng OM là $y = 3x$ với $a = 3$ nên phương trình của đường thẳng vuông góc với nó là $y = -\frac{1}{3}x$ (vì $a \cdot a' = -1$ nên $a' = -1:3 = -\frac{1}{3}$).

Bài 4. Viết phương trình của đường thẳng không đi qua gốc tọa độ:

- a) có hệ số góc bằng (-2) và qua điểm $M(2;5)$;
- b) qua điểm $N(1;3)$ và song song với đường thẳng $y = -2x$;
- c) qua điểm $P(-1;2)$ và song song với trục tung;
- d) qua điểm $Q(2;-3)$ và song song với trục hoành.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đề bài cho đường thẳng không đi qua gốc tọa độ tức là đường thẳng có dạng $y = ax + b$. Cả bốn câu đều yêu cầu tìm cụ thể a và b của từng phương trình đường thẳng khi đã cho một số đặc điểm của mỗi đường thẳng.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hệ số góc đã cho là $a = -2$ vậy chỉ cần tìm b , mà $b = y - ax$ trong đó x và y là tọa độ của điểm M .

b) Đường thẳng phải tìm song song với đường thẳng $y = -2x$ nên hệ số góc của nó $a = -2$, do đó chỉ cần tìm b .

c) Đường thẳng qua P song song với trục tung nên phương trình của nó có dạng $x = m$, do đó chỉ cần tìm m .

d) Đường thẳng qua Q song song với trục hoành nên phương trình của nó có dạng $y = k$, do đó chỉ cần tìm k .

● Cách giải

a) Đường thẳng phải tìm có dạng $y = -2x + b$. Nó đi qua điểm M nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình $y = -2x + b$, tức là $5 = (-2) \cdot 2 + b$. Suy ra $b = 9$. Vậy phương trình đường thẳng qua M là $y = -2x + 9$.

b) Đường thẳng qua N có dạng $y = -2x + b$. Nó đi qua điểm N nên tọa độ của N thỏa mãn phương trình $y = -2x + b$, tức là $3 = (-2) \cdot 1 + b$. Suy ra $b = 5$. Vậy phương trình đường thẳng qua N là $y = -2x + 5$.

c) Đường thẳng qua P có dạng $x = m$. Do tọa độ của P là $(-1; 2)$ nên ta có ngay $m = -1$. Vậy phương trình đường thẳng này là $x = -1$.

d) Đường thẳng qua Q có dạng $y = k$. Do tọa độ Q là $(2; -3)$ nên ta có ngay $k = -3$. Vậy phương trình đường thẳng này là $y = -3$.

● Khai thác bài toán

Ta có thể thêm câu hỏi sau:

"Viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng qua M ở câu a, và đường thẳng vuông góc với đường thẳng qua N ở câu b."

Nếu thế thì phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = -2x + 9$ là $y = \frac{1}{2}x + 9$ và đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = -2x + 5$ là $y = \frac{1}{2}x + 5$. Hai đường thẳng vuông góc này song song với nhau vì cùng có hệ số góc bằng $\frac{1}{2}$.

Ta còn có thể hỏi câu sau đây:

"Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $S(-2;4)$ và có tung độ gốc bằng 3".

Ở đây ta biết ngay $b = 3$ và chỉ cần tìm a . Do đường thẳng đi qua S nên tọa độ của S thỏa mãn phương trình $y = ax + 3$ tức là $4 = (-2).a + 3$. Suy ra $a = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng qua S là $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Bài 5

a) Viết phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;3)$ và $B(1;-3)$.

b) Đường thẳng AB này cắt trục hoành tại C và trục tung tại D . Xác định tọa độ của C , D và diện tích tam giác OCD .

• Tìm hiểu đề bài

Ở các bài trước chỉ yêu cầu viết phương trình của đường thẳng đi qua một điểm nhưng ở bài này đường thẳng lại đi qua hai điểm A , B cho trước. Ngoài ra lại phải tìm tọa độ hai giao điểm C và D của đường thẳng AB với hai trục tọa độ và diện tích tam giác vuông đỉnh O và cạnh huyền là CD .

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$. Nó đi qua điểm A và điểm B nên tọa độ của A và B thỏa mãn phương trình $y = ax + b$. Ta sẽ được hai phương trình, từ đó mà tìm được a và b .

b) Tam giác vuông OCD có đỉnh góc vuông là gốc tọa độ O , đỉnh C là hoành độ điểm C và đỉnh D là tung độ điểm D . Từ đó tính được dễ dàng diện tích tam giác. Để xác định tọa độ giao điểm C thì lưu ý tung độ của nó bằng 0 và tọa độ giao điểm D thì đã biết tung độ gốc của nó (hoặc biết hoành độ của nó bằng 0).

● Cách giải

a) Do đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B cho trước nên tọa độ của A và B thỏa mãn hệ hai phương trình sau:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot (-2) + b & (1) \\ -3 = a \cdot 1 + b & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $b = 3 + 2a$. Thay vào (2) được $-3 = a + 3 + 2a$ hay $3a = -6$; $a = -2$. Từ đó $b = 3 + 2 \cdot (-2) = -1$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = -2x - 1$ (3).

b) Tại giao điểm C ta có $y = 0$. Thay vào (3) được $0 = -2x - 1$;
 $x = -\frac{1}{2}$. Vậy tọa độ của C là $(x = -\frac{1}{2}, y = 0)$.

Tại giao điểm D ta có $x = 0$ nên $y = -1$. Vậy tọa độ của D là $(x = 0, y = -1)$.

Xét tam giác vuông OCD ta có $OC = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $OD = |-1| = 1$.

Do đó diện tích tam giác OCD bằng: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ (đơn vị diện tích).

● Khai thác bài toán

Có thể tìm a và b bằng cách giải hệ phương trình bậc nhất hai

ẩn a và b:
$$\begin{cases} 3 = -2a + b & (1) \\ -3 = a + b & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế (1) và (2) được $6 = -3a$, suy ra $a = 6 : (-3) = -2$.
Thay vào (1) được $b = -1$.

Có thể thêm câu hỏi: Tính khoảng cách CD. Khi đó áp dụng định lí Pitago vào tam giác OCD ta có: $CD^2 = OC^2 + OD^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.
Vậy $CD = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (đơn vị độ dài).

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 6. Giải phương trình bậc nhất hai ẩn và viết công thức nghiệm tổng quát:

a) $5x - 3y = 8; \quad -4x + 2y = 7;$

b) $0x + 8y = 0; \quad -12x + 0y = 0.$

● Tìm hiểu đề bài

Các phương trình trên đều là phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát $ax + by = c$. Riêng câu b thì $a = 0; b = 0$.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy tính y theo x . Với mỗi giá trị tùy ý của x ta sẽ tính được giá trị tương ứng của y và cặp (x, y) đó là nghiệm của phương trình.

b) Lưu ý ở phương trình thứ nhất thì với mọi giá trị của x ta đều có $8y = 0$. Từ đó suy ra nghiệm của phương trình. Ở phương trình thứ hai thì với mọi giá trị của y đều có $-12x = 0$. Từ đó suy ra nghiệm của phương trình.

● Cách giải

a) - Từ phương trình $5x - 3y = 8$ ta tính y theo x , được

$$y = \frac{5x - 8}{3} \quad (1).$$

Với mỗi giá trị tùy ý của x ta thay vào (1) và được giá trị tương ứng của y . Cặp (x, y) đó là nghiệm của phương trình.

Vậy công thức nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$x \in \mathbb{R}; y = \frac{5x - 8}{3}.$$

- Từ phương trình $-4x + 2y = 7$ ta tính y theo x , được

$$y = \frac{7 + 4x}{2} \quad (2).$$

Với mỗi giá trị tùy ý của x ta thay vào (2) và được giá trị tương ứng của y .

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$x \in \mathbf{R}; y = \frac{7 + 4x}{2}.$$

b) - Từ phương trình $0x + 8y = 0$ ta thấy với mọi giá trị của x ta đều có $8y = 0$. Do đó $y = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $x \in \mathbf{R}; y = 0$.

- Từ phương trình $-12x + 0y = 0$ ta thấy với mọi giá trị của y ta đều có $-12x = 0$. Do đó $x = 0$.

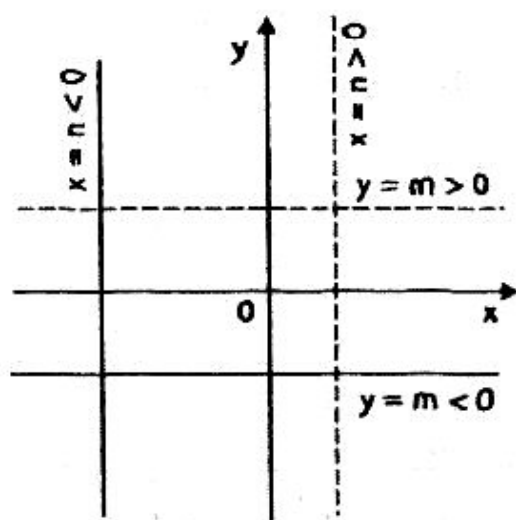
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $x = 0; y \in \mathbf{R}$.

• Khai thác bài toán

Qua câu b ta thấy một cách tổng quát rằng:

- Phương trình $y = m$ có vô số nghiệm ($x \in \mathbf{R}, y = m$) biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với trục hoành cắt Oy tại điểm có tung độ bằng $m \neq 0$;

- Phương trình $x = n$ có vô số nghiệm ($x = n, y \in \mathbf{R}$) biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với trục tung cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng $n \neq 0$.



H.9

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập các nghiệm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ lập thành một đường thẳng gọi là đường thẳng $ax + by = c$, mà mỗi điểm trên đường thẳng đó biểu diễn một nghiệm của phương trình.

Ngoài ra ta có thể đặt thêm câu hỏi sau đây:

"Tìm nghiệm nguyên của các phương trình đã cho ở câu a." Khi đó ta phải có:

a) Từ $5x - 3y = 8$ ta có:

$$y = \frac{5x - 8}{3} = \frac{6x - 9 - x + 1}{3} = 2x - 3 - \frac{x - 1}{3}$$

Đặt $t = \frac{x-1}{3} \Rightarrow x = 3t + 1$. Từ đó

$$y = 2(3t + 1) - 3 - t \text{ hay } y = 5t - 1.$$

cho t những giá trị nguyên ta sẽ được các giá trị nguyên của x và y .

b) Từ $-4x + 2y = 7$ ta có:

$$y = \frac{4x+7}{2} = 2x + 3 + \frac{1}{2}.$$

Với mỗi x nguyên thì y không nguyên. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 6x - 7y = 40 \\ 5y - 2x = -8; \end{cases} & \begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 5y + 17 = 0; \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x + y = 22; \end{cases} & \begin{cases} 5y + x - 7 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là những hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Một hệ phương trình bậc nhất có thể có một nghiệm duy nhất, có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

Đề bài yêu cầu phải giải bằng phương pháp cộng.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy dựa vào phép biến đổi tương đương tức là phép biến đổi từ

một hệ phương trình đến một hệ phương trình khác tương đương (lưu ý: hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại).

Đối với hệ $\begin{cases} 6x - 7y = 40 & (1) \\ 5y - 2x = -8 & (2) \end{cases}$ ta nhân hai vế của phương trình

(2) với 3 được hệ tương đương $\begin{cases} 6x - 7y = 40 & (1) \\ -6x + 15y = -24 & (3) \end{cases}$ Sau đó cộng

từng vế hai phương trình của hệ mới này để loại ẩn x và chỉ còn lại một phương trình ẩn y . Từ đó mà tìm được giá trị của y và của x .

• Cách giải

$$a) \begin{cases} 6x - 7y = 40 & (1) \\ 5y - 2x = -8 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 7y = 40 & (1) \\ -6x + 15y = -24 & (3) \end{cases} \text{ (nhân hai vế với 3)}$$

Cộng từng vế (1) và (3) được $8y = 16$; $y = 2$. Thay vào (1) được $6x = 40 + 14 = 54$; $x = 9$. Vậy nghiệm của hệ là $(x = 9, y = 2)$.

$$\begin{cases} 7x - 3y = -1 & (1) \\ 4x - 5y = -17 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35x - 15y = -5 & (3) \text{ (nhân hai vế với 5)} \\ -12x + 15y = 51 & (4) \text{ (nhân hai vế với -3)} \end{cases}$$

Cộng từng vế (3) và (4) được $23x = 46$; $x = 2$. Thay vào (1) được $3y = 14 + 1 = 15$; $y = 5$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x = 2, y = 5)$.

$$b) \begin{cases} 3x - 2y = 11 & (1) \\ 4x + y = 22 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 11 & (1) \\ 8x + 2y = 44 & (3) \text{ (nhân hai vế với 2)} \end{cases}$$

Cộng từng vế (1) và (3) được $11x = 55$; $x = 5$. Thay vào (2) được $y = 22 - 20 = 2$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x = 5, y = 2)$.

$$\begin{cases} 5y + x = 7 & (1) \\ 3x - 2y = 4 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 15y = -21 & (3) \text{ (nhân hai vế với -3)} \\ 3x - 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế (2) và (3) được $-17y = -17$, $y = 1$. Thay vào (1) được $x = 7 - 5 = 2$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x = 2, y = 1)$.

● Khai thác bài toán

Có thể minh họa bằng đồ thị như sau:

Chẳng hạn với hệ $\begin{cases} 6x - 7y = 40 \\ 5y - 2x = -8 \end{cases}$ trước hết ta vẽ hai đường

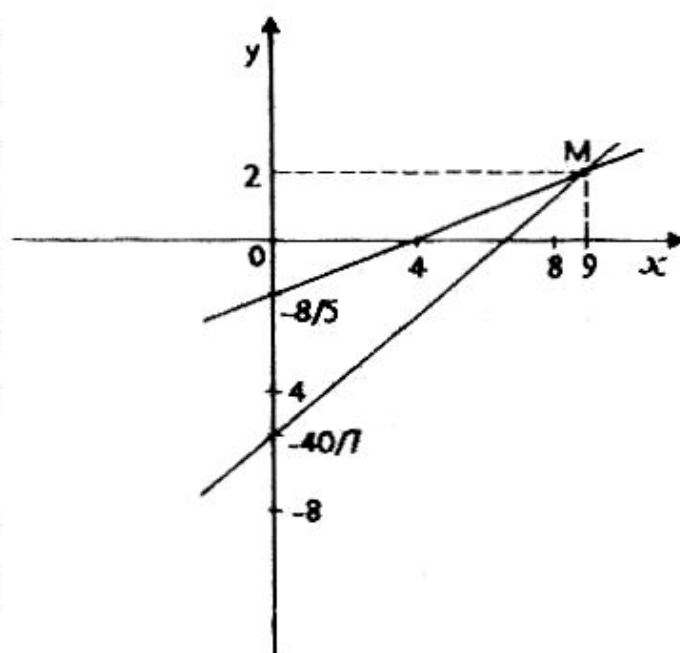
thẳng $6x - 7y = 40$ và $5y - 2x = -8$. Đó cũng là đồ thị các hàm số $y_1 = \frac{6x - 40}{7} = \frac{6}{7}x - \frac{40}{7}$ và $y_2 = \frac{2x - 8}{5} = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$. Hai đường

thẳng này có hệ số góc khác nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm M. Tọa độ giao điểm M đó là $(x = 9, y = 2)$. Đó là nghiệm duy nhất của hệ vì hai đường thẳng phân biệt nếu cắt nhau thì chỉ cắt tại một điểm duy nhất.

Tương tự ta có thể minh họa bằng đồ thị 3 hệ phương trình còn lại.

Lưu ý: Để vẽ đường thẳng $7x - 3y + 1 = 0$ chẳng hạn ta không cần đưa về dạng $y = \frac{7x + 1}{3}$ mà có thể tìm ngay giao điểm với hai trục tọa độ như sau:

x	0	$-\frac{1}{7}$
y	$\frac{1}{3}$	0



H.10

Bài 8. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$a) \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 4y = 20 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 7 \end{cases}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Yêu cầu của đề bài là giải bằng phương pháp thế, tức là dựa vào tính chất: nếu từ một phương trình của hệ đã cho ta biểu thị một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai của hệ được một phương trình mới có một ẩn thì phương trình mới này và phương trình thứ nhất lập thành một hệ tương đương với hệ đã cho.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Tính y theo x (vì hệ số của y bằng ± 1 đơn giản hơn hệ số của x) ở các phương trình thứ nhất rồi thay giá trị của y vào phương trình thứ hai sẽ được một phương trình mới có ẩn là x . Giải ra sẽ tìm được x , từ đó tìm được y .

b) Tính x theo y ở các phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới có ẩn là y . Giải ra sẽ tìm được y , từ đó tìm được x .

● **Cách giải**

$$a) \text{ Từ phương trình (1) của hệ } \begin{cases} -2x + y = -1 \quad (1) \\ 4x - 2y = -3 \quad (2) \end{cases} \text{ ta tính } y$$

theo x được $y = -1 + 2x$. Thế vào phương trình (2) được:

$$4x - 2(-1 + 2x) = -3, \text{ hay } 4x + 2 - 4x = -3 \text{ hay } 0x = -5 \quad (3)$$

Không có giá trị nào của x thỏa mãn phương trình (3) này nên (3) vô nghiệm. Do đó hệ đã cho vô nghiệm.

- Ta tính y theo x từ (1) của hệ đã cho $\begin{cases} 2x - y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 20 & (2) \end{cases}$

được $y = 2x - 6$ (3). Thế vào phương trình (2) được:

$3x + 4(2x - 6) = 20$ hay $3x + 8x - 24 = 20$; $11x = 44$;
 $x = 4$. Thay vào (3) được $y = 8 - 6 = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x = 4, y = 2$.

b) Ta tính x theo y từ (1) của hệ $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ 2x - 4y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$ được

$x = 2y - 1$ (3). Thế vào (2) được:

$2(2y - 1) - 4y + 2 = 0$, hay $4y - 2 - 4y + 2 = 0$; $0y = 0$ (4)

Bất kì giá trị nào của y cũng nghiệm, đúng (4). Với mỗi giá trị của y thay vào (3) ta được giá trị tương ứng của x .

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm, dạng tổng quát ($x = 2y - 1$; $y \in \mathbb{R}$).

- Hệ đã cho có thể viết $\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x - y = 14 & (2) \end{cases}$. Từ (1) ta có $x = 2 - y$.

Thế vào (2) được: $2 - y - y = 14$, hay $-2y = 14 - 2 = 12$; $y = -6$.
 Suy ra $x = 8$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là ($x = 8, y = -6$).

● Khai thác bài toán

Do đề bài yêu cầu giải bằng phương pháp thế nên ta đã giải

hệ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 14 \end{cases}$ như trên. Nếu không có yêu cầu này thì cách giải

sẽ đơn giản (do biết tổng và hiệu của hai số): cộng từng vế (1) và (2) được $2x = 16$; $x = 8$. Từ đó $y = -6$.

Trong hai phương pháp cộng và thế thì dùng phương pháp thế lợi hơn khi hệ số của một ẩn là 1 hoặc -1.

Đối với bài toán này ta cũng có thể minh họa bằng đồ thị như

ở bài toán 7. Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì hệ có một nghiệm duy nhất, nếu chúng song song với nhau thì hệ vô nghiệm, nếu chúng trùng nhau thì hệ có vô số nghiệm. Để có thể nhận biết được các trường hợp này hãy lưu ý điều sau đây:

"Hai đường thẳng $ax + by = c$ ($a, b \neq 0$) và $a'x + b'y = c'$ ($a', b' \neq 0$):

- cắt nhau khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$;
- song song với nhau khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$;
- trùng nhau khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$."

Ở câu a chẳng hạn với hệ $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 4y = 20 \end{cases}$, ta có

$$\frac{a}{a'} = \frac{2}{3} \neq \frac{b}{b'} = -\frac{1}{4} \text{ (hai đường thẳng cắt nhau);}$$

với hệ $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$ ta có

$$\frac{a}{a'} = -\frac{1}{2} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} = \frac{1}{3} \text{ (hai đường thẳng song song).}$$

Ở câu b với hệ $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$ ta có

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{2} \text{ (hai đường thẳng trùng nhau).}$$

Bài 9

a) Tìm các giá trị của m và p sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ mx - 2y = p \end{cases}$$

có một nghiệm; có vô số nghiệm; vô nghiệm.

b) Tìm các giá trị của a và b sao cho phương trình $y^2 - (a-7)y = 4b$

có hai nghiệm là -1 và 5.

● **Tìm hiểu đề bài**

a) Đề bài cho một hệ phương trình mà phương trình thứ nhất cho các hệ số của x và của y là các số, nhưng phương trình thứ hai lại cho các hệ số bằng chữ. Yêu cầu là tìm các hệ số bằng chữ này sao cho hệ phương trình có một nghiệm, có vô số nghiệm, vô nghiệm.

b) Khác với câu a, đề bài cho một phương trình ẩn là y có hệ số bằng chữ biết hai nghiệm của nó là -1 và 5 và yêu cầu tìm các giá trị của các chữ đó.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Từ phương trình thứ nhất thế x vào phương trình thứ hai để chỉ còn lại một phương trình ẩn y có chứa các chữ m và p dạng $Ay = B$. Từ đó biện luận bằng cách xét lần lượt $A \neq 0$, $A = 0$, $B = 0$ và $A = 0$, $B \neq 0$.

b) Vì phương trình đã cho có hai nghiệm là -1 và 5 nên hãy thay y theo thứ tự bằng -1 và 5 để được một hệ phương trình hai ẩn là a và b . Giải ra sẽ tìm được các giá trị của a và b .

● **Cách giải**

a) Từ phương trình thứ nhất $x = 7 - y$ ta thay giá trị của x vào phương trình thứ hai $mx - 2y = p$ được :

$m(7-y) - 2y = p$, hay $7m - my - 2y = p$; $(m + 2)y = 7m - p$ (1)
dạng $Ay = B$.

Nếu $m + 2 \neq 0$ tức là $m \neq -2$ thì (1) cho $y = \frac{7m - p}{m + 2}$. Vậy hệ có một nghiệm.

- Nếu $m = -2$ và $p = 7m = -14$ thì (1) có dạng $0y = 0$ và hệ có vô số nghiệm.

- Nếu $m = -2$ và $p \neq 7m = -14$ thì (1) có dạng $0y = 7m - p$

và hệ vô nghiệm.

b) Thay y lần lượt bằng -1 và 5 vào phương trình $y^2 - (a-7)y = 4b$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + a - 7 = 4b \\ 25 - 5a + 35 = 4b \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a - 4b = 6 & (1) \\ -5a - 4b = -60 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2) được: $6a = 66$; $a = 11$.

Thay vào (1) được: $-4b = 6 - a = -5$; $b = \frac{5}{4}$.

Vậy các giá trị của a và b là $a = 11$, $b = 1\frac{1}{4}$.

● Khai thác bài toán

Ta cũng có thể đặt thêm câu hỏi khác như sau:

Với giá trị nào của a thì hệ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = a \end{cases}$ vô nghiệm, có vô số

ng nghiệm ?

Ta thấy ngay hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 2a \end{cases}$

Từ phương trình $2x - y = 2a$ kết hợp với phương trình $2x - y = 1$ ta có ngay $2a = 1$. Vậy:

- Nếu $a \neq \frac{1}{2}$ thì hệ vô nghiệm (vì $2a \neq 1$)

Nếu $a = \frac{1}{2}$ thì hệ có dạng $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$, tức là $2x - y = 1$

Khi đó hệ có vô số nghiệm ($x \in \mathbb{R}$, $y = 2x - 1$).

Bài 10. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 4(0,1m + 1) + 5 = 1,1p \\ \frac{11 + 0,3p \cdot m}{m} - 5 = 4\left(\frac{1}{m} - 1\right); \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (s + 4) : (t + 1) = 2 : 1 \\ (s + 2) : (t - 1) = 4 : 1. \end{cases}$$

● Tìm hiểu đề bài

Cả hai hệ phương trình đã cho đều là hệ có hai ẩn. Ở hệ a thì

hai ẩn là m và p , ở hệ b thì hai ẩn là s và t (lưu ý là không phải bao giờ hai ẩn cũng là x và y).

Ở hệ a có các hệ số của m và p là số thập phân. Ở hệ b ta có dạng tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý điều kiện $m \neq 0$. Hãy quy đồng mẫu rồi khử mẫu ở phương trình thứ hai để được phương trình đơn giản $-2m + 0,3p = -7$. Từ đó mà giải hệ tương đương để tìm m và p .

b) Lưu ý điều kiện của t để hệ có nghĩa. Hãy nhân chéo để khử mẫu ở cả hai phương trình.

● Cách giải

a) Điều kiện để hệ có nghĩa: $m \neq 0$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ở phương trình thứ hai ta được hệ tương đương sau:

$$\begin{cases} 0,4m + 4 + 5 = 1,1p \\ 11 + 0,3p - m - 5m = 4 - 4m \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 0,4m - 1,1p = -9 & (1) \\ -2m + 0,3p = -7 & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với 5 rồi giải bằng phương pháp cộng ta được:

$$-5,2p = -52; p = 10. \text{ Từ đó } m = 5 \text{ thỏa mãn điều kiện ở trên.}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(m = 5, p = 10)$.

b) Điều kiện để hệ có nghĩa: $t \neq \pm 1$. Nhân chéo các số hạng của tỉ lệ thức ta được hệ tương đương:

$$\begin{cases} s + 4 = 2(t + 1) \\ s + 2 = 4(t - 1) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} s - 2t = -2 \\ s - 4t = -6 \end{cases}$$

Giải ra được $s = 2, t = 2$ thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy nghiệm của hệ là $(s = 2, t = 2)$.

● Khai thác bài toán

Cũng có trường hợp mỗi phương trình của hệ có hai vế đều là

tích của hai thừa số có chứa ẩn, chẳng hạn giải hệ:

$$\begin{cases} (m + 3)(p + 5) = (m + 1)(p + 8) \\ 3(5m - 6)(p + 1) = (5p + 7)(3m - 3). \end{cases}$$

Ta phải thực hiện phép nhân ở cả hai vế của mỗi phương trình được:

$$\begin{cases} mp + 5m + 3p + 15 = mp + 8m + p + 8 \\ 15mp + 15m - 18p - 18 = 15mp - 15p + 21m - 21 \end{cases}$$

hay sau khi rút gọn được hệ:
$$\begin{cases} -3m + 2p = -7 \\ -6m - 3p = -3. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $m = \frac{9}{7}$, $p = -\frac{11}{7}$. Vậy nghiệm của hệ là:

$$(m = 1\frac{2}{7}, p = -1\frac{4}{7}).$$

Bài 11. Giải hệ phương trình bằng cách chọn ẩn phụ:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8} \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = 1 \\ \frac{20}{x+2y} + \frac{3}{x-2y} = 1. \end{cases}$$

• Tìm hiểu đề bài

Trong các hệ đã cho tất cả ẩn đều nằm ở mẫu còn tử chỉ là các số. Ở hệ b thì vế phải của hai phương trình đều là 1. Do đó phải có điều kiện đối với ẩn để mẫu khác 0. Ngoài ra đề bài yêu cầu phải giải bằng cách chọn ẩn phụ.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý điều kiện để hệ có nghĩa. Sau đó chọn ẩn phụ là:

$$\frac{1}{x+y} = a, \frac{1}{x-y} = b^{(*)} \text{ để đưa hệ về dạng } \begin{cases} a + b = \frac{5}{8} \\ b - a = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Sau khi tìm được a và b, phải thay vào (*) để tìm x và y.

b) Chọn ẩn phụ là $\frac{1}{x+2y} = m$, $\frac{1}{x-2y} = n$ để đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} 4m - n = 1 \\ 20m + 3n = 1. \end{cases} \text{ Giải ra sẽ tìm được } m \text{ và } n, \text{ từ đó tìm được } x \text{ và } y.$$

● Cách giải

a) Điều kiện để hệ có nghĩa: $x \neq \pm y$. Chọn ẩn phụ là $\frac{1}{x+y} = a$,

$\frac{1}{x-y} = b$ ta sẽ được hệ phương trình hai ẩn a và b sau:

$$\begin{cases} a + b = \frac{5}{8} \\ b - a = \frac{3}{8} \end{cases} \text{ Giải ra được } a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{2}. \text{ Vậy ta có } \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2. \end{cases} \text{ Giải ra ta có } x = 5, y = 3 \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

$x \neq \pm y$. Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x = 5, y = 3)$.

b) Điều kiện để hệ có nghĩa: $x \neq \pm 2y$. Chọn ẩn phụ là:

$\frac{1}{x+2y} = m$, $\frac{1}{x-2y} = n$, ta có hệ hai ẩn m và n sau:

$$\begin{cases} 4m - n = 1 \\ 20m + 3n = 1. \end{cases} \text{ Giải ra được } m = \frac{1}{8}, n = -\frac{1}{2}. \text{ Từ đó ta có:}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2y} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{x-2y} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$$

Hệ cuối này có nghiệm là $x = 3, y = 2,5$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \pm 2y$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x = 3, y = 2,5)$.

● Khai thác bài toán

- Cũng có khi một ẩn là y^2 chẳng hạn, khi đó phải chọn ẩn phụ là $y^2 = t$ để giải. Ví dụ ta phải giải hệ sau
$$\begin{cases} -3x + 5y^2 = 21 \\ 2x + 4y^2 = 8. \end{cases}$$

Với ẩn phụ là t ta có hệ
$$\begin{cases} -3x + 5t = 21 \\ 2x + 4t = 8. \end{cases}$$

Giải hệ này được $x = -2, t = 3$. Từ đó $y^2 = 3, y = \pm \sqrt{3}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x = -2, y = \pm \sqrt{3})$.

- Nếu không yêu cầu phải giải bằng cách chọn ẩn phụ thì ta có thể giải hệ a bằng cách tìm $x + y$ và $x - y$ như sau:

Cộng từng vế hai phương trình được:

$$\frac{2}{x - y} = \frac{8}{8} = 1 \text{ hay } x - y = 2 \quad (1)$$

Trừ từng vế hai phương trình được:

$$\frac{2}{x + y} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ hay } x + y = 8 \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có $2x = 10; x = 5$. Từ đó $y = 3$.
Ta cũng tìm được nghiệm của hệ a là $x = 5, y = 3$.

Bài 12. Giải hai hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} y - 5|x| = 3 \\ 2x - |y| = -3; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -2x + y = 3 \\ |x + 1| + y = 2. \end{cases}$$

● Tìm hiểu đề bài

Hệ phương trình ở đề bài chứa ẩn có dấu giá trị tuyệt đối vì thế khi giải phải lưu ý đến đặc điểm này.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Từ phương trình thứ nhất tính y theo $|x|$ và thấy rằng $y = 5|x| + 3$ luôn dương, từ đó có $|y| = y$. Thành thử phương trình thứ hai trở thành $2x - y = -3$. Tiếp tục giải để tìm x bằng phương pháp cộng rồi suy ra giá trị của y .

b) Từ phương trình thứ nhất tính y theo x rồi thế vào phương trình thứ hai để được phương trình $|x + 1| = -2x - 1$. Tiếp tục giải với điều lưu ý

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 & \text{nếu } x + 1 < 0. \end{cases}$$

● **Cách giải**

a) Rút y từ phương trình thứ nhất được $y = 5|x| + 3 > 0$,

do đó $|y| = y$. Hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} y - 5|x| = 3 \\ 2x - y = -3. \end{cases} \quad \text{Cộng từng}$$

vế hai phương trình được $2x - 5|x| = 0$ hay $2x = 5|x|$ (1).

Suy ra $x \geq 0$ (vì $5|x| \geq 0$).

Vậy (1) trở thành $3x = 0$; $x = 0$. Từ đó $y = 3$.

Hệ đã cho có nghiệm là $(x = 0, y = 3)$

b) Rút từ phương trình thứ nhất được $y = 3 + 2x$. Thế vào phương trình thứ hai được:

$$|x + 1| + 3 + 2x = 2, \quad \text{hay } |x + 1| = -2x - 1 \geq 0.$$

Suy ra $x \leq -\frac{1}{2}$.

- Nếu $x < -1$ thì $|x + 1| = -x - 1$, ta có $-x - 1 = -2x - 1$ hay $x = 0$ (loại)

- Nếu $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ thì $|x + 1| = x + 1$, ta có $x + 1 =$

$-2x - 1$ hay $x = -\frac{2}{3}$, suy ra $y = \frac{5}{3}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x = -\frac{2}{3}, y = \frac{5}{3})$.

● **Khai thác bài toán**

Cũng có trường hợp hai ẩn m và p được cho dưới dạng bậc

hai, như giải hệ
$$\begin{cases} 8 - |mp - 4| = p^2 & (1) \\ m^2 = mp - 2 & (2) \end{cases}$$
 thì phải tính p theo m

từ phương trình thứ hai rồi thế vào phương trình thứ nhất để chỉ còn một phương trình một ẩn là m .

Thật vậy từ (2) ta có $mp = 2 + m^2$, nên $mp \neq 0$ và

$$p = \frac{2 + m^2}{m}.$$

Thế vào (1) được:

$$|m^2 - 2| = 8 \cdot \left(\frac{2 + m^2}{m}\right)^2, \text{ hay } (2 + m^2)^2 = 8m^2.$$

Suy ra $m^2 = 2$. Từ đó $m = \pm\sqrt{2}$.

Với $m = \sqrt{2}$ thì $p = 2\sqrt{2}$, với $m = -\sqrt{2}$ thì $p = -2\sqrt{2}$.

Vậy hai nghiệm của hệ là $(m = \sqrt{2}, p = 2\sqrt{2})$ và $(m = -\sqrt{2}, p = -2\sqrt{2})$.

GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 13

a) Tìm số có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục gấp đôi chữ số hàng đơn vị và nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu là 36 đơn vị.

b) Tích hai số là 630. Nếu thêm 4 vào số nhân thì tích mới sẽ là 798. Tìm hai số đó.

● Tìm hiểu đề bài

Đây là loại toán tìm các số khi biết một số dữ kiện.

a) Nếu số có hai chữ số là $\overline{ab}$ thì đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau được số $\overline{ba}$ và $\overline{ba}$ nhỏ hơn $\overline{ab}$ là 36. Đề bài yêu cầu tìm số $\overline{ab}$.

b) Nếu hai số là m và n thì đề bài cho $m \cdot n = 630$ và $m \cdot (n + 4) = 798$. Vấn đề là tìm m và n .

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y với

$0 < x < 9$ và $0 < y < 9$, x và y nguyên. Số ban đầu là $\overline{xy} = 10x + y$, số sau khi đổi chỗ là $\overline{yx} = 10y + x$, biết $x = 2y$. Từ đó lập hệ phương trình.

b) Gọi hai số là x và y (x và y nguyên dương hoặc cùng nguyên âm). Tích lúc đầu là $xy = 630$, lúc sau là $x(y + 4) = 798$. Từ đó mà lập hệ phương trình.

● Cách giải

a) Gọi chữ số hàng chục là x ($0 < x < 9$, x nguyên) và chữ số hàng đơn vị là y ($0 < y < 9$, y nguyên).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2y \\ (10x + y) - (10y + x) = 36 \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x = 2y \\ 9x - 9y = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Giải ra được $x = 8$, $y = 4$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy số phải tìm là 84.

(Thử lại: $8 = 2.4$; $84 - 48 = 36$).

b) Gọi hai số là x và y (x, y nguyên dương)

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = 630 \\ x(y + 4) = 798 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} xy = 630 \\ xy + 4x = 798. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 15$, $y = 42$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy hai số phải tìm là 15 và 42.

● Khai thác bài toán

Đề bài về tìm số có hai chữ số có thể ra dưới dạng sau:

Tìm số có hai chữ số biết rằng nếu chia số đó cho số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư 3. Nếu chia số đó cho

tổng các chữ số của nó thì được thương là 8 và dư 7.

Khi đó nếu gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y thì số phải tìm là $10x + y$, số viết theo thứ tự ngược lại là $10y + x$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x + y = 4(10y + x) + 3 \\ 10x + y = 8(x + y) + 7. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 7, y = 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy số phải tìm là 71.

Bài 14

a) Từ hai tỉnh cách nhau 126 km có một ô tô và một người đi bộ cùng khởi hành một lúc. Nếu đi ngược chiều nhau thì sẽ gặp nhau sau 3,5 giờ. Nếu đi cùng chiều thì ô tô sẽ đuổi kịp người đi bộ sau 4,5 giờ. Tính vận tốc của ô tô và của người đi bộ.

b) Một ô tô dự định đi từ tỉnh A tới tỉnh B trong một thời gian nhất định. Nếu chạy với vận tốc 45 km/h thì đến B sẽ chậm mất $\frac{1}{2}$ giờ. Nếu chạy với vận tốc 60 km/h thì đến B sớm hơn 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

• Tìm hiểu đề bài

Đây là loại bài toán chuyển động cùng chiều hoặc ngược chiều trong đó hoặc là ô tô và người đi bộ (câu a) hoặc là ô tô đi với hai vận tốc khác nhau (câu b).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi vận tốc ô tô là x km/h và vận tốc người đi bộ là y km/h. Nếu đi ngược chiều thì khi gặp nhau tổng quãng đường mà ô tô và người đi bộ đi được bằng quãng đường giữa hai tỉnh, còn nếu đi cùng chiều thì khi gặp nhau hiệu giữa quãng đường mà ô tô đi và người đi bộ đi được bằng quãng đường giữa hai tỉnh.

Từ đó mà lập hệ phương trình để giải.

b) Gọi quãng đường AB là x km và thời gian dự định là t giờ.
 Như thế thời gian đi lúc đầu là $\frac{x}{45}$, lúc sau là $\frac{x}{60}$. Thời gian lúc đầu bằng $t + \frac{1}{2}$, còn lúc sau là $t - \frac{3}{4}$. Từ đó mà lập hệ phương trình để giải.

● Cách giải

a) Gọi vận tốc ô tô là x km/h và vận tốc người đi bộ là y km/h (x, y dương).

Nếu đi ngược chiều thì gặp nhau sau 3,5 giờ hay $\frac{7}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{7}{2}x + \frac{7}{2}y = 126 \text{ hay } 7x + 7y = 252 \quad (1)$$

Nếu đi cùng chiều thì gặp nhau sau 4,5 giờ hay $\frac{9}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}y = 126 \text{ hay } 9x - 9y = 252 \quad (2)$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x + 7y = 252 \\ 9x - 9y = 252 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 28. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 32, y = 4$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy vận tốc ô tô là 32 km/h và vận tốc người đi bộ là 4 km/h.

b) Gọi quãng đường AB là x km và thời gian dự định là t giờ (x, t dương).

Nếu chạy với vận tốc 45 km/h thì tới B chậm mất $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{45} = t + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Nếu chạy với vận tốc 60 km/h thì tới B sớm hơn 45 phút tức $\frac{3}{4}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{60} = t - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{45} = t + \frac{1}{2} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{60} = t - \frac{3}{4} & (2). \end{cases}$$

Giải ra được $t = 4,5$ và $x = 225$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy quãng đường AB dài 225 km và thời gian dự định là 4 giờ rưỡi.

● Khai thác bài toán

Đề bài về chuyển động có thể ra dưới dạng sau:

Một xe lăn đường có chu vi bánh trước bằng 2,5 m, chu vi bánh sau bằng 4m. Sau khi xe lăn được một đoạn đường MN thì bánh trước đã lăn nhiều hơn bánh sau là 15 vòng. Tính số vòng mỗi bánh xe đã lăn và đoạn đường MN.

Cách giải như sau:

Gọi số vòng bánh trước lăn được là x và số vòng bánh sau lăn được là y (x, y nguyên dương, $x > y$).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 2,5x = 4y. \end{cases}$$

Giải ra được $x = 40$, $y = 25$, thỏa mãn điều kiện ở trên. Đoạn đường MN dài: $2,5 \cdot 40 = 100$ (m).

Vậy bánh trước đã lăn được 40 vòng, bánh sau lăn được 25 vòng và đoạn đường MN dài 100m.

Bài 15

a) Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau $\frac{4}{3}$ giờ sẽ đầy bể.

Nếu cho vòi thứ nhất chảy trong $\frac{1}{6}$ giờ và vòi thứ hai chảy trong $\frac{1}{5}$ giờ thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi nếu chảy riêng một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể ?

b) Hai công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 5 giờ 50 phút sẽ hoàn thành. Sau khi làm chung được 5 giờ thì một người phải đi làm việc khác nên người kia phải làm tiếp trong 2 giờ nữa mới xong công việc. Hỏi nếu một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu ?

● Tìm hiểu đề bài

Đây là loại bài toán về vòi nước chảy (câu a), về làm chung một công việc (câu b) mà cách giải tương tự.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi x và y theo thứ tự là thời gian vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình đầy bể thì trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể và cả hai vòi cùng chảy được $\frac{1}{\frac{4}{3}}$ bể. Từ đó mà lập hệ phương trình.

b) Gọi x, y là số giờ mà mỗi người làm một mình thì xong công việc. Cũng như câu a hãy tính xem trong 1 giờ mỗi người làm được bao nhiêu phần công việc và cả hai làm được bao nhiêu.

Từ đó mà lập ra hệ phương trình.

● Cách giải

a) Gọi số giờ theo thứ tự mà vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là x và y (x, y dương).

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể, cả hai vòi chảy được $\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ bể.

Trong $\frac{1}{6}$ giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{6x}$ bể, trong $\frac{1}{5}$ giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{5y}$ bể và cả hai chảy được $\frac{2}{15}$ bể.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 2$, $y = 4$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy vòi thứ nhất chảy một mình thì 2 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy một mình thì 4 giờ đầy bể.

b) Gọi số giờ mà mỗi người làm một mình thì xong công việc là x và y (x, y dương).

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc, cả hai người làm được $\frac{1}{5}$ công việc.

Trong 5 giờ làm chung cả hai làm được $5(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ và người thứ hai làm trong 2 giờ được $\frac{2}{y}$ công việc.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{35} = \frac{6}{35} \\ 5(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + \frac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

Giải ra tìm được: $x = 10$, $y = 14$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất phải 10 giờ, người thứ hai phải 14 giờ mới xong công việc.

Bài 16

a) Thau là hợp kim của đồng và kẽm. Hỏi trong miếng thau có

khối lượng 124,5 gam chứa bao nhiêu đồng và kẽm, biết rằng khối lượng riêng của đồng là 8900 kg/m^3 , của kẽm là 7100 kg/m^3 , của thau là 8300 kg/m^3 .

b) Tỷ lệ đồng trong loại quặng A nhỏ hơn tỷ lệ đồng trong loại quặng B là 15%. Trộn hai loại quặng này được một hỗn hợp có 50% đồng. Khối lượng của quặng A trong hỗn hợp là 25 kg, của quặng B trong hỗn hợp bằng $\frac{1}{2}$ khối lượng quặng A. Tính tỷ lệ phần trăm đồng trong từng loại quặng.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài thuộc loại toán về hợp kim (câu a), hỗn hợp (câu b). Câu a yêu cầu tìm khối lượng đồng và kẽm trong hợp kim 124,5 gam thau, biết khối lượng riêng của đồng, của kẽm và của hợp kim thau.

Câu b yêu cầu tìm tỷ lệ phần trăm đồng trong hai loại quặng có chứa đồng.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi x và y (kg) là khối lượng đồng và kẽm có trong hợp kim thau. Hãy tìm thể tích của đồng, của kẽm và của thau khi biết khối lượng và khối lượng riêng của nó (lưu ý: thể tích $(\text{m}^3) = \text{khối lượng (kg)} : \text{khối lượng riêng (kg/m}^3)$). Từ đó lập hệ phương trình để giải.

b) Gọi x (%) là tỷ lệ phần trăm đồng trong loại quặng A và y (%) là tỷ lệ phần trăm đồng trong quặng B và trong hỗn hợp. Từ đó lập hệ phương trình để giải.

● Cách giải

a) Gọi khối lượng đồng có trong thau là x kg và khối lượng kẽm có trong thau là y kg (x, y dương).

Thể tích của đồng là $\frac{x}{8900}$, của kẽm là $\frac{y}{7100}$ và của thau là $\frac{0,1245}{8300}$.

Do khối lượng thau là 124,5 gam hay 0,1245 kg nên ta có phương trình: $x + y = 0,1245$ (1)

Do thể tích thau bằng tổng thể tích của đồng và của kẽm nên ta có phương trình: $\frac{x}{8900} + \frac{y}{7100} = \frac{0,1245}{8300}$ (2)

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 0,1245 \\ \frac{x}{8900} + \frac{y}{7100} = \frac{0,1245}{8300} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + y = 0,1245 \\ \frac{x}{89} + \frac{y}{71} = \frac{0,1245}{83} \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 0,089$ kg; $y = 0,0355$ kg, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy trong thau có 0,089 kg đồng và 0,0355 kg kẽm.

b) Gọi tỉ lệ phần trăm đồng trong loại quặng A là $x\%$, trong loại quặng B là $y\%$ (x, y dương).

Khối lượng đồng trong loại quặng A là $25 \cdot x$ (kg).

Vì khối lượng quặng B bằng $\frac{1}{2}$ khối lượng quặng A nên khối lượng quặng B là 12,5 kg và khối lượng đồng trong quặng B là $12,5 \cdot y$ (kg).

Khối lượng quặng hỗn hợp do trộn hai loại quặng với nhau là $25 + 12,5 = 37,5$ (kg) và khối lượng đồng trong hỗn hợp là: $37,5 \cdot 50$ (kg).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 15 \\ 25x + 12,5y = 37,5 \cdot 50 = 1875. \end{cases}$$

Giải ra tìm được: $x = 45\%$, $y = 45\% + 15\% = 60\%$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy tỉ lệ phần trăm đồng trong quặng A là 45%, trong quặng B là 60%.

(Thử lại: khối lượng đồng trong quặng A là $25 \cdot 45\% = 11,25$ (kg),

trong quặng B là $12,5 \cdot 60\% = 7,5$ (kg), trong quặng hỗn hợp là $37,5 \cdot 50\% = 18,75$ (kg). Vậy $11,25 + 7,5 = 18,75$ (kg).

● **Khai thác bài toán**

Loại toán này có thể ra dưới dạng dung dịch. Chẳng hạn:

Xirô cam có hai loại dung dịch. Loại A chứa 30% cam, loại B chứa 3% cam. Nếu muốn trộn hai loại xirô trên để được một hỗn hợp dung dịch chứa 12% cam thì phải trộn theo tỉ lệ nào giữa loại A và loại B ?

Ta gọi khối lượng loại A là x , khối lượng loại B là y (x, y dương).
 Lượng cam chứa trong dung dịch A là $\frac{30x}{100}$, trong dung dịch B là $\frac{3y}{100}$, trong hỗn hợp là $\frac{12(x+y)}{100}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{30x}{100} + \frac{3y}{100} = \frac{12(x+y)}{100} \text{ hay } 30x + 3y = 12(x+y);$$

$10x + y = 4(x + y)$. Suy ra $6x = 3y$. Vậy tỉ lệ $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 17. Gọi d là đường thẳng $y = 2x + 2$ cắt trục hoành tại M và trục tung tại N .

- Viết phương trình của đường thẳng $d_1 // d$ và qua điểm $P(1; 0)$.
- d_1 cắt trục tung ở Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?
- Viết phương trình đường thẳng d_2 qua N và vuông góc với d .
- d_1 và d_2 cắt nhau tại A . Tìm tọa độ của A và tính khoảng cách AN .

Bài 18. Cho hai phương trình:

$$|x| = 2x - 1 \quad (1)$$

$$|x| = -x - 5 \quad (2)$$

a) Giải (1) và chứng tỏ (2) vô nghiệm.

b) Dùng đồ thị để tìm lại kết quả của câu hỏi trên.

Bài 19

Giải hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{3(2x+3)}{4} - \frac{3x+5y}{3-2x} = 1,5x - 1,25 \\ \frac{3(2x-y)}{y-4} + \frac{8y+7}{10} = 0,8y + 2,2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{(2-m)(m-1)}{m^4-1} \cdot x + \frac{(m-3)(m+1)}{m^3+1} \cdot y = 0 \\ \frac{(m-2)(m-1)}{m^4-1} \cdot x + \frac{2(m-3)(m+1)}{m^3+1} \cdot y = 3. \end{cases}$$

Bài 20. Giải hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} s^2 + t^2 = 2s \\ s^2 + 1 = 2st; \end{cases}$$

$$b') \begin{cases} |u+1| + |v-1| = 5 \\ |u+1| = 4v-4. \end{cases}$$

Bài 21. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} kx + ky = -3 \\ (1-k)x + y = 0. \end{cases}$$

a) Giải hệ với $k = 2$.

b) Tìm k để hệ có hai nghiệm đều âm.

Bài 22. Giải hệ:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 7y = 1 \\ x - 2y - 5z = 22 \\ 2x + 3y + 5z = -15; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 2 \\ \frac{yz}{y+z} = 3 \\ \frac{zx}{z+x} = 4. \end{cases}$$

Bài 23

a) Hai đám đất hình vuông có tổng chu vi là 88 m. Diện tích hình vuông thứ nhất lớn hơn diện tích hình vuông thứ hai là 44 m^2 . Tính cạnh của mỗi đám đất.

b) Số trứng ở ổ thứ nhất gấp đôi số trứng ở ổ thứ hai. Nếu lấy bớt 20 quả ở ổ thứ nhất và bỏ thêm 10 quả vào ổ thứ hai thì số trứng ở ổ thứ nhất gấp $\frac{4}{3}$ lần số trứng ở ổ thứ hai. Tính số trứng ban đầu ở mỗi ổ.

Bài 24

a) Hai tổ công nhân A và B phải quét vôi và sơn cửa một tòa nhà cao tầng trong 12 ngày thì xong. Họ làm chung trong 8 ngày thì tổ A được điều đi nơi khác còn tổ B phải làm tiếp trong 5 ngày nữa mới xong. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi tổ phải làm trong mấy ngày (biết rằng năng suất làm của hai tổ như nhau) ?

b) Giải thích tại sao bài toán sau có đến 3 đáp số: Số nhà của bạn Khoa là một số có hai chữ số mà khi cộng với tích hai chữ số đó thì được bình phương của tổng hai chữ số của nó.

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 17 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước tiên tính tọa độ của M và N.

a) Đường thẳng $d_1 // d$ nên hệ số góc của d_1 bằng hệ số góc của d , do đó phương trình của d_1 có dạng $y = 2x + b_1$. Hãy tìm b_1 .

b) Tính tọa độ của Q rồi chứng tỏ rằng tứ giác MNPQ là hình thoi.

c) Lưu ý hai đường thẳng d_2 và d vuông góc thì tích hai hệ số góc $a_2 \cdot a = -1$.

d) Tọa độ của giao điểm A là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của d và phương trình của d_2 . Để tính AN từ A hạ AH vuông góc với trục tung rồi tính cạnh huyền AN của tam giác vuông AHN.

• Cách giải

Tọa độ của M là $(-1; 0)$, của N là $(0; 2)$.

a) Đường thẳng $d_1 // d$ nên có hệ số góc bằng 2 và có dạng $y = 2x + b_1$.

Thay tọa độ của $P(1; 0)$ vào phương trình này ta được:

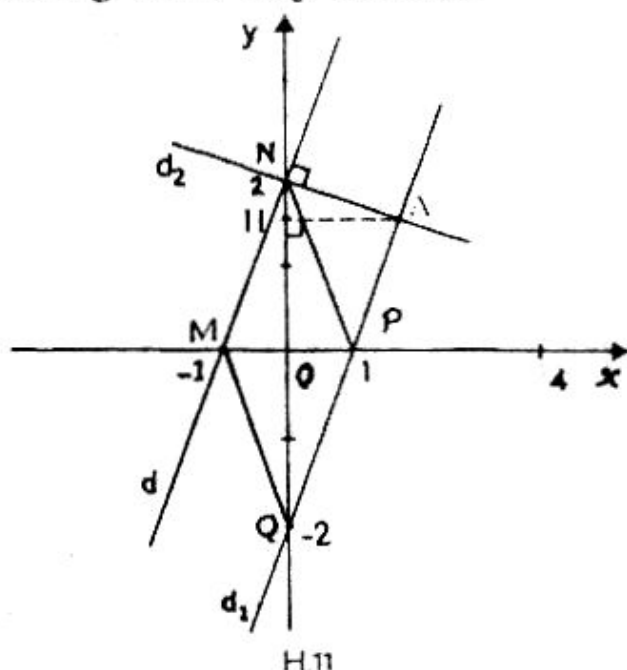
$$0 = 2 \cdot 1 + b_1, \text{ suy ra } b_1 = -2.$$

Vậy phương trình đường thẳng d_1 là $y = 2x - 2$.

b) Tọa độ của Q là $(0; -2)$.

Ta thấy rằng:

Hai điểm M và P đối xứng nhau qua O nên $OM = OP$. Hai điểm N và Q cũng đối xứng nhau qua O nên $ON = OQ$. Tứ giác MNPQ có hai đường chéo



MP và QN cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường và vuông góc với nhau tại O nên MNPQ là hình thoi.

c) Đường thẳng d_2 có dạng $y = a_2x + b_2$ (1). Do $d_2 \perp d$ nên tích hai hệ số góc $a_2 \cdot a = -1$ hay $2 \cdot a_2 = -1$, suy ra $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Do d_2 qua điểm N (0; 2) nên tọa độ của N thỏa mãn phương trình (1) tức là $2 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b_2$ hay $b_2 = 2$.

Vậy phương trình của d_2 là $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

d) Tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} y = 2x - 2 & (d_1) \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 & (d_2) \end{cases}$$

Giải ra được tọa độ của A là $(x = \frac{8}{5}, y = \frac{6}{5})$.

Từ A hạ AH vuông góc với trục tung. Xét tam giác vuông AHN theo định lý Pitago ta có:

$$AN^2 = HN^2 + HA^2 = (2 - \frac{6}{5})^2 + (\frac{8}{5})^2 = \frac{16}{25} + \frac{64}{25} = \frac{80}{25}$$

$$\text{Suy ra } AN = \frac{\sqrt{16 \cdot 5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Bài 18 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy xét các trường hợp $x > 0$, $x < 0$ để có các dạng của phương trình (1) và giải nó.

Đối với phương trình (2) cũng xét như vậy để chứng tỏ (2) vô nghiệm.

b) Hãy vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = 2x - 1$ rồi tìm hoành độ giao điểm của chúng. Lưu ý đồ thị hàm số $y = |x|$ là hai tia phân giác của hai góc phần tư I và II nằm phía trên trục hoành vì $y \geq 0$.

Sau đó vẽ đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = -x - 5$ để thấy

rằng chúng không cắt nhau.

• Cách giải

a) Nếu $x \geq 0$ thì $|x| = x$ và phương trình (1) có dạng $x = 2x - 1$ hay $x = 1$.

Nếu $x < 0$ thì $|x| = -x$ và phương trình (1) có dạng $-x = 2x - 1$, hay $x = \frac{1}{3}$ (loại vì ở đây $x < 0$).

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 1$.

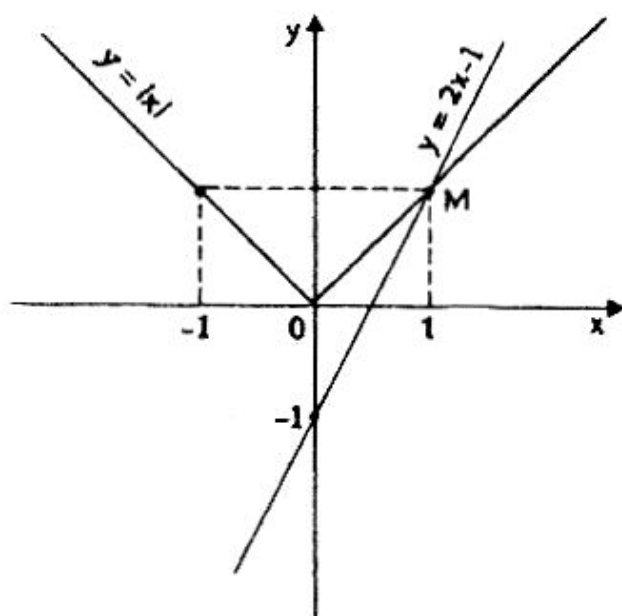
+ Nếu $x \geq 0$ thì $x = -x - 5$ hay $x = -2,5$ (loại vì ở đây $x \geq 0$).

Nếu $x < 0$ thì $-x = -x - 5$ hay $0 = -5$ (vô lý).

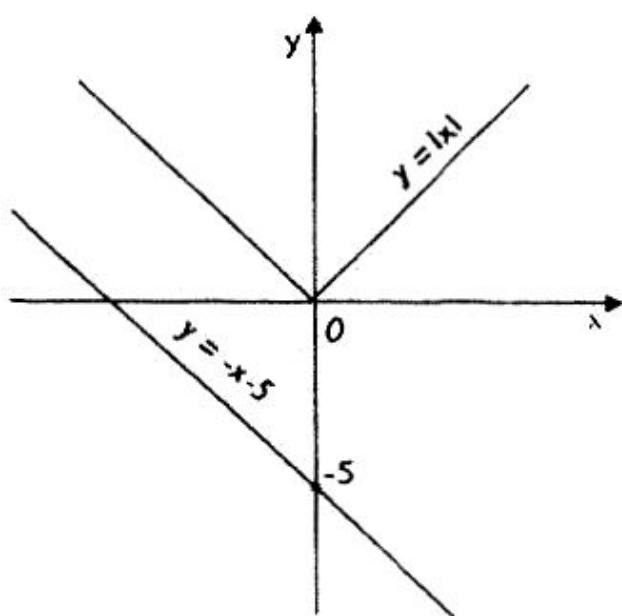
Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

b) Ta vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = 2x - 1$. Nếu $x \geq 0$ thì $y = x$ và nếu $x < 0$ thì $y = -x$ nên đồ thị hàm số $y = |x|$ là hai tia phân giác của hai góc phần tư I và II nằm phía trên trục hoành vì $y \geq 0$. Còn đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ là đường thẳng qua điểm có tung độ gốc là -1 .

Hai đường thẳng này cắt nhau tại M có hoành độ $x = 1$. Đó là nghiệm của phương trình (1) đã cho.



H.12



H.13

Lý luận tương tự ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = |x|$ và $y = -x - 5$ (hình 13). Hai đồ thị này không cắt nhau (song song với nhau). Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Bài 19 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Sau khi viết điều kiện để hệ có nghĩa hãy quy đồng mẫu của từng phương trình và rút gọn để được một hệ đơn giản. Lưu ý đổi dấu của phân thức thứ hai của phương trình thứ nhất để làm xuất hiện hằng đẳng thức $(2x + 3)(2x - 3)$. Cuối cùng cần đối chiếu giá trị tìm được của hai ẩn với điều kiện đã nêu.

b) Hãy dùng ẩn phụ vì hệ số của x đối nhau và hệ số của y ở phương trình thứ hai gấp đôi hệ số của nó ở phương trình đầu. Từ đó sẽ được một hệ đơn giản.

• Cách giải

a) Điều kiện để hệ có nghĩa: $x \neq 1,5$; $y \neq 4$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta được hệ:

$$\begin{cases} 3(2x + 3)(2x - 3) + 4(3x + 5y) = (1,5x - 1,25) \cdot 4(2x - 3) \\ 3(2x - y) \cdot 10 + (8y + 7)(y - 4) = (0,8y + 2,2) \cdot 10(y - 4) \end{cases}$$

hay $\begin{cases} 3(4x^2 - 9) + 12x + 20y = (6x - 5)(2x - 3) \\ 30(2x - y) + 8y^2 - 32y + 7y - 28 = (8y + 22)(y - 4) \end{cases}$

Sau khi rút gọn sẽ được hệ đơn giản:

$$\begin{cases} 40x + 20y = 42 \\ 60x - 45y = -60 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 20x + 10y = 21 \\ 20x - 15y = -20 \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = \frac{41}{25}$ và $y = \frac{23}{100}$. Cả hai giá trị này thỏa

mãn điều kiện ở trên.

Vậy hệ có nghiệm là $(x = \frac{41}{25}; y = \frac{23}{100})$.

b) Đặt $\frac{(m-2)(m-1)}{m^4-1} \cdot x = A$; $\frac{(m-3)(m+1)}{m^3+1} \cdot y = B(*)$. Hệ đã cho

trở thành: $\begin{cases} -A + B = 0 \\ A + 2B = 3. \end{cases}$ Giải ra được $A = 1, B = 1$.

Thay vào (*) được:

$$x = \frac{m^3 + m^2 + m + 1}{m - 2}; y = \frac{m^2 - m + 1}{m - 3},$$

với điều kiện $m \neq 2, m \neq 3$ và $m \neq \pm 1$.

Bài 20 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Chuyển tất cả số hạng của vế phải sang vế trái rồi cộng từng vế hai phương trình sẽ được tổng của hai hàng đẳng thức dạng $(A - B)^2$ bằng 0. Từ đó mà tìm được s và t.

b*) Xét phương trình thứ hai $|u + 1| = 4v - 4$ ta có ngay $4v - 4 > 0$. Do đó hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} |u + 1| + v - 1 = 5 \\ |u + 1| = 4v - 4. \end{cases}$$

Giải ra tìm được v, rồi thay vào phương trình thứ nhất để tìm u.

• Cách giải

a) Hệ đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} s^2 + t^2 - 2s = 0 \\ s^2 + 1 - 2st = 0. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình được:

$$(s-1)^2 + (s-t)^2 = 0 \quad (*)$$

Do $(s-1)^2 \geq 0$ và $(s-t)^2 \geq 0$ với mọi s và t nên tổng $(*) \geq 0$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $s = t = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x = 1, t = 1)$.

b*) Từ phương trình thứ hai ta có:

$$4v - 4 \geq 0 \quad \text{vì} \quad |u + 1| \geq 0$$

Như thế hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} |u+1| + v - 1 = 5 \\ |u+1| = 4v - 4 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} |u+1| = -v + 6 \\ |u+1| = 4v - 4 \end{cases}$$

Suy ra $-v + 6 = 4v - 4$; $5v = 10$; $v = 2$.

Thay giá trị của v vào phương trình thứ nhất được:

$$|u+1| = 4. \text{ Từ đó: } u+1 = \pm 4.$$

Suy ra $u = 3$ nếu $u+1 = 4$ và $u = -5$ nếu $u+1 = -4$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(u = 3, v = 2)$ và $(u = -5, v = 2)$.

Bài 21 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Thay $k = 2$ vào hệ đã cho để được một hệ mà các hệ số của ẩn đều là số. Từ đó giải được dễ dàng.

b) Rút y từ phương trình thứ hai rồi thế vào phương trình thứ nhất và biến đổi sẽ được phương trình đơn giản $k^2x = -3$. Từ đó biện luận theo $k \neq 0$ để tìm k khi $x < 0$ và $y < 0$ theo đề bài.

• Cách giải

a) Thay $k = 2$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -3 \\ -x + y = 0. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = y = -\frac{3}{4}$.

b) Rút y từ phương trình thứ hai được $y = (k-1)x$ thế vào phương trình thứ nhất được: $kx + kx(k-1) = -3$; $kx + k^2x - kx = -3$, hay $k^2x = -3$.

Nếu $k \neq 0$ thì $x = -\frac{3}{k^2}$ luôn âm với mọi $k \neq 0$. Do đó muốn $y < 0$

tức là $(k-1)x < 0$ thì chỉ cần $k-1 > 0$ tức là $k > 1$.

Vậy muốn hệ đã cho có hai nghiệm đều âm thì $k > 1$.

*** Bài 22 • Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Do ở hai phương trình cuối có $-5z$ và $5z$ còn ở phương trình

thứ nhất không có ẩn z nên hãy cộng từng vế ba phương trình đã cho sẽ được một hệ hai ẩn x và y mà ta có thể giải dễ dàng.

b) Do $\frac{x+y}{xy}$ có thể viết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ nên hệ đã cho có thể viết dưới dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$. Từ đó mà tìm được x, y, z .

● Cách giải

a) Cộng từng vế ba phương trình đã cho ta được:

$$8x + 8y = 8 \quad \text{hay} \quad x + y = 1.$$

Vậy ta có hệ phương trình hai ẩn sau:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 3, y = -2$. Thay x và y vào phương trình thứ hai được $z = -3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x = 3, y = -2, z = -3)$.

b) Với điều kiện $x, y, z \neq 0$ hệ đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{3} \\ \frac{z+x}{zx} = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} & (2) \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} & (3). \end{cases}$$

Cộng từng vế ba phương trình cuối này ta được:

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}, \quad \text{hay} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{24} \quad (4)$$

Lần lượt trừ từng vế (4) với (1), với (2), với (3) ta có:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{24}, \frac{1}{x} = \frac{5}{24}, \frac{1}{y} = \frac{7}{24}.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x = \frac{24}{5}, y = \frac{24}{7}, z = 24)$.

Bài 23 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi cạnh đám đất thứ nhất là x mét, cạnh đám đất thứ hai là y mét ($x > y > 0$). Diện tích hai đám đất là x^2 và y^2 , chu vi hai đám đất là $4x$ và $4y$. Từ đó mà lập hệ phương trình để giải.

b) Gọi số trứng ở ổ thứ nhất và ở ổ thứ hai theo thứ tự là x và y ($x > y > 0$). Tỉ số giữa số trứng ở hai ổ sau khi thêm bớt

là $\frac{x - 20}{y + 10} = \frac{4}{3}$. Từ đó mà lập hệ phương trình để giải.

• Cách giải

a) Gọi cạnh đám đất thứ nhất và đám đất thứ hai theo thứ tự là x mét và y mét ($x > y > 0$).

Theo bài ra ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 44 \\ 4x + 4y = 88 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 44 \\ x + y = 22. \end{cases}$$

Hệ đã cho có thể viết:

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 44 \\ x + y = 22. \end{cases} \quad \text{Từ đó } x - y = 2$$

Suy ra $x = 12, y = 10$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy cạnh đám đất thứ nhất là 12 m, cạnh đám đất thứ hai là 10 m.

b) Gọi số trứng ở ổ thứ nhất và ở ổ thứ hai theo thứ tự là x và y ($x > y$ và x, y nguyên dương).

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \frac{x - 20}{y + 10} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Giải ra tìm được $x = 100$, $y = 50$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy rổ trứng thứ nhất có 100 quả, rổ trứng thứ hai có 50 quả.

Bài 24 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi số ngày để tổ A và tổ B theo thứ tự một mình làm xong công việc là x và y (x, y dương). Trong 1 ngày tổ A làm được $\frac{1}{x}$ công việc, tổ B làm được $\frac{1}{y}$ công việc, cả hai làm được $\frac{1}{12}$ công việc.

Từ đó mà lập hệ phương trình để giải.

b) Gọi $\overline{ab}$ là số phải tìm. Theo bài ra ta có $10a + b + ab = (a + b)^2$ hay $10a + b = a^2 + ab + b^2$. Phương trình này có thể viết: $b^2 + b(a - 1) = a(10 - a)$. Từ đó:

$$b^2 \leq a(10 - a) \leq \left(\frac{a + 10 - a}{2} \right)^2 = 25. \text{ Suy ra } b \leq 5. \text{ Lần lượt}$$

thay các giá trị của b để tìm a sẽ tìm được ba đáp số.

• Cách giải

a) Gọi số ngày để tổ A và tổ B theo thứ tự một mình làm xong công việc là x và y (x, y dương).

Trong 1 ngày tổ A làm được $\frac{1}{x}$ công việc, tổ B làm được $\frac{1}{y}$ công việc, cả hai tổ làm được $\frac{1}{12}$ công việc, nên ta có phương trình
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Hai tổ làm chung trong 8 ngày được $\frac{8}{12}$ hay $\frac{2}{3}$ công việc.

Do đó còn lại $\frac{1}{3}$ công việc do tổ B phải làm trong 5 ngày nên ta có phương trình $\frac{1}{3} = \frac{5}{y} \quad (2)$. Vậy theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} = \frac{5}{y} \end{cases}$$

Giải ra được $y = 15$, $x = 60$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy nếu làm một mình thì tổ A phải làm trong 60 ngày, tổ B phải làm trong 15 ngày.

b*) Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ ($0 < a \leq 9$, $0 < b \leq 9$). Theo bài ra ta có phương trình hai ẩn:

$$10a + b + ab = (a + b)^2$$

hay $10a + b = (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 \quad (*)$

Ta phải có điều kiện $b \neq 0$ (vì nếu $b = 0$ thì từ $(*)$ ta có $a = 0$, trái với điều kiện ở trên). Do đó $(*)$ có thể viết:

$$b^2 + ab - b = 10a - a^2, \text{ hay } b^2 + b(a - 1) = a(10 - a).$$

Ta thấy rằng:

$$b^2 \leq a(10 - a) \leq \left(\frac{a + 10 - a}{2} \right)^2 = 25. \text{ Suy ra } b \leq 5.$$

Thay b lần lượt bằng 1; 2; 3; 4; 5 vào $a(10 - a - b) = b(b - 1)$ rồi phân tích vế trái thành một tích của hai số nhỏ hơn 10, ta được, với:

$$b = 1 \quad \text{thì} \quad a(9 - a) = 0 \Rightarrow a = 9$$

$$b = 2 \quad \text{thì} \quad a(8 - a) = 2 = 1.2 \Rightarrow \text{không có } a$$

$$b = 3 \quad \text{thì} \quad a(7 - a) = 6 = 1.6 = 2.3 \Rightarrow a = 1 \text{ hoặc } a = 6$$

$$b = 4 \quad \text{thì} \quad a(6 - a) = 12 = 2.6 = 3.4 \Rightarrow \text{không có } a$$

$$b = 5 \quad \text{thì} \quad a(5 - a) = 20 = 4.5 \Rightarrow \text{không có } a.$$

Tóm lại có ba số 91; 63 và 13 thỏa mãn bài ra.

VIII. HÀM SỐ BẬC HAI. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

HÀM SỐ BẬC HAI. TÍNH CHẤT VÀ ĐỒ THỊ

Bài 1

a) Cho các hàm số $y = f(x) = 5x^2$ và $y = f(t) = -2t^2$.

Hãy tính $f(x)$ khi $x = \pm 2$, $x = \pm 3$ và tính $f(t)$ khi $t = \pm 1$, $t = \pm 5$.

Có nhận xét gì về các giá trị của $f(x)$ và $f(t)$ tìm được? Khi nào thì $f(x)$ và $f(t)$ đều bằng 0?

b) Cho hàm số $y = ax^2$. Tìm a để đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; -1)$ và vẽ đồ thị của nó.

• Tìm hiểu đề bài

Đây là hàm số bậc hai dạng tổng quát $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Yêu cầu của câu a là tìm giá trị của $f(x)$ theo các giá trị đối nhau của x và tìm giá trị của $f(t)$ theo các giá trị đối nhau của t để rút ra nhận xét.

Yêu cầu của câu b là tìm hệ số a của hàm số $y = ax^2$ và vẽ đồ thị.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Lưu ý các tính chất của hàm số $y = ax^2$ là xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và nếu $a > 0$ thì nó nghịch biến trong $\mathbb{R}_-$, đồng biến trong $\mathbb{R}_+$, bằng 0 khi $x = 0$, còn nếu $a < 0$ thì ngược lại tức là đồng biến trong $\mathbb{R}_-$, nghịch biến trong $\mathbb{R}_+$, bằng 0 khi $x = 0$.

Đồ thị là một đường cong gọi là parabol có đỉnh là điểm gốc O , có trục đối xứng là trục tung, nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$.

a) Hãy thay các giá trị đối nhau của x và của t vào để tính $f(\pm 2)$, $f(\pm 3)$, $f(\pm 1)$, $f(\pm 5)$ rồi nhận xét các giá trị $f(2)$ và $f(-2)$, $f(3)$ và $f(-3)$, $f(1)$ và $f(-1)$, $f(5)$ và $f(-5)$.

Nói $f(x) = 0$ tức là $5x^2 = 0$, $f(t) = 0$ tức là $-2t^2 = 0$, từ đó mà tìm giá trị của x và của t .

b) Đồ thị qua điểm $M(2; -1)$ nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình $y = ax^2$, từ đó tìm được hệ số a .

• Cách giải

a) Với $y = f(x) = 5x^2$ ta có:

$$f(2) = 5.4 = 20, f(-2) = 5.4 = 20, \text{ suy ra } f(2) = f(-2);$$

$$f(3) = 5.9 = 45, f(-3) = 5.9 = 45, \text{ suy ra } f(3) = f(-3).$$

Với $y = f(t) = -2t^2$ ta có:

$$f(1) = -2, f(-1) = -2, \text{ suy ra } f(1) = f(-1);$$

$$f(5) = -2.25 = -50, f(-5) = -2.25 = -50, \text{ suy ra } f(5) = f(-5).$$

Nhận xét: nếu x lấy hai giá trị đối nhau thì hai giá trị tương ứng của $f(x)$ như nhau, tức là với hai giá trị đối nhau của x thì chỉ có một giá trị tương ứng của $y = f(x)$.

Tương tự với hai giá trị đối nhau của t thì chỉ có một giá trị tương ứng của $y = f(t)$.

Khi $f(x) = 0$ tức là $5x^2 = 0$ thì $x = 0$

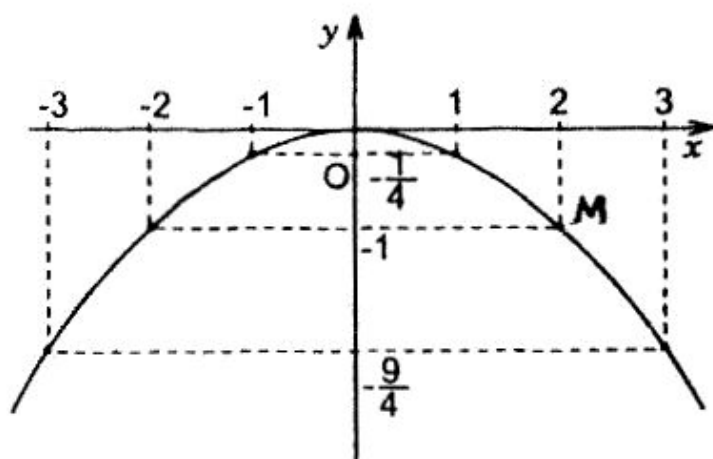
Khi $f(t) = 0$ tức là $-2t^2 = 0$

thì $t = 0$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; -1)$ nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình $y = ax^2$ hay $-1 = a.4$.

Suy ra $a = -\frac{1}{4}$. Ta được hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Đồ thị hàm số này là một parabol có đỉnh là điểm gốc



H.14

tọa độ, trục đối xứng là trục tung và nằm phía dưới

trục hoành vì $a = -\frac{1}{4} < 0$.

Để vẽ đồ thị ta lập bảng sau:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = -\frac{1}{4}x^2$	...	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	...

Đồ thị như ở hình 14.

● Khai thác bài toán

Nếu phải tìm hệ số a của hàm số $y = ax^2$ khi đồ thị của nó qua điểm $B(2; 1)$ thì ta có:

$1 = a.4$, suy ra $a = \frac{1}{4}$. Ta được hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$. Đồ thị hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ là hai parabol cùng chung đỉnh là gốc tọa độ O và đối xứng qua trục hoành, nhận trục tung làm trục đối xứng chung.

Hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có giá trị nhỏ nhất là 0 , hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ có giá trị lớn nhất là 0 . Ta còn nói rằng parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ đi qua điểm cực tiểu là gốc tọa độ O và parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ đi qua điểm cực đại là gốc O .

Bài 2. Vẽ trên cùng một hệ trục các parabol $y = x^2$, $y = 2x^2$ và các đường thẳng $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

a) Các parabol cắt mỗi đường thẳng trên tại mấy điểm? Tìm tọa độ các giao điểm đó.

b) Khi nào thì đường thẳng $x = m$ cắt hai parabol trên? Tìm tọa độ các giao điểm.

c) Có nhận xét gì về vị trí tương đối của hai parabol trên và parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ đối với trục tung?

• **Tìm hiểu đề bài**

Yêu cầu của đề bài là vẽ trên cùng một hệ trục hai parabol và ba đường thẳng rồi tìm tọa độ các giao điểm.

Sau đó phải tìm giá trị của m để đường thẳng $x = m$ cắt hai parabol, cuối cùng nhận xét về vị trí tương đối của 3 parabol $y = x^2$, $y = 2x^2$ và $y = \frac{1}{2}x^2$ đối với trục tung.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hãy lập bảng các giá trị của x và y để vẽ hai parabol đã cho. Còn ba đường thẳng $x = -1$, $x = 0$ và $x = 2$ đều song song với trục tung, riêng đường thẳng $x = 0$ trùng với trục tung.

b) Khi đường thẳng $x = m$ cắt hai parabol thì tại giao điểm ta có: $y = m^2$ và $y = 2m^2$. Từ đó mà xác định giá trị của m .

c) Với ba đường parabol này nếu $a > 1$, và $a < 1$ thì hai nhánh như thế nào so với parabol $y = x^2$ và đối với trục tung (thu hẹp, mở rộng, gần hoặc xa trục tung).

• **Cách giải**

a) Ta lập bảng các giá trị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = 2x^2$:

x	...	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
$y = x^2$	...	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	...
$y = 2x^2$	...	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	...

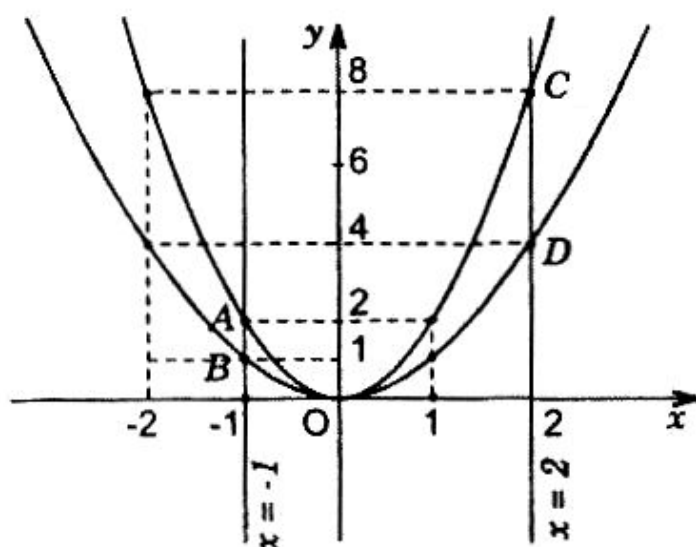
Đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ song song với trục tung, còn đường thẳng $x = 0$ trùng với trục tung.

Các đồ thị vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ như ở hình 15.

Parabol $y = x^2$ và $y = 2x^2$ cắt đường thẳng $x = -1$ tại điểm B ($x = -1$, $y = 1$) và tại điểm A ($x = -1$, $y = 2$). Chúng cắt đường thẳng $x = 2$ theo thứ tự tại điểm D ($x = 2$, $y = 4$) và tại điểm

C ($x = 2, y = 8$) và cắt đường thẳng $x = 0$ tức là trục tung tại một điểm là gốc tọa độ O.

b) Khi đường thẳng $x = m$ cắt parabol $y = x^2$ thì tại giao điểm ta có $y = m^2$, khi cắt parabol $y = 2x^2$ thì tại giao điểm ta có $y = 2m^2$. Như vậy với m bất kì ta luôn tìm được một giá trị duy nhất $y = m^2$ (đối với parabol $y = x^2$) và $y = 2m^2$ (đối với parabol $y = 2x^2$). Các giao điểm M (m, m^2) thuộc parabol $y = x^2$ và N ($m, 2m^2$) thuộc parabol $y = 2x^2$ cũng thuộc đường thẳng $x = m$.



H. 15

c) So với parabol $y = x^2$ thì hai nhánh của parabol $y = 2x^2$ ($a > 1$) thu hẹp hơn và gần trục tung hơn, còn hai nhánh của parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ ($a < 1$) thì mở rộng hơn và xa trục tung hơn.

● Khai thác bài toán

Nếu phải vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ ba parabol $y = -x^2$, $y = -2x^2$ và $y = -\frac{1}{2}x^2$ thì cả ba parabol này theo thứ tự đối xứng với các parabol $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ đối với trục hoành và so với parabol $y = -x^2$ thì hai nhánh của parabol $y = -2x^2$ ($|a| > 1$) thu hẹp hơn và gần trục tung hơn, hai nhánh của parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ ($|a| < 1$) mở rộng hơn và xa trục tung hơn.

Nếu không vẽ thêm các đường thẳng $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ mà là các đường thẳng $y = -1$, $y = 0$, $y = 2$ thì các giao điểm với hai parabol $y = x^2$ và $y = 2x^2$ sẽ như thế nào?

Rõ ràng hai đường thẳng $y = -1$ và $y = 2$ là song song với trục hoành còn đường thẳng $y = 0$ trùng với trục hoành cho nên: đường thẳng $y = -1$ không cắt hai parabol $y = x^2$ và $y = 2x^2$ (vì đường thẳng $y = -1$ nằm dưới trục hoành), đường thẳng $y = 0$ tức là trục hoành chỉ cắt hai parabol tại cùng một điểm là gốc tọa độ O , còn đường thẳng $y = 2$ cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm có tọa độ $(x = \pm\sqrt{2}, y = 2)$, cắt parabol $y = 2x^2$ tại hai điểm có tọa độ $(x = \pm 1, y = 2)$.

Bài 3. Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị ba hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$,

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 2, y = \frac{1}{3}x^2 - 2.$$

a) Có nhận xét gì về đồ thị ba hàm số này so với trục tung ?

b) Với giá trị nào của x thì các hàm số trên nhận giá trị nhỏ nhất ?

Ba đồ thị trên có các điểm cực tiểu là những điểm nào ?

● **Tìm hiểu đề bài**

Theo đề bài ta phải vẽ đồ thị ba hàm số dạng $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 - c$ (với $a > 0$) trên cùng một hệ trục. Từ các parabol vẽ được hãy rút ra nhận xét về vị trí đối với trục tung và các điểm cực tiểu của ba parabol tương ứng.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hãy lập bảng các giá trị của ba hàm số, qua đó nhận xét với cùng một giá trị của x thì tung độ ba hàm số như thế nào ?

So với parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ thì các parabol còn lại dời đi bao nhiêu

đơn vị theo trục tung, dời lên trên hoặc xuống dưới ?

b) Các hàm số đã cho nhận giá trị nhỏ nhất khi $x = 0$, còn ba parabol tương ứng đi qua các điểm cực tiểu có hoành độ bằng 0. Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số và tung độ của các điểm cực tiểu.

• Cách giải

Ta lập bảng các giá trị của ba hàm số:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = \frac{1}{3}x^2$	...	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	...
$y = \frac{1}{3}x^2 + 2$	...	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	5	...
$y = \frac{1}{3}x^2 - 2$	...	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	...

Đồ thị như ở hình 16.

a) Nhìn vào ba đồ thị ta thấy rằng:

Parabol $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$

chính là parabol $y = \frac{1}{3}x^2$

dời đi 2 đơn vị theo trục

tung lên phía trên, parabol

$y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ chính là parabol

$y = \frac{1}{3}x^2$ dời đi 2 đơn vị theo

trục tung xuống phía dưới.

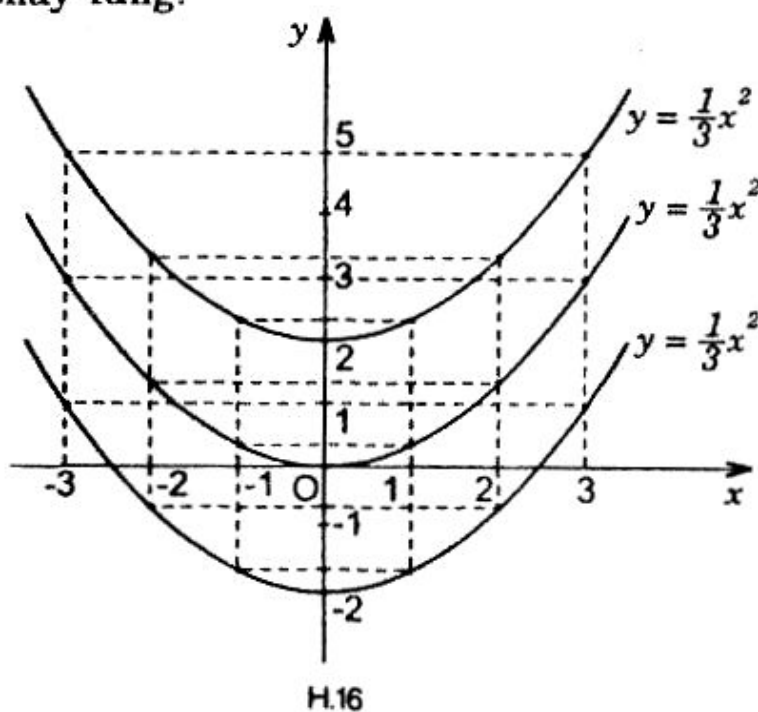
Đỉnh của parabol $y = \frac{1}{3}x^2$ là

điểm gốc tọa độ O, của parabol $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$ là điểm (0;2), của

parabol $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ là điểm (0;-2).

Cả ba đều có chung một trục đối xứng là trục tung.

b) Cả ba hàm số đều nhận giá trị nhỏ nhất khi $x = 0$. Giá trị



nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ là 0, của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$ là 2, của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ là -2.

Các điểm cực tiểu của ba parabol là ba đỉnh của chúng.

• Khai thác bài toán

Nếu vẽ đồ thị hàm số tổng quát $y = ax^2 + bx + c$ thì ta sẽ được một parabol có trục đối xứng song song với trục tung và có đỉnh là điểm $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

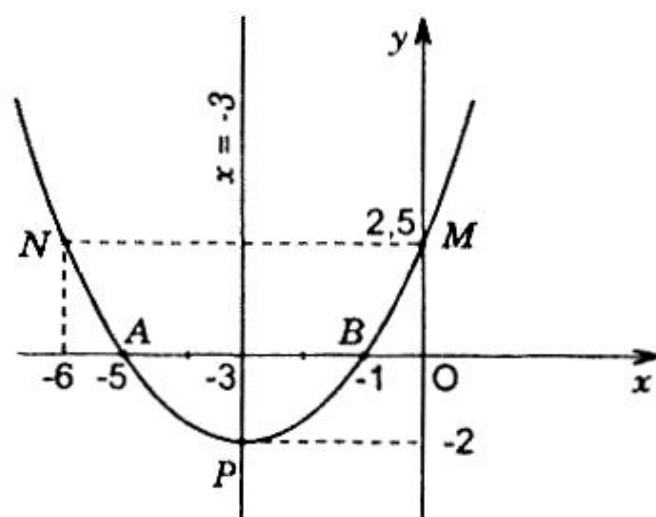
Parabol này quay bề lõm về phía trên nếu $a > 0$ và phía dưới nếu $a < 0$.

Chẳng hạn muốn vẽ đồ thị hàm số $y = 0,5x^2 + 3x + 2,5$ ta lưu ý đến một số điểm đặc biệt của nó:

- Giao điểm của parabol với trục tung, đó là điểm $M(0; 2,5)$

- Điểm thứ hai của parabol có tung độ bằng 2,5; đó là điểm $N(-6; 2,5)$

- Giao điểm của parabol với trục hoành; đó là điểm $A(-5; 0)$ và $B(-1; 0)$.



H.17

Parabol có đỉnh là điểm $P(x = -\frac{b}{2a} = -3, y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -2)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -3$ song song với trục tung (hình 17).

Bài 4. Giải phương trình bậc hai khuyết:

a) $\frac{5}{9}x^2 - 3380 = 0$; $8x^2 - 0,75 = 0,53$; $2\frac{1}{4} - \frac{2}{9}x^2 = 2\frac{1}{8}$.

b) $x^2 - 4a^2 - 12ab - 9b^2 = 0$; $\frac{a+b}{a-b}x^2 - a^2 = -b^2$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là loại phương trình bậc hai khuyết dạng $ax^2 + c = 0$ (dạng đủ là $ax^2 + bx + c = 0$).

a) Các hệ số đều là số hữu tỉ; b) Các hệ số là chữ.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Chuyển tất cả số hạng đã biết về một vế để có dạng $ax^2 = -c$.

Từ đó $x^2 = -\frac{c}{a}$. Nếu a và c khác dấu thì phương trình có hai nghiệm là $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$, nếu a và c cùng dấu thì phương trình vô nghiệm.

b) Cũng làm như trên, để số hạng chứa ẩn x ở một vế.

● **Cách giải**

a) $\frac{5}{9}x^2 = 3380$. Suy ra $x^2 = 3380 : \frac{5}{9} = 676,9$.

Vậy $x_{1,2} = \pm 26,3 = \pm 78$;

$8x^2 = 0,53 + 0,75 = 1,28$. Suy ra $x^2 = 0,16$.

Vậy $x_{1,2} = \pm 0,4$.

$2\frac{1}{9}x^2 = 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{8} = \frac{9}{4} - \frac{17}{8} = \frac{1}{8}$. Suy ra $x^2 = \frac{1}{8} : \frac{2}{9} = \frac{9}{16}$.

Vậy $x_{1,2} = \pm \frac{3}{4}$.

b) $x^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$

Vậy $x_{1,2} = \pm(2a + 3b)$.

$$\frac{a+b}{a-b}x^2 = a^2 - b^2. \text{ Suy ra } x^2 = (a^2 - b^2) : \frac{a+b}{a-b}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)(a-b)}{a+b} = (a-b)^2. \text{ Vậy } x_{1,2} = \pm(a-b).$$

● Khai thác bài toán

Phương trình bậc hai khuyết có dạng $ax^2 + c = 0$ có thể cho

với mẫu như $\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10$ (1) hoặc dưới dạng hằng

đẳng thức như:

$$(a+y)(a+2y) - (a-y)(a-2y) = (a+3y)^2 - a^2 - 9b^2 \quad (2).$$

Phương trình (1) có thể giải bằng cách quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

MC : 24, ta có:

$$9x^2 - 33 + 148 - 4x^2 = 240; 5x^2 + 115 = 240.$$

$$\text{Từ đó } 5x^2 = 125; x^2 = 25. \text{ Vậy } x_{1,2} = \pm 5.$$

Phương trình (2) sau khi thực hiện phép tính trở thành:

$$a^2 + 2ay + ay + 2y^2 - a^2 + 2ay + ay - 2y^2$$

$$= a^2 + 6ay + 9y^2 - a^2 - 9b^2 \quad \text{hay}$$

$$6ay = 6ay + 9y^2 - 9b^2. \text{ Từ đó } 9y^2 = 9b^2; y^2 = b^2.$$

$$\text{Vậy } y_{1,2} = \pm b.$$

Bài 5. Giải phương trình bậc hai khuyết:

$$\text{a) } \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3};$$

$$\text{b) } \frac{2}{y^2-4} + \frac{y-4}{y^2+2y} = \frac{1}{y^2-2y}.$$

● Tìm hiểu đề bài

Các phương trình trên đều chứa ẩn ở mẫu nên phải đặt ngay

điều kiện để mẫu khác 0, tức là để phương trình có nghĩa. Sau khi giải xong phải đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện đã nêu.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Trước hết hãy tìm điều kiện để phương trình có nghĩa. Lấy MC là $x^2 - 9$ rồi thực hiện phép tính để cuối cùng có dạng $Ax^2 + C = 0$.

b) Sau khi tìm điều kiện của ẩn y , hãy quy đồng mẫu rồi khử mẫu, lấy MC là $y(y^2 - 4)$ sẽ tìm được hai nghiệm trong đó phải loại một nghiệm vì không thỏa mãn điều kiện.

● **Cách giải**

a) Điều kiện: $x - 3 \neq 0$, $x + 3 \neq 0$, tức là $x \neq \pm 3$.

MC: $x^2 - 9$, ta có:

$$\frac{(x+3)^2 + (x-3)^2}{x^2-9} = \frac{10}{3} \text{ hay } \frac{x^2+6x+9+x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{10}{3};$$
$$\frac{2x^2+18}{x^2-9} = \frac{10}{3}.$$

Nhân chéo được: $6x^2 + 54 = 10x^2 - 90$; $4x^2 = 144$; $x^2 = 36$. Vậy $x_{1,2} = \pm 6$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

b) Các mẫu theo thứ tự là $y^2 - 4$; $y(y+2)$; $y(y-2)$ nên điều kiện để mẫu khác 0 là: $y \neq 0$, $y \neq \pm 2$.

MC: $y(y^2 - 4)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có:

$$2y + (y-4)(y-2) = y+2, \text{ hay } (y-4)(y-2) + (y-2) = 0;$$

Đặt $(y-2)$ thành thừa số chung:

$$(y-2)(y-4+1) = 0; (y-2)(y-3) = 0.$$

Ta có ngay hai nghiệm là $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Nhưng $y_1 = 2$ không thỏa mãn điều kiện ở trên, do đó phương trình đã cho chỉ có một nghiệm là $y = 3$.

● Khai thác bài toán

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, để tìm mẫu chung cần phân tích một mẫu thành thừa số, chẳng hạn với phương trình

$$\frac{3x - 1}{x - 1} + \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = 1 + \frac{2x + 5}{x + 3}$$

Ta có thể phân tích $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ để có mẫu chung chính là $x^2 + 2x - 3$. Kinh nghiệm ban đầu nên nhân mẫu $x - 1$ với mẫu $x + 3$ để thấy tích bằng $x^2 + 2x - 3$ từ đó mới nghĩ đến việc phải phân tích mẫu $x^2 + 2x - 3$ thành thừa số.

Với điều kiện $x \neq 1, x \neq -3$, phương trình trên có thể viết sau khi quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$\begin{aligned} (3x - 1)(x + 3) + 4 &= x^2 + 2x - 3 + (2x + 5)(x - 1) \\ \text{hay } 3x^2 + 9x - x - 3 + 4 &= x^2 + 2x - 3 + 2x^2 - 2x + 5x - 5; \\ 8x + 1 &= 5x - 8. \text{ Từ đó } 3x = -9; x = -3. \end{aligned}$$

Giá trị $x = -3$ không thỏa mãn điều kiện ở trên, vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Giải phương trình bậc hai khuyết:

a) $(2x - 3)(x + 3) = 4x^2 - 9;$

b) $\frac{y + m}{y - m} + \frac{y - m}{y + m} = \frac{m(3y + 2m)}{y^2 - m^2}.$

● Tìm hiểu đề bài

Đây là loại phương trình bậc hai khuyết dạng $ax^2 + bx = 0$. Ở câu a là phương trình số còn ở câu b là phương trình chữ mà mẫu lại chứa ẩn.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý ở vế phải là hiệu của hai bình phương $4x^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$ nên sau khi chuyển về vế trái ta đặt được $2x - 3$ thành thừa số chung để có một phương trình tích dạng $x(ax + b) = 0$.

Phương trình khuyết dạng $ax^2 + bx = 0$ luôn có một nghiệm bằng 0 vì có thể viết $x(ax + b) = 0$, còn nghiệm kia bằng $-\frac{b}{a}$.

b) Đặt điều kiện để mẫu khác 0 rồi lấy mẫu chung là $y^2 - m^2$.

Sau khi quy đồng mẫu và khử mẫu sẽ được phương trình dạng $ax^2 + bx = 0$.

● Cách giải

a) Phương trình đã cho có thể viết:

$$(2x - 3)(x + 3) = (2x + 3)(2x - 3)$$

$$\text{hay } (2x - 3)(x + 3) - (2x + 3)(2x - 3) = 0;$$

$$(2x - 3)(x + 3 - 2x - 3) = 0; \quad -x(2x - 3) = 0.$$

$$\text{Giải ra tìm được } x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}.$$

b) Điều kiện để phương trình có nghĩa: $y \neq \pm m$.

MC: $(y - m)(y + m) = y^2 - m^2$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có:

$$(y + m)^2 + (y - m)^2 = m(3y + 2m), \text{ hay}$$

$$y^2 + 2my + m^2 + y^2 - 2my + m^2 = 3my + 2m^2;$$

$$2y^2 + 2m^2 = 3my + 2m^2.$$

$$\text{Từ đó } 2y^2 - 3my = 0.$$

Đặt y làm thừa số chung được $y(2y - 3m) = 0$. Giải ra được :

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{3m}{2}, \text{ thỏa mãn điều kiện ở trên.}$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm } y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3m}{2}.$$

● Khai thác bài toán

Có những phương trình nếu biết cách biến đổi thì việc giải sẽ đơn giản.

- Chẳng hạn với phương trình $x^2 - 6x + 9 = 7$ không nên chuyển 7 sang vế trái mà nhận xét ngay vế trái có dạng $(x - 3)^2$ vì thế phương trình này tương đương với $(x - 3)^2 = 7$. Từ đó $x - 3 = \pm \sqrt{7}$. Vậy $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$.

- Với phương trình $16y^2 - 8y + 1 = (4y - 1)(2 - 8y)$, không nên làm phép tính ở vế phải mà nhận xét ngay vế trái có dạng $(4y - 1)^2$, do đó nếu chuyển cả vế phải sang vế trái rồi đặt thừa số chung sẽ được:

$$(4y - 1)^2 - (4y - 1)(2 - 8y) = (4y - 1)(4y - 1 - 2 + 8y) = 0$$

hay

$$(4y - 1)(12y - 3) = 0. \text{ Từ đó ta được:}$$

$$4y - 1 = 0, y = \frac{1}{4} \text{ hoặc } 12y - 3 = 0, y = \frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm kép (hai nghiệm bằng nhau)

$y_{1,2} = \frac{1}{4}$. Ta cũng có thể giải cách khác:

$$(4y - 1)^2 = (4y - 1)(2 - 8y) \text{ hay}$$

$$(4y - 1)^2 = (4y - 1)[-2(4y - 1)] = -2(4y - 1)^2.$$

Từ đó $3(4y - 1)^2 = 0$. Vậy $(4y - 1)^2 = 0$ và ta được $(4y - 1)(4y - 1) = 0$ có nghiệm kép $y_1 = y_2 = \frac{1}{4}$.

Bài 7

a) Có nhận xét gì về hai phương trình $-x^2 - 81 = 0$ và $(7x - 6)^2 + \sqrt{2} = 0$?

b) Giải phương trình:

$$16y^2 - 8y + 1 = 9y^2 - 54y + 81.$$

• Tìm hiểu đề bài

a) Hai phương trình bậc hai này có một số đặc điểm cần tìm từ đó mà nhận xét về chúng.

b) Mỗi vế đều có đặc điểm riêng, cần tìm để cách giải được đơn giản.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Hãy giải thích tại sao hai phương trình đã cho đều vô nghiệm bằng cách nhận xét vế trái không thể bằng 0.

b) Vế trái là một hằng đẳng thức dạng $(A - B)^2$, vế phải nếu đặt 9 làm thừa số chung thì ta cũng được một hằng đẳng thức. Từ đó được dạng $M^2 = N^2$ hay $|M| = |N|$ hoặc $M = \pm N$. Tiếp tục giải để tìm ra y .

● **Cách giải**

a) Phương trình $-x^2 - 81 = 0$ có thể viết $x^2 + 81 = 0$ (nhân 2 vế với -1).

Ta nhận thấy rằng $x^2 \geq 0$, $81 > 0$ nên vế trái $x^2 + 81$ luôn dương với mọi x và không thể bằng 0. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Đối với phương trình $(7x - 6)^2 + \sqrt{2} = 0$ thì $(7x - 6)^2 \geq 0$, $\sqrt{2} > 0$ nên vế trái luôn dương với mọi x và không thể bằng 0. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Vế trái $16y^2 - 8y + 1 = (4y - 1)^2$, vế phải $9y^2 - 54y + 81 = 9(y^2 - 6y + 9) = 9(y - 3)^2$. Do đó phương trình đã cho có thể viết:

$$(4y - 1)^2 = 9(y - 3)^2. \text{ Từ đó:}$$

$$4y - 1 = \pm 3(y - 3).$$

$$\text{- Với } 4y - 1 = 3(y - 3) \text{ ta có } y = -8$$

$$\text{- Với } 4y - 1 = -3(y - 3) \text{ ta có } y = \frac{10}{7}.$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm } y_1 = -8, y_2 = 1\frac{3}{7}.$$

● **Khai thác bài toán**

- Phương trình $x^2 + 81 = 0$ có dạng $ax^2 + c = 0$ trong đó $a = 1$, $c = 81$ vậy a, c cùng dấu nên vô nghiệm. Ta còn có thể giải như

sau:

$x^2 = -81$, không có số thực nào mà bình phương $x^2 < 0$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu ở phương trình câu b ta thay vế phải bằng $5y^2 - 30y + 45$ thì phương trình có thể viết:

$$16y^2 - 8y + 1 = 5(y^2 - 6y + 9), \text{ hay } (4y - 1)^2 = 5(y - 3)^2.$$

$$\text{Từ đó: } 4y - 1 = \pm\sqrt{5}(y - 3).$$

$$\text{Với } 4y - 1 = \sqrt{5}(y - 3) \text{ ta có: } (4 - \sqrt{5})y = -3\sqrt{5} + 1; y = \frac{-3\sqrt{5} + 1}{4 - \sqrt{5}}.$$

Ta phải trục căn ở mẫu, ta có:

$$y = \frac{(-3\sqrt{5} + 1)(4 + \sqrt{5})}{16 - 5} = \frac{-12\sqrt{5} - 15 + 4 + \sqrt{5}}{11} = \frac{-11\sqrt{5} - 11}{11} \\ = -(\sqrt{5} + 1).$$

$$\text{Với } 4y - 1 = -\sqrt{5}(y - 3) \text{ ta có: } (4 + \sqrt{5})y = 3\sqrt{5} + 1; y = \frac{3\sqrt{5} + 1}{4 + \sqrt{5}}$$

hay trục căn ở mẫu:

$$y = \frac{(3\sqrt{5} + 1)(4 - \sqrt{5})}{16 - 5} = \frac{12\sqrt{5} - 15 + 4 - \sqrt{5}}{11} = \frac{11\sqrt{5} - 11}{11} \\ = \sqrt{5} - 1.$$

Bài 8. Giải phương trình bậc hai đủ:

$$\text{a) } x^2 - 4,5x + 4,5 = 0; \quad x^2 - 0,8x - 0,0704 = 0;$$

$$\text{b) } (3y - 1)(y + 2) = 20; \quad (4y - 3)(y - 4) = -3.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình đã cho thuộc loại phương trình bậc hai đủ dạng $ax^2 + bx + c = 0$. Khi giải phải vận dụng công thức nghiệm. Ở câu a các phương trình có hệ số là số thập phân, ở câu b vế trái là tích của hai nhị thức bậc nhất.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết lập biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm; nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ và nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân

$$\text{biệt } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

a) Lập biệt số Δ rồi áp dụng công thức nghiệm. Lưu ý phương trình thứ hai có các hệ số a và c trái dấu ($ac < 0$) nên chắc chắn có hai nghiệm phân biệt.

b) Trước hết tính tích hai nhị thức bậc nhất rồi chuyển số đã biết ở vế phải sang vế trái để đưa phương trình đã cho về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và tiếp tục giải bằng cách áp dụng công thức nghiệm.

● Cách giải

$$a) \Delta = (-4,5)^2 - 4.4,5 = 20,25 - 18 = 2,25; \sqrt{\Delta} = 1,5.$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{4,5 + 1,5}{2} = 3; x_2 = \frac{4,5 - 1,5}{2} = 1,5.$$

$$\Delta' = (-0,4)^2 + 0,0704 = 0,16 + 0,0704 = 0,2304; \sqrt{\Delta'} = 0,48.$$

$$\text{Vậy } x_1 = 0,4 + 0,48 = 0,88; x_2 = 0,4 - 0,48 = -0,08.$$

$$b) (3y - 1)(y + 2) = 20; 3y^2 + 6y - y - 2 = 20 = 0;$$

$$3y^2 + 5y - 22 = 0.$$

$$\Delta = 25 + 4.3.22 = 25 + 264 = 289; \sqrt{\Delta} = 17.$$

$$\text{Vậy } y_1 = \frac{-5 + 17}{6} = 2; y_2 = \frac{-5 - 17}{6} = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}.$$

$$(4y - 3)(y - 4) = -3; 4y^2 - 16y - 3y + 12 + 3 = 0;$$

$$4y^2 - 19y + 15 = 0$$

$$\Delta = 19^2 - 4.4.15 = 361 - 240 = 121; \sqrt{\Delta} = 11.$$

$$\text{Vậy } y_1 = \frac{19 + 11}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}; y_2 = \frac{19 - 11}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

● Khai thác bài toán

Phương trình có thể có thêm các hằng đẳng thức dạng $(A \pm B)^2$, khi đó phải khai triển các hằng đẳng thức này rồi rút gọn để đưa về dạng phương trình bậc hai.

Ví dụ: Giải phương trình

$$(x - 3)^2 + (x + 4)^2 - (x - 5)^2 = 17x + 24.$$

Thực hiện các phép tính ta được:

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 - (x^2 - 10x + 25) = 17x + 24;$$

$$\text{hay } x^2 + 12x = 17x + 24; x^2 - 5x - 24 = 0.$$

(a và c khác dấu nên chắc chắn phương trình có hai nghiệm phân biệt)

$$\Delta = 25 + 96 = 121; \quad \sqrt{\Delta} = 11.$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{5 + 11}{2} = 8; x_2 = \frac{5 - 11}{2} = -3.$$

Bài 9. Giải phương trình:

$$\text{a) } \sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2} = 0; \quad x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0;$$

$$\text{b) } y^2 + (1 + \sqrt{5})y + \sqrt{5} = 0; \quad y^2 + 2(\sqrt{3} + 1)y + 2\sqrt{3} = 0.$$

● Tìm hiểu đề bài

Các phương trình bậc hai ở trên đều có hệ số chứa căn thức bậc hai nên khi giải phải nêu rõ các hệ số a, b, c bằng bao nhiêu để tránh nhầm lẫn trong tính toán.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

Ghi rõ các giá trị của các hệ số a, b, c trong từng phương trình, ví dụ với phương trình thứ nhất $\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}$ thì $a = \sqrt{2}$, $b' = 2\sqrt{3}$, $c = -2\sqrt{2}$. Như vậy $\Delta' = b'^2 - ac = (2\sqrt{3})^2 + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$.

Với phương trình thứ tư $y^2 + 2(\sqrt{3} + 1)y + 2\sqrt{3} = 0$ thì $a = 1$,
 $b' = \sqrt{3} + 1$, $c = 2\sqrt{3}$ nên $\Delta' = (\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{3}$.

• Cách giải

$$\text{a) } \Delta' = b'^2 - ac = (2\sqrt{3})^2 + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12 - 4 = 8; \quad \sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{6} + 4}{2}$$

$$= -\sqrt{6} + 2;$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{6} - 4}{2}$$

$$= -(\sqrt{6} + 2).$$

$$\text{- Ta có: } a = 1, b = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}), c = \sqrt{6}.$$

Biệt số $\Delta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$,
 nhưng nên viết Δ như sau:

$$\Delta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \text{ theo công thức}$$

$$(A + B)^2 - 4AB = (A - B)^2. \text{ Do đó } \sqrt{\Delta} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{b) } \Delta = (1 + \sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2; \quad \sqrt{\Delta} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1.$$

$$\text{Vậy } y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1}{2} = -1; \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1}{2} = -\sqrt{5}.$$

$$\Delta' = (\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} = 4; \quad \sqrt{\Delta'} = 2.$$

$$\text{Vậy } y_1 = -\sqrt{3} - 1 + 2 = 1 - \sqrt{3}; \quad y_2 = -\sqrt{3} - 1 - 2$$

$$= -\sqrt{3} - 3.$$

● Khai thác bài toán

Qua cách giải ở trên ta thấy rằng nếu nắm vững công thức $(A + B)^2 - 4AB = (A - B)^2$ thì việc tính $\sqrt{\Delta}$ sẽ dễ dàng.

Ngoài ra, phương trình thứ hai của câu a có thể giải cách khác nhanh hơn bằng cách viết $\sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ như sau:

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 0$$

Áp dụng định lí Viét ta có thể nhẩm ngay hai nghiệm là $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$, vì theo định lí Viét thì tổng $x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3} = -\frac{b}{a}$, và tích $x_1 \cdot x_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} = \frac{c}{a}$.

Phương trình thứ nhất của câu b cũng giải nhẩm được bằng cách nhận xét tổng các hệ số $a - b + c = 0$ (vì $1 - 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 0$) nên phương trình có một nghiệm $y_1 = -1$, còn nghiệm kia là $y_2 = -\frac{c}{a} = -\sqrt{5}$.

Bài 10

a) Với giá trị nào của m thì tam thức bậc hai $m^2 + 7m + 10$ bằng 0 ? bằng 4 ? Có thể bằng (-5) được không ?

b) Với giá trị nào của p thì tam thức bậc hai $p^2 + 7p + 6$ và nhị thức bậc nhất $p + 1$ có số trị bằng nhau và số trị đó bằng bao nhiêu ?

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài ở đây là một hình thức khác để giải một phương trình bậc hai ẩn là m (câu a), ẩn là p (câu b).

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Phải giải lần lượt ba phương trình bậc hai ẩn là m sau đây:
 $m^2 + 7m + 10 = 0$; $m^2 + 7m + 10 = 4$; $m^2 + 7m + 10 = -5$.

b) Phải giải phương trình bậc hai ẩn là p sau đây:

$p^2 + 7p + 6 = p + 1$. Sau khi tìm được giá trị của p thì thay giá trị này vào nhị thức $p + 1$ để tìm số trị.

● Cách giải

a) Với phương trình $m^2 + 7m + 10 = 0$ ta có:

$$\Delta = 49 - 40 = 9; \quad \sqrt{\Delta} = 3.$$

$$\text{Vậy } m_1 = \frac{-7 + 3}{2} = -2; \quad m_2 = \frac{-7 - 3}{2} = -5.$$

- Với phương trình $m^2 + 7m + 10 = 4$ ta có $m^2 + 7m + 6 = 0$.

$$\Delta = 49 - 24 = 25; \quad \sqrt{\Delta} = 5.$$

$$\text{Vậy } m_1 = \frac{-7 + 5}{2} = -1,$$

$$m_2 = \frac{-7 - 5}{2} = -6.$$

- Với phương trình $m^2 + 7m + 10 = -5$ ta có $m^2 + 7m + 15 = 0$.

$\Delta = 49 - 60 = -11$, phương trình vô nghiệm. Vậy tam thức $m^2 + 7m + 10$ không thể bằng (-5) .

b) Ta phải giải phương trình bậc hai $p^2 + 7p + 6 = p + 1$ hay $p^2 + 6p + 5 = 0$.

$$\Delta' = 9 - 5 = 4; \quad \sqrt{\Delta'} = 2.$$

$$\text{Vậy } p_1 = -3 + 2 = -1; \quad p_2 = -3 - 2 = -5.$$

Với $p_1 = -1$ thì số trị $p + 1 = -1 + 1 = 0$, với $p_2 = -5$ thì số trị bằng $-5 + 1 = -4$.

● Khai thác bài toán

a) Ta có thể giải phương trình $m^2 + 7m + 10 = 0$ nhanh hơn bằng cách nhẩm hai nghiệm, vì theo hệ thức Viét ta có

$$m_1 + m_2 = -7, \quad m_1 \cdot m_2 = 10 \text{ nên hai nghiệm là } (-2) \text{ và } (-5).$$

b) Ta cũng có thể giải nhanh phương trình $p^2 + 6p + 5 = 0$ vì tổng $a - b + c = 1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình luôn có một

ng nghiệm $p_1 = -1$ còn nghiệm kia p_2 bằng $-\frac{c}{a} = -5$.

Bài 11. Giải phương trình:

$$a) \frac{(x+3)^2}{5} + 1 = \frac{(3x-1)^2}{5} = \frac{x(2x-3)}{2};$$

$$b) 3y + \frac{(y-3)^2}{4} = \frac{(y+3)^2}{8} + \frac{(y+1)(y-1)}{3}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình đã cho đều có các số hạng chứa mẫu là số hữu tỉ, trừ số hạng 1 (câu a) và số hạng $3y$ (câu b). Ngoài ra ở tử của các số hạng là những hằng đẳng thức dạng $(A \pm B)^2$ hoặc $(A+B)(A-B)$.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Hãy quy đồng mẫu rồi khử mẫu và khai triển các hằng đẳng thức ở tử rồi thực hiện phép tính để đưa phương trình đã cho về dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

● **Cách giải**

a) MC: 10. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có:

$$2(x+3)^2 + 10 = 2(3x-1)^2 = 5x(2x-3), \text{ hay}$$

$$2(x^2 + 6x + 9) + 10 = 2(9x^2 - 6x + 1) = 10x^2 - 15x;$$

$$2x^2 + 12x + 18 + 10 = 18x^2 + 12x - 2 = 10x^2 + 15x = 0;$$

$$-26x^2 + 39x + 26 = 0 \text{ hay } 26x^2 - 39x - 26 = 0.$$

$$\text{Chia hai vế cho 13 được } 2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25; \sqrt{\Delta} = 5. \text{ Từ đó } x_1 = \frac{3+5}{4} = 2, x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

b) MC: 24. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có:

$$24.3y + 6(y-3)^2 = 3(y+3)^2 + 8(y+1)(y-1), \text{ hay}$$

$$72y + 6(y^2 - 6y + 9) = 3(y^2 + 6y + 9) + 8(y^2 - 1);$$

$$72y + 6y^2 - 36y + 54 = 3y^2 + 18y + 27 + 8y^2 - 8;$$

$$6y^2 + 36y + 54 = 11y^2 + 18y + 19; 5y^2 - 18y - 35 = 0.$$

$$\Delta' = 9^2 + 175 = 256; \sqrt{\Delta'} = 16. \text{ Từ đó } y_1 = \frac{9 + 16}{5} = 5;$$

$$y_2 = \frac{9 - 16}{5} = -\frac{7}{5} = -1,4.$$

● Khai thác bài toán

Có những phương trình mới nhìn qua tưởng đơn giản như phương trình $(x^2 + 5x)^2 - 8x(x + 5) - 84 = 0$, nhưng nếu tính $(x^2 + 5x)^2$ thì sẽ dẫn tới một phương trình bậc bốn. Ta nhận thấy rằng $-8x(x + 5)$ có thể viết $-8(x^2 + 5x)$, như vậy nếu đặt $x^2 + 5x = y$ thì phương trình trên sẽ có dạng $y^2 - 8y - 84 = 0$ mà cách giải dễ dàng vì chắc chắn có hai nghiệm phân biệt do a và c khác dấu. Phương trình này có hai nghiệm là $y_1 = 14, y_2 = -6$.

Thành thử ta phải giải hai phương trình bậc hai sau đây:

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \text{ mà hai nghiệm là } x_1 = 2, x_2 = -7;$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ mà hai nghiệm là } x_3 = -2, x_4 = -3.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 12. Giải phương trình bậc hai chứa ẩn ở mẫu:

$$a) \frac{14}{x^2 - 9} + \frac{4 - x}{3 + x} = \frac{7}{x + 3} - \frac{1}{3 - x};$$

$$b) \frac{1}{2 - x} - 1 = \frac{1}{x - 2} - \frac{6 - x}{3x^2 - 12};$$

$$c) 1 - \frac{3 - 2x}{5 - x} = \frac{3}{3 - x} - \frac{x + 3}{x + 1}.$$

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho ba phương trình chứa ẩn ở mẫu mà trước khi giải phải đặt điều kiện để mẫu khác 0, tức là để phương trình có

nghĩa, và phải tìm cách đổi dấu các phân thức nhằm tìm được dễ dàng mẫu chung.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Do $(3 + x)(3 - x) = 9 - x^2$ nên chọn MC là $x^2 - 9$ để chỉ phải đổi dấu của $-\frac{1}{3-x}$ thành $+\frac{1}{x-3}$.

b) Do mẫu $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$ nên chọn MC là $3x^2 - 12$ để chỉ phải đổi dấu của $\frac{1}{2-x}$ thành $-\frac{1}{x-2}$.

c) Hãy làm phép tính ở từng vế để phương trình có dạng $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ tương đương với $A.D = B.C$ rồi giải.

● Cách giải

a) Điều kiện để phương trình có nghĩa: $x \neq \pm 3$.

MC: $x^2 - 9$. Đổi dấu của $-\frac{1}{3-x}$ thành $+\frac{1}{x-3}$, quy đồng mẫu

rồi khử mẫu ta được:

$$14 + (4 - x)(x - 3) = 7(x - 3) + (x + 3), \text{ hay}$$

$$14 + 4x - 12 - x^2 + 3x = 7x - 21 + x + 3;$$

$$2 + 7x - x^2 = 8x - 18; x^2 + x - 20 = 0$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81; \quad \sqrt{\Delta} = 9.$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{-1 + 9}{2} = 4; x_2 = \frac{-1 - 9}{2} = -5$$

Cả hai giá trị 4 và -5 thỏa mãn điều kiện ở trên, do đó phương trình đã cho có hai nghiệm là 4 và -5.

b) Điều kiện: $x \neq \pm 2$. Đổi dấu của $\frac{1}{2-x}$ thành $-\frac{1}{x-2}$.

MC: $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$-3(x + 2) - (3x^2 - 12) = 3(x + 2) - (6 - x), \text{ hay}$$

$$-3x - 6 - 3x^2 + 12 = 3x + 6 - 6 + x; -3x - 3x^2 + 6 = 4x;$$

$$3x^2 + 7x - 6 = 0.$$

$$\Delta = 49 + 72 = 121; \sqrt{\Delta} = 11. \text{ Từ đó}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3.$$

Cả hai giá trị $\frac{2}{3}$ và -3 thỏa mãn điều kiện ở trên. Vậy phương trình có hai nghiệm là $\frac{2}{3}$ và -3 .

c) Điều kiện : $x \neq 5, x \neq 3, x \neq -1$.

$$\text{Vế trái: } 1 - \frac{3 - 2x}{5 - x} = \frac{5 - x - 3 + 2x}{5 - x} = \frac{2 + x}{5 - x}$$

$$\text{Vế phải: } \frac{3}{3 - x} - \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{3(x + 1) - (x + 3)(3 - x)}{(3 - x)(x + 1)} =$$

$$= \frac{3x + 3 + x^2 - 9}{3x + 3 - x^2 - x} = \frac{3x + x^2 - 6}{2x - x^2 + 3}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{2 + x}{5 - x} = \frac{x^2 + 3x - 6}{2x - x^2 + 3}.$$

Nhân chéo được:

$$(2 + x)(2x - x^2 + 3) = (5 - x)(x^2 + 3x - 6)$$

$$4x - 2x^2 + 6 + 2x^2 - x^3 + 3x = 5x^2 + 15x - 30 - x^3 - 3x^2 + 6x;$$

$$7x - x^3 + 6 = 2x^2 - x^3 + 21x - 30, \text{ hay } 2x^2 + 14x - 36 = 0;$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0.$$

$$\Delta = 49 + 72 = 121; \sqrt{\Delta} = 11.$$

$$\text{Từ đó } x_1 = \frac{-7 + 11}{2} = 2;$$

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{2} = -9.$$

Cả hai giá trị 2 và -9 thỏa mãn điều kiện ở trên. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 2 và -9.

● Khai thác bài toán

- Nếu ở câu a ta chỉ đổi các tử còn mẫu vẫn là $(x + 3)$, $(x - 3)$, $(x^2 - 9)$ như phương trình:

$$\frac{13 - x}{3 + x} + \frac{6}{x^2 - 9} = \frac{3}{x + 3} - \frac{2}{3 - x}$$

thì chỉ cần đổi dấu của $-\frac{2}{3 - x}$ thành $+\frac{2}{x - 3}$, rồi lấy MC là $x^2 - 9$. Quy đồng mẫu và khử mẫu được:

$$(13 - x)(x - 3) + 6 = 3(x - 3) + 2(x + 3).$$

Sau khi thực hiện phép tính và rút gọn sẽ được phương trình bậc hai $x^2 - 11x + 30 = 0$. Giải ra được hai nghiệm là 6 và 5 thỏa mãn điều kiện $x \neq \pm 3$.

- Gặp trường hợp không thấy ngay được mẫu chung và điều kiện thì trước hết hãy phân tích mẫu thành thừa số. Chẳng hạn giải phương trình:

$$\frac{20 + y}{2y - 2} - \frac{9y^2 + y + 2}{6y^2 - 6} = \frac{5 - 3y}{y + 1} - \frac{10 - 4y}{3y + 3}.$$

Trước hết ta phân tích các mẫu như sau:

$$2y - 2 = 2(y - 1); \quad 6y^2 - 6 = 6(y^2 - 1); \quad 3y + 3 = 3(y + 1).$$

Từ đó thấy ngay mẫu chung là $6(y^2 - 1)$ với điều kiện là $y \neq \pm 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$$\begin{aligned} & (20 + y) \cdot 3(y + 1) - (9y^2 + y + 2) \\ & = (5 - 3y) \cdot 6(y - 1) - (10 - 4y) \cdot 2(y - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hay } (20 + y)(3y + 3) - 9y^2 - y - 2 &= \\ &= (5 - 3y)(6y - 6) - (10 - 4y)(2y - 2) \end{aligned}$$

Thực hiện các phép tính và giải phương trình bậc hai

$2y^2 + 21y + 34 = 0$ sẽ được hai nghiệm thỏa mãn điều kiện

$$y \neq \pm 1 \text{ là } y_1 = -2; y_2 = -8\frac{1}{2}.$$

Bài 13. Giải phương trình:

$$\text{a) } \frac{30}{x^2 - 1} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{7 + 18x}{x^3 - 1};$$

$$\text{b) } \frac{13}{y^3 + 1} - \frac{17y + 10}{5y^2 - 5y + 5} = -\frac{5}{y + 1}.$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình ở trên có mẫu thuộc hàng đẳng thức $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$. Ở câu a là hàng đẳng thức dạng $x^3 - 1$ còn ở câu b là hàng đẳng thức dạng $x^3 + 1$ ($A = x$, $B = 1$).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Phân tích $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ và $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Từ đó tìm được mẫu chung là $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ với điều kiện $x \neq \pm 1$.

b) Phân tích $y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$ và $5y^2 - 5y + 5 = 5(y^2 - y + 1)$. Từ đó tìm được mẫu chung là $5(y + 1)(y^2 - y + 1)$ với điều kiện $y \neq -1$.

● **Cách giải**

a) Điều kiện $x \neq \pm 1$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu với MC là $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ ta có:

$$30(x^2 + x + 1) - 13(x^2 - 1) = (7 + 18x)(x + 1), \text{ hay}$$

$$30x^2 + 30x + 30 - 13x^2 + 13 = 7x + 18x^2 + 7 + 18x;$$

$$17x^2 + 30x + 43 = 18x^2 + 25x + 7; x^2 - 5x - 36 = 0.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 9; x_2 = -4$ phù hợp với điều kiện $x \neq \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 9 và -4.

b) Điều kiện $y \neq -1$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu với MC là

$5(y + 1)(y^2 - y + 1)$ ta có:

$$13.5 - (17y + 10)(y + 1) = -5.5(y^2 - y + 1), \text{ hay}$$

$$65 - 17y^2 - 17y - 10y - 10 = -25y^2 + 25y - 25;$$

$$8y^2 - 52y + 80 = 0; 2y^2 - 13y + 20 = 0.$$

Giải ra tìm được $y_1 = 4; y_2 = 2,5$, phù hợp với điều kiện $y \neq -1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 4 và 2,5.

● Khai thác bài toán

- Nếu ở câu a ta vẫn giữ nguyên các mẫu (trừ mẫu $x^2 - 1$) mà chỉ đổi tử chẳng hạn phương trình:

$$\frac{x + 36}{x^3 - 1} = \frac{x + 6}{x - 1} - \frac{x^2 - x + 16}{x^2 + x + 1}$$

thì với điều kiện $x \neq 1$ và mẫu chung $x^3 - 1$ ta quy đồng mẫu rồi khử mẫu sẽ được:

$$x + 36 = (x + 6)(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 16)(x - 1).$$

Sau khi thực hiện các phép tính ta sẽ được phương trình đơn giản $9x^2 - 11x - 14 = 0$ mà hai nghiệm là $x_1 = 2; x_2 = -\frac{7}{9}$.

- Nếu mẫu phức tạp thì trước hết phải phân tích mẫu ra thừa số để tìm được mẫu chung và điều kiện.

Chẳng hạn: giải phương trình

$$\frac{1}{y^3 - y^2 + y - 1} - \frac{4}{y + 1} = \frac{y^2 + 10y}{y^4 - 1} - \frac{4y^2 + 21}{y^3 + y^2 + y + 1}.$$

Trước hết ta phân tích các mẫu:

$$y^3 - y^2 + y - 1 = y^2(y - 1) + (y - 1) = (y - 1)(y^2 + 1);$$

$$y^4 - 1 = (y^2 + 1)(y^2 - 1)$$

$$y^3 + y^2 + y + 1 = y^2(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(y^2 + 1).$$

Từ đó ta có mẫu chung là: $(y^2 + 1)(y^2 - 1)$ với điều kiện $y \neq \pm 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được:

$$y + 1 - 4(y - 1)(y^2 + 1) = y^2 + 10y - (4y^2 + 21)(y - 1), \text{ hay}$$

$$y + 1 - 4y^3 - 4y + 4y^2 + 4 = y^2 + 10y - 4y^3 + 4y^2 - 21y + 21.$$

$-3y + 5 = y^2 - 11y + 21; y^2 - 8y + 16 = 0$ hay $(y - 4)^2 = 0$ có nghiệm kép là $y_1 = y_2 = 4$, thỏa mãn điều kiện ở trên.

Bài 14. Giải các phương trình sau bằng cách nhẩm nhanh nhất:

a) $2x^2 - (2 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0; 7x^2 + \sqrt{11}x - (7 + \sqrt{11}) = 0;$

b) $(2k - 3)y^2 + 6ky + 4k + 3 = 0; (4k^2 - 1)y^2 + (5k^2 + 7)y + k^2 + 8 = 0.$

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài yêu cầu giải bằng cách nhẩm nhanh nhất, do đó yêu cầu nắm vững cách áp dụng định lý Viét để tính nhẩm nghiệm.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Lưu ý hai cách tính nhẩm nghiệm sau đây:

a) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm $x_1 = 1$ thì $a + b + c = 0$ và ngược lại nếu $a + b + c = 0$ thì

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a}.$$

b) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm $x_1 = -1$ thì $a - b + c = 0$ và ngược lại nếu $a - b + c = 0$ thì

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a}.$$

Hãy áp dụng cách này vào câu b.

• Cách giải

a) Phương trình thứ nhất có $a = 2, b = -2 - \sqrt{5}, c = \sqrt{5}$. Ta

nhận thấy rằng $a + b + c = 2 - 2 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 0$ nên phương

trình có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm kia $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Phương trình thứ hai có $a = 7$, $b = \sqrt{11}$, $c = -7 - \sqrt{11}$. Ta nhận thấy rằng $a + b + c = 7 + \sqrt{11} - 7 - \sqrt{11} = 0$ nên phương

trình có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm kia $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-(7 + \sqrt{11})}{7}$.

b) Phương trình thứ nhất có $a = 2k - 3$, $b = 6k$, $c = 4k + 3$.

Ta có $a + b + c = 2k - 3 + 6k + 4k + 3 = 0$. Vậy phương

trình có một nghiệm $x_1 = -1$ và nghiệm kia $x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{-(4k + 3)}{2k - 3}$.

Phương trình thứ hai có $a = 4k^2 - 1$, $b = 5k^2 + 7$, $c = k^2 + 8$.

Ta có $a + b + c = 4k^2 - 1 + 5k^2 + 7 + k^2 + 8 = 0$. Vậy phương

trình có một nghiệm $x_1 = -1$ và nghiệm kia $x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{-(k^2 + 8)}{4k^2 - 1}$.

● Khai thác bài toán

Có thể tìm giá trị của k để phương trình $x^2 + kx + 15 = 0$ có một nghiệm là 1 và tìm giá trị của m để phương trình $my^2 - 15y - 7 = 0$ có một nghiệm là -1. Tìm nghiệm thứ hai của mỗi phương trình.

Để phương trình $x^2 + kx + 15 = 0$ có nghiệm $x_1 = 1$ thì $a + b + c = 0$ hay $1 + k + 15 = 0$, suy ra $k = -16$, nghiệm kia $x_2 = \frac{c}{a} = 15$.

Để phương trình $my^2 - 15y - 7 = 0$ có nghiệm $y_1 = -1$ thì $a + b + c = 0$ hay $m + 15 - 7 = 0$, suy ra $m = -8$, nghiệm kia $y_2 = \frac{c}{a} = -\frac{7}{8}$.

Bài 15

a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

$$2 + \sqrt{2} \text{ và } 2 - \sqrt{2}; \quad \frac{3 + 2\sqrt{5}}{3} \text{ và } \frac{3 - 2\sqrt{5}}{3}$$

b) Không giải phương trình $x^2 - 2x - 15 = 0$ hãy tính:

- tổng các bình phương của hai nghiệm của nó;
- tổng các lập phương của hai nghiệm của nó.

● Tìm hiểu đề bài

Đề bài là sự áp dụng của định lí Viét để:

- Lập phương trình bậc hai mà hai nghiệm là số cho trước (câu a);
- Tìm tổng các bình phương và các lập phương của hai nghiệm mà không giải phương trình (câu b).

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý: nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$ (với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$). Do đó ta phải tìm S và P của hai số cho trước để lập phương trình, chẳng hạn nếu hai nghiệm là $2 + \sqrt{2}$ và $2 - \sqrt{2}$ thì $S = 4$, $P = 2$.

b) Trước hết phải chứng tỏ rằng phương trình $x^2 - 2x - 15 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Từ đó mới tìm giá trị của:

$x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$ bằng cách viết các tổng này dưới dạng có S và P của hai nghiệm, vì theo định lí Viét ta có thể viết ngay S và P .

● Cách giải

a) Tổng hai nghiệm đã cho là: $2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$, tích hai nghiệm đó là $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$, tức là $S = 4$, $P = 2$

Vậy phương trình bậc hai phải tìm có dạng $X^2 - SX + P = 0$ hay $X^2 - 4X + 2 = 0$.

- Nếu hai nghiệm là $\frac{3 \pm 2\sqrt{5}}{3}$ thì $S = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{3} + \frac{3 - 2\sqrt{5}}{3} = 2$ và

$$P = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{3} - \frac{3 - 2\sqrt{5}}{3} = \frac{9 - 20}{9} = -\frac{11}{9}.$$

Vậy phương trình bậc hai phải tìm là: $X^2 - 2X - \frac{11}{9} = 0$ hay $9X^2 - 18X - 11 = 0$.

b) Phương trình $x^2 - 2x - 15 = 0$ chắc chắn có hai nghiệm phân biệt vì a và c trái dấu. Theo định lí Viét ta có $S = 2$, $P = -15$.

$$\text{Tổng } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = 4 + 30 = 34.$$

Tổng $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ theo hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ hay

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = 2^3 - 3(-15) \cdot 2 = 8 + 90 = 98.$$

● Khai thác bài toán

a) Nếu hai nghiệm đã cho là $2 + \sqrt{2}$ và $2 - \sqrt{2}$ thì có thể chúng là nghiệm của phương trình $(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2}) = 0$.

Nhưng do đề bài yêu cầu lập phương trình bậc hai nên ta đã dùng định lí đảo Viét như ở phần cách giải.

b) Có thể đặt thêm các câu hỏi sau:

- Tìm hiệu các bình phương $x_1^2 - x_2^2$

- Tìm hiệu các lập phương $x_1^3 - x_2^3$

- Tìm tổng $\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$.

Cách giải sẽ như sau:

$$\bullet \quad x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = S(x_1 - x_2).$$

Để tính hiệu $x_1 - x_2$ ta dựa vào hằng đẳng thức $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P = 4 + 60 = 64$. Suy ra $x_1 - x_2 = \pm 8$.

$$\text{Vậy } x_1^2 - x_2^2 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ hoặc } x_1^2 - x_2^2 = 2 \cdot (-8) = -16.$$

$$\bullet \quad x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2) = 8^3 + 3(-15) \cdot 8 = 512 - 360 = 152 \text{ hoặc } (-8)^3 + 3(-15) \cdot (-8) = -512 + 360 = -152.$$

$$\bullet \text{ Tổng } \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} = \frac{(x_1 + 1)x_1 + x_2(x_2 + 1)}{x_1 x_2} =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{34 + 2}{-15} = -\frac{36}{15} = -2\frac{6}{15} = -2\frac{2}{5}.$$

Bài 16. Giải phương trình bậc hai có hệ số bằng chữ (các chữ m, n, p đều dương):

a) $x^2 - 3mx + 2m^2 - mn - n^2 = 0;$

b) $(mx - n)^2 + (m - nx) + 4mnx = 2(m^2 + n^2)x;$

c) $1 + \frac{4p}{x + p} = \frac{3x}{2x - p}; \quad \frac{p}{x - p} - \frac{x}{x + p} = \frac{7}{5}.$

• **Tìm hiểu đề bài**

Các phương trình đã cho có hệ số bằng chữ. Riêng phương trình ở câu c chứa ẩn ở mẫu. Lưu ý các chữ m, n, p đều dương.

• **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Lưu ý $a = 1, b = -3m, c = 2m^2 - mn - n^2$ để tính biệt số Δ .

b) Khai triển các hằng đẳng thức rồi đưa phương trình về dạng $Ax^2 + Bx + C = 0$ để giải.

c) Phải đặt điều kiện để phương trình có nghĩa: $x \neq \pm p, x \neq \frac{p}{2}.$

• **Cách giải**

a) $\Delta = (-3m)^2 - 4(2m^2 - mn - n^2) = 9m^2 - 8m^2 + 4mn + 4n^2 =$
 $m^2 + 4mn + 4n^2 = (m + 2n)^2; \quad \sqrt{\Delta} = m + 2n.$

$$x_1 = \frac{3m + m + 2n}{2}; \quad x_2 = \frac{3m - m - 2n}{2},$$

$$\text{hay } x_1 = \frac{4m + 2n}{2} = 2m + n;$$

$$x_2 = m - n$$

b) Khai triển các hằng đẳng thức:

$$m^2x^2 - 2mnx + n^2 + m^2 - 2mnx + n^2x^2 + 4mnx - 2(m^2 + n^2)x = 0,$$

hay $(m^2 + n^2)x^2 - 2(m^2 + n^2)x + m^2 + n^2 = 0.$

Chia hai vế cho $m^2 + n^2 > 0$ ta được: $x^2 - 2x + 1 = 0$ hay $(x - 1)^2 = 0.$

Vậy phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1.$

c) MC: $(x + p)(2x - p)$ với điều kiện $x \neq -p, x \neq \frac{p}{2}.$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$(x + p)(2x - p) + 4p(2x - p) = 3x(x + p), \text{ hay}$$

$$2x^2 - px + 2px - p^2 + 8px - 4p^2 = 3x^2 + 3px;$$

$$2x^2 + 9px - 5p^2 = 3x^2 + 3px; x^2 - 6px + 5p^2 = 0.$$

$$\Delta' = 9p^2 - 5p^2 = 4p^2; \sqrt{\Delta'} = 2p. \text{ Vậy } x_1 = 3p + 2p = 5p;$$

$$x_2 = 3p - 2p = p.$$

• Điều kiện : $x \neq \pm p$. MC: $5(x - p)(x + p)$

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$5p(x + p) - 5x(x - p) = 7(x - p)(x + p), \text{ hay}$$

$$5px + 5p^2 - 5x^2 + 5px = 7x^2 - 7p^2; 12p^2 - 10px - 12p^2 = 0;$$

$$6x^2 - 5px - 6p^2 = 0$$

$$\Delta = 25p^2 + 144p^2 = 169p^2; \sqrt{\Delta} = 13p.$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{5p + 13p}{12} = \frac{18}{12}p = \frac{3p}{2} = 1\frac{1}{2}p; x_2 = \frac{5p - 13p}{12} =$$

$$= \frac{-8}{12}p = \frac{-2p}{3}.$$

• Khai thác bài toán

Do đề bài đã ghi rõ là các chữ m, n, p đều dương nên khi tìm được $\Delta = (m + 2n)^2$ hoặc $\Delta = 4p^2$ thì ta có ngay $\sqrt{\Delta} = m + 2n,$
 $\sqrt{\Delta} = 2p$. Nếu không có điều kiện trên thì:

$$\sqrt{\Delta} = |m + 2n| \text{ hoặc } \sqrt{\Delta} = 2|p|$$

Ta phải xét thêm các trường hợp $m + 2n \geq 0$, $m + 2n < 0$ hoặc $p \geq 0$, $p < 0$.

- Gặp trường hợp mẫu không đơn giản như phương trình

$$\frac{a + b}{2a - ax + 2 - x} + \frac{1}{a + 1} = \frac{b + 1}{2x - x^2} \quad (\text{với } a > b)$$

thì ta phân tích $2x - x^2 = x(2 - x)$ rồi thử tính tích $(2 - x)(a + 1)$.

Ta thấy rằng tích $(2 - x)(a + 1) = 2a - ax + 2 - x$ đúng bằng mẫu của phân thức đầu tiên ở vế trái. Do đó ta có ngay mẫu chung là: $x(2 - x)(a + 1)$. Sau khi quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta được:

$$(a + b)x + x(2 - x) = (b + 1)(a + 1), \text{ hay}$$

$$ax + bx + 2x - x^2 = ab + a + b + 1;$$

$$x^2 - (a + b + 2)x + ab + a + b + 1 = 0$$

$$\Delta = (a + b + 2)^2 - 4(ab + a + b + 1) = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$

$$\sqrt{\Delta} = a - b$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{a + b + 2 + a - b}{2} = a + 1;$$

$$x_2 = \frac{a + b + 2 - a + b}{2} = b + 1.$$

Bài 17. Giải phương trình:

$$\text{a) } \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^2 - 5\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) + 6 = 0;$$

$$\text{b) } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4,5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

- **Tìm hiệu đề bài**

Các phương trình ở trên đều phải dùng ẩn phụ để giải vì khi đó

phương trình với ẩn phụ sẽ đơn giản hơn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Đặt $\frac{x+2}{x-1} = y$ (1) để đưa phương trình về dạng

$y^2 - 5y + 6 = 0$. Khi tìm được các giá trị của y thì thay vào (1) để tìm x .

b) Tương tự đặt $x + \frac{1}{x} = t$ (2) để đưa phương trình về dạng $t^2 - 4,5t + 5 = 0$. Khi tìm được các giá trị của t thì thay vào (2) để tìm x .

● **Cách giải**

a) Đặt $\frac{x+2}{x-1} = y$ ta được phương trình: $y^2 - 5y + 6 = 0$ mà

tính nhẩm nghiệm được $y_1 = 2, y_2 = 3$. Từ đó ta phải giải tiếp hai phương trình:

$$\frac{x+2}{x-1} = 2 \text{ hay } x+2 = 2x-2, \text{ suy ra } x=4;$$

$$\frac{x+2}{x-1} = 3 \text{ hay } x+2 = 3x-3, \text{ suy ra } x = \frac{5}{2} = 2,5.$$

b) Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ ta được phương trình $t^2 - 4,5t + 5 = 0$ mà tính nhẩm nghiệm được $t_1 = 2,5; t_2 = 2$. Từ đó ta giải tiếp hai phương trình:

$$x + \frac{1}{x} = 2,5 \text{ hay } x^2 - 2,5x + 1 = 0, \text{ vô nghiệm};$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \text{ hay } x^2 - 2x + 1 = 0; (x-1)^2 = 0. \text{ Vậy } x_3 = x_4 = 1.$$

● **Khai thác bài toán**

Nếu gặp phương trình chứa ẩn dưới dấu căn như phương trình

$$\frac{\sqrt{z} + z}{3\sqrt{z} - 1} = \frac{6}{5} \text{ thì ta viết phương trình dưới dạng } 5\sqrt{z} + 5z = 18\sqrt{z} - 6$$

hay $5z - 13\sqrt{z} + 6 = 0$ với điều kiện $z > 0$.

Đặt $\sqrt{z} = t$ với $t \geq 0$, ta có phương trình $5t^2 - 13t + 6 = 0$. Giải ra được hai nghiệm là $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{3}{5}$, thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$.

Tiếp tục giải: $\sqrt{z} = 2$ từ đó $z = 4$ và $\sqrt{z} = \frac{3}{5}$ từ đó $z = \frac{9}{25}$.

Cả hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $z > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = 4$; $z_2 = \frac{9}{25}$.

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

Bài 18

Giải các phương trình tích:

a) $(2x^2 - 2x + 5)^2 - (x^2 - 3)^2 = 0$; $16(2y - 3)^2 = 25(5 - y)^2$;

b) $(3y^2 + 10y + 80)(4y^2 - 23y + 28) = 0$;

$$(y^2 + 6y - 2)(y^2 - 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} + 2y) = 0.$$

• Tìm hiểu đề bài

Các phương trình trên là những phương trình tích dạng $A(x).B(x) = 0$ hoặc $A(y).B(y) = 0$ quy về phương trình bậc hai. Ở câu a là dạng hiệu hai bình phương $M^2 - N^2 = 0$, ở câu b là tích của hai tam thức bậc hai ở vế trái.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Phương trình thứ nhất có dạng $M^2 - N^2 = 0$ nên phân tích được thành $(M + N)(M - N) = 0$, từ đó phải giải hai phương trình bậc hai.

Phương trình thứ hai nếu chuyển vế phải sang vế trái thì cũng được dạng hiệu hai bình phương $M^2 - N^2 = 0$ với $M = 4(2y - 3)$ và $N = 5(5 - y)$. Từ đó mà giải tiếp.

b) Cả hai phương trình đều có dạng $A(y).B(y) = 0$ nên ta phải giải hai phương trình bậc hai $A(y) = 0$ và $B(y) = 0$.

● Cách giải

a) Phương trình thứ nhất có thể viết:

$$(2x^2 - 2x + 5 + x^2 - 3)(2x^2 - 2x + 5 - x^2 + 3) = 0 \text{ hay}$$

$$(3x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 8) = 0.$$

Phương trình $3x^2 - 2x + 2 = 0$ vô nghiệm, phương trình $x^2 - 2x + 8 = 0$ cũng vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Phương trình thứ hai có thể viết:

$$16(2y - 3)^2 - 25(5 - y)^2 = 0 \text{ hay}$$

$$[4(2y - 3) + 5(5 - y)][4(2y - 3) - 5(5 - y)] = 0;$$

$$(8y - 12 + 25 - 5y)(8y - 12 - 25 + 5y) = 0;$$

$$(3y + 13)(13y - 37) = 0.$$

Ta phải giải hai phương trình: $3y + 13 = 0$ và $13y - 37 = 0$, mà nghiệm là

$$y_1 = -\frac{13}{3} = -4\frac{1}{3} \text{ hoặc } y_2 = \frac{37}{13} = 2\frac{11}{13}.$$

b) Với phương trình thứ nhất ta phải giải hai phương trình bậc hai:

$$3y^2 + 10y + 80 = 0, \text{ vô nghiệm};$$

$$4y^2 - 23y + 28 = 0 \text{ mà nghiệm là } 4 \text{ và } \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm là } y_1 = 4; y_2 = 1\frac{3}{4}.$$

Với phương trình thứ hai ta phải giải hai phương trình bậc hai:

$$y^2 + 6y - 2 = 0 \text{ mà nghiệm là } -3 + \sqrt{11} \text{ và } -3 - \sqrt{11};$$

$$y^2 - 2(\sqrt{3} - 1)y - 2\sqrt{3} = 0 \text{ mà nghiệm là } \sqrt{3} + 1 \text{ và } \sqrt{3} - 3.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $y_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$ hoặc $y_3 = \sqrt{3} + 1, y_4 = \sqrt{3} - 3.$

● **Khai thác bài toán**

Phương trình tích còn có thể có dạng sau

$$(x - 1)(x - 2) = (m - 1)(m - 2)$$

mà phải thực hiện phép tính mới được dạng phương trình tích. Thật vậy ta có:

$$x^2 - 3x + 2 = m^2 - 3m + 2, \text{ hay } (x^2 - m^2) - 3(x - m) = 0.$$

Từ đó $(x - m)(x + m - 3) = 0$. Giải ra được $x_1 = m$ và $x_2 = 3 - m$.

Bài 19. Giải các phương trình trùng phương:

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$;

b) $x^4 - 25x^2 = m^2x^2 - 25m^2$ (với $m > 0$);

$$m^2p^2x^4 = p^4x^2 - p^2m^2 + m^4x^2 \text{ (với } m > p > 0).$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là loại phương trình trùng phương tức là phương trình bậc bốn trong đó có các lũy thừa chẵn của ẩn mà dạng tổng quát là $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$).

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Dùng ẩn phụ bằng cách đặt $y = x^2$ để đưa phương trình về dạng quen thuộc $ay^2 + by + c = 0$. Phương trình trùng phương sẽ có 4 nghiệm, 2 nghiệm hay vô nghiệm tùy theo phương trình $ay^2 + by + c = 0$ có 2 nghiệm dương, 1 nghiệm dương hay 2 nghiệm âm (nếu phương trình $ay^2 + by + c = 0$ mà vô nghiệm thì phương trình trùng phương cũng vô nghiệm).

● **Cách giải**

a) Đặt $y = x^2$, ta có phương trình bậc hai $4y^2 - 5y + 1 = 0$. Do $a + b + c = 4 - 5 + 1 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Vậy $x^2 = 1$, từ đó $x_{1,2} = \pm 1$, và $x^2 = \frac{1}{4}$, từ đó $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm là ± 1 và $\pm \frac{1}{2}$.

- Đặt $y = x^2$ ta có phương trình bậc hai $3y^2 - 7y + 2 = 0$. Giải ra được $y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{3}$.

Vậy $x^2 = 2$, từ đó $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, và $x^2 = \frac{1}{3}$, từ đó $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm\sqrt{2}$ và $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Đặt $y = x^2$ ta có phương trình $y^2 - 25y = m^2y - 25m^2$ (với $m > 0$) hay $y^2 - (25 + m^2)y + 25m^2 = 0$. Giải ra được $y_1 = 25, y_2 = m^2$.

Từ đó $x^2 = 25, x_{1,2} = \pm 5$ và $x^2 = m^2$, từ đó $x_{3,4} = \pm m$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm là ± 5 và $\pm m$.

- Đặt $y = x^2$ ta có phương trình $m^2p^2y^2 = p^4y - p^2m^2 + m^4y$ (với $m > p > 0$)

hay $m^2p^2y^2 - (m^4 + p^4)y + m^2p^2 = 0$.

$\Delta = (m^4 + p^4)^2 - 4m^4p^4 = (m^4 - p^4)^2; \sqrt{\Delta} = m^4 - p^4$

(vì $m > p > 0$)

$$y_1 = \frac{m^4 + p^4 + m^4 - p^4}{2m^2p^2} = \frac{2m^4}{2m^2p^2} = \frac{m^2}{p^2};$$

$$y_2 = \frac{m^4 + p^4 - m^4 + p^4}{2m^2p^2} = \frac{p^2}{m^2}.$$

Từ đó $x^2 = \left(\frac{m}{p}\right)^2; x_{1,2} = \pm \frac{m}{p}$ và $x^2 = \left(\frac{p}{m}\right)^2; x_{3,4} = \pm \frac{p}{m}$.

Phương trình có bốn nghiệm là $\pm \frac{m}{p}$ và $\pm \frac{p}{m}$.

● Khai thác bài toán

Nếu phương trình trùng phương là $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ thì khi đặt $y = x^2$ ta được phương trình bậc hai $2y^2 + 5y + 2 = 0$. Giải

ra được hai nghiệm âm là $y_1 = -2$; $y_2 = -\frac{1}{2}$. Từ đó $x^2 = -2$, và $x^2 = -\frac{1}{2}$, vô lí.

Vậy phương trình này vô nghiệm mặc dầu phương trình $2y^2 + 5y + 2 = 0$ có hai nghiệm âm.

- Qua việc giải các phương trình trùng phương ở trên ta có thể rút ra nhận xét sau đây:

Tổng các nghiệm của một phương trình trùng phương $x^4 + px^2 + q = 0$ thì bằng 0 và tích các nghiệm bằng q.

Thật vậy xét các phương trình ở câu a chẳng hạn ta có với phương trình $x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$ rõ ràng tổng 4 nghiệm $+1 + (-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$ và tích của chúng $1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Với phương trình $x^4 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3} = 0$ ta có tổng 4 nghiệm $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{3} + (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 0$ và tích của chúng $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3}$.

Bài 20. Giải các phương trình vô tỉ sau:

a) $\sqrt{3x - 5} - 4 = 5$; $\sqrt{x^2 - 3x - 1} = 2x - 7$;

b) $\sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{3}$; $y - \sqrt{25 - y^2} = 7$;

c) $\frac{m\sqrt{z} + p}{m - p\sqrt{z}} = \frac{m + p}{m - p}$.

● **Tìm hiểu đề bài**

Đây là loại phương trình vô tỉ tức là phương trình có ẩn nằm trong dấu căn.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Muốn giải một phương trình vô tỉ (chỉ có một căn thức bậc hai) ta phải đưa biểu thức chứa ẩn ra ngoài dấu căn bằng cách để nguyên căn thức ở một vế và chuyển tất cả số hạng khác (không chứa căn thức) sang vế kia, rồi bình phương hai vế. Do vế chứa căn thức phải không âm nên phải đặt điều kiện để vế kia cũng không âm.

Cuối cùng khi tìm được nghiệm đối chiếu với điều kiện đã nêu.

● **Cách giải**

a) Điều kiện: $3x - 5 \geq 0$ hay $x \geq \frac{5}{3}$. Phương trình thứ nhất có thể viết:

$\sqrt{3x - 5} = 9$. Bình phương hai vế được: $3x - 5 = 81$ hay $3x = 86$,

từ đó $x = \frac{86}{3} = 28\frac{2}{3}$.

• Điều kiện: $x^2 - 3x - 1 \geq 0$, vì vế trái ≥ 0 nên $2x - 7 \geq 0$ hay $x \geq 3,5$. Bình phương hai vế được:

$$x^2 - 3x - 1 = (2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49, \text{ hay}$$

$$3x^2 - 25x + 50 = 0. \text{ Giải ra ta có hai nghiệm là } x_1 = 5;$$

$$x_2 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm là 5.

b) Điều kiện $y^2 - 1 \geq 0$ hay $|y| \geq 1$. Bình phương hai vế được $y^2 - 1 = 3$ hay $y^2 = 4$. Vậy $y = \pm 2$. Phương trình có hai nghiệm là ± 2 .

• Điều kiện $25 - y^2 \geq 0$. Phương trình thứ hai có thể viết:

$$\sqrt{25 - y^2} = y - 7. \text{ Điều kiện: } y - 7 \geq 0 \text{ hay } y \geq 7.$$

Bình phương hai vế được:

$$25 - y^2 = (y - 7)^2 = y^2 - 14y + 49; \quad 2y^2 - 14y + 24 = 0; \\ y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Giải ra được $y_1 = 4$; $y_2 = 3$. Cả hai giá trị này đều bị loại (vì rõ ràng $y - 7$ sẽ âm).

c) Với điều kiện $z \geq 0$, ta nhân chéo được:

$$(m\sqrt{z} + p)(m - p) = (m - p\sqrt{z})(m + p), \text{ hay}$$

$$m^2\sqrt{z} - mp\sqrt{z} + mp - p^2 = m^2 + mp - mp\sqrt{z} - p^2\sqrt{z};$$

$$(m^2 + p^2)\sqrt{z} = m^2 + p^2.$$

$$\text{Từ đó } \sqrt{z} = \frac{m^2 + p^2}{m^2 + p^2} = 1. \text{ Vậy } z = 1.$$

• Khai thác bài toán

Hãy xét thêm phương trình $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$. Điều kiện

$$2x + 3 \geq 0 \text{ hay } x \geq -\frac{3}{2}; 6 - x \geq 0 \text{ hay } x \leq 6.$$

Bình phương hai vế được:

$2x + 3 = (6 - x)^2 = 36 - 12x + x^2$, hay $x^2 - 14x + 33 = 0$. Giải ra được $x_1 = 3$; $x_2 = 11$ (loại). Vậy phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 3$.

- Với phương trình $\sqrt{25 - x^2} = 3x - 15$ thì: để căn thức bậc hai có nghĩa thì $25 - x^2 \geq 0$ hay $x^2 \leq 25$ tức là $-5 \leq x \leq 5$ (1) và để đẳng thức có thể xảy ra thì $3x - 15 \geq 0$ hay $x \geq 5$ (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được điều kiện $x = 5$.

Với $x = 5$ thì vế trái bằng: $\sqrt{25 - 25} = 0$, vế phải bằng $15 - 15 = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5$ mà không cần phải giải như ở các ví dụ khác.

* Bài 21. Giải phương trình:

a) $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$;

b) $x^4 + (x - 1)^4 = 97$.

● Tìm hiểu đề bài

Với phương trình a nếu tính tích bốn thừa số ở vế trái thì sẽ được một phương trình bậc bốn còn nếu tính tích hai thừa một thì sẽ được tích của hai phương trình bậc hai, vì thế phương trình này mới quy về phương trình bậc hai để giải.

Phương trình b là phương trình bậc bốn nhưng có thể đưa về dạng phương trình trùng phương và phương trình bậc hai để giải.

● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Nhân hai thừa số thứ nhất và thứ ba, rồi nhân hai thừa số thứ hai và thứ tư sẽ được tích của hai tam thức bậc hai ở vế trái là $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21)$ mà cách giải là dùng ẩn phụ

$$x^2 + 4x - 5 = y \text{ thì } x^2 + 4x - 21 \text{ sẽ bằng } y - 16.$$

b) Hãy đặt $x - 1 = y$ để đưa phương trình đã cho về hệ

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{Sau đó đưa vào ẩn mới } x + y = t, \text{ để biến đổi}$$

và đưa về phương trình trùng phương ẩn t .

● Cách giải

a) Nhân hai thừa số thứ nhất và thứ ba, thứ hai và thứ tư được:

$$(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = 297.$$

Đặt $x^2 + 4x - 5 = y$ (1) thì thừa số thứ hai sẽ là $y - 16$, do đó ta được phương trình bậc hai $y^2 - 16y - 297 = 0$. Phương trình này có nghiệm là 27 và -11. Thay $y_1 = 27$ vào (1) được phương trình $x^2 + 4x - 5 = 27$ hay $(x + 2)^2 = 36$.

Từ đó $x + 2 = \pm 6$, vậy $x_1 = 4$; $x_2 = -8$.

Thay $y_2 = -11$ vào (1) được phương trình $x^2 + 4x - 5 = -11$ hay $x^2 + 4x + 6 = 0$, vô nghiệm.

Tóm lại phương trình đã cho có hai nghiệm là 4 và -8.

b) Đặt $x - 1 = y$, phương trình đã cho trở thành hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x^4 + y^4 = 97 & (1) \\ x - y = 1 & (2). \end{cases}$$

Ta đưa vào ẩn mới $x + y = t$ và kết hợp với (2) được:

$$x = \frac{t+1}{2}, y = \frac{t-1}{2} \quad (3), \text{ thay vào (1) ta có:}$$

$$\left(\frac{t+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{t-1}{2}\right)^4 = 97.$$

Thực hiện các phép tính sẽ được phương trình trùng phương $t^4 + 6t^2 - 775 = 0$. Giải ra ta có hai nghiệm $t_1 = 5; t_2 = -5$.

Thay các giá trị này vào (3) sẽ được:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 3 và -2.

● Khai thác bài toán

Một phương trình bậc cao khác có thể quy về phương trình bậc hai là phương trình sau: $y^3 + \frac{1}{y^3} = 78(y + \frac{1}{y})$ với điều kiện $y \neq 0$.

Áp dụng hằng đẳng thức $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ ta có:

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = (y + \frac{1}{y})^3 - 3(y + \frac{1}{y}) = 78(y + \frac{1}{y}) \text{ hay}$$

$$(y + \frac{1}{y})[(y + \frac{1}{y})^2 - 81] = 0. \text{ Từ đó:}$$

$$\text{a) } y + \frac{1}{y} = 0 \text{ hay } y^2 + 1 = 0, \text{ vô nghiệm;}$$

$$\text{b) } (y + \frac{1}{y})^2 - 81 = 0, \text{ từ đó } y + \frac{1}{y} = \pm 9. \text{ Giải } y + \frac{1}{y} = 9$$

$$\text{hay } y^2 - 9y + 1 = 0 \text{ được nghiệm là } y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}; \text{ giải } y + \frac{1}{y} = -9$$

hay $y^2 + 9y + 1 = 0$ được nghiệm là $y_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{77}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 22

a) Tìm hai số biết tổng là 22 và tổng các bình phương là 250.

b) Tìm một số có hai chữ số biết rằng số này gấp 8 lần tổng hai chữ số của nó và nếu thêm 13 vào tích hai chữ số đó thì sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại.

• Tìm hiểu đề bài

Đây là bài toán tìm số. Ở câu a phải tìm hai số khi biết tổng và tổng các bình phương của chúng. Ở câu b phải tìm một số có hai chữ số theo một số điều kiện cho trước.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi số thứ nhất là x thì số thứ hai sẽ là $22 - x$. Tổng các bình phương của chúng là $x^2 + (22 - x)^2 = 250$. Tiếp tục giải phương trình bậc hai này.

b) Gọi chữ số hàng chục và hàng đơn vị theo thứ tự là x và y . Số phải tìm sẽ là $10x + y$, số viết theo thứ tự ngược lại là $10y + x$. Từ đó mà lập phương trình.

• Cách giải

a) Gọi số thứ nhất là x ($x > 0$), số thứ hai sẽ là $22 - x$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$x^2 + (22 - x)^2 = 250, \text{ hay } x^2 + 484 - 44x + x^2 - 250 = 0;$$

$$2x^2 - 44x + 234 = 0 \text{ hay } x^2 - 22x + 117 = 0.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 13$; $x_2 = 9$, thỏa mãn điều kiện ở trên. Vậy hai số phải tìm là 13 và 9.

b) Gọi chữ số hàng chục là x ($0 < x \leq 9$), chữ số hàng đơn vị là y ($0 < y \leq 9$) với $x > y$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x + y = 8(x + y) & (1) \\ 10y + x = xy + 13 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có thể viết:

$$10x + y = 8x + 8y. \text{ Từ đó } 2x = 7y; x = \frac{7y}{2}.$$

Thay giá trị của x vào (2):

$$10y + \frac{7y}{2} = \frac{7y}{2} \cdot y + 13, \text{ hay } 20y + 7y = 7y^2 + 26;$$

$$7y^2 - 27y + 26 = 0. \text{ Giải ra được } y_1 = 2, y_2 = \frac{13}{7} \text{ (loại).}$$

$$\text{Từ đó } x = \frac{7y}{2} = \frac{7 \cdot 2}{2} = 7, \text{ thỏa mãn điều kiện ở trên.}$$

Vậy số phải tìm là 72.

● Khai thác bài toán

Có thể giải hai bài toán tương tự:

a) Tổng các bình phương của hai số hơn kém nhau 3 thì bằng 89. Tìm hai số đó.

b) Phân tích số 270 thành hai thừa số mà tổng bằng 33.

Với bài toán a ta gọi số thứ nhất là x thì số thứ hai là $x + 3$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 3)^2 = 89 \text{ hay } x^2 + x^2 + 6x + 9 = 89; 2x^2 + 6x - 80 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 5; x_2 = -8$ (loại).

Vậy hai số phải tìm là 5 và 8.

Với bài toán b nếu gọi thừa số thứ nhất là x thì thừa số thứ hai sẽ là $33 - x$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$x(33 - x) = 270, \text{ hay } 33x - x^2 = 270; x^2 - 33x + 270 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 18, x_2 = 15$.

Vậy số 270 có thể phân tích thành hai thừa số là 18 và 15.

Bài 23

a) Đa giác mà số đường chéo lớn hơn số cạnh là 12 là đa giác gì ?

b) Đường cao của một tam giác vuông bằng 9,6m và chia cạnh huyền thành hai đoạn hơn kém nhau 5,6m. Tính độ dài cạnh huyền.

• Tìm hiểu đề bài

Đây là loại toán có nội dung hình học. Câu a đòi hỏi phải nắm được công thức tính số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh. Câu b liên quan đến hệ thức lượng trong tam giác vuông.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Một đa giác lồi n cạnh có số đường chéo là $\frac{(n-3)n}{2}$. Từ đó

mà lập phương trình để tìm n khi biết số đường chéo hơn số cạnh là 12.

b) Gọi hai đoạn mà đường cao chia cạnh huyền là x và $x + 5,6$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $h^2 = b'c'$ (h là độ dài đường cao, b' và c' là hai đoạn mà đường cao chia cạnh huyền). Từ đó tìm được x và độ dài cạnh huyền của tam giác vuông.

• Cách giải

a) Gọi n là số cạnh của đa giác (n nguyên dương). Ta biết rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{(n-3)n}{2}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{(n-3)n}{2} - n = 12, \text{ hay } (n-3)n - 2n = 24;$$

$$n^2 - 3n - 2n = 24; n^2 - 5n - 24 = 0.$$

Giải ra tìm được $n_1 = 8$; $n_2 = -3$ (loại)

Vậy đa giác phải tìm là bát giác (hình tám cạnh).

b) Gọi hai đoạn mà đường cao chia cạnh huyền là x và $x + 5,6$ (mét) với $x > 0$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $h^2 = b'c'$ hay $9,6^2 = x(x + 5,6)$; $x^2 + 5,6x - 92,16 = 0$.

$$\Delta' = 2,8^2 + 92,16 = 7,84 + 92,16 = 100; \sqrt{\Delta'} = 10$$

$$x_1 = -2,8 + 10 = 7,2; x_2 = -2,8 - 10 = -12,8 \text{ (loại)}.$$

Chỉ có nghiệm x_1 là phù hợp với điều kiện ở trên.

Ta có hai đoạn mà đường cao chia cạnh huyền là 7,2 m và 12,8 m. Vậy cạnh huyền có độ dài là: $7,2 + 12,8 = 20$ (m).

● Khai thác bài toán

Bài toán có nội dung hình học đòi hỏi phải nắm vững kiến thức về hình học. Ta có thể xét thêm bài toán sau:

Cho một số điểm nằm trong mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ những đường thẳng qua từng cặp điểm một. Tính xem có mấy điểm nếu số đường thẳng vẽ được là 45.

Ta biết rằng nếu có n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng qua từng cặp điểm một là $\frac{(n-1)n}{2}$ (đường thẳng).

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{(n-1)n}{2} = 45, \text{ hay } n^2 - n - 90 = 0.$$

Giải ra, tìm được $n = 10$.

Lưu ý: nếu trong n điểm có đúng 3 điểm thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được sẽ giảm đi 2 (vì qua 3 điểm không thẳng hàng thì vẽ được 3 đường thẳng còn qua 3 điểm thẳng hàng thì chỉ vẽ được 1 đường thẳng).

Bài 24

a) Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược dòng 36 km. Thời gian xuôi dòng nhiều hơn ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Tìm vận tốc của canô khi xuôi và khi ngược dòng.

b) Một người đi xe đạp từ hai địa điểm M và N trong một thời gian đã định. Khi còn cách N 30 km người ấy nhận thấy nếu giữ nguyên vận tốc đang đi thì sẽ đến N chậm mất $\frac{1}{2}$ giờ, do đó đã tăng vận tốc thêm 5 km/h nên đến sớm hơn $\frac{1}{2}$ giờ. Tìm vận tốc xe đạp lúc đầu.

• Tìm hiểu đề bài

Đây là loại toán chuyển động. Ở câu a là canô xuôi dòng và ngược dòng, ở câu b là người đi xe đạp sẽ đến nơi chậm và đến nơi sớm hơn thời gian dự định nếu tăng vận tốc. Ở cả hai câu đều yêu cầu tìm vận tốc.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi vận tốc canô khi xuôi dòng là x km/h, vận tốc khi ngược dòng sẽ là $x - 6$. Hãy tính thời gian khi xuôi dòng và khi ngược dòng, từ đó mà lập được phương trình bậc hai. Sẽ tìm được hai đáp số.

b) Gọi vận tốc xe đạp lúc đầu là x km/h. Hãy tính thời gian đi 30 km lúc đầu và thời gian đi 30 km khi đã tăng vận tốc thêm 5km/h. Từ đó mà lập được phương trình bậc hai.

• Cách giải

a) Gọi vận tốc canô khi xuôi dòng là x km/h ($x > 0$), vận tốc khi ngược dòng sẽ là $(x - 6)$ km/h.

Thời gian khi xuôi dòng là $\frac{90}{x}$ giờ, khi ngược dòng là $\frac{36}{x - 6}$ giờ.

Do thời gian xuôi nhiều hơn thời gian ngược là 2 giờ nên ta có

phương trình:

$$\frac{90}{x} - \frac{36}{x-6} = 2 \text{ hay } \frac{45}{x} - \frac{18}{x-6} = 1.$$

Sau khi tính toán và rút gọn được phương trình bậc hai $x^2 - 33x + 270 = 0$. Giải ra được hai nghiệm là $x_1 = 15$ và $x_2 = 18$. Cả hai đều phù hợp với điều kiện đã nêu.

Vậy vận tốc canô khi xuôi dòng là 15 km/h hoặc 18 km/h. Vận tốc canô khi ngược dòng là 9 km/h hoặc 12 km/h.

b) Gọi vận tốc xe đạp lúc đầu là x km/h, khi đã tăng vận tốc là $(x + 5)$ km/h, ($x > 0$).

Thời gian đi 30 km lúc đầu là $\frac{30}{x}$, lúc sau là $\frac{30}{x+5}$ (giờ).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{1}{2} = \frac{30}{x+5} + \frac{1}{2}.$$

Ta được phương trình bậc hai $x^2 + 5x - 150 = 0$. Giải ra được nghiệm là $x_1 = 10$, $x_2 = -15$ (loại). Vậy vận tốc xe đạp lúc đầu là 10 km/h.

● Khai thác bài toán

Sau đây là bài toán tương tự:

Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với canô xuôi từ bến A là một chiếc bè trôi từ A với vận tốc 3 km/h. Sau khi đến B canô trở ngay về A và gặp bè khi bè trôi được 8 km. Tính vận tốc riêng của canô biết rằng vận tốc riêng của canô không đổi. Thời gian từ lúc đi đến khi về gặp bè là 2 giờ 40 phút.

Trong bài này cần lưu ý là có chiếc bè trôi, như thế vận tốc bè 3 km/h chính là vận tốc dòng nước.

Gọi vận tốc riêng của canô là x km/h ($x > 0$). Thời gian lúc xuôi là $\frac{40}{x+3}$, thời gian lúc ngược là $\frac{32}{x-3}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{40}{x+3} + \frac{32}{x-3} = \frac{8}{3}, \text{ (đổi 2 giờ 40 phút thành } \frac{8}{3} \text{ giờ).}$$

Giải ra sẽ tìm được $x = 27$. Vậy vận tốc riêng của canô là 27 km/h.

Bài 25

a) Người ta trộn lẫn 8 gam dung dịch A với 6 gam dung dịch B có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là 200 kg/m^3 để được một dung dịch có khối lượng riêng là 700 kg/m^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi dung dịch.

b) Hai vòi A và B cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 2 giờ 55 phút. Nếu chảy riêng thì vòi A có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi B là 2 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy trong bao lâu mới đầy bể ?

• Tìm hiểu đề bài

a) Đây là bài toán về hỗn hợp, trộn hai dung dịch A và B để được một dung dịch mới.

b) Loại toán này là toán về vòi nước chảy.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi khối lượng riêng của dung dịch A là $x \text{ kg/m}^3$, khối lượng riêng của dung dịch B sẽ là $x - 200$. Hãy tính thể tích của dung dịch A và của dung dịch B rồi tính khối lượng của hỗn hợp và thể tích của hỗn hợp. Từ đó mà lập phương trình của bài toán.

b) Gọi số giờ để vòi A chảy riêng đầy bể là x , số giờ vòi B chảy riêng đầy bể sẽ là $x + 2$. Hãy tính xem trong 1 giờ mỗi vòi rồi cả hai vòi chảy vào được bao nhiêu phần bể. Từ đó mà lập được phương trình.

• Cách giải

a) Gọi khối lượng riêng của dung dịch A là $x \text{ kg/m}^3$. Khối lượng

riêng của dung dịch B sẽ là $(x - 200) \text{ kg/m}^3$ với $x > 200$.

Đổi $8\text{g} = 0,008 \text{ kg}$ và $6\text{g} = 0,006 \text{ kg}$. Ta có:

Thể tích dung dịch A là $\frac{0,008}{x}$, thể tích dung dịch B là $\frac{0,006}{x - 200}$.

Khối lượng của hỗn hợp là $0,008 + 0,006 = 0,014$. Thể tích của hỗn hợp là $\frac{0,014}{700}$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{0,008}{x} + \frac{0,006}{x - 200} = \frac{0,014}{700}, \text{ hay } \frac{8}{x} + \frac{6}{x - 200} = \frac{14}{700} = \frac{1}{50};$$

$$400(x - 200) + 300x = x^2 - 200x; x^2 - 900x + 80\,000 = 0.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 800$, $x_2 = 100$ (loại vì nhỏ hơn 200).

Vậy khối lượng riêng của dung dịch A là 800 kg/m^3 và của dung dịch B là 600 kg/m^3 .

b) Gọi số giờ để vòi A chảy riêng đầy bể là x ($x > 0$). Số giờ để vòi B chảy đầy bể sẽ là $x + 2$.

Trong 1 giờ vòi A chảy vào được $\frac{1}{x}$ bể, vòi B chảy vào được $\frac{1}{x+2}$ bể, cả hai vòi chảy trong 1 giờ được $1 : \frac{35}{12} = \frac{12}{35}$ bể (đổi 2 giờ 55 phút thành $\frac{35}{12}$ giờ).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2} = \frac{12}{35} \text{ hay } 35(x + 2) + 35x = 12x(x + 2).$$

Thực hiện phép tính được phương trình $6x^2 - 23x - 35 = 0$. Giải ra ta được hai nghiệm $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{7}{6}$ (loại).

Vậy nếu chảy riêng thì vòi A phải chảy trong 5 giờ và vòi B phải chảy trong 7 giờ mới đầy bể.

● Khai thác bài toán

Bài toán về vòi nước còn có thể ra dưới dạng công việc cùng làm chung, chẳng hạn bài toán sau (giải bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất):

Hai người thợ cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc.

Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong ?

Cách giải sẽ như sau. Gọi số giờ mà người thứ nhất làm xong công việc là x , số giờ mà người thứ hai làm xong công việc là y ($x, y > 0$).

Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc. Đổi 7 giờ 12 phút thành $\frac{36}{5}$ giờ. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Giải ra được $x = 12$, $y = 18$, phù hợp với điều kiện ở trên. Vậy muốn làm xong công việc thì người thứ nhất phải làm trong 12 giờ, người thứ hai trong 18 giờ.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐƠN GIẢN

Bài 26. Giải hệ phương trình hai ẩn:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1 \\ 2x - y = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u^2 + 4uv - v^2 - 3u + v = 4 \\ 2v - 3u = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = 3 \\ x+y = 6; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 63 \\ u - v = -3. \end{cases}$$

● **Tim hiểu đề bài**

Tất cả hệ phương trình trên đều là hệ phương trình hai ẩn đơn giản gồm một phương trình bậc hai hai ẩn và một phương trình bậc nhất hai ẩn. Dạng tổng quát của một phương trình bậc hai đủ hai ẩn là $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, trong đó ba hệ số a, b, c không đồng thời bằng 0.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

Phương pháp chung là rút một ẩn từ một phương trình rồi thay vào phương trình kia để chỉ còn lại một phương trình bậc hai một ẩn quen thuộc.

● **Cách giải**

a) Rút $y = 2x - 1$ từ phương trình thứ hai và thay vào phương trình thứ nhất được:

$$x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) = 1, \text{ hay}$$

$$x^2 - 4(4x^2 - 4x + 1) + x + 6x - 3 - 1 = 0;$$

$$x^2 - 16x^2 + 16x - 4 + x + 6x - 4 = 0; \quad 15x^2 - 23x + 8 = 0.$$

Giải ra được hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{8}{15}$ (giải nhầm vì $a + b + c = 0$).

Thay các giá trị này của x vào $y = 2x - 1$ ta được $y_1 = 1; y_2 = \frac{1}{15}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x_1 = y_1 = 1)$ và $(x_2 = \frac{8}{15}, y_2 = \frac{1}{15})$.

b) Rút v từ phương trình thứ hai: $v = \frac{1 + 3u}{2}$. Thay vào phương trình thứ nhất được:

$$u^2 + 4u \cdot \left(\frac{1 + 3u}{2} \right) - \frac{(1 + 3u)^2}{4} - 3u + \frac{1 + 3u}{2} - 4 = 0.$$

Sau khi biến đổi ta được phương trình bậc hai $19u^2 - 4u - 15 = 0$.

Vì $a + b + c = 0$ nên ta có ngay $u_1 = 1, u_2 = -\frac{15}{19}$. Các giá trị tương ứng của v sẽ là $v_1 = 2; v_2 = -\frac{13}{19}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(u_1 = 1; v_1 = 2)$ và $(u_2 = -\frac{15}{19}, v_2 = -\frac{13}{19})$.

c) Rút y từ phương trình thứ hai $y = 6 - x$ và thay vào phương trình thứ nhất được:

$\frac{1 + x + x^2}{1 + 6 - x + (6 - x)^2} = 3$, hay sau khi biến đổi sẽ được phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 64 = 0$. Giải ra được hai nghiệm là $x_1 = 16, x_2 = 4$.

Các giá trị tương ứng của y là: $y_1 = -10, y_2 = 2$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x_1 = 16, y_1 = -10)$ và $(x_2 = 4, y_2 = 2)$.

d) Rút $u = v - 3$ từ phương trình thứ hai rồi thay vào phương trình thứ nhất được: $(v - 3)^2 - v(v - 3) + v^2 = 63$.

Sau khi biến đổi sẽ được phương trình bậc hai $v^2 - 3v - 54 = 0$.

Giải ra được hai nghiệm $v_1 = 9, v_2 = -6$.

Các giá trị tương ứng của u là $u_1 = 6, u_2 = -9$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(u_1 = 6, v_1 = 9)$ và $(u_2 = -9, v_2 = -6)$.

● Khai thác bài toán

Ngoài cách giải ở trên, trong một số trường hợp ta có thể dùng những phương pháp đặc biệt. Chẳng hạn hai loại hệ tổng quát sau đây:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x^2 \pm y^2 = a \\ x \pm y = b. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải hệ
$$\begin{cases} x - y = 0,5 \\ xy = 7,5. \end{cases}$$

Ta viết hệ dưới dạng
$$\begin{cases} x + (-y) = 0,5 \\ x(-y) = -7,5. \end{cases}$$

Như vậy x và $-y$ là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 0,5X - 7,5 = 0$.

Giải ra tìm được $X_1 = 3, X_2 = -2,5$. Từ đó $x = 3; y = 2,5$ hoặc $x = -2,5; y = -3$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(3; 2,5)$ và $(-2,5; -3)$.

Ví dụ 2. Giải hệ
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất có thể viết: $(x + y)(x - y) = 15$.

Nhưng $x - y = 3$ nên $3(x + y) = 15; x + y = 5$.

Do đó ta được hệ phương trình mới
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Giải ra được $x = 4, y = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(4; 1)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình hai ẩn:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = 45 \\ uv = 14; \end{cases}$$

b*)
$$\begin{cases} y = 5x - x^2 \\ \sqrt{y} = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (u^2 + uv + v^2)\sqrt{u^2 + v^2} = 185 \\ (u^2 - uv + v^2)\sqrt{u^2 + v^2} = 65. \end{cases}$$

● **Tìm hiểu đề bài**

Các hệ phương trình ở trên gồm hai phương trình bậc hai hai ẩn. Ở câu a hệ có dạng tổng quát
$$\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

Ở câu b hệ thứ nhất có phương trình bậc hai $\sqrt{y} = x + 1$ và ở hệ thứ hai, cả hai phương trình đều chứa thừa số $\sqrt{u^2 + v^2}$ ở vế trái.

● **Hướng dẫn cách tìm lời giải**

a) Dùng phương pháp thế để đưa về một phương trình trùng phương.

b*) Viết $\sqrt{y} = x + 1$ dưới dạng $y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ rồi thay vào phương trình thứ nhất để được phương trình bậc hai một ẩn là x quen thuộc.

Đối với hệ thứ hai hãy cộng từng vế hai phương trình đã cho để được $(\sqrt{u^2 + v^2})^3 = 5^3$, suy ra $\sqrt{u^2 + v^2} = 5$. Thay vào hệ đã cho để tìm tích uv . Biết tổng $u^2 + v^2 = 25$ và tích uv sẽ giải tiếp như ở câu a.

● **Cách giải**

a) Từ phương trình thứ hai ta thấy x và y phải khác 0 nên $x = \frac{12}{y}$. Thay vào phương trình thứ nhất được:

$$\left(\frac{12}{y}\right)^2 + y^2 = 25, \text{ hay } \frac{144}{y^2} + y^2 = 25; y^4 - 25y^2 + 144 = 0.$$

Giải ra được 4 giá trị của y là ± 4 và ± 3 . Thay mỗi giá trị này vào $x = \frac{12}{y}$ ta được 4 giá trị của x là ± 3 và ± 4 .

Do tích $xy = 12$ nên x và y phải cùng dấu. Vậy ta được bốn nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -3 \end{cases}$$

Với hệ thứ hai cách giải cũng tương tự, ta sẽ đưa hệ này về một phương trình trùng phương như ở trên.

Bây giờ ta giải theo cách khác (cách này cũng áp dụng được cho hệ thứ nhất của câu a này):

Bình phương hai vế của $uv = 14$ được $u^2v^2 = 196$, rồi viết hệ đã cho như sau:

$$\begin{cases} u^2 + (-v^2) = 45 \\ u^2(-v^2) = -196. \end{cases}$$

Như thế u^2 và $-v^2$ là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 45X - 196 = 0$. Giải ra được $X_1 = 49$, $X_2 = -4$. Từ đó $u^2 = 49$; $u = \pm 7$ và $v^2 = -(-4) = 4$; $v = \pm 2$.

Do u và v phải cùng dấu vì tích $uv = 14$ nên hệ đã cho có hai nghiệm là $(u_1 = 7, v_1 = 2)$ và $(u_2 = -7, v_2 = -2)$.

b*) Điều kiện $y \geq 0$ và $x + 1 \geq 0$ hay $x \geq -1$.

Bình phương hai vế của phương trình hai được $y = x^2 + 2x + 1$ (*) và thay vào phương trình thứ nhất được $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Giải nhẩm được $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Thay vào (*) ta có $y_1 = 4$, $y_2 = 2\frac{1}{4}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x_1 = 1, y_1 = 4)$ và $(x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = 2\frac{1}{4})$.

- Với hệ thứ hai ta cộng từng vế hai phương trình đã cho được:

$$2(u^2 + v^2)\sqrt{u^2 + v^2} = 250, \text{ hay } (u^2 + v^2)\sqrt{u^2 + v^2} = 125;$$

$$\sqrt{(u^2 + v^2)^3} = 5^3. \text{ Từ đó } \sqrt{u^2 + v^2} = 5.$$

Thay giá trị này vào hệ đã cho ta được hệ sau:
$$\begin{cases} 25 + uv = 37 \\ 25 - uv = 13 \end{cases}$$

Suy ra $2uv = 24$. Bây giờ ta có:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 25 \\ uv = 12 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (u + v)^2 = 49 \\ uv = 12; \end{cases}$$

Từ đó $u + v = \pm 7$ và $uv = 12$. Vậy u và v là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 7X + 12 = 0$ và của phương trình

$X^2 + 7X + 12 = 0$. Giải hai phương trình này sẽ tìm được bốn nghiệm $X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = -3, X_4 = -4$.

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm $(3; 4), (4; 3), (-3; -4)$ và $(-4; -3)$.

● Khai thác bài toán

Ta có thể mở rộng cho hệ ba phương trình ba ẩn sau đây:

$$\text{Giải hệ} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ xyz = -60 \\ (x - 5)(y - 4) = 0. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với hai hệ:

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ xyz = -60 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ xyz = -60 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Xét hệ (1) ta có ngay $x = 5$, thay vào hai phương trình đầu

$$\text{được hệ} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ yz = -12 \end{cases}$$

Giải ra được nghiệm $(y; z)$ là: $(4; -3); (-4; 3); (3; -4); (-3; 4)$.

Tương tự giải hệ (2) được nghiệm $y = 4$ và các nghiệm $(x; z)$ là: $(5; -3); (-5; 3); (3; -5); (-3; 5)$.

Sau khi phối hợp các nghiệm ta được bảy nghiệm (x, y, z) sau đây: $(5; 4; -3); (5; -4; 3); (5; -3; 4); (5; 3; -4); (-3; 4; 5); (3; 4; -5)$ và $(-5; 4; 3)$.

B. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 28. Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Tìm a biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $M(-2; 1)$ và vẽ đồ thị với a tìm được.

b) Cho đường thẳng $y = x + k$, với giá trị nào của k thì parabol

cắt đường thẳng tại 2 điểm, tại 1 điểm (tiếp điểm). Xác định tọa độ tiếp điểm.

c) Giải thích tại sao tiếp điểm N đối xứng với điểm M qua trục tung.

d) Tính chu vi và diện tích của tam giác MON.

Bài 29. Cho parabol $y = x^2$.

a) Gọi A là điểm trên parabol này có hoành độ bằng -2. Viết phương trình của đường thẳng qua A và điểm B (2;4).

b) Tìm trên trục tung điểm C sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

c) Đường thẳng $y = mx - 4$ cắt parabol tại hai điểm, tìm hệ số góc m của đường thẳng.

Bài 30. Cho tam thức bậc hai $y = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Biến đổi tam thức thành dạng $y = 2(x + 1)^2 - 8$ rồi tìm các giá trị của x khi $y = 0$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của y, khi đó x bằng bao nhiêu ?

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y_1 = 2x^2 + 4x - 6$ và $y_2 = 2x^2$ trên cùng một hệ trục với các giá trị nguyên của x từ -3 đến 3.

d) Tìm tọa độ đỉnh của hai parabol y_1 và y_2 .

Bài 31. Giải phương trình bậc hai:

a) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}$;

b) $\frac{z}{z-m} - \frac{2m}{z+m} = \frac{-8m^2}{m^2-z^2}$; c) $\sqrt{y+3} + \sqrt{22-y} = 7$.

Bài 32. Lập phương trình bậc hai với hệ số nguyên có nghiệm là:

a) 5 và $\frac{2}{3}$; b) m + n và $\frac{1}{m+n}$; c) $\frac{-2+\sqrt{5}}{3}$ và $\frac{2-\sqrt{5}}{3}$.

Bài 33

a) Cho phương trình $3x^2 - 4x + k + 5 = 0$. Tìm k để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$.

b) Không giải phương trình $x^2 - x\sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$ hãy tính giá trị biểu thức $A = \frac{3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2}$ trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 34. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau:

a) $x^2 - y^2 = 105$; b) $(m - 3p)^2 = 100 - 4p^2$.

Bài 35

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$ và $B = k - \sqrt{k - 2000}$.

b*) Tìm giá trị lớn nhất của $C = \frac{3}{4m^2 - 4m + 5}$ và $D = \frac{4m + 3}{m^2 + 1}$.

Bài 36. Giải hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{8} \\ p + q = 12; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} p^2 - 2p + q^2 = 0 \\ p^2 - 2pq + 1 = 0. \end{cases}$$

Bài 37

a) Một rạp hát chứa được 300 chỗ ngồi. Nếu thêm 2 chỗ ngồi vào mỗi dãy ghế và bớt đi 3 dãy ghế thì sẽ bớt đi 11 chỗ ngồi. Hỏi rạp hát có mấy dãy ghế?

b) Người ta rào một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng là 20 m. Hỏi hàng rào đó dài bao nhiêu nếu diện tích khu vườn là 3500 m^2 và người ta muốn chừa một cổng ra vào rộng 1 m?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 28 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Thay tọa độ của M vào $y = ax^2$ để tìm được $a = \frac{1}{4}$ rồi vẽ parabol $y = \frac{1}{4}x^2$.

b) Giao điểm của parabol và đường thẳng có hoành độ là nghiệm của phương trình bậc hai $\frac{x^2}{4} = x + k$. Có hai giao điểm phân biệt nếu $\Delta > 0$, có 1 giao điểm (tiếp điểm) nếu $\Delta = 0$. Từ đó mà xác định tọa độ tiếp điểm.

c) Hãy chứng tỏ hai điểm M và N có hoành độ đối nhau và tung độ bằng nhau.

d) Áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông để tính OM, ON sau đó tính MN. Từ đó mà tính được chu vi và diện tích tam giác cân MON.

• Cách giải

a) Thay tọa độ của M vào $y = ax^2$ ta có: $1 = a \cdot (-2)^2$, suy ra $a = \frac{1}{4}$. Ta vẽ parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ bằng cách lập bảng sau:

x	...	-4	-2	0	2	4	...
$y = \frac{1}{4}x^2$	...	4	1	0	1	4	...

Đồ thị như ở hình 18. Đó là parabol có đỉnh là gốc tọa độ O, có trục đối xứng là trục tung, nằm phía trên trục hoành.

b) Tại giao điểm của parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = x + k$ ta có $\frac{1}{4}x^2 = x + k$ hay $x^2 - 4x - 4k = 0$.

Nếu phương trình này có hai nghiệm phân biệt thì parabol và đường thẳng sẽ cắt nhau theo hai giao điểm phân biệt, tức là $\Delta' > 0$.

Ta có $\Delta' = 4 + 4k = 4(1 + k) > 0$ khi $k > -1$.

Nếu phương trình này có 1 nghiệm kép thì parabol và đường thẳng sẽ chỉ có 1 giao điểm (đường thẳng tiếp xúc parabol) tức là $\Delta' = 0$ khi $k = -1$. Khi đó $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$, suy ra $x = 2$.

Tọa độ tiếp điểm là $(x = 2; y = 1)$.

c) Ta có hoành độ của M là -2,

của N là 2, còn tung độ của M và N đều bằng 1. Do đó M và N là hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

d) Từ N hạ $NH \perp Ox$. Trong tam giác vuông OHN ta có theo định lý Pitago: $ON^2 = OH^2 + HN^2 = 4 + 1 = 5$; suy ra $ON = \sqrt{5}$.

Do $OM = ON$ nên $OM = \sqrt{5}$.

Cạnh đáy MN của tam giác MON bằng 2 lần đoạn NK hay $MN = 4$.

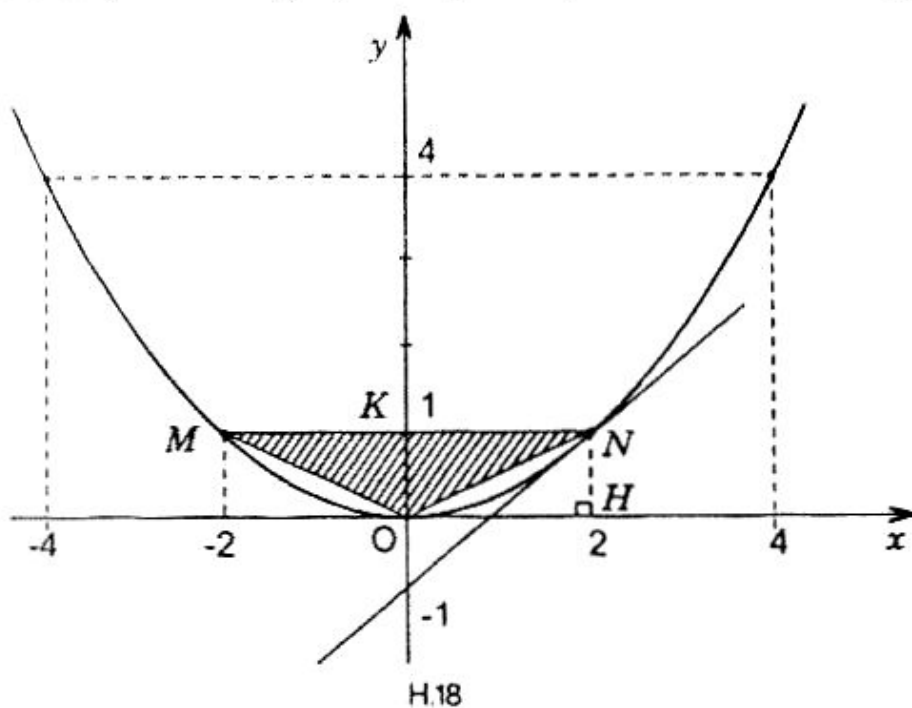
Vậy tam giác MON có chu vi là: $OM + MN + ON = 2\sqrt{5} + 4$ (đơn vị độ dài) và có diện tích là: $\frac{1}{2}MN \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$ (đơn vị diện tích).

Bài 29 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Trước hết tìm tung độ của A rồi tìm phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm A và B có tọa độ cho trước.

b) Muốn cho ba điểm A, B, C thẳng hàng mà C nằm trên trục tung thì C cũng nằm trên AB.

c) Khi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx - 4$ cắt nhau thì



tại giao điểm ta có:

$$x^2 = mx - 4 \text{ hay } x^2 - mx + 4 = 0.$$

● Cách giải

a) Tung độ của A là $y = (-2)^2 = 4$. Đường thẳng qua A và B nên tọa độ của A và B thỏa mãn phương trình $y = ax + b$, tức là

$$\begin{cases} 4 = -2a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 4$$

Phương trình đường thẳng AB là $y = 4$.

b) C nằm trên trục tung và ba điểm A, B, C thẳng hàng nên C phải nằm trên đường thẳng AB. Do đó tọa độ của C là $x = 0$, $y = 4$.

c) Khi parabol $y = x^2$ cắt đường thẳng $y = mx - 4$ tại hai điểm thì tại giao điểm ta có $x^2 = mx - 4$ hay $x^2 - mx + 4 = 0$ với $\Delta > 0$, tức là $m^2 - 16 > 0$ hay $m^2 > 16$. Từ đó $|m| > 4$.

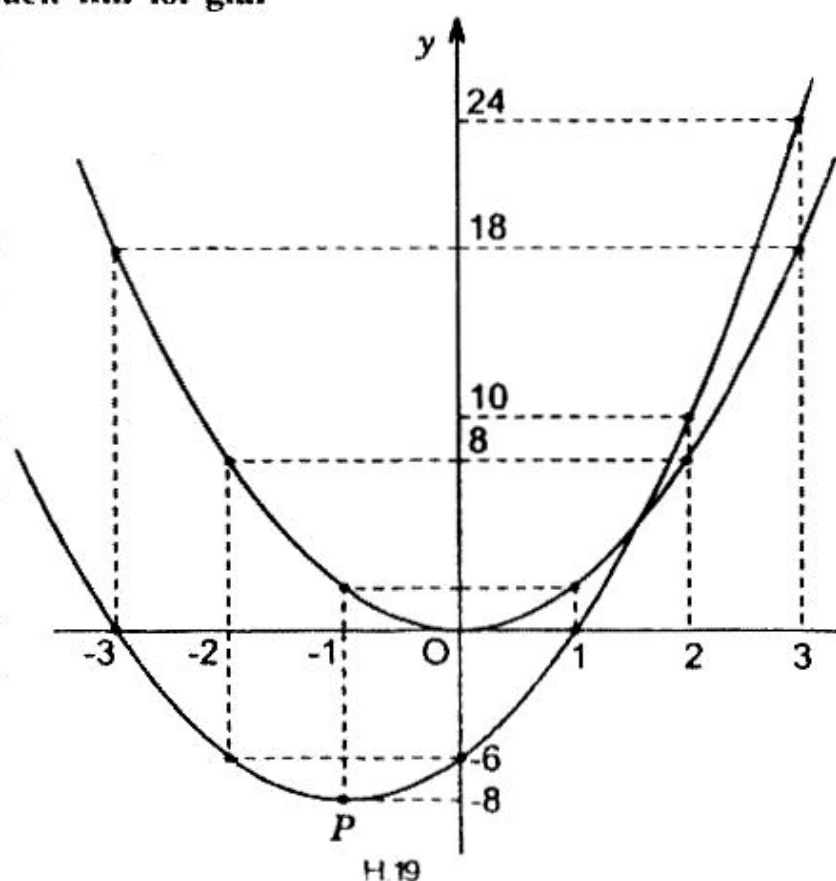
Bài 30 ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Thay -6 bằng $2 - 8$ để được $y = 2x^2 + 4x + 2 - 8$, từ đó có dạng cần tìm. Sau đó giải phương trình bậc hai $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

b) Cho $2(x + 1)^2 = 0$ để tìm giá trị nhỏ nhất của y.

c) Lập bảng các giá trị của x và các giá trị tương ứng của y_1 và y_2 . Từ đó mà vẽ đồ thị.

d) Đỉnh của parabol y_1



chính là điểm mà y_1 đạt giá trị nhỏ nhất còn đỉnh của parabol y_2 chính là gốc tọa độ O.

● Cách giải

a) Ta có thể viết $y = 2x^2 + 4x - 6 = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2(x + 1)^2 - 8$.

Khi $y = 0$ thì $2x^2 + 4x - 6 = 0$. Do $a + b + c = 0$ nên $x_1 = 1$ và $x_2 = (-6) : 2 = -3$.

b) Ta nhận thấy rằng $y = 2(x + 1)^2 - 8 \geq -8$. Do đó giá trị nhỏ nhất của y bằng -8 khi $2(x + 1)^2 = 0$ tức là khi $x = -1$.

c) Ta lập bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_1	0	-6	-8	-6	0	10	24
y_2	18	8	2	0	2	8	18

Đồ thị như ở hình 19.

d) Tọa độ đỉnh P của parabol y_1 là $P(x = -1, y = -8)$.

Tọa độ của đỉnh parabol y_2 chính là điểm gốc tọa độ O ($x = 0, y = 0$).

Bài 31 ● Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu để được phương trình bậc hai khuyết dạng $ax^2 + bx = 0$.

b) Đối dấu của vế phải để được mẫu chung là $z^2 - m^2$.

c*) Bình phương hai vế sẽ được một phương trình chỉ còn có một căn thức. Lại để riêng căn thức ở một vế và bình phương tiếp để được phương trình bậc hai $y^2 - 19y + 78 = 0$ quen thuộc.

● Cách giải

a) Đặt điều kiện : $x \neq \pm 2, x \neq -1$.

MC: $(x + 2)(x - 2)(x + 1)$. Quy đồng mẫu rồi khử mẫu:

$$(x + 1)^2(x - 2) + (x - 1)(x + 2)(x + 1) = (2x + 1)(x + 2)(x - 2)$$

hay $(x^2 + 2x + 1)(x - 2) + (x^2 - 1)(x + 2) = (2x + 1)(x^2 - 4)$

Sau khi làm phép tính và rút gọn sẽ được phương trình bậc hai khuyết $x^2 + 4x = 0$. Giải ra được $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, cả hai nghiệm phù hợp với điều kiện ở trên.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -4$.

b) Điều kiện: $z \neq \pm m$. Đối dấu của $\frac{-8m^2}{m^2 - z^2}$ thành $\frac{8m^2}{z^2 - m^2}$

rồi quy đồng mẫu (MC: $z^2 - m^2$) và khử mẫu ta được:

$$z(z + m) - 2m(z - m) - 8m^2 = 0.$$

Sau khi biến đổi được phương trình $z^2 - mz - 6m^2 = 0$.

Giải ra được $z_1 = 3m$; $z_2 = -2m$. Cả hai nghiệm phù hợp với điều kiện ở trên.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $3m$ và $-2m$.

c*) Điều kiện: $y + 3 \geq 0$; $22 - y \geq 0$ hay $-3 \leq y \leq 22$

Bình phương hai vế ta được:

$$y + 3 + 22 - y + 2\sqrt{(y + 3)(22 - y)} = 49$$

$\sqrt{-y^2 + 19y + 66} = 12$; Bình phương hai vế ta được:

$$-y^2 + 19y + 66 = 144; \text{ hay } y^2 - 19y + 78 = 0.$$

Giải ra được: $y_1 = 13$, $y_2 = 6$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện ở trên.

Vậy phương trình có hai nghiệm là 13 và 6 .

Bài 32 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

Tính tổng S và tích P của hai nghiệm, khi đó ta có phương trình $X^2 - SX + P = 0$. Sau đó quy đồng mẫu rồi khử mẫu để được phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

• Cách giải

a) Tổng $S = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$, tích $P = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$. Vậy 5 và $\frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{17}{3}X + \frac{10}{3} = 0 \text{ hay } 3X^2 - 17X + 10 = 0.$$

$$b) S = m + n + \frac{1}{m+n} = \frac{(m+n)^2 + 1}{m+n},$$

$$P = (m+n) \cdot \frac{1}{m+n} = 1.$$

$$\text{Vậy ta có phương trình bậc hai } X^2 - \frac{(m+n)^2 + 1}{m+n} X + 1 = 0$$

$$\text{hay } (m+n)X^2 - [(m+n)^2 + 1]X + m+n = 0.$$

$$c) S = \frac{-2 + \sqrt{5}}{3} + \frac{-2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{-4}{3}, P = \frac{-2 + \sqrt{5}}{3} \cdot \frac{-2 - \sqrt{5}}{3} =$$

$$= \frac{4 - 5}{3} = \frac{-1}{3}. \text{ Vậy ta có phương trình bậc hai } X^2 + \frac{4}{3}X - \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{hay } 3X^2 + 4X - 1 = 0.$$

Bài 33 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0$, từ đó tìm được k. Hệ thức đã cho có thể viết $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -2$,

do đó phải tìm S và P theo định lí Viét để thay vào mà tìm k.

b) Hãy biến đổi A sao cho xuất hiện $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ để áp dụng định lí Viét.

• Cách giải

a) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0$ tức là $4 - 3(k+5) = 4 - 3k - 15 > 0$ hay $k < -\frac{11}{3}$.

$$\text{Hệ thức } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2 \text{ có thể viết } \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -2 (*)$$

Theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 x_2 = \frac{k+5}{3}$. Thay vào (*) được $\frac{4}{k+5} = -2$ hay $4 = -2k - 10$. Từ đó $k = -7$.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có thể viết } A &= \frac{3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2} = \frac{3(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)}{4x_1x_2(x_1 + x_2)} = \\ &= \frac{3(x_1 + x_2)^2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{3(x_1 + x_2)}{4x_1x_2}. \text{ Thay } x_1 + x_2 = \sqrt{2} \text{ và } x_1x_2 = -\sqrt{3} \\ \text{ta được } A &= \frac{3\sqrt{2}}{-4\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{6}}{4 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Bài 34 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Viết phương trình dưới dạng $(x + y)(x - y) = 105$ thì thấy $x + y$ và $x - y$ là hai số lẻ với x, y nguyên dương, $x > y$. Từ đó suy ra $x - y < 10$.

Tiếp đó phân tích $105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$ để lần lượt có $x - y = 1; 3; 5; 7$ và $x + y = 105; 35; 21; 15$. Giải ra sẽ được các giá trị của x và y .

b) Trước hết tìm các nghiệm nguyên của phương trình rồi loại các nghiệm nguyên âm.

Do $(m - 3p)^2 = 100 - 4p^2 \geq 0$ nên phải tìm các giá trị thích hợp của y để $100 - 4p^2$ là bình phương của một số nguyên, từ đó suy ra các giá trị của x .

• Cách giải

a) Phương trình đã cho có thể viết: $(x + y)(x - y) = 105$. Do tích 105 là số lẻ nên hai số $x + y$ và $x - y$ phải là số lẻ. Ngoài ra vì x, y nguyên dương nên $x > y$ và $x - y < x + y$ hay $(x - y)^2 < (x + y)(x - y) = 105$. Suy ra $x - y < 10$, do đó $x - y = 1; 3; 5; 7$.

Số 105 có thể viết dưới dạng tích của hai số nguyên dương như sau:

$$105 = 1.105 = 3.35 = 5.21 = 7.15.$$

Vậy ta phải giải 4 hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 105 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 21 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 15. \end{cases}$$

Giải các hệ này sẽ được nghiệm (x, y) theo thứ tự là:

$(53; 52); (19; 16); (13; 8)$ và $(11; 4)$.

b) Phương trình đã cho có thể viết

$$(m - 3p)^2 = 4(25 - p^2) \geq 0, \text{ suy ra } p^2 \leq 25 \text{ hay } |p| \leq 5.$$

Ngoài ra $25 - p^2$ phải bằng bình phương của một số nguyên nên p lấy các giá trị sau: $0; \pm 3; \pm 4; \pm 5$. Ứng với các giá trị này của p ta được các giá trị của m là: $\pm 10; \pm 1; \pm 17; \pm 6; \pm 18; \pm 15$ (vì với mỗi giá trị của p có hai giá trị tương ứng của m).

Loại các nghiệm nguyên âm ta còn lại các nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là:

$(10; 0); (1; 3); (17; 3); (6; 4); (18; 4)$ và $(15; 5)$.

Bài 35 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy viết A dưới dạng $1 - \frac{2}{k^2 + 1}$ rồi tìm k sao cho $\frac{2}{k^2 + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất, từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của A .

Đối với B hãy đặt $\sqrt{k - 2000} = x \geq 0$ hay $k - 2000 = x^2$. Từ đó giải một phương trình bậc hai ẩn là x mà điều kiện có nghiệm là $\Delta \geq 0$. Giá trị nhỏ nhất của B là phương trình bậc hai này có nghiệm kép tức là $\Delta = 0$.

b) Viết C dưới dạng $\frac{3}{(2m - 1)^2 + 4} \leq \frac{3}{4}$ vì mẫu ≥ 4 . Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của C .

Viết D dưới dạng $4 - \frac{(2m-1)^2}{m^2+1} \leq 4$. Từ đó suy ra giá trị lớn

nhất của D.

• Cách giải

a) Ta có thể viết $A = \frac{k^2-1}{k^2+1} = \frac{k^2+1-2}{k^2+1} = 1 - \frac{2}{k^2+1}$. Để A

đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{2}{k^2+1}$ phải đạt giá trị lớn nhất, tức là

k^2+1 phải đạt giá trị nhỏ nhất, mà $k^2+1 \geq 1$ nên giá trị nhỏ nhất của nó là 1 đạt được khi $k^2=0$ hay $k=0$. Khi đó $A=-1$.

- Với B ta có thể giải như sau:

Với điều kiện $k \geq 2000$ ta đặt $\sqrt{k-2000} = x \geq 0$ ta có:

$$k-2000 = x^2 \text{ hay } k = x^2 + 2000.$$

$$\text{Vậy } B = k - x \text{ hay } B = x^2 - x + 2000; x^2 - x + 2000 - B = 0 (*)$$

Phương trình này có nghiệm khi $\Delta \geq 0$ tức là $1 - 4 \cdot 2000 + 4B \geq 0$ hay $B \geq 1999\frac{3}{4}$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của B là $1999\frac{3}{4}$ đạt được khi phương trình (*) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$ ứng với $k = \frac{1}{4} + 2000 = 2000\frac{1}{4}$.

b*) Ta có thể viết $C = \frac{3}{4m^2-4m+5} = \frac{3}{(2m-1)^2+4}$. Do

mẫu $(2m-1)^2+4 \geq 4$ nên $\frac{3}{(2m-1)^2+4} \leq \frac{3}{4}$. Suy ra giá trị lớn nhất của C là $\frac{3}{4}$ khi $2m-1=0$ hay $m=\frac{1}{2}$.

- Với D ta có thể viết

$$D = \frac{4m+3}{m^2+1} = \frac{4m^2+4-4m^2+4m-1}{m^2+1} = \frac{4(m^2+1)-(4m^2-4m+1)}{m^2+1} = 4 - \frac{(2m-1)^2}{m^2+1}.$$

Suy ra D đạt giá trị lớn nhất bằng 4 khi $2m - 1 = 0$ hay $m = \frac{1}{2}$.

Bài 36 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Quy đồng mẫu về trái của phương trình thứ nhất rồi thay giá trị của tổng $p + q$ ở phương trình thứ hai để tìm được tích pq . Từ đó áp dụng phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để giải tiếp.

b) Cộng từng vế hai phương trình sẽ được tổng của hai bình phương bằng 0 mà mỗi bình phương đều không âm. Từ đó suy ra giá trị của p và q để có đẳng thức.

• Cách giải

a) Hệ đã cho có thể viết

$$\begin{cases} \frac{p+q}{pq} = \frac{3}{8} \\ p+q = 12; \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \frac{12}{pq} = \frac{3}{8}; \quad pq = \frac{8 \cdot 12}{3} = 32.$$

Biết tổng $S = 12$, tích $P = 32$ nên p, q là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 12X + 32 = 0$

Giải ra được nghiệm là $X_1 = 8, X_2 = 4$.

Do p và q có vai trò như nhau nên hệ đã cho có nghiệm là $(p_1 = 8; q_1 = 4); (p_2 = 4; q_2 = 8)$.

b) Cộng từng vế hai phương trình đã cho được:

$$p^2 - 2p + 1 + p^2 - 2pq + q^2 = 0, \text{ hay } (p-1)^2 + (p-q)^2 = 0.$$

Do $(p-1)^2 \geq 0$ và $(p-q)^2 \geq 0$ với mọi p, q nên tổng $(p-1)^2 + (p-q)^2 \geq 0$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi $p = q = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $p = q = 1$.

Bài 37 • Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Gọi số dây ghế của rạp là x thì số ghế mỗi dây lúc đầu là $\frac{300}{x}$. Thêm 2 chỗ vào mỗi dây tức là số ghế mỗi dây sẽ tăng thêm 2 hay $\frac{300}{x} + 2$, bớt đi 3 dây thì còn $x - 3$ dây sẽ bớt đi

thêm 2 hay $\frac{300}{x} + 2$, bớt đi 3 dây thì còn $x - 3$ dây sẽ bớt đi 11 chỗ ngồi. Từ đó ta lập phương trình để giải.

b) Gọi chiều rộng khu vườn là x mét, chiều dài sẽ là $x + 20$. Diện tích khu vườn sẽ là $x(x + 20)$ mà diện tích này bằng 3500 m^2 .

Để tìm độ dài của hàng rào thì phải trừ đi 1 m làm cổng.

● Cách giải

a) Gọi số dây ghế của rạp là x (x nguyên dương). Số ghế mỗi dây lúc đầu là $\frac{300}{x}$.

Sau khi thêm 2 chỗ vào mỗi dây thì số ghế mỗi dây sẽ là $\frac{300}{x} + 2$. Nếu bớt đi 3 dây thì bớt đi 11 chỗ ngồi tức còn lại $300 - 11 = 289$ (chỗ ngồi) thì số ghế mỗi dây là $\frac{289}{x - 3}$. Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{300}{x} + 2 = \frac{289}{x - 3}$$

Thực hiện phép tính sẽ được phương trình bậc hai $2x^2 + 5x - 900 = 0$.

Giải ra tìm được $x_1 = 20$, $x_2 = -\frac{90}{4}$ (loại). Vậy rạp hát có 20 dây ghế.

b) Gọi chiều rộng của khu vườn là x mét ($x > 0$), chiều dài sẽ là $x + 20$ và diện tích là $x(x + 20) \text{ m}^2$.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$x(x + 20) = 3500, \text{ hay } x^2 + 20x - 3500 = 0.$$

Giải ra tìm được $x_1 = 50$, $x_2 = -70$ (loại).

Vậy chu vi khu vườn là:

$$2(50 + 70) = 240 \text{ (m)}$$

và hàng rào dài $240 - 1 = 239 \text{ (m)}$.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu	3
I. Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên	
Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ	5
II. Đa thức và các phép tính	64
- Biểu thức đại số	64
- Cộng, trừ đơn thức, đa thức	76
- Nhân đa thức	86
- Hằng đẳng thức đáng nhớ	95
- Chia đa thức	112
III. Phân thức đại số và các phép tính	124
- Phân thức. Tập xác định	124
- Tính chất cơ bản của phân thức	131
- Bốn phép tính về phân thức	145
IV. Hàm số và đồ thị	169
- Đại lượng tỉ lệ thuận	169
- Đại lượng tỉ lệ nghịch	179
- Hàm số	190
V. Phương trình và bất phương trình bậc nhất	201
- Phương trình. Biến đổi tương đương	201
- Các loại phương trình bậc nhất	206
- Phương trình chứa ẩn ở mẫu	212

- Phương trình tích	217
- Giải toán bằng cách lập phương trình bậc nhất.....	219
- Bất phương trình bậc nhất một ẩn.....	224
VI. Tập hợp các số thực.....	258
- Số vô tỉ. Số thực.....	258
- Căn bậc hai	
- Khai phương một tích, một thương. Nhân chia hai căn thức bậc hai	264
- Biến đổi đơn giản các căn thức.....	269
- Các phép tính về biểu thức chứa căn thức	283
VII. Hàm số bậc nhất. Hệ phương trình bậc nhất	303
- Hàm số bậc nhất. Tính chất và đồ thị.....	303
- Hệ phương trình và các phương pháp giải	313
- Giải toán bằng cách lập hệ phương trình.....	328
VIII. Hàm số bậc hai. Phương trình bậc hai.....	350
- Hàm số bậc hai. Phương trình bậc hai.....	350
- Phương trình quy về bậc hai	386
- Giải toán bằng cách lập phương trình bậc hai	395
- Hệ phương trình bậc hai đơn giản.....	403