

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ và có bán kính R là $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
Phương trình ở dạng này gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.

Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ cũng gọi là phương trình của đường tròn với tâm $I(a; b)$ và có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
Phương trình ở dạng này gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.

2. Vị trí tương đối giữa đường tròn với điểm, đường thẳng

Cho đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ và có bán kính R .

Phương trình của (C) : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

a) Xét điểm $A(x_0; y_0)$ thì:

- Điểm A nằm trong đường tròn $(C) \Leftrightarrow IA < R \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < R^2$
- Điểm A nằm trên đường tròn $(C) \Leftrightarrow IA = R \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$
- Điểm A nằm ngoài đường tròn $(C) \Leftrightarrow IA > R \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > R^2$

b) Xét đường thẳng $\Delta: mx + ny + p = 0$ thì:

- Đường thẳng Δ không cắt đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) > R$

$$\Leftrightarrow \frac{|ma + nb + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}} > R$$
- Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|ma + nb + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = R$
- Đường thẳng Δ cắt đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|ma + nb + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}} < R$

Ta cũng có thể xét vị trí của đường thẳng Δ và đường tròn (C) thông qua việc xem xét số giao điểm hay số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{cases}$$

- Đường thẳng Δ không cắt đường tròn $(C) \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.
- Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn $(C) \Leftrightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất.
- Đường thẳng Δ cắt đường tròn $(C) \Leftrightarrow$ hệ có hai nghiệm.

Chú ý:

- Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) tại A thì $IA \perp \Delta$.
- Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại A, B thì $R^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (d(I, \Delta))^2$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ của đường tròn (C) tâm $I(a; b)$ và có bán kính R là

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

B MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ ① Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$. Khi đó đường tròn có tâm I và bán kính R với

A. $I(2; -8), R = 2\sqrt{2}$

B. $I(1; -4), R = 3$

C. $I(-1; 4), R = 3$

D. $I(1; -4), R = 2\sqrt{2}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức ta có $I(-1; 4), R = 3$. Đáp án là C.

Chú ý: Khi học sinh không nhớ được công thức của tâm và bán kính thì cần biến đổi phương trình của đường tròn ở dạng tổng quát về dạng chính tắc

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = 9.$$

Từ đó có thông tin về tâm và bán kính của đường tròn.

Các phương án A, B, D là các sai lầm thường gặp của học sinh.

Ví dụ ② Điều kiện của m để phương trình

$$x^2 + y^2 + (m-3)x + (2m+1)y + 3m+10 = 0.$$

là phương trình của một đường tròn là:

A. $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

B. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

C. $m \in (0; 1)$

D. $m \in [0; 1]$

Hướng dẫn: Để phương trình $x^2 + y^2 + (m-3)x + (2m+1)y + 3m+10 = 0$ là phương trình của một đường tròn thì $(m-3)^2 + (2m+1)^2 - 3m - 10 > 0$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 5m > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \text{ Đáp án là B.}$$

Ví dụ ③ Phương trình đường tròn có tâm $I(3; -5)$ và có bán kính $R = 2$ là:

A. $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 4 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$

Hướng dẫn: Ta có phương trình đường tròn là

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0. \text{ Đáp án là D.}$$

Ví dụ ④ Phương trình đường tròn đường kính AB với $A(1; 6), B(-3; 2)$ là:

A. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 9 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 15 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 15 = 0$

Hướng dẫn: Đường tròn đường kính AB có tâm $I(-1; 4)$ là trung điểm của

AB và bán kính $R = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$ nên phương trình là

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0. \text{ Đáp án là A.}$$

Ví dụ 5 Phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1; 3), B(1; 4), C(3; 2)$ là:

A. $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}y + \frac{2}{3} = 0$

B. $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3} = 0$

C. $x^2 + y^2 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{6}y - \frac{2}{3} = 0$

D. $x^2 + y^2 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{6}y + \frac{2}{3} = 0$

Hướng dẫn: Gọi phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Do đường tròn qua $A(-1; 3), B(1; 4), C(3; 2)$ nên ta có

$$\begin{cases} (-1)^2 + 3^2 - 2(-1)a - 2 \cdot 3b + c = 0 \\ 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1a - 2 \cdot 4b + c = 0 \\ 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3a - 2 \cdot 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6b + c = -10 \\ -2a - 8b + c = -17 \\ -6a - 4b + c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{11}{6} \\ c = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3} = 0$. Đáp án là B.

Chú ý: Học sinh có thể đi tìm tâm và bán kính trước rồi suy ra phương trình của đường tròn, tuy nhiên cách làm này dài hơn. Khi có phương trình tổng quát của đường tròn rồi thì có ngay thông tin của tâm và bán kính của đường tròn.

Ví dụ 6 Cho đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 2y - 5 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 3x - y + 5 = 0$ và $d_2: x + 3y - 13 = 0$. Khi đó bán kính lớn nhất của đường tròn (C) có thể nhận là:

A. $\frac{19}{2\sqrt{10}}$

B. $\frac{3}{\sqrt{10}}$

C. $\frac{9}{2\sqrt{10}}$

D. $\frac{6}{\sqrt{10}}$

Hướng dẫn: Do tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$ nên tâm $I(5-2y; y)$. Mà đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 3x-y+5=0$ và $d_2: x+3y-13=0$ nên có bán kính

$$R = d(I; d_1) = d(I; d_2) \Rightarrow \frac{|20-7y|}{\sqrt{10}} = \frac{|-8+y|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Tương ứng ta có hai bán kính của (C) là $R_1 = \frac{6}{\sqrt{10}}, R_2 = \frac{9}{2\sqrt{10}}$.

Đáp án là D.

Ví dụ 7 Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm $A(-1; 1)$ là:

- A. $-4x + 3y - 7 = 0$ B. $4x + 3y + 1 = 0$
C. $3x + 4y - 1 = 0$ D. $3x - 4y + 7 = 0$

Hướng dẫn: Phương trình của (C) là

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Ta có phương trình tiếp tuyến tại $A(-1; 1)$ là

$$(-1-3)(x+1) + (1+2)(y-1) = 0 \Leftrightarrow -4x + 3y - 7 = 0.$$

Đáp án là A.

Ví dụ 8 Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ và điểm $A(m; 3)$. Giá trị của m để từ A kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến (C) là:

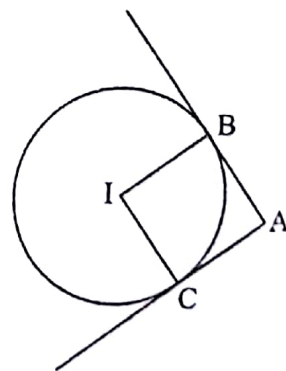
- A. $m = 2$ hoặc $m = 8$ B. $m = -2$ hoặc $m = -8$
C. $m = 2$ hoặc $m = -8$ D. $m = -2$ hoặc $m = 8$

Hướng dẫn:

Phương trình của (C) là

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = 5$. Giả sử hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ A là B, C (như hình vẽ). Khi đó $AB \perp AC \Leftrightarrow$ Tứ giác IBAC là hình vuông $\Leftrightarrow$ Tam giác IBA vuông cân



$$\Leftrightarrow IA = IB\sqrt{2} = R\sqrt{2}.$$

$$\Leftrightarrow (m-3)^2 + (3+2)^2 = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 8 \end{cases}$$

Đáp án là D.

BÀI TẬP

- Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$. Khi đó đường tròn có tâm I và bán kính R với
 - $I(-2;1), R=4$
 - $I(2;-1), R=4$
 - $I(2;-1), R=2$
 - $I(-2;1), R=2$
- Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$. Khi đó đường tròn có tâm I và bán kính R với
 - $I(4;-6), R=4$
 - $I(-2;3), R=16$
 - $I(-4;6), R=4$
 - $I(-2;3), R=4$
- Cho đường tròn (C) có phương trình $2x^2 + 2y^2 - 3x + 7y + 1 = 0$. Khi đó đường tròn có tâm I và bán kính R với các thông tin như sau:
 - $I(\frac{3}{4}; -\frac{7}{4}), R = \frac{5}{2\sqrt{2}}$
 - $I(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4}), R = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - $I(\frac{3}{4}; -\frac{7}{4}), R = 1$
 - $I(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}), R = \sqrt{15}$
- Cho đường tròn (C) có tâm $I(-4;2)$ và bán kính $R=5$. Khi đó phương trình của (C) là:
 - $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 25 = 0$
- Cho đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ đi qua điểm $A(3;4)$. Khi đó phương trình của (C) là:
 - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$
 - $x^2 + y^2 + x - 2y - 15 = 0$
 - $x^2 + y^2 - x + 2y - 20 = 0$

6. Cho đường tròn (C) có đường kính là AB với $A(-2;1)$, $B(4;1)$. Khi đó phương trình của (C) là:
- A. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 9 = 0$ B. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$
 C. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$
7. Cho đường tròn (C) có tâm $I(2;5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 6 = 0$. Khi đó (C) có bán kính là:
- A. $R = 2$ B. $R = 2\sqrt{2}$ C. $R = 3$ D. $R = 4$
8. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 3)$ là:
- A. $x^2 + y^2 - 5x + 13y + 16 = 0$ B. $x^2 + y^2 + 5x - 13y - 16 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{2}y + 16 = 0$ D. $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{2}y - 16 = 0$
9. Đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 3 = 0$ và đi qua hai điểm $A(-1; 3)$, $B(1; 4)$ có phương trình là
- A. $x^2 + y^2 - x - 5y - 4 = 0$ B. $x^2 + y^2 + x - 7y + 4 = 0$
 C. $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$
10. Cho trước ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 . Gọi m là số đường tròn có tâm nằm trên d_1 và cùng tiếp xúc với d_2, d_3 . Khẳng định nào sau đây **không thể** xảy ra?
- A. $m = 0$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = 3$
11. Đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 2y - 6 = 0$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ. Khi đó bán kính của đường tròn là
- A. $R = 2$ hoặc $R = 4$ B. $R = 2$ hoặc $R = 6$.
 C. $R = 3$ hoặc $R = 6$ D. $R = 3$ hoặc $R = 4$.
12. Cho phương trình $x^2 + y^2 + (m-4)x + (m+2)y + 3m + 10 = 0$. Giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một đường tròn có bán kính $R = 2$ là
- A. $m = 4 \pm \sqrt{34}$ B. $m = -4 \pm \sqrt{34}$ C. $m = 2 \pm \sqrt{14}$ D. $m = -2 \pm \sqrt{14}$
13. Cho phương trình $x^2 + y^2 + (m-3)x + (2m+1)y + 3m + 10 = 0$. Giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 2y + 5 = 0$ là
- A. $m = 0$ B. $m = \frac{11}{5}$ C. $m = 2$ D. Không tồn tại m

14. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 2 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Đường thẳng không cắt đường tròn
 B. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn
 C. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm cách nhau một khoảng là 10
 D. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm cách nhau một khoảng là 8
15. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 5 = 0$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 10 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Đường thẳng không cắt đường tròn
 B. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn
 C. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm cách nhau một khoảng là 10
 D. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm cách nhau một khoảng là 8
16. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ và điểm $M(1; 2)$. Số tiếp tuyến của đường tròn đi qua M là
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
17. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$ và điểm $M(-2; 1)$. Số tiếp tuyến của đường tròn đi qua M là
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
18. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 2 = 0$ và điểm $M(-2; 1)$. Số tiếp tuyến của đường tròn đi qua M là
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
19. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ và điểm $M(-2; 4)$ nằm trên đường tròn. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại M là:
- A. $x + y - 2 = 0$ B. $2x + y = 0$ C. $x = -2$ D. $y = 4$
20. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Phương trình các tiếp tuyến của đường tròn song song với đường thẳng $\Delta: x + 2y - 5 = 0$ là:
- A. $x + 2y + 5 \pm 3\sqrt{5} = 0$ B. $x + 2y \pm 3 = 0$
 C. $x + 2y \pm 3\sqrt{5} = 0$ D. $x + 2y = 0$
21. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Phương trình các tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với đường thẳng $\Delta: x + 2y - 5 = 0$ là:

- A. $2x - y + 5 \pm 3\sqrt{5} = 0$ B. $2x - y \pm 3 = 0$
 C. $2x - y \pm 3\sqrt{5} = 0$ D. $2x - y = 0$
22. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Một phương trình tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ điểm $M(-4; 2)$ là:
 A. $-4x + 3y - 22 = 0$ B. $4x + 3y + 10 = 0$
 C. $3x + 4y + 4 = 0$ D. $3x - 4y + 20 = 0$
23. Các giao điểm của đường thẳng $\Delta: x - y + 4 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ là:
 A. $M(-4; 0)$ và $M(3; 7)$ B. $M(1; 5)$ và $N(-2; 2)$
 C. $M(0; 4)$ và $M(-3; 1)$ D. $M(1; 5)$ và $M(-3; 1)$
24. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm bên trong đường tròn. Đường thẳng Δ qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB . Phương trình của Δ là:
 A. $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$
 B. $(a + x_0)(x - x_0) + (b + y_0)(y - y_0) = 0$
 C. $(a - x_0)(x + x_0) + (b - y_0)(y + y_0) = 0$
 D. $(a + x_0)(x + x_0) + (b + y_0)(y + y_0) = 0$
25. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ và điểm $M(-2; 1)$. Đường thẳng Δ qua $M(-2; 1)$ cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB . Phương trình của Δ là
 A. $x + y + 1 = 0$ B. $x - y + 3 = 0$
 C. $2x - y + 5 = 0$ D. $x + 2y = 0$
26. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ và đường thẳng $\Delta: -4x + 3y + 1 = 0$. Đường thẳng cắt đường tròn theo dây cung có độ dài là:
 A. 4 B. 6 C. 8 D. 10
27. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$ và đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - m = 0$. Giá trị của m để đường thẳng cắt đường tròn theo dây cung có độ dài bằng 10 là:
 A. $m = \pm 5\sqrt{6}$ B. $m = \pm 10\sqrt{6}$ C. $m = 2$ D. Không tồn tại m

- A. $2x - y + 5 \pm 3\sqrt{5} = 0$ B. $2x - y \pm 3 = 0$
 C. $2x - y \pm 3\sqrt{5} = 0$ D. $2x - y = 0$
22. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Một phương trình tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ điểm $M(-4; 2)$ là:
 A. $-4x + 3y - 22 = 0$ B. $4x + 3y + 10 = 0$
 C. $3x + 4y + 4 = 0$ D. $3x - 4y + 20 = 0$
23. Các giao điểm của đường thẳng $\Delta: x - y + 4 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ là:
 A. $M(-4; 0)$ và $M(3; 7)$ B. $M(1; 5)$ và $N(-2; 2)$
 C. $M(0; 4)$ và $M(-3; 1)$ D. $M(1; 5)$ và $M(-3; 1)$
24. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm bên trong đường tròn. Đường thẳng Δ qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB . Phương trình của Δ là:
 A. $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$
 B. $(a + x_0)(x - x_0) + (b + y_0)(y - y_0) = 0$
 C. $(a - x_0)(x + x_0) + (b - y_0)(y + y_0) = 0$
 D. $(a + x_0)(x + x_0) + (b + y_0)(y + y_0) = 0$
25. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ và điểm $M(-2; 1)$. Đường thẳng Δ qua $M(-2; 1)$ cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB . Phương trình của Δ là
 A. $x + y + 1 = 0$ B. $x - y + 3 = 0$
 C. $2x - y + 5 = 0$ D. $x + 2y = 0$
26. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ và đường thẳng $\Delta: -4x + 3y + 1 = 0$. Đường thẳng cắt đường tròn theo dây cung có độ dài là:
 A. 4 B. 6 C. 8 D. 10
27. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$ và đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - m = 0$. Giá trị của m để đường thẳng cắt đường tròn theo dây cung có độ dài bằng 10 là:
 A. $m = \pm 5\sqrt{6}$ B. $m = \pm 10\sqrt{6}$ C. $m = 2$ D. Không tồn tại m

28. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 10 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + y + m = 0$. Giá trị của m để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn là:
 A. $m = \pm 6$ B. $m = \pm 3$ C. $m = \pm 8$ D. Không tồn tại
29. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$. Giao điểm của hai đường tròn là
 A. $A(1;3), B(2;4)$ B. $A(1;2), B(3;4)$
 C. $A(1;4), B(2;3)$ D. Không tồn tại
30. Cho ba đường thẳng phân biệt d_1, d_2, d_3 . Số đường tròn tiếp xúc với cả ba đường thẳng trên không thể là
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
31. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ và ba điểm $A(-1;2), B(3;0), C(2;3)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
 A. Đường tròn (C) không cắt cạnh nào của tam giác ABC
 B. Đường tròn (C) chỉ cắt một cạnh của tam giác ABC
 C. Đường tròn (C) chỉ cắt hai cạnh của tam giác ABC
 D. Đường tròn (C) cắt cả ba cạnh của tam giác ABC
32. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 8 = 0$. Để qua điểm $A(-1;m)$ chỉ có một tiếp tuyến với (C) thì m nhận giá trị là:
 A. $m = 1, m = 2$ B. $m = 2, m = 3$
 C. $m = 3, m = 4$ D. Không tồn tại
33. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$. Để qua điểm $A(m; m+2)$ có hai tiếp tuyến với (C) thì điều kiện của m là:
 A. $m > 0$ B. $m > -3$
 C. $-3 < m < 0$ D. $m > 0$ hoặc $m < -3$
34. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 8 = 0$. Để qua điểm $A(m;2)$ có hai tiếp tuyến với (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc thì m nhận giá trị là:
 A. $m = -3 \pm \sqrt{35}$ B. $m = 3 \pm \sqrt{5}$
 C. $m = \pm 3$ D. Không tồn tại

§2.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	D	A	B	B	C	D	A	C	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	A	D	B	D	C	B	A	D	C
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	A	B	D	A	D	C	B	A	B	B
Câu	31	32	33	34	35					
Đáp án	C	B	D	A	D					

2. Ta có $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ nên đường tròn có tâm $I(-2;3)$ và bán kính $R = 4$.

Chú ý: Học sinh có thể áp dụng công thức tính tâm và bán kính của đường tròn khi biết phương trình tổng quát của đường tròn.

3. Ta có $2x^2 + 2y^2 - 3x + 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}y + \frac{1}{2} = 0$
 $\Leftrightarrow (x - \frac{3}{4})^2 + (y + \frac{7}{4})^2 = \frac{25}{8}$ nên đường tròn có tâm $I(\frac{3}{4}; -\frac{7}{4})$ và bán kính $R = \frac{5}{2\sqrt{2}}$.

4. Phương trình của đường tròn

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0.$$

5. Đường tròn có bán kính là $R = IA = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$ nên phương trình của đường tròn là $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$.
6. Đường tròn có tâm $I(1;1)$ là trung điểm của AB và có bán kính $R = IA = 3$ nên phương trình của đường tròn là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0.$$

7. Đường tròn có bán kính là $R = d(I, \Delta) = \frac{|2.3 - 4.5 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$.

8. Gọi phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Do đường tròn qua $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 3)$ nên ta có

$$\begin{cases} 1^2 + 2^2 - 2.1.a - 2.2.b + c = 0 \\ (-1)^2 + 1^2 - 2.(-1).a - 2.1.b + c = 0 \\ 2^2 + 3^2 - 2.2.a - 2.3.b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b + c = -5 \\ 2a - 2b + c = -2 \\ -4a - 6b + c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5}{2} \\ b = \frac{13}{2} \\ c = 16 \end{cases}$$

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 5x + 13y + 16 = 0$.

9. Do tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 3 = 0$ nên tâm $I(x; 3 - x)$. Mà đường tròn đi qua $A(-1; 3)$, $B(1; 4)$ nên $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (-x)^2 = (x-1)^2 + (-1-x)^2$
 $x = \frac{1}{2} \Rightarrow I(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$, $R = IA = \sqrt{(\frac{1}{2}+1)^2 + (\frac{5}{2}-3)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Phương trình đường tròn là $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$.

10. Tập hợp các điểm cách đều d_2, d_3 có thể là 1 hoặc 2 đường thẳng. Tâm đường tròn là giao điểm của chúng với d_1 nên không thể xảy ra trường hợp $m = 3$, các phương án còn lại đều có thể xảy ra.

11. Do tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 2y - 6 = 0$ nên tâm là $I(6 - 2y; y)$.

Đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ nên $|6 - 2y| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 6 \end{cases}$. Bán kính

đường tròn là $R = 2$ hoặc $R = 6$.

12. Để phương trình $x^2 + y^2 + (m-4)x + (m+2)y + 3m+10 = 0$ là phương trình của một đường tròn có bán kính $R = 2$ thì

$$\left[\frac{(m-4)}{2} \right]^2 + \left[\frac{(m+2)}{2} \right]^2 - (3m+10) = 4 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm \sqrt{34}.$$

13. Để phương trình $x^2 + y^2 + (m-3)x + (2m+1)y + 3m+10 = 0$ là phương trình của một đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x + 2y + 5 = 0$ thì

$$\begin{cases} \left[\frac{(m-3)}{2} \right]^2 + \left[\frac{(2m+1)}{2} \right]^2 - (3m+10) > 0 \\ I \left(-\frac{(m-3)}{2}; -\frac{(2m+1)}{2} \right) \in \Delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 14m - 30 > 0 \\ \frac{m-3}{2} + (2m+1) - 5 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm). Đáp án là D.}$$

Chú ý: Nhiều học sinh quên điều kiện để phương trình là phương trình của một đường tròn nên dẫn đến kết quả $m = \frac{11}{5}$.

14. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ có tâm $I(-2; 3)$ và bán kính $R = 4$.

Khoảng cách $d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 - 2|}{5} = 4$ nên đường thẳng tiếp xúc đường tròn.

15. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 5 = 0$ có tâm $I(-4; -3)$ và bán kính

$R = \sqrt{20}$. Khoảng cách $d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot (-3) - 10|}{5} = 2 < R$ nên đường thẳng

cắt đường tròn tại hai điểm A, B cách nhau một khoảng là

$$AB = 2\sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2} = 8.$$

16. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $IM = \sqrt{(1+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10} > 3$ nên M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn.

Chú ý: Học sinh có thể thay tọa độ của điểm vào phương trình đường tròn thu được giá trị dương nên điểm nằm ngoài đường tròn.

17. Điểm $M(-2; 1)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình đường tròn

$$x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0$$

nên M nằm trên đường tròn. Qua M kẻ được một tiếp tuyến đến đường tròn.

18. Thay toạ độ của điểm vào phương trình đường tròn thu được $(-2)^2 + 1^2 + 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 - 2 < 0$ nên M nằm trong đường tròn. Qua M không kẻ được tiếp tuyến nào đến đường tròn.

19. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính $R = 3$. Phương trình tiếp tuyến tại $M(-2; 4)$ là

$$(-2 + 2)(x + 2) + (4 - 1)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow y = 4.$$

20. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính $R = 3$. Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta_1: x + 2y + m = 0$. Ta có $d(I, \Delta_1) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2 + 2 + m|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{5}. \text{ Phương trình tiếp tuyến là } x + 2y \pm 3\sqrt{5} = 0.$$

21. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính $R = 3$. Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta_1: 2x - y + m = 0$. Ta có $d(I, \Delta_1) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-4 - 1 + m|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \pm 3\sqrt{5}.$$

Phương trình tiếp tuyến là $2x - y + 5 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

22. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = 3$. Kiểm tra khoảng cách từ I đến 4 phương án được đưa ra, ta có được đáp án.

Chú ý: Học sinh làm theo cách đi viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ M thì sẽ dài hơn cách kiểm tra lại các phương án đưa ra.

23. Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (1; 5) \\ (x; y) = (-3; 1) \end{cases}$$

24. Đường thẳng Δ qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB là đường thẳng đi qua M và vuông góc với IM nên phương trình của Δ là $(a - x_0)(x - x_0) + (b - y_0)(y - y_0) = 0$.

25. Áp dụng công thức ở bài 24 ta có phương trình của Δ là

$$(-1 + 2)(x + 2) + (3 - 1)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

26. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{20}$. Khoảng cách $d(I, \Delta) = \frac{|-4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1|}{5} = 2 < R$ nên đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm A, B cách nhau một khoảng là

$$AB = 2\sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2} = 8.$$

27. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$ có tâm $I(3; -4)$ và bán kính $R = 7$. Khoảng cách $d(I, \Delta) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) - m|}{5} = \frac{|m|}{5}$. Để đường thẳng cắt đường tròn theo dây cung có độ dài bằng 10 ta có

$$10 = 2\sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{49 - \frac{m^2}{25}} \Leftrightarrow m = \pm 10\sqrt{6}.$$

28. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 10 = 0$ có tâm $I(-2; 2)$ và bán kính $R = 3\sqrt{2}$. Khoảng cách $d(I, \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$. Để đường thẳng tiếp xúc đường tròn thì $3\sqrt{2} = \frac{|m|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm 6$.

29. Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (1; 2) \\ (x; y) = (3; 4) \end{cases}$$

30. Khi 3 đường thẳng đôi một song song thì số đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường thẳng trên là 0.

Khi 2 đường thẳng song song và cắt đường còn lại thì số đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường thẳng trên là 2.

Khi 3 đường thẳng đôi một cắt nhau thì số đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường thẳng trên là 4.

31. Lần lượt thay toạ độ các điểm $A(-1; 2), B(3; 0), C(2; 3)$ vào phương trình tổng quát của đường tròn, ta có A nằm trong đường tròn còn B, C nằm ngoài đường tròn. Do vậy đường tròn cắt hai cạnh của tam giác.

32. Qua điểm $A(-1; m)$ chỉ có một tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi $A \in (C)$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 - 3 - 5m + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2, m = 3.$$

33. Qua điểm $A(m; m+2)$ có hai tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi A nằm ngoài

$$(C) \Leftrightarrow m^2 + (m+2)^2 + 4m - 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 6m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -3 \end{cases}$$

34. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 6x - 2y - 8 = 0$ có tâm $I(-3; 1)$ và bán kính $R = 3\sqrt{2}$. Dùng hình vẽ ta có: Qua điểm $A(m; 2)$ có hai tiếp tuyến với (C) và hai tiếp tuyến vuông góc khi và chỉ khi

$$IA = R\sqrt{2} \Leftrightarrow IA = 6 \Leftrightarrow (m+3)^2 + (2-1)^2 = 6^2 \\ \Leftrightarrow m^2 + 6m - 26 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm \sqrt{35}.$$

35. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ có tâm $I(-2; -1)$ và bán kính $R = 1$. Dùng hình vẽ ta có: Qua điểm $A(m; 2-m)$ có hai tiếp tuyến với (C) và hai tiếp tuyến tạo nhau góc 60° khi và chỉ khi

$$IA = 2R \Leftrightarrow IA = 2 \Leftrightarrow (m+2)^2 + (3-m)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 9 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$