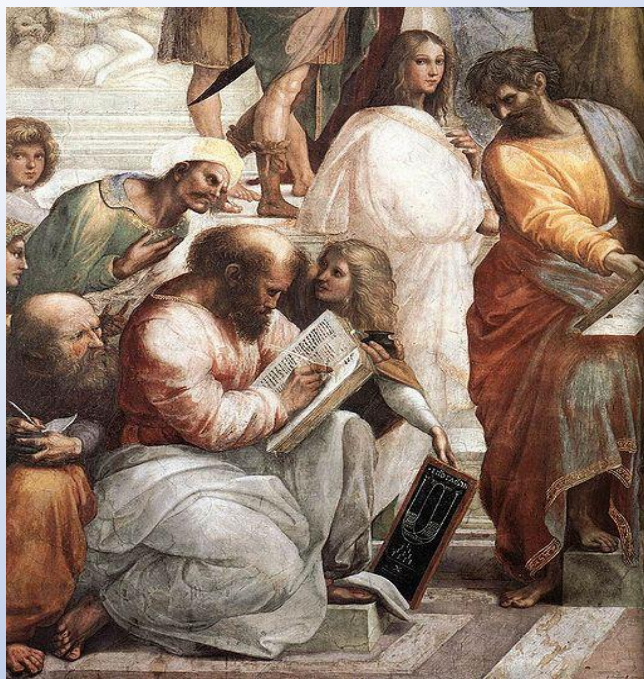


BIÊN SOẠN: TRẦN TRUNG CHÍNH

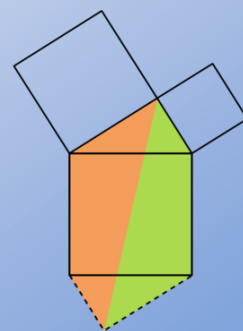
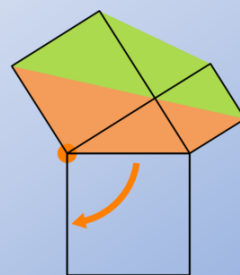
CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO LỚP 10

MÔN TOÁN

PHẦN I: HÌNH HỌC



(Người ở giữa với cuốn sách, trong bức Trường Athena củaRafaeln)



TÀI LIỆU CHƯA ĐĂNG KÝ BẢN QUYỀN
NÊN CHỈ ĐƯỢC LƯU HÀNH NỘI BỘ! KHÔNG ĐƯỢC PHÁT HÀNH.

CÁC KÍ HIỆU DÙNG TRONG CHUYÊN ĐỀ

(O)	: Đường tròn tâm O
(O; R)	: Đường tròn tâm O, bán kính R
ΔABC	: Tam giác ABC
S_{ABC}	: Diện tích ΔABC
(ABC)	: Đường tròn ngoại tiếp ΔABC
a, b, c	: Độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của ΔABC
h_a, h_b, h_c	: Độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
m_a, m_b, m_c	: Độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
l_a, l_b, l_c	: Độ dài các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
R, r	: Bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác
r_a, r_b, r_c	: Bán kính các đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh A, B, C của ΔABC
đpcm	: Điều phải chứng minh
2p	: Chu vi của tam giác ($p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi)

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad : \text{ Tổng của } n \text{ số hạng từ } a_1 \text{ đến } a_n.$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_n \quad : \text{ Tích của } n \text{ số hạng từ } a_1 \text{ đến } a_n.$$

TỔNG KẾT KIẾN THỨC

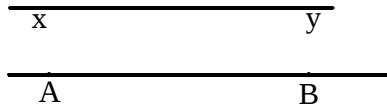
1. Đường thẳng:

Định nghĩa: Một đường thẳng được hiểu như là một đường dài (vô tận), mỏng (vô cùng) và thẳng tuyệt đối.

Tiên đề O'Clit: Qua hai điểm bất kì ta luôn xác định duy nhất một đường thẳng và chỉ một đường thẳng.

Kí hiệu: Người ta thường dùng các chữ cái in thường a, b, c, ..., m, n, p ... để đặt tên cho các đường thẳng hoặc dùng hai chữ cái in hoa hay hai chữ cái in thường để đặt tên cho đường thẳng.

Ví dụ: AB, xy, ...

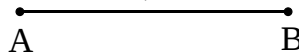


Điểm không thuộc đường thẳng: Điểm A không nằm trên đường thẳng a, điểm A không thuộc đường thẳng a (hay nói cách khác là đường thẳng a không đi qua điểm A).

Kí hiệu: $A \notin a$.

2. Đoạn thẳng:

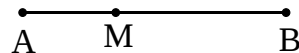
Định nghĩa: Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B.



Hai điểm A và B gọi là hai đầu mút (hay còn gọi là hai mút) của đoạn thẳng AB.

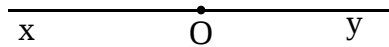
Lưu ý:

Điểm M nằm giữa A và B khi và chỉ khi $AM + MB = AB$ và A, M, B thẳng hàng.



3. Tia:

Tia là hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O (có hai tia Ox và Oy như hình vẽ).



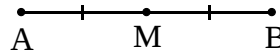
Hai tia có chung một góc O tạo thành đường thẳng được gọi hai tia đối nhau (hai tia Ox và Oy trong hình vẽ là hai tia đối nhau)

4. Điểm:

Để kí hiệu điểm, người ta dùng các chữ cái in hoa A, B, C, ...

Bất cứ hình nào cũng là một tập hợp các điểm.

Trung điểm của đoạn thẳng: Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa hai điểm A, B và cách đều hai điểm A và B.



Trung điểm M của đoạn thẳng AB còn gọi là điểm chính giữa của đoạn thẳng AB.

Lưu ý:

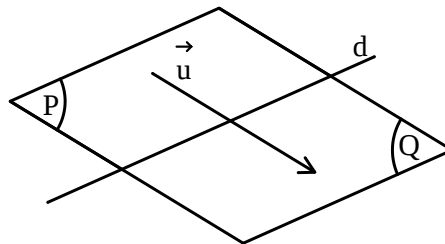
Điểm chính giữa hai điểm khác với điểm nằm giữa hai điểm.

5. Mặt phẳng:

Nửa mặt phẳng bờ a: Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a.

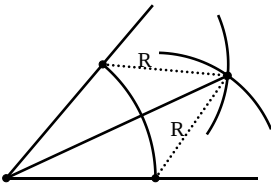
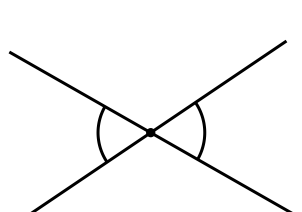
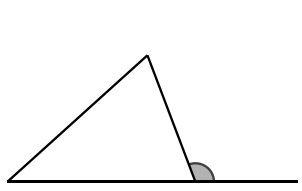
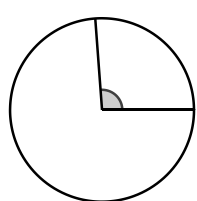


Mặt phẳng là hai nửa mặt phẳng hợp lại theo một phương (phương của vector) nhất định.

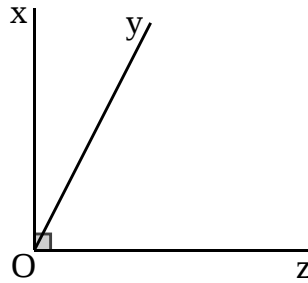


6. Góc:

 Góc nhọn	 Góc vuông	 Góc tù	 Góc bẹt
 Góc phản	 Góc đầy	 Góc khối	 Đường phân giác

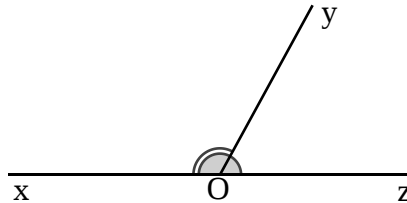
 Chia đôi một góc bằng compa và thước kẻ	 Góc đối đỉnh	 Góc ngoài của tam giác	 Góc ở tâm của đường tròn
--	---	--	---

(1) Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90° .



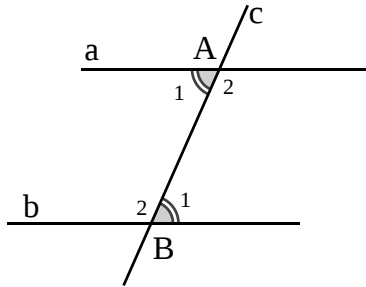
Góc $\widehat{xOy}$ và góc $\widehat{yOz}$ là hai góc phụ nhau.

(2) Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180° .



Góc $\widehat{xOy}$ và góc $\widehat{yOz}$ là hai góc bù nhau

(3) Hai góc so le trong: Cho hai đường thẳng $a // b$ và đường thẳng c cắt a, b lần lượt tại A, B .

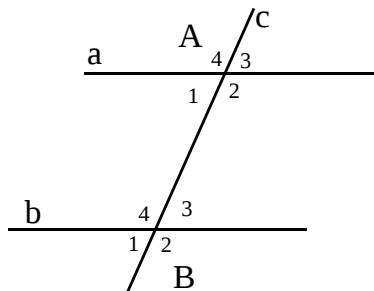


Khi đó:

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \text{ và } \widehat{A_2} = \widehat{B_2}.$$

(4) Hai góc đồng vị: Cho hai đường thẳng $a // b$ và đường thẳng c cắt a, b lần lượt tại A, B . Khi đó:

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}, \widehat{A_2} = \widehat{B_2}, \widehat{A_3} = \widehat{B_3}, \widehat{A_4} = \widehat{B_4}.$$



7. Tam giác:

7.1. Kí hiệu:

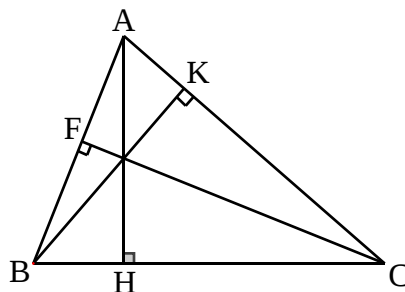
Tam giác ABC được kí hiệu là ΔABC .

Một tam giác ABC có ba đỉnh (góc) lần lượt là A, B, C và ba cạnh là AB, BC, CA.

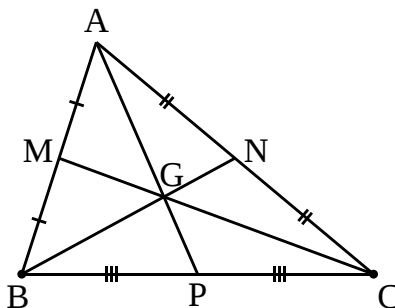
7.2. Các đường trong tam giác:

Đường cao: Là đoạn thẳng nối mỗi đỉnh và vuông góc với cạnh đối diện đỉnh đó. Một tam giác có ba đường cao. Giao điểm của ba đường cao gọi là **trực tâm** của tam giác.

Trong ΔABC , có các đường cao AH, BK, CF.



Đường trung tuyến: Là đường thẳng kẻ từ đỉnh và đi qua trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh đó. Một tam giác có ba đường trung tuyến. Giao điểm của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác.



Trong ΔABC , có các đường trung tuyến AP, BN, CM.

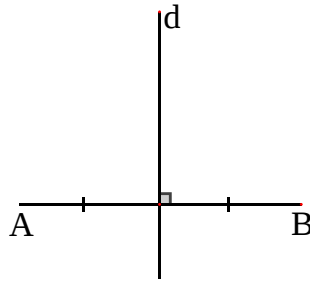
Độ dài đường trung tuyến:

$$\frac{BG}{BN} = \frac{AG}{AP} = \frac{CG}{CM} = \frac{2}{3}$$

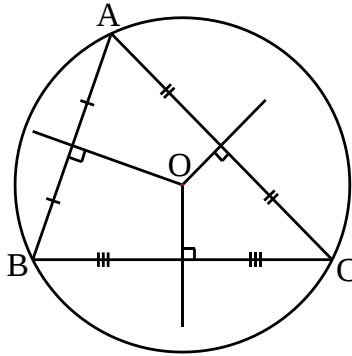
$$\frac{GN}{BN} = \frac{GP}{AP} = \frac{GM}{CM} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{GN}{GB} = \frac{GP}{GA} = \frac{GM}{GC} = \frac{1}{2}$$

Đường trung trực: Là đường thẳng vuông góc với một cạnh tại trung điểm của nó. Một tam giác có ba đường trung trực. Giao điểm của ba đường trung trực gọi là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.



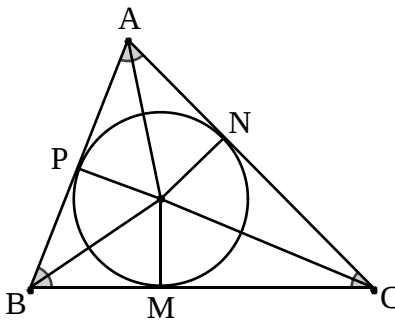
Đường thẳng (d) là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



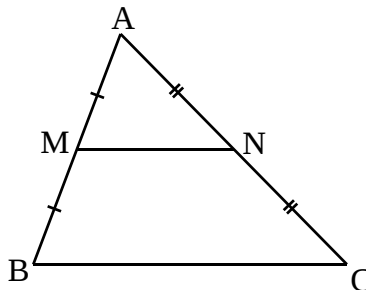
Điểm O là giao điểm của ba đường trung trực.

Đường phân giác: Là đường thẳng chia một góc thành hai góc có số đo bằng nhau. Một tam giác có ba đường phân giác. Giao điểm của ba đường phân giác gọi là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

Trong $\triangle ABC$ có: $OM = ON = OP$.



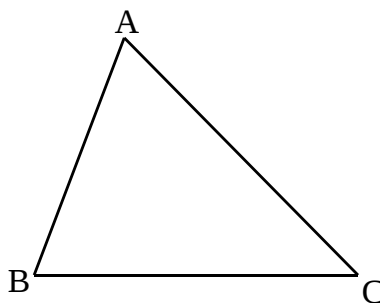
Đường trung bình: Là đường thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác. Một tam giác có ba đường trung bình. Tam giác tạo bởi ba đường trung bình thì đồng dạng với tam giác đã cho.



MN gọi là đường trung bình của tam giác. Ta có: $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

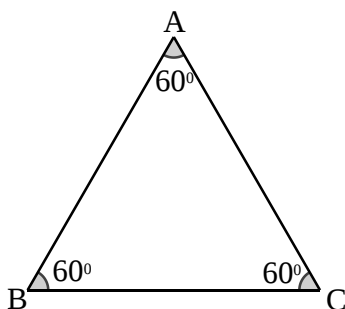
7.3. Phân loại tam giác:

Tam giác nhọn: Là tam giác có ba góc đều nhọn (số đo ba góc $< 90^\circ$).

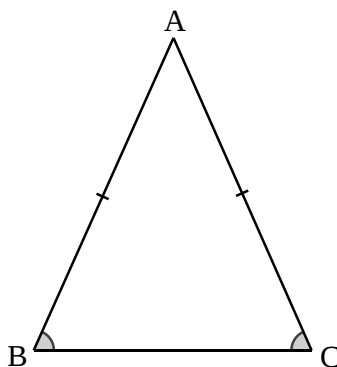


Tam giác đều: Là tam giác có ba cạnh và ba góc bằng nhau.

Trong tam giác đều, đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực.



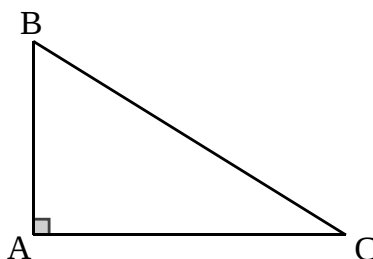
Tam giác cân: Là tam giác có hai cạnh bằng nhau hoặc hai góc ở một đáy bằng nhau.



Tam giác vuông: Là tam giác có một góc vuông (bằng 90°).

Trong một tam giác vuông, cạnh đối diện với góc vuông gọi là cạnh huyền và là cạnh lớn nhất.

Cho $\triangle ABC$, có $\hat{A} = 90^\circ$ thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Đây là hệ thức trên là hệ thức Pitago.



Định lý PITAGO:

Định lý thuận:

Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Định lý đảo:

Tam giác có tổng bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại là tam giác vuông.

Nếu tam giác ABC thỏa mãn $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A.

7.4. Tính chất của cạnh và góc của tam giác:

Tính chất 1: Cho tam giác ABC, tổng ba góc:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Tính chất 2: Độ dài một cạnh lớn hơn hiệu độ dài hai cạnh kia và nhỏ hơn tổng độ dài của chúng.

$$AB + BC > AC > |AB - BC|$$

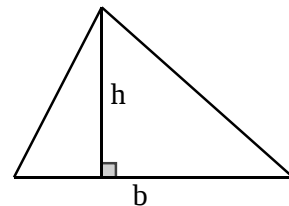
Tính chất 3: Trong hai cạnh của cùng một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn. Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

$$BC > AC > AB \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}.$$

7.5. Diện tích tam giác:

(1) Công thức tính diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2} b \cdot h$

trong đó b là độ dài của cạnh và h là độ dài đường cao ứng với cạnh b.



(2) Công thức Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ là nửa chu vi của tam giác.

8. Đường tròn:

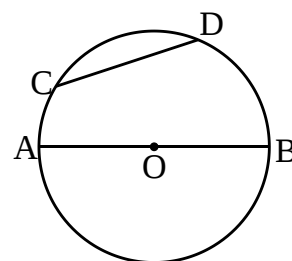
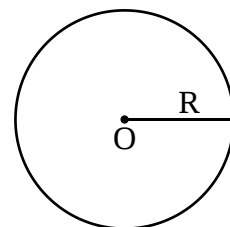
8.1. Khái niệm:

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O cho trước một khoảng không đổi bằng R.

Kí hiệu: (O; R), ta cũng có kí hiệu là (O).

Lưu ý:

- Qua ba điểm không thẳng hàng ta chỉ xác định được một đường tròn.
- Một đường tròn có một tâm đối xứng đó là tâm đường tròn.
- Một đường tròn có vô số trục đối xứng đó là các đường kính của đường tròn.



8.2. Đường kính và dây cung:

Định lý 1: Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính. AB là đường kính, CD là dây cung thì $AB > CD$.

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Nếu $OH \perp AB$ tại H thì $AH = HB$.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

8.3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây:

Định lý 1: Trong một đường tròn:

Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

Nếu $AB = CD$ thì $OM = ON$.

Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Nếu $OM = ON$ thì $AB = CD$.

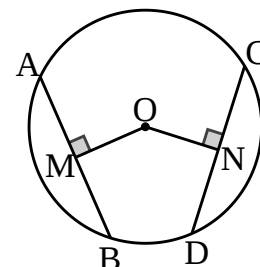
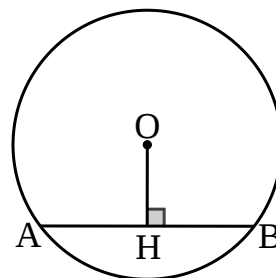
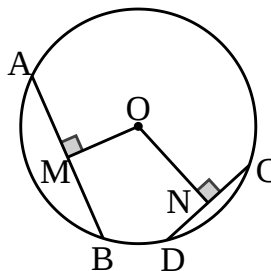
Định lý 2: Trong hai dây của một đường tròn:

Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

Nếu $AB > CD$ thì $OM < ON$.

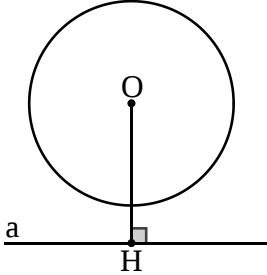
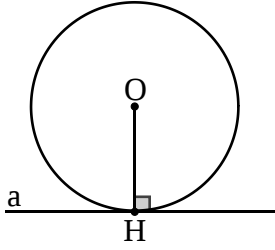
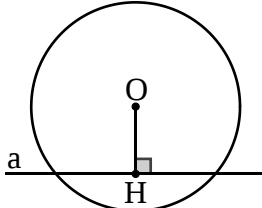
Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Nếu $OM < ON$ thì $AB > CD$.



8.4. Khoảng cách giữa đường thẳng và đường tròn:

Gọi R là bán kính đường tròn và d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a . Ta có:

 $(d > R)$	 $(d = R)$	 $(d < R)$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau.	Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.	Đường thẳng và đường tròn cắt nhau tại hai điểm (giao nhau).

Định lý 1:

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Nếu a là tiếp tuyến với (O) tại H thì $a \perp OH$.

Định lý 2:

Tiếp tuyến với đường tròn: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

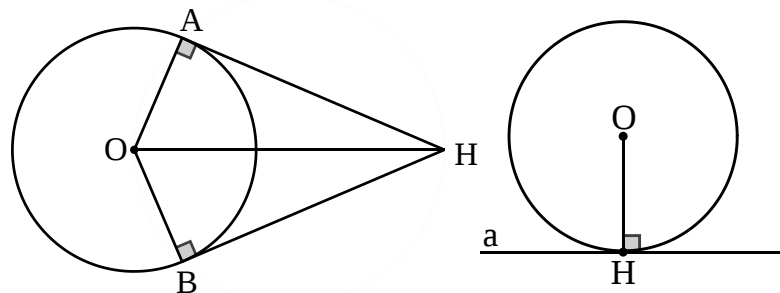
$$AH = BH.$$

Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

HO là tia phân giác của góc $\widehat{AHB}$.

Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

OH là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.



8.5. Đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp:

Đường tròn nội tiếp:

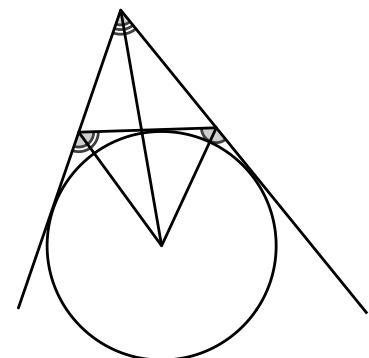
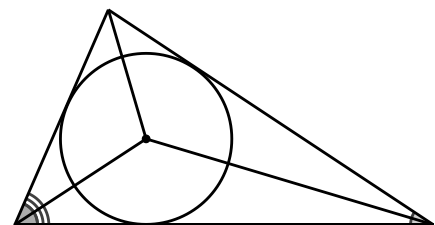
- Đường tròn tiếp xúc trong với ba cạnh của tam giác là đường tròn nội tiếp tam giác.

- Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của ba đường phân giác góc trong của tam giác.

Đường tròn ngoại tiếp:

- Đường tròn tiếp xúc ngoài với ba cạnh của tam giác là đường tròn ngoại tiếp tam giác.

- Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của ba đường phân giác góc ngoài của tam giác.

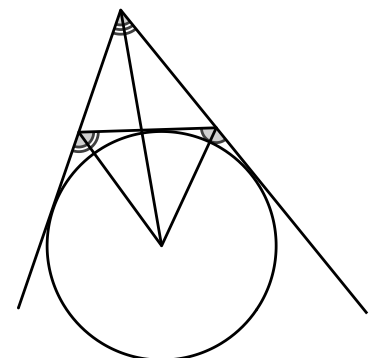


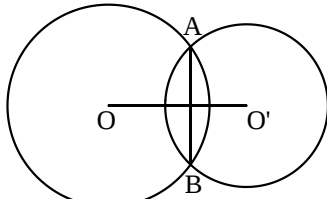
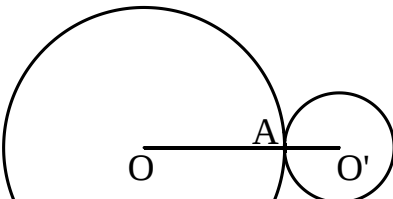
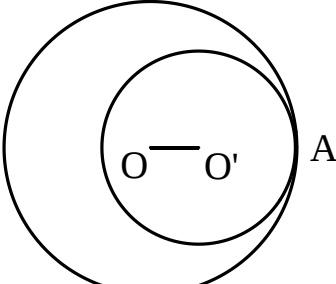
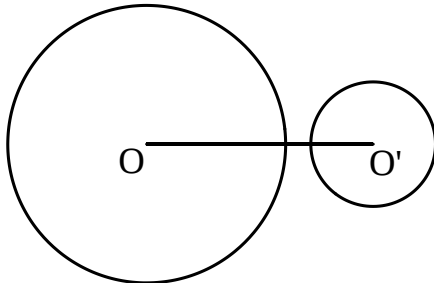
8.6. Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Nếu gọi bán kính (O) là R và (O') là r thì ta có:

- Hai đường tròn có hai điểm chung được gọi là hai đường tròn cắt nhau.

Hai điểm chung A, B đó gọi là giao điểm. Đoạn thẳng AB nối hai điểm đó gọi là dây chung.



 $(R - r < OO' < R + r)$	 $(R + r = OO')$	 $(R - r = OO')$
Hai đường tròn cắt nhau.	Hai đường tròn tiếp xúc nhau.	Hai đường tròn ở trong nhau,
 $(OO' > R + r)$ Hai đường tròn ở ngoài nhau.		

8.7. Góc với đường tròn:

Góc ở tâm:

Định nghĩa: Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn gọi là góc ở tâm.

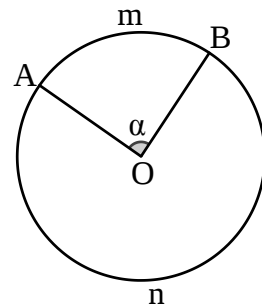
Số đo cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

$$\text{sđ}\widehat{AmB} = \widehat{AOB}$$

Số đo cung lớn bằng hiệu số giữa 360° và số đo cung nhỏ.

$$\text{sđ}\widehat{AmB} = \frac{1}{2}(360^\circ - \text{sđ}\widehat{AnB})$$

Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .



8.8. Liên hệ giữa cung và dây cung:

Định lý 1: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Định lý 2: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

Cung nhỏ hơn căng dây nhỏ hơn.

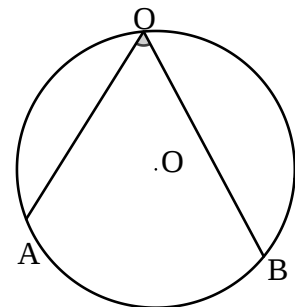
8.9. Góc nội tiếp:

Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB}$$

Hệ quả: Trong một đường tròn:



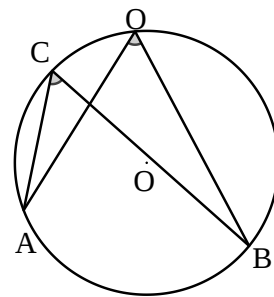
- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

$$\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AB}$$

- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

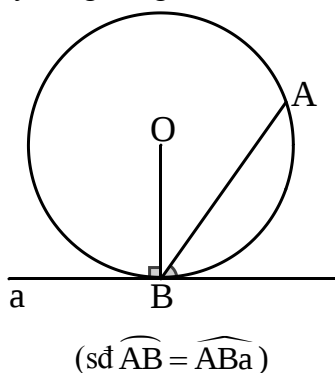
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



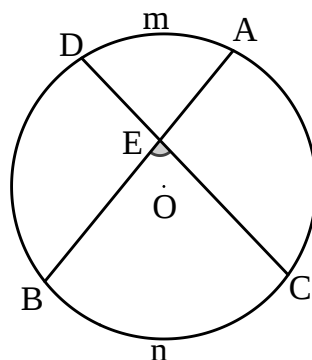
8.10. Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung:

Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.



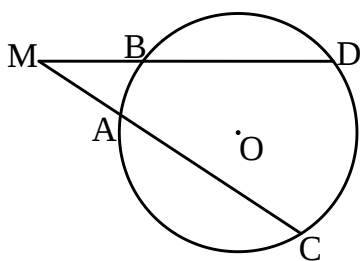
8.11. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn và góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

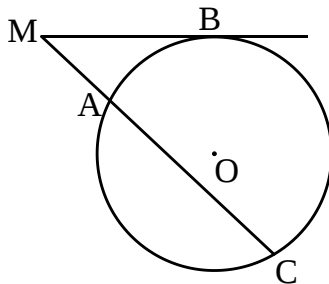


$$\widehat{BEC} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BmC} + \text{sđ}\widehat{AnD})$$

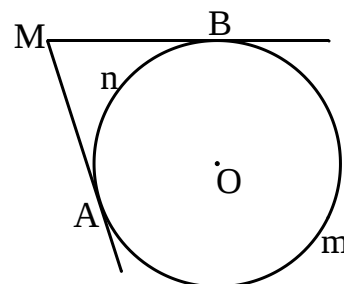
Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.



$$\widehat{CMD} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{CD} - \text{sđ}\widehat{AB});$$



$$\widehat{BMC} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BC} - \text{sđ}\widehat{AB});$$



$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AmB} - \text{sđ}\widehat{AnB})$$

8.12. Độ dài đường tròn, cung tròn:

- Công thức tính độ dài đường tròn:

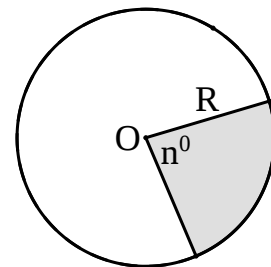
$$C = 2\pi R = \pi d.$$

(R là bán kính, d là đường kính)

- Công thức tính độ dài cung tròn:

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n° được tính như sau:

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$



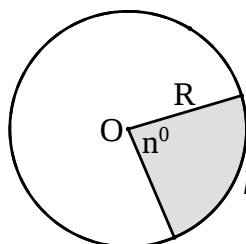
8.13. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn:

- Diện tích hình tròn:

$$S = \pi R^2.$$

- Diện tích hình quạt tròn:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}$$



9. Hình học không gian:

Hình trụ - diện tích xung quanh của hình trụ:

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

(R là bán kính đáy và h là chiều cao)

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$$

- Thể tích hình trụ:

$$V = Sh = \pi R^2 h.$$

(S là diện tích đáy, h là chiều cao)

Hình nón - hình nón cụt:

* **Hình nón:**

- Diện tích xung quanh của hình nón:

$$S_{xq} = \pi Rl.$$

(với l là độ dài đường sinh, r là bán kính đáy)

- Diện tích toàn phần của hình nón (tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy) là

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

(với l là độ dài đường sinh, r là bán kính đáy)

- Thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

(với l là độ dài đường sinh, r là bán kính đáy)

* **Hình nón cụt:**

- Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón cụt:

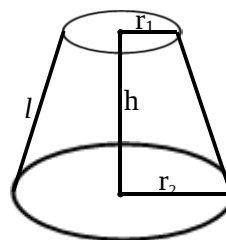
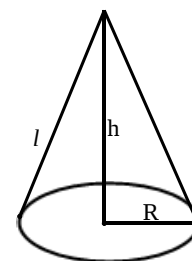
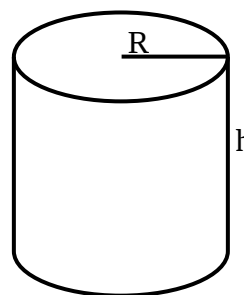
$$S_{xq} = \pi (r_1 + r_2) l$$

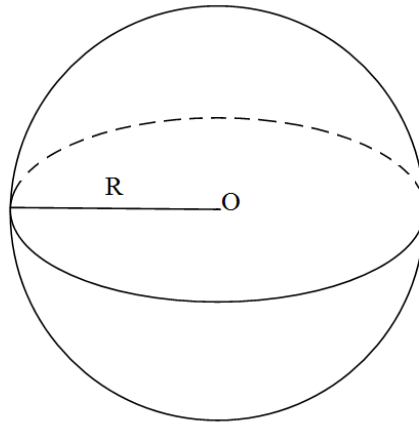
- Thể tích của hình nón cụt:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

(h là chiều cao)

- Hình cầu:





- Công thức tính diện tích mặt cầu:

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2.$$

(Với R là bán kính mặt cầu, d là đường kính mặt cầu)

- Thể tích hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(Với R là bán kính mặt cầu)

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

CHỦ ĐỀ 1

NHẬN BIẾT VÀ TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA MỘT HÌNH

1. Kiến thức cơ bản:

1.1. Tam giác cân:

Các phương pháp chứng minh tam giác cân:

Phương pháp 1: Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân.

Phương pháp 2: Tam giác có hai góc bằng nhau là tam giác cân.

Phương pháp 3: Tam giác có một đường cao vừa là đường trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác của một góc và ngược lại thì tam giác đó là tam giác cân.

Lưu ý: Có thể chứng minh một tam giác là tam giác cân dựa vào các biểu thức hoặc các hệ thức đã được chứng minh.

1.2. Tam giác đều:

Các phương pháp chứng minh tam giác đều:

Phương pháp 1: Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều.

Phương pháp 2: Tam giác có ba góc bằng nhau và bằng 60° là tam giác đều.

Phương pháp 3: Tam giác cân có số đo góc ở đỉnh cân bằng 60° là tam giác đều.

Phương pháp 4: Tam giác có các đường cao vừa là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực và ngược lại là tam giác đều.

1.3. Tam giác vuông:

Các phương pháp chứng minh tam giác vuông:

Phương pháp 1: Tam giác có một góc vuông là tam giác vuông.

Phương pháp 2: Tam giác có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng vuông góc là tam giác vuông.

Phương pháp 3: Sử dụng định lý đảo về đường trung tuyến của tam giác vuông.

Định lý: Trong một tam giác có đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền thì tam giác đó là tam giác vuông.

Phương pháp 4: Sử dụng định lý đảo của định lý Pitago.

Định lý: Nếu một tam giác thỏa mãn bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.

Tức là, nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Phương pháp 5: Tam giác nội tiếp đường tròn có một cạnh là đường kính thì tam giác đó là tam giác vuông.

1.4. Tam giác vuông cân:

Các phương pháp chứng minh tam giác vuông cân:

Phương pháp 1: Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau là tam giác vuông cân.

Phương pháp 2: Tam giác vuông có một góc nhọn bằng 45° là tam giác vuông cân.

Phương pháp 3: Tam giác cân có số đo một góc ở đáy bằng 45° là tam giác vuông cân.

1.5. Hình thang, hình thang cân, hình thang vuông:

Diện tích hình thang:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AH$$

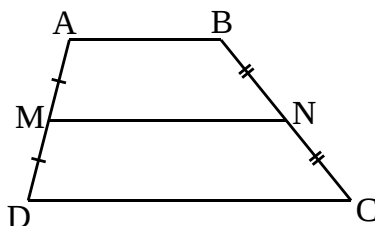
Tính chất:

Định lý 1: Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

Định lý 2: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Định lý 3: Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Đường trung bình của hình thang: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.



Định lý 1:

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

Định lý 2:

Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

Phương pháp chứng minh hình thang:

Phương pháp 1: Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Phương pháp chứng minh hình thang vuông:

Phương pháp 1: Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

Phương pháp chứng minh hình thang cân:

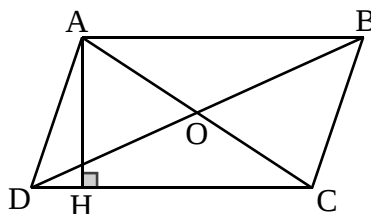
Phương pháp 1: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Phương pháp 3: Hình thang cân là hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

1.6. Hình bình hành:

Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.



Diện tích hình bình hành:

$$S_{ABCD} = AH \cdot CD = AH \cdot AB$$

Các phương pháp chứng minh hình bình hành:

Phương pháp 1: Tứ giác có các cạnh đối song song.

Phương pháp 2: Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau.

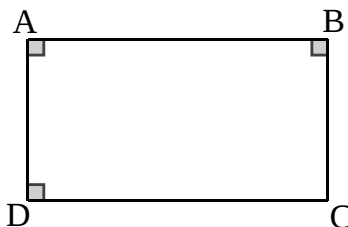
Phương pháp 3: Tứ giác có các cạnh đối song song và bằng nhau.

Phương pháp 4: Tứ giác có các góc đối bằng nhau.

Phương pháp 5: Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

1.7. Hình chữ nhật:

Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.



Chu vi hình chữ nhật:

$$C_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(AD + DC)$$

Diện tích hình chữ nhật:

$$S_{ABCD} = AB.CD$$

Các phương pháp chứng minh hình chữ nhật:

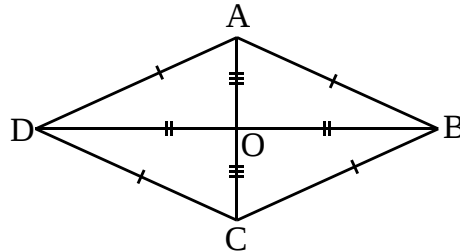
Phương pháp 1: Tứ giác có ba góc vuông.

Phương pháp 2: Hình thang cân có một góc vuông.

Phương pháp 3: Hình bình hành có một góc vuông.

Phương pháp 4: Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

1.8. Hình thoi:



Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất:

Trong hình thoi: Hai đường chéo vuông góc với nhau.

Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

Chu vi hình thoi:

$$C_{ABCD} = 4AB = 4BC = 4CD = 4DA$$

Diện tích hình thoi:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = BO.AC = OD.AC$$

Các phương pháp chứng minh hình thoi:

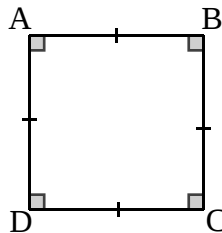
Phương pháp 1: Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

Phương pháp 3: Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Phương pháp 4: Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

1.9. Hình vuông:



Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất:

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Chu vi hình vuông:

$$C_{ABCD} = 4AB = 4BC = 4CD = 4AD$$

Diện tích hình vuông:

$$S_{ABCD} = AB^2 = BC^2 = CD^2 = AD^2$$

Phương pháp chứng minh hình vuông:

Phương pháp 1: Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Phương pháp 3: Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Phương pháp 4: Hình thoi có một góc vuông.

Phương pháp 5: Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của ΔABC . D là một điểm trên cung BC không chứa điểm A . Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Giải

Giả sử đã tìm được điểm D trên cung BC sao cho tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Khi đó: $BD \parallel HC$ và $CD \parallel HB$.

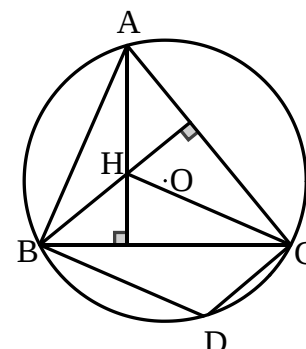
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $CH \perp AB$ và $BH \perp AC$.

$\Rightarrow BD \perp AB$ và $CD \perp AC$.

Do đó: $\widehat{ABD} = 90^\circ$ và $\widehat{ACD} = 90^\circ$.

Vậy AD là đường kính của đường tròn tâm O

Ngược lại nếu D là đầu đường kính AD của đường tròn tâm O thì tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.



Bài tập 2: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và C là một điểm thuộc đường tròn ($C \neq A$; $C \neq B$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C . Kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O) , gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC . Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N . Chứng minh các ΔBAN và ΔMCN cân.

Giải

Xét ΔABM và ΔNBM , ta có:

AB là đường kính.

Nên $\widehat{AMB} = \widehat{NMB} = 90^\circ$.

M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC nên

$\widehat{ABM} = \widehat{MBN} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BNM}$.

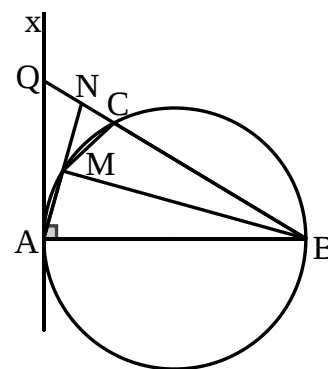
$\Rightarrow \Delta BAN$ cân tại đỉnh B .

Xét tứ giác $AMCB$ nội tiếp:

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MCN}$ (cùng bù với $\widehat{MCB}$)

$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{MNC}$ (cùng bằng $\widehat{BAM}$)

$\Rightarrow \Delta MCN$ cân tại đỉnh M .



Bài tập 3: Cho ΔABC cân tại A , ($AB > BC$). Điểm D di động trên cạnh AB , (D không trùng với A , B). Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔBCD . Tiếp tuyến của (O) tại C và D cắt nhau ở K .

a) Chứng minh tứ giác $ADCK$ nội tiếp?

b) Tứ giác $ABCK$ là hình gì? Vì sao?

c) Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác $ABCK$ là hình bình hành?

Giải

c) Theo câu b, tứ giác $ABCK$ là hình thang.

Do đó, tứ giác $ABCK$ là hình bình hành.

$\Leftrightarrow AB \parallel CK$

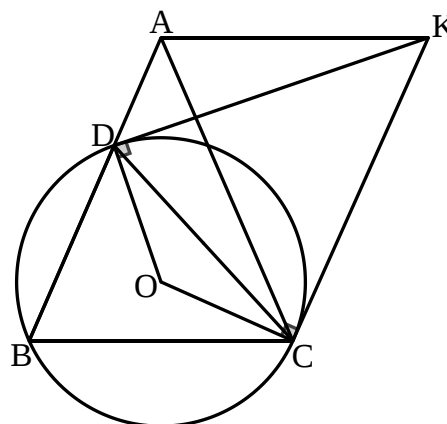
$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACK}$

Mà $\widehat{ACK} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{EC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD} = \widehat{DCB}$

Nên $\widehat{BCD} = \widehat{BAC}$

Dựng tia Cy sao cho $\widehat{BCy} = \widehat{BAC}$.

Khi đó, D là giao điểm của $\widehat{AB}$ và Cy .



Với giả thiết $\widehat{AB} > \widehat{BC}$ thì $\widehat{BCA} > \widehat{BAC} > \widehat{BDC}$.

$\Rightarrow D \in AB$.

Vậy điểm D xác định như trên là điểm cần tìm.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. D và E lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. DE cắt AB ở I và cắt AC ở L.

a) Chứng minh $DI = IL = LE$.

b) Chứng minh tứ giác BCED là hình chữ nhật.

c) Chứng minh tứ giác ADOE là hình thoi và tính các góc của hình này.

Bài tập 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có các đường chéo vuông góc với nhau tại I.

a) Chứng minh rằng nếu từ I ta hạ đường vuông góc xuống một cạnh của tứ giác thì đường vuông góc này qua trung điểm của cạnh đối diện của cạnh đó.

b) Gọi M, N, R, S là trung điểm của các cạnh của tứ giác đã cho. Chứng minh MNRS là hình chữ nhật.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật này đi qua chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh của tứ giác.

Bài tập 3: Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 1^\circ$) có AH là đường cao. Hai đường tròn đường kính AB và AC có tâm là O_1 và O_2 . Một cát tuyến biến đổi đi qua A cắt đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tam giác MHN là tam giác vuông.

b) Tứ giác MBCN là hình gì?

c) Gọi F, E, G lần lượt là trung điểm của O_1O_2 , MN, BC. Chứng minh F cách đều 4 điểm E, G, A, H.

d) Khi cát tuyến MAN quay xung quanh điểm A thì E vạch một đường như thế nào?

Bài tập 4: Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ $1/4$ đường tròn phía trong hình vuông. Lấy AB làm đường kính, vẽ $1/2$ đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tùy ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

a) Chứng minh I là trung điểm của AP.

b) Chứng minh PH, BI, AM đồng qui.

c) Chứng minh $PM = PK = AH$

d) Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.

đ) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Bài tập 5: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua A song song với BM cắt CM tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.

Bài tập 6: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi M là trung điểm của AB. Tia CM cắt đường tròn tại điểm N. Tia AN cắt đường tròn tại điểm D.

a) Chứng minh rằng $MB^2 = MC \cdot MN$

b) Chứng minh rằng $AB \parallel CD$

c) Tìm điều kiện của điểm A để cho tứ giác ABDC là hình thoi. Tính diện tích của hình thoi đó.

CHỦ ĐỀ 2

CHỨNG MINH SONG SONG

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh:

Phương pháp 1: Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba.

Phương pháp 2: Dựng mối quan hệ giữa các góc: So le bằng nhau, đồng vị bằng nhau, trong cùng phía bằng nhau, ...

Phương pháp 3: Sử dụng định lý đảo của định lý Talét.

Định lý: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tỷ lệ thì hai đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Phương pháp 4: Áp dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt, đường trung bình của tam giác.

Phương pháp 5: Áp dụng tính chất hai dây chằng giữa hai cung bằng nhau của đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM , đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt cạnh AB tại D . Đường phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt cạnh AC ở E . Chứng minh rằng: $ED \parallel BC$.

Giải

Trong $\triangle ABM$ có MD là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên, ta có:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{MA}{MB} \quad (1) \quad (\text{định lý})$$

Trong $\triangle AMC$ có ME là phân giác của $\widehat{AMC}$ nên, ta có:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{MA}{MC} \quad (2) \quad (\text{định lý})$$

Vì $MB = MC$ (giả thiết).

Nên từ (1) và (2).

Suy ra: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Trong $\triangle ABC$ có DE định ra 2 cạnh AB, AC những đoạn thẳng tỉ lệ nên $DE \parallel BC$

Bài tập 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và tam giác BCD . Chứng minh rằng $KL \parallel AD$.

Giải

Gọi M là trung điểm của BC .

Vì K là trọng tâm của $\triangle ABC$

nên $MK = \frac{1}{3} MA$ (tính chất trọng tâm của tam giác)

hay $\frac{MK}{MA} = \frac{1}{3} \quad (1)$

Và L là trọng tâm của $\triangle BCD$

nên $ML = \frac{1}{3} MD$ hay $\frac{ML}{MD} = \frac{1}{3} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MK}{MA} = \frac{ML}{MD}$ nên $KL \parallel AD$ (định lý Talét đảo)

Do trong $\triangle AMD$ có KL định ra trên 2 cạnh MA, MD những đoạn thẳng tỷ lệ nên

$KL \parallel AD$ (định lý Talét đảo).

Bài tập 3: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD . Gọi I là giao điểm của AM và BD và K là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng: $IK \parallel AB$.

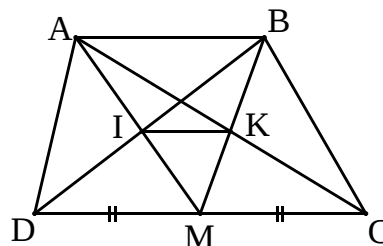
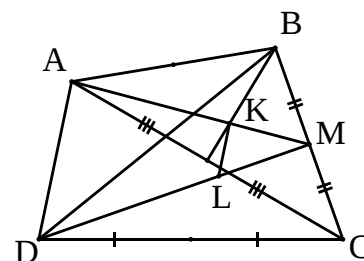
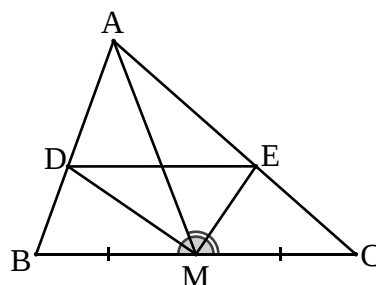
Giải

Ta có:

$$\frac{IM}{IA} = \frac{MD}{AB} \quad (\text{do } AB \parallel MD \text{ hay } \triangle AIB \sim \triangle MID)$$

và (Do $AB \parallel MC$)

Mà $MD = MC$ (giả thiết)



Nên: $\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$.

Suy ra $IK \parallel AB$ (Điều phải chứng minh)

Vì trong $\triangle AMB$ có IK định ra trên 2 cạnh MA , MB những đoạn thẳng tỷ lệ nên

$IK \parallel AB$ (định lý Talét đảo).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ $AK \parallel BC$, $AK \cap BD = E$; Kẻ $BI \parallel AD$; $BI \cap AC = F$ ($K, I \in CD$). Chứng minh rằng: $EF \parallel AB$.

Bài tập 2: Cho tứ giác $ABCD$. Qua B , vẽ $Bx \parallel CD$ cắt AC tại E . Qua C vẽ $Cy \parallel BA$ cắt BD tại F . Chứng minh rằng: $EF \parallel AD$.

Bài tập 3: Cho hình bình hành $ABCD$ đường phân giác của góc BAD cắt BD tại M , đường phân giác của góc ADC cắt AC tại N . Chứng minh rằng: $MN \parallel AD$.

Bài tập 4: Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC . Lấy N tùy ý trên cạnh AM . Đường thẳng $DE \parallel BC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Gọi P là giao điểm của DM và BN và Q là giao điểm của CN và EM . Chứng minh rằng: $PQ \parallel BC$.

Bài tập 5: Tam giác cân ABC có $BA = BC = a$, $AC = b$. Đường phân giác góc A cắt BC tại M , đường phân giác của góc C cắt BA tại N . Chứng minh rằng: $MN \parallel AC$.

Bài tập 6: Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AM , AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Vẽ đường kính NOC . Chứng minh rằng $AO \parallel MN$.

CHỦ ĐỀ 3

CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp chứng minh đường thẳng a và đường thẳng b vuông góc với nhau:

Phương pháp 1: Chứng minh chúng song song với hai đường vuông góc khác.

Phương pháp 2: Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Phương pháp 3: Dùng tính chất của ba đường cao và cạnh đối diện trong một tam giác.

Phương pháp 4: Đường kính đi qua trung điểm của một dây.

Phương pháp 5: Phân giác của hai góc kề bù nhau.

Phương pháp 6: Sử dụng góc nối tiếp nửa đường tròn.

Phương pháp 7: Sử dụng tính chất đường trung trực.

Phương pháp 8: Tính chất tiếp tuyến và đường kính của đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$, các đường cao BD và CE . Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến DE . Gọi I là trung điểm của DE , K là trung điểm của BC . Chứng minh rằng: $KI \perp ED$?

Chứng minh

Xét $\triangle BDC$ có: DK là đường trung tuyến $\Rightarrow DK = \frac{1}{2}BC$ (1)

Xét $\triangle BEC$ có: EK là đường trung tuyến $\Rightarrow EK = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $DK = EK$.

Suy ra: $\triangle EKD$ cân tại K .

Mà I là trung điểm của DE .

Do đó: KI là đường cao của $\triangle EKD \Rightarrow KI \perp ED$.

Bài tập 2: Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N . Gọi H giao điểm của BM và AN . Chứng minh rằng $SH \perp AB$.

Chứng minh

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (t/c góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ANB} = 90^\circ$ (t/c góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔSAB có AN, BM là hai đường cao.

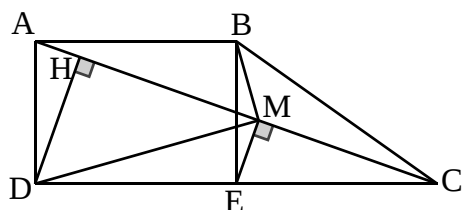
Mà H là giao điểm của AN và BM $\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔSAB .

Suy ra: SH thuộc đường cao thứ ba của ΔSAB .

Vậy $SH \perp AB$.

Bài tập 3: Cho hình thang vuông ABCD, ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), có $CD = 2AB$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC và M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng đường thẳng qua DM vuông góc với đường thẳng qua BM.

Giải



Kẻ $BE \perp CD$ ($E \in CD$).

Vì $CD = 2AB$ nên $AB = DE = EC$.

Hay E là trung điểm của CD.

Xét ΔDHC có EM là đường trung bình.

$\Rightarrow EM \parallel DH \Rightarrow EM \perp AC$ (vì $DH \perp AC$).

Xét tứ giác MADE có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ và $\widehat{AME} = 90^\circ$.

Suy ra: Tứ giác MADE nội tiếp đường tròn đường kính AE. Tức là bốn điểm M, A, D, E nằm trên một đường tròn. (1)

Xét tứ giác ABED có: $\widehat{ADE} = 90^\circ$ và $AB = DE$.

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, E, D nằm trên một đường tròn đường kính AE. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: M thuộc đường tròn đường kính AE.

Ta có: Tứ giác ABMD nội tiếp.

Mà $\widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$.

$\Rightarrow BM \perp DM$.

Bài tập 4: Cho tam giác cân ABC, gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh AO vuông góc với BE.

Chứng minh

Gọi K là trung điểm của EC.

Ta có: HK là đường trung bình của ΔBEC nên $HK \parallel EB$ (1)

Trong ΔEHC , ta có: OK là đường trung bình nên $OK \parallel HC$. (2)

Mà $AH \perp HC$ (giả thiết) (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $OK \perp AH$ (*)

Ta lại có: $HE \perp AC$ (vì E là hình chiếu của H trên AC) (**)

Từ (*) và (**), suy ra: O là trực tâm của ΔAHK

$\Rightarrow AO \perp HK$ (4)

Từ (1) và (4), suy ra: $AO \perp BE$ (điều phải chứng minh).

Bài tập 5: Cho ΔAHC , có $(\widehat{H} = 90^\circ)$. Đường cao HE . Gọi O , Klần lượt là trung điểm của EH và EC . Chứng minh AO vuông góc với HK .

Chứng minh

Từ giả thiết có OK là đường trung bình của tam giác EHC

$\Rightarrow OK \parallel HC$.

Mặt khác: $HC \perp AH$

$\Rightarrow OK \perp AH$

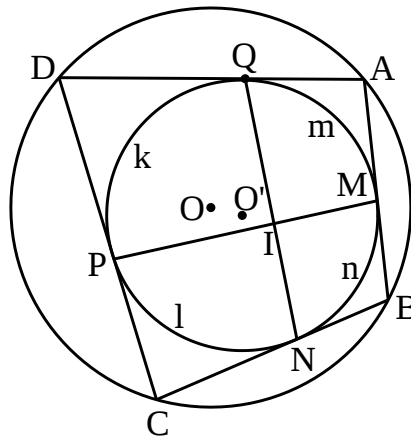
Xét ΔAHK có: $HE \perp AC$, $OK \perp AH$

$\Rightarrow O$ là trực tâm của ΔAHK

$\Rightarrow AO \perp HK$.

Bài tập 6: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đồng thời ngoại tiếp đường tròn khác có các tiếp điểm M, N, P, Q lần lượt với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác đã cho. Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ .

Chứng minh



Gọi (O) là đường tròn nội tiếp tứ giác và (O') là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ta có:

$$\widehat{B} = \frac{\text{sđ} \widehat{MQPN} - \text{sđ} \widehat{MnN}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh bên ngoài đường tròn})$$

$$\widehat{D} = \frac{\text{sđ} \widehat{PNMQ} - \text{sđ} \widehat{PkQ}}{2} \quad (\text{góc có đỉnh bên ngoài đường tròn})$$

$$\widehat{D} + \widehat{B} = 180^\circ \quad (\text{vì tứ giác } ABCD \text{ nội tiếp } (O'))$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sđ} \widehat{PNMQ} - \text{sđ} \widehat{PkQ}}{2} + \frac{\text{sđ} \widehat{MQPN} - \text{sđ} \widehat{MnN}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{2\widehat{PIN} + 2\widehat{MmQ}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{PIN} + \widehat{MmQ} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{MIQ} + \widehat{PIN} = \frac{\text{sđ} \widehat{PIN} + \text{sđ} \widehat{MnQ}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow MP \perp QN$. (điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ đều. Gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE . Chứng minh: $AO \perp BE$.

Bài tập 2: Cho tam giác vuông cân ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$). Gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE . Chứng minh: $AO \perp BE$.

Bài tập 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH . Hạ $HI \perp AC$, M là trung điểm của HI . Chứng minh $BI \perp AM$.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC . I và N lần lượt là trung điểm của AD và HC . Chứng minh: $BN \perp IN$.

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH . Dựng hình chữ nhật $AHCK$, $HI \perp AC$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của IC và AK . Chứng minh: $MN \perp BI$.

Bài tập 6: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC . Gọi E , F , M lần lượt là trung điểm của AB , DH , BH . Chứng minh: $AM \perp EF$.

Bài tập 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của B lên AC . E , F , M , N lần lượt là trung điểm của AB , DH , HC , AD . Chứng minh: $EF \perp MN$.

Bài tập 8: Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). H là hình chiếu của A trên BC . I , K là thứ tự hai điểm thuộc AH và CK sao cho $\frac{HK}{KC} = \frac{HI}{IA}$. Chứng minh: $BI \perp AK$.

Bài tập 9: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$) và $AC = m$, $BD = n$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Lấy điểm $K \in HC$, sao cho $\frac{KH}{HC} = \frac{n}{m}$. Chứng minh: $DK \perp AK$.

Bài tập 10: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi E là giao điểm của hai cạnh đối AD và BC . Gọi F là giao điểm của hai cạnh đối DC và AB . Chứng minh rằng các tia phân giác trong của hai góc E và F vuông góc với nhau.

Bài tập 11: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên tia AD và BC lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho $DF = CE = DC$. Trên tia DC lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh: $AE \perp FH$.

Bài tập 12: Cho hình vuông $ABCD$. T là một điểm bất kì ở trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E . Đường thẳng CT cắt AE tại M . Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng DM .

Bài tập 13: Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Lấy Điểm T trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E . Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M . Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F . Tìm quỹ tích điểm F khi T chạy trên cạnh AB .

Bài tập 14: Cho $\triangle TBE$ ($\widehat{B} = 90^\circ$). Vẽ đường phân giác BD và đường cao BF . Từ D dựng DA và DC theo thứ tự vuông góc với cạnh TB và cạnh BE (A trên cạnh TB , C trên BE). Chứng minh rằng các đường thẳng TC , AE , BF cắt nhau tại một điểm.

Bài tập 15: Đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là hai tiếp điểm của đường tròn đối với hai cạnh AB và AC . Tia MN cắt tia phân giác của góc B tại P . Chứng minh BP vuông góc với CP .

CHỦ ĐỀ 4

CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Chứng minh hai đoạn thẳng có cùng độ dài (theo cùng đơn vị đo chiều dài).

Phương pháp 2: Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau là các cạnh của các tam giác, tứ giác đặc biệt (hình đặc biệt), tam giác bằng nhau.

Ví dụ: Hai cạnh bên của tam giác cân thì bằng nhau, các cạnh của tam giác đều thì bằng nhau, hai cạnh bên của hình thang cân, các cặp cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông thì bằng nhau.

Phương pháp 4: Chứng minh tỉ số độ dài của các cặp cạnh cần chứng minh luôn đạt giá trị bằng 1.

Phương pháp 5: Sử dụng định nghĩa, tính chất của:

Trung điểm, trung trực của đoạn thẳng.

Đường trung tuyến, đường trung bình, đường trung trực, ... trong tam giác.

Đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông, ...

2 điểm, 2 đoạn thẳng đối xứng qua 1 điểm, 1 trục.

Phương pháp 6: Chứng minh hai tam giác có cùng diện tích với các đường cao, cạnh đáy tương ứng.

Phương pháp 7: Sử dụng tính chất của dây cung và tiếp tuyến với đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) đường kính, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: $CH = DK$.

Chứng minh

Theo giả thiết, ta có: $AH \perp CD$ và $BK \perp CD$ nên $AH \parallel BK$.

Suy ra: AHKB là hình thang.

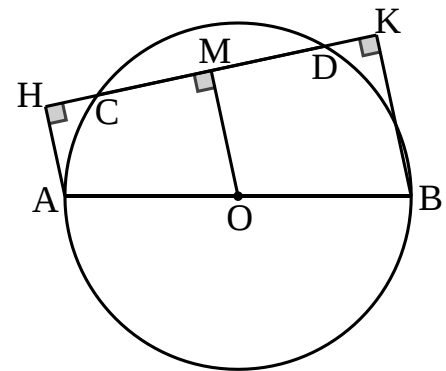
Kẻ $OM \perp CD$ tại $M \Rightarrow MC = MD$ (t/c đường kính và dây cung) (1)

Xét hình thang AHKB có $OA = OB = R$; $OM \parallel AH \parallel BK$ (cùng vuông góc với CD)

OM là đường trung bình của hình thang

$\Rightarrow MH = MK$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CH = DK$.



Bài tập 2: Trong hình vuông ABCD và nửa đường tròn đường kính AD và vẽ cung AC mà tâm là D. Nối D với điểm P bất kỳ trên cung AC, DP cắt nửa đường tròn đường kính AD ở K. Chứng minh PK bằng khoảng cách từ P đến AB.

Chứng minh

Kẻ $PI \perp AB$.

Xét $\triangle APK$ và $\triangle API$:

$\triangle APK$ vuông tại K

(Vì $\widehat{AKD} = 90^\circ$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD)

$\triangle ADP$ cân tại D

$\Rightarrow AD = DP$

$\Rightarrow \widehat{P_2} = \widehat{DAP}$

Mặt khác:

$\widehat{P_1} = \widehat{DAP}$ (So le trong vì $AD \parallel PI$)

Do đó: $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$

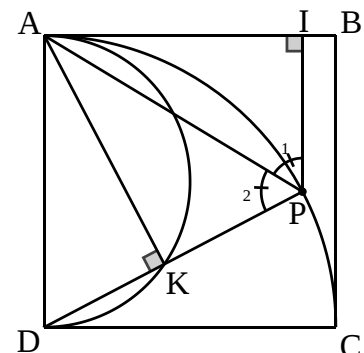
$\Rightarrow \triangle APK = \triangle API$ (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow PK = PI$.

Bài tập 3: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\angle ACD = \angle BDC$. Chứng minh rằng: $AD = BC$.

Chứng minh

Gọi E là giao điểm của AC và BD



Xét $\triangle ECD$ có: $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ (do $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$)

$\Rightarrow \triangle ECD$ là tam giác cân.

Suy ra $ED = EC$ (1)

Do $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong)

Mà $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow \triangle EAB$ là tam giác cân.

Suy ra: $EA = EB$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AC = BD$.

Hình thang $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: $AD = BC$.

Bài tập 4: cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Chứng minh rằng: $BE = DF$.

Chứng minh

Ta có: $DE = \frac{1}{2} AD$; $BF = \frac{1}{2} BC$

Mà $AD = BC$ (hai cạnh đối của hình bình hành $ABCD$)

$\Rightarrow DE = BF$.

Mặt khác: $DE \parallel BF$.

$\Rightarrow EBF D$ là hình bình hành.

Vậy $BE = DF$.

Bài tập 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD, AB . Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự tại M, N . Chứng minh rằng: $DM = NB$.

Chứng minh

Tứ giác $AICK$ có: $AK \parallel IC$ và $AK = IC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AICK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AI \parallel CK$.

$\triangle DCN$ có $IC = ID$ và $IM \parallel CN$.

Suy ra: $DM = MN$ (1)

$\triangle BAM$ có: $BK = KA$ và $KN \parallel AM$.

Suy ra: $MN = NB$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $DM = NB$.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC cân tại A . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M , trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$.

a) Chứng minh: $AM = AN$.

b) Kẻ $BH \perp AM$ ($H \in AM$), $CK \perp AN$ ($K \in AN$). Chứng minh: $BH = CK$.

c) Chứng minh: $AH = AK$.

Chứng minh

a) $\triangle AMB$ cân

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACN} (= 180^\circ + \widehat{ABC})$

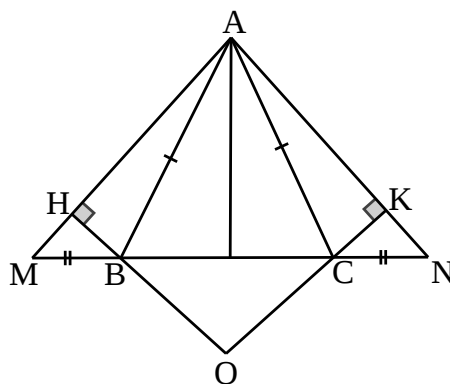
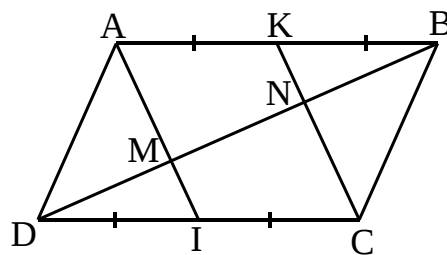
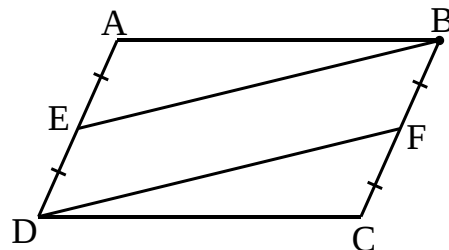
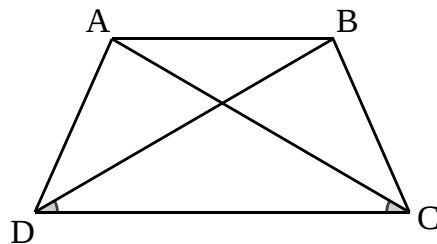
$\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có:

$AB = AC$ (giả thiết)

$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (chứng minh trên)

$BM = CN$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)



$\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow AM = AN$

b) Xét ΔHBM và ΔKNC có: $\widehat{M} = \widehat{N}$ (theo câu a)

$MB = CN$

$\Rightarrow \Delta HMB = \Delta KNC$ (ch – gn)

$\Rightarrow NK = CK$.

c) Theo câu a) ta có $AM = AN$ (1)

Theo chứng minh trên: $HM = KN$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow HA = AK$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình vuông ABCD. Kẻ AC cắt BD tại H. Lấy hai điểm E, F lần lượt thuộc AD, BC sao cho $AE = CF$, AF cắt HB tại I. Gọi M là trung điểm của IB. Chứng minh: $AE = IM$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có AP là phân giác. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa đỉnh A, vẽ tia Px sao cho góc CPx bằng góc BAC. Tia này cắt AC ở E. Chứng minh rằng: $PB = PE$.

Bài tập 3: Gọi P là điểm nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Hạ các đường vuông góc PA_1, PB_1, PC_1 xuống các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng $A_1B_1C_1$ cắt PH tại I. Chứng minh $IP = IH$.

Bài tập 4: Dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Vẽ hình bình hành EADF. Chứng minh BCF là một tam giác đều.

Bài tập 5: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Lấy AB và BC là cạnh dựng hai tam giác đều ABE và BCF nằm về cùng một phía bờ AC. Gọi I và J là trung điểm của AF và CE. Chứng

minh rằng: $IJ = \frac{EF}{2}$.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC và (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là A_1, B_1, C_1 . Gọi E là điểm đối xứng của B qua CI , F là điểm đối xứng của B qua AI . Chứng minh rằng $B_1E = B_1F$.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt đường tròn (O). Gọi A là hình chiếu của (O) trên d. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) ở B và C. Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt d ở E và F. Chứng minh: $AE = AF$.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD cắt đường kính AB tại G. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên CD. Chứng minh rằng: $CH = DK$.

Bài tập 9: Cho tứ giác ACBD nội tiếp đường tròn đường kính AB. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của các cạnh đối diện của tứ giác trên đường chéo CD bằng nhau.

CHỦ ĐỀ 5 CÁC GÓC BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau:

Phương pháp 1: Hai góc có cùng một số đo thì bằng nhau.

Phương pháp 2: Hai góc của hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng, hai góc của tam giác cân, đều; hai góc của cùng một đáy trong hình thang cân, hai góc đối của hình bình hành, ... thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Hai góc cùng bằng một góc thứ 3.

Phương pháp 4: Tia phân giác chia một góc thành hai phần bằng nhau.

Phương pháp 5: Các góc so le trong, đồng vị, đối đỉnh, ...

Phương pháp 6: Các góc nội tiếp cùng chắn một cung trong một đường tròn thì bằng nhau.

Phương pháp 7: Tứ giác nội tiếp có góc ngoài bằng góc đối trong.

Phương pháp 8: Sử dụng hàm số lượng giác: sin, cos, tan và cot.

Phương pháp 9: Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến, đối xứng, quay.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường kính AC và AD của (O) và (O'). Tia CA cắt đường tròn (O') tại F, tia DA cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh:

$$\widehat{EFC} = \widehat{EDC}$$

Chứng minh

Ta có:

$$\widehat{CED} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))}$$

$$\widehat{CFD} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))}$$

$$\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CFD} (= 90^\circ)$$

Hai đỉnh E, F cùng nhìn cạnh CD một góc bằng 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác CEFD nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{EDC} \text{ (cùng chắn } \widehat{EC}).$$

Bài tập 2: Cho hình vuông ABCD cố định. E là điểm di động trên cạnh CD (khác C và D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K. BD cắt KF tại I.

a) Chứng minh: $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$

b) Chứng minh: $\widehat{IDF} = \widehat{IEF}$

c) Chứng minh: ΔKAF vuông cân.

Chứng minh

a) Ta có: $\widehat{KAF} = 90^\circ$ ($AK \perp AF$) và $\widehat{KCF} = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$$\text{Suy ra: } \widehat{KAF} = \widehat{KCF} (= 90^\circ)$$

Hai đỉnh A, C cùng nhìn đoạn KF một góc bằng 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác ACKF nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{CKF}$$

b) Tứ giác ACKF nội tiếp nên ta có:

$\widehat{AFK} = \widehat{ACK}$ mà $\widehat{ACK} = 45^\circ$, $\widehat{BDC} = 45^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$$\text{Suy ra: } \widehat{AFK} = \widehat{BDC} (= 45^\circ)$$

Do đó: Tứ giác IDEF nội tiếp (Vì góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

$$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{IEF}$$

c) ΔAKF vuông tại A (giả thiết), ta có:

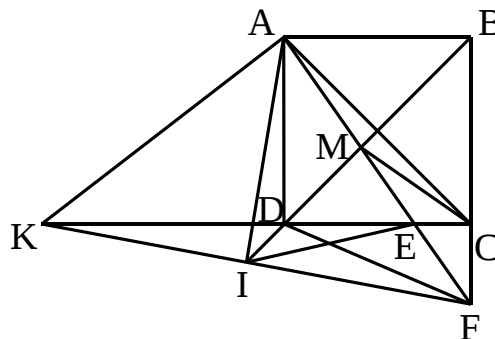
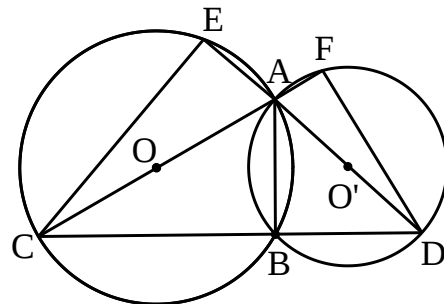
$$\widehat{AFK} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AKF} = 45^\circ \Rightarrow \Delta KAF \text{ vuông cân tại A.}$$

Bài tập 3: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn.

b) Hai tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Ax là tiếp tuyến tại A. Chứng minh $\widehat{xAN} = \widehat{ANM}$.

c) Chứng minh: $\widehat{MNC} = \widehat{EFC}$.



Chứng minh

a) Tứ giác BFEC có:

$$\widehat{BFC} = 90^\circ \text{ (CF là đường cao)}$$

$$\widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (BE là đường cao)}$$

Hai đỉnh F, E cùng nhìn cạnh BC một góc bằng 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp.

b) Vì Ax là tia tiếp tuyến của (O).

Suy ra: $AO \perp Ax$.

Và $\widehat{xAN} = \widehat{ACN}$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Ta có: $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn $\widehat{AM}$)

Và $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (cùng chắn $\widehat{EF}$)

Suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{ACN}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{xAN} = \widehat{ANM}$. (điều phải chứng minh)

c) Ta có: $\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Và $\widehat{EFC} = \widehat{MBC}$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

Suy ra: $\widehat{MNC} = \widehat{EFC}$. (điều phải chứng minh).

Bài tập 4: Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ $MH \perp BC$ tại H, $MI \perp AC$ tại I.

Chứng minh: $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$.

Chứng minh

Xét tứ giác MIHC, có:

$$\widehat{MIC} = 90^\circ \text{ (MI } \perp \text{ AC)}$$

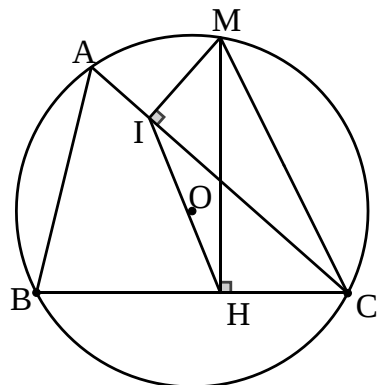
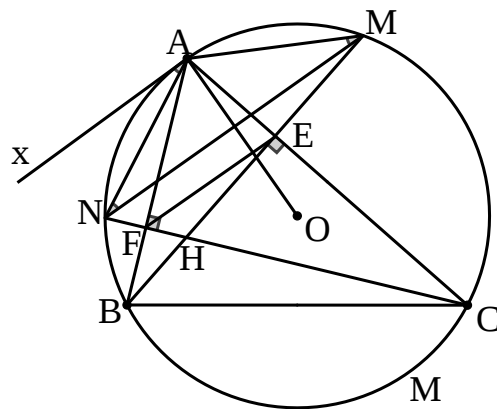
$$\widehat{MHC} = 90^\circ \text{ (MH } \perp \text{ BC)}$$

Hai đỉnh I, H cùng nhìn đoạn MC một góc bằng 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác MIHC nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{ICM}$ (cùng chắn $\widehat{MI}$)

(điều phải chứng minh)



Bài tập 5: (Đề thi HSG 12 tỉnh Đồng Nai 2013 - 2014)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < BC < AC$ và $\widehat{ABC}$ là góc nhọn. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác và tiếp xúc với BC tại D. M, N lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng AO, AI với (O). Biết A không trùng với M và N. Chứng minh: $\widehat{IND} = \widehat{IMO}$.

Chứng minh

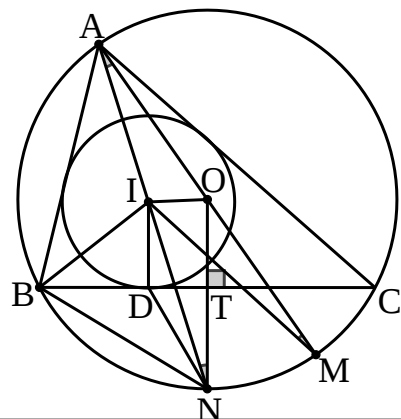
Gọi T là giao của ON và BC.

Để chứng minh được:

$$IN = BN = \frac{BT}{\cos \widehat{NBC}} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{IN}{AM} = \frac{a}{2 \cdot 2R \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{a}{\sin A}} = \frac{\sin A}{2 \cos \frac{A}{2}} = \sin \frac{A}{2} = \frac{ID}{IA}$$

Mặt khác, ta có: $\widehat{DIN} = \widehat{IAM} (= \widehat{IMO})$



Suy ra: $\triangle DIN \sim \triangle IAM$

$\Rightarrow \widehat{IND} = \widehat{IMO}$. (điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$, trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Đường thẳng qua M và N lần lượt cắt AB và AC tại P và Q. Chứng minh rằng: $\widehat{MPB} = \widehat{MQC}$.

Bài tập 2: Cho D là trung điểm của đoạn thẳng AM. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AM ta vẽ nửa đường tròn đường kính AM và nửa đường tròn đường kính AD. Tiếp tuyến tại D của đường tròn nhỏ cắt nửa đường tròn lớn tại C và các tiếp tuyến tại C và A của đường tròn lớn cắt nhau tại B. Nối P bất kì trên cung nhỏ AC với điểm D cắt nửa đường tròn nhỏ tại K. Chứng minh rằng: AP là phân giác của $\widehat{BAK}$.

Bài tập 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a. E là điểm nằm giữa A và B, đường thẳng CE cắt đường thẳng AD tại K. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CE, cắt AB tại I.

a) Chứng minh rằng: Trung điểm của IK di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên đoạn AB.

b) Cho $BE = x$. Tính BK, CK, IK và diện tích tứ giác ACKI theo a và x.

Bài tập 4: Cho tam giác ABC với $\hat{A} < 90^\circ$, có $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Vẽ đường cao AH và bán kính OA. Chứng minh rằng $\widehat{OAH} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau ở A và B (O_1 và O_2 thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Qua A kẻ cát tuyến cắt đường tròn ở (O_1) ở C, cắt đường tròn (O_2) ở D. Các tiếp tuyến của hai đường tròn kẻ từ C và D cắt nhau ở I. Chứng minh rằng khi cát tuyến CAD thay đổi thì:

a) $\widehat{CBD}$ không đổi

b) $\widehat{CID}$ không đổi

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD, P ở trong hình bình hành sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$. Chứng minh rằng: $\widehat{PBA} = \widehat{PDA}$.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD, trên BC và CD lấy 2 điểm tương ứng là M và N sao cho $BN = DM$. Gọi I là giao điểm của BN và DM. Chứng minh: $\widehat{AID} = \widehat{AIB}$.

Bài tập 8: Cho (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với nhau tại A. Điểm C thuộc (O_1) . Kẻ tiếp tuyến của (O_1) tại C cắt (O_2) tại B và D. Chứng minh: $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD và điểm P nằm ngoài hình bình đó sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$ đồng thời A và C khác phía với đường thẳng PB. Qua A vẽ đường thẳng $Ax \parallel DP$, qua P vẽ đường thẳng $Py \parallel AD$ hai đường thẳng này cắt nhau ở Q.

a) chứng minh tứ giác ABPQ nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{APB} = \widehat{DPC}$.

Bài tập 10: (NK 2006 – 2007 CD) cho $\triangle ABC$ nhọn, có trực tâm H. Các đường thẳng BH và CH lần lượt cắt AC, AB tại M, N. Biết: $\widehat{NHM} = 120^\circ$.

a) Chứng minh: $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$. Tính: $\frac{MN}{BC}$.

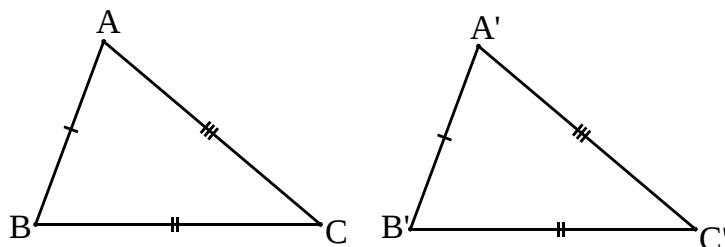
b) Tính: $\frac{AH}{BC}$.

CHỦ ĐỀ 6
CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

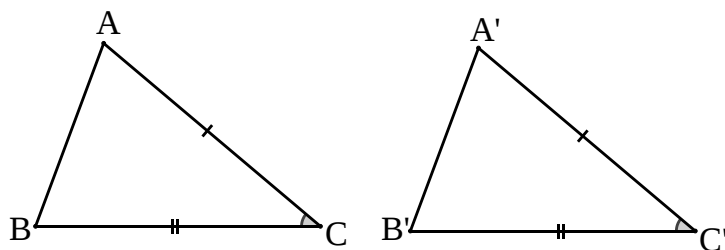
Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi thỏa mãn một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hai tam giác có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau (cạnh-cạnh-cạnh).



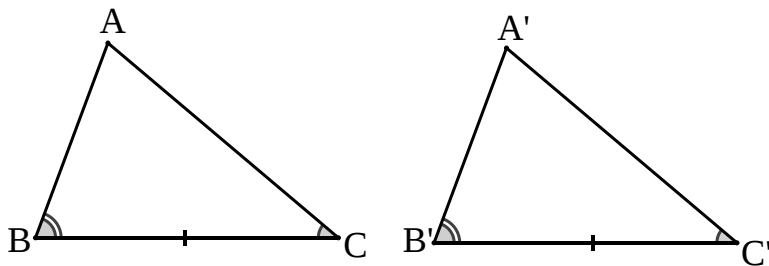
$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh-cạnh-cạnh)}$$

Trường hợp 2: Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và cặp góc xen giữa các cạnh đó bằng nhau thì bằng nhau (cạnh-góc-cạnh).



$$\left. \begin{array}{l} AC = A'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh-góc-cạnh)}$$

Trường hợp 3: Hai tam giác có một cặp cạnh bằng nhau và hai cặp góc kề với cặp cạnh ấy bằng nhau thì bằng nhau (góc-cạnh-góc).



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (góc-cạnh-góc)}$$

Lưu ý trường hợp bằng nhau của tam giác vuông:

Trường hợp 1: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 2: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

Trường hợp 4: Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$. Trên tia đối của AB , lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Chứng minh: $\triangle ABC = \triangle ADC$.

Chứng minh

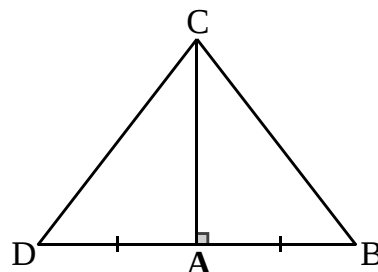
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ có:

$AB = AC$ (giả thiết)

$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} = 90^\circ$

AC cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC$ (cạnh - góc - cạnh)



Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$. Đường thẳng $AH \perp BC$ tại H . Trên đường vuông góc với BC tại B lấy điểm D không cùng nửa mặt phẳng bờ BC với điểm A sao cho $AH = BD$.

a) Chứng minh: $\triangle AHB = \triangle DBH$.

b) Chứng minh: $AB \parallel HD$.

Chứng minh

a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle DBH$, ta có:

$AH = BD$ (giả thiết)

$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ (giả thiết)

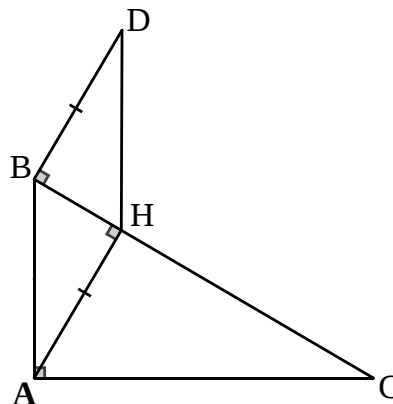
BH là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle DBH$ (c - g - c)

b) Vì $\triangle AHB = \triangle DBH \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{BHD}$ (góc tương ứng)

Mà $\widehat{ABH}$ và $\widehat{BHD}$ ở vị trí so le

$\Rightarrow AB \parallel HD$.



Bài tập 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Vẽ BD là tia phân giác của góc B . Vẽ $AE \perp BC$ tại E . Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle EBD$.

Chứng minh

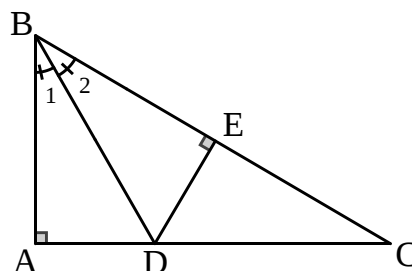
Xét $\triangle ABD = \triangle EBD$, ta có:

$\widehat{BAD} = \widehat{BED} = 90^\circ$ (giả thiết)

BD cạnh chung.

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (cạnh huyền - góc nhọn).



3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh: $\triangle ABM = \triangle ACM$.

b) Chứng minh: $AM \perp BC$.

Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC , qua C kẻ đường thẳng song song với AB hai đường thẳng này cắt nhau tại D

a) Chứng minh: $\triangle ABC = \triangle ADC$.

b) Chứng minh: $\triangle ADB = \triangle CBD$.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh: $\triangle ABO = \triangle COD$.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy . Trên tia Ax lấy 2 điểm B và D , trên tia Ay lấy 2 điểm C và E sao cho $AB = AC$ và $AD = AE$.

a) Chứng minh: $\triangle ACD = \triangle ABE$.

b) Chứng minh: $\triangle BOD = \triangle COE$.

Bài tập 4: Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy 2 điểm A và D , trên tia Oy lấy 2 điểm C và E sao cho $OD = OE$ và $OA = OB$.

a) Chứng minh: $\triangle ODC = \triangle OBE$.

b) Gọi A là giao điểm của BE và CD . Chứng minh: $\triangle AOB = \triangle AOC$.

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$, có $AB = AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại M .

a) Chứng minh: $\triangle AMB = \triangle AMC$.

b) Chứng minh M là trung điểm của cạnh BC .

c) K là một điểm bất kì trên đoạn thẳng AM , đường thẳng CK cắt cạnh AB tại I . Vẽ IH vuông góc với BC tại H . Chứng minh góc $\widehat{BAC} = 2\widehat{BIH}$.

Bài tập 6: Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy các điểm A, B thuộc tia Ox sao cho $OA < OB$. Lấy các điểm C, D thuộc tia Oy sao cho $OC = OA, OB = OD$. Gọi M là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng:

a) $AD = BC$.

b) $\triangle MAB = \triangle MCD$.

c) OM là tia phân giác của góc xOy .

Bài tập 7: Cho $\triangle ABC$, ($AB < AC$) có AM là phân giác của góc A (M thuộc BC). Trên AC lấy D sao cho $AD = AB$.

a) Chứng minh: $BM = MD$

b) Gọi K là giao điểm của AB và DM . Chứng minh: $\triangle DAK = \triangle BAK$.

Bài tập 8: Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ $AH \perp BC$. Kẻ $HP \perp AB$ và kéo dài để có $PE = PH$. Kẻ $HQ \perp AC$ và kéo dài để có $QF = QH$.

a) Chứng minh: $\triangle APE = \triangle APH, \triangle AQH = \triangle AQF$.

b) Chứng minh: E, A, F thẳng hàng và A là trung điểm của EF .

Bài tập 9: Cho $\triangle ABC$ vuông ở C , có $\widehat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở E , kẻ $EK \perp AB$ ($K \in AB$), kẻ $BD \perp AE$ ($D \in AE$).

Chứng minh:

a) $AK = KB$

b) $AD = BC$

Bài tập 10: Cho $\triangle ABC$, $AB = AC$ và M là trung điểm của AC và N là trung điểm của AB . Gọi K là giao điểm của BM và CN . Chứng minh:

a) $\triangle BNC = \triangle CMB$

b) $\triangle BKC$ cân tại K .

Bài tập 11: Cho đoạn thẳng BC . Gọi I là trung điểm của BC . Trên đường trung trực của BC lấy điểm A ($A \neq I$)

a) Chứng minh: $\triangle AIB = \triangle AIC$.

b) Kẻ $IH \perp AB$, kẻ $IK \perp AC$. Chứng minh: $\triangle AIH$ có 2 cạnh bằng nhau

c) Chứng minh: $HK \parallel BC$.

Bài tập 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có BD là phân giác. Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$). Gọi F là giao điểm của AB và DE . Chứng minh rằng:

a) BD là đường trung trực của AE

b) $DF = DC$

c) $AD < DC$

d) $AE \parallel FC$

Bài tập 13: Cho biết $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Kẻ tia phân giác OC của $\widehat{AOB}$. Trên tia OC lấy điểm M và $OA \perp HM$, $OB \perp MK$.

- a) Tính số đo các $\widehat{HMO}$ và $\widehat{KMO}$.
b) Chứng minh: $\Delta MHO = \Delta MKO$.

CHỦ ĐỀ 7
CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

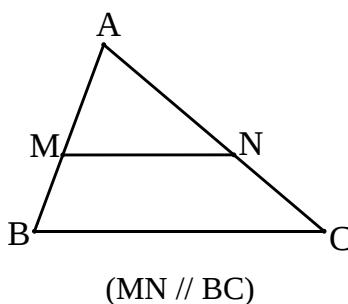
1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Hai tam giác được gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ và các góc tương ứng tỉ lệ.

Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$, ta có:

Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ và $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Phương pháp 2: Định lý Talet: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.



Ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

Phương pháp 3: Chứng minh các điều kiện cần và đủ để hai tam giác đồng dạng:

Hai tam giác có các cặp cạnh tương ứng tỷ lệ thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng tỷ lệ, hai góc xen giữa hai cặp cạnh ấy bằng nhau.

Phương pháp 4: Chứng minh trường hợp thứ nhất (cạnh-cạnh-cạnh): Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Phương pháp 5: Chứng minh trường hợp thứ 2 (cạnh-góc-cạnh): Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và 2 góc tạo bởi tạo các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases}$$

Phương pháp 6: Chứng minh trường hợp thứ 3 (góc-góc): Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$$

Phương pháp 7: Sử dụng chứng minh cho tam giác vuông:

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Nếu cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Phương pháp 8:

Chứng minh các tính chất của tỉ số đồng dạng để suy ra hai tam giác đồng dạng:

- Tỉ số hai đường phân giác, hai đường cao, hai đường trung tuyến, hai bán kính nội tiếp và ngoại tiếp, hai chu vi tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số hai đường cao của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, BH và B'H' là hai đường cao.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ thì $\frac{BH}{B'H'} = a$.

- Tỉ số hai đường phân giác của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, BD và B'D' là hai đường phân giác lần lượt của $\hat{B}$ và $\hat{B}'$.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ thì $\frac{BD}{B'D'} = a$.

- Tỉ số hai đường trung tuyến của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, BM và B'M' là hai đường trung tuyến.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ thì $\frac{BM}{B'M'} = a$.

- Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ thì

$$\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB + BC + CA}{A'B' + B'C' + C'A'} = a.$$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, $O'M'$, $O'N'$, $O'P'$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'B'C'$

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:

Ta có: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, $O'M'$, $O'N'$, $O'P'$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'B'C'$

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ và là tỉ số đồng dạng của hai tam giác thì

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = a^2$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ cân tại A; $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D và E trên AB; AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$.

- a) Chứng minh rằng: $\triangle BDM \sim \triangle CME$
 b) Chứng minh: $\triangle MDE \sim \triangle DBM$
 c) Chứng minh: $BD \cdot CE$ không đổi?

Chứng minh

a) Ta có: $\widehat{DBM} = \widehat{ECM}$ (1)

và $\widehat{DBM} = \widehat{DME}$ (giả thiết)

Mà

$$\widehat{DBM} + \widehat{BMD} + \widehat{MDB} = 180^\circ$$

$$\widehat{DME} + \widehat{BMD} + \widehat{CME} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{CME} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\triangle BDM \sim \triangle CME$ (g - g).

b) Vì $\triangle BDM \sim \triangle CME$ nên

$$\frac{BD}{CM} = \frac{DM}{ME} \text{ và } BM = CM \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{DM}{ME}$$

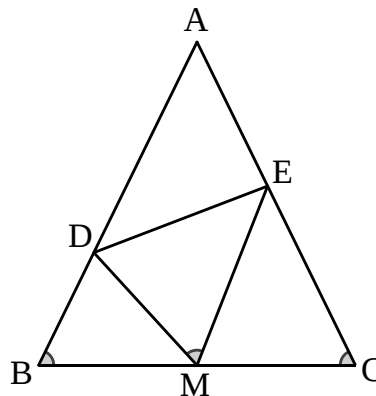
$$\Rightarrow \triangle MDE \sim \triangle DBM.$$

c) Vì $\triangle BDM \sim \triangle CME$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE}$$

$$\Rightarrow BD \cdot CE = CM \cdot BM$$

$$\text{Mà } CM = BM = \frac{BC}{2} = a \Rightarrow BD \cdot CE = \frac{a^2}{4} \text{ (không đổi)}$$



Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$, BD và CE là 2 đường cao của $\triangle ABC$. DF và EG là 2 đường cao của $\triangle ADE$. Chứng minh rằng: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ đồng dạng.

Chứng minh

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$, ta có:

$\widehat{A}$ là góc chung.

$$\widehat{AEC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle AEC \text{ (g - g)}$$

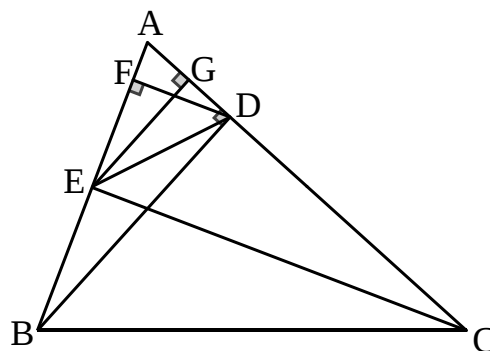
Suy ra:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\text{Và } \widehat{A} = 90^\circ$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (g - c - g)}$$



Bài tập 3: Lấy điểm M trên đường chéo AC của tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Kẻ $MN \perp BC$ ($N \in BC$)

và $MP \perp AD$ ($P \in AD$). Chứng minh: $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

Chứng minh

Vì $AB \perp BC$ (giả thiết)

$MN \perp BC$ (giả thiết)

Nên $MN \parallel AB$

$$\Rightarrow \triangle CNM \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC} \quad (1)$$

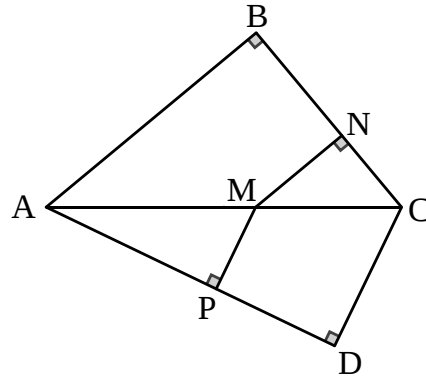
Ta có: $MP \parallel CD$ nên $\triangle AMP \sim \triangle ACD$

$$\Rightarrow \frac{MP}{CD} = \frac{AM}{AC} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = \frac{MC + AM}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$$

Vậy $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.



Bài tập 4: Cho đoạn thẳng AB. Gọi O là trung điểm của AB. Vẽ về 1 phía AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy C trên Ax, D trên By sao cho góc COD = 90°.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ACO \sim \triangle BDO$.

b) Chứng minh rằng: $CD = AC + BD$.

c) Kẻ $OM \perp CD$ tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng: $MN \parallel AC$.

Chứng minh

a) Ta có:

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOE} \quad (1)$$

$$\widehat{BOE} + \widehat{BOD} = 90^\circ$$

$$\widehat{BDO} + \widehat{BOD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{BDO} \quad (2)$$

Xét $\triangle ACO$ và $\triangle BDO$, có:

$$\widehat{OAC} = \widehat{DBO} = 90^\circ \quad (\text{giả thiết})$$

$$\widehat{BOE} = \widehat{BDO} \quad (\text{theo (2)})$$

$$\Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle BDO \text{ (g - g)}$$

b) Kẻ CO cắt DB tại E.

Ta có: $\triangle AOC = \triangle BOE$ (g - c - g)

$$\Rightarrow OC = OE.$$

Xét $\triangle COD$ và $\triangle EOD$, có:

$$OC = OE \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{COD} = \widehat{EOD} = 90^\circ$$

OD là cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle COD = \triangle EOD \text{ (c - g - c)}.$$

$$\Rightarrow CD = ED \text{ (cạnh tương ứng)}.$$

$$\text{Ta có: } AC = BE \Rightarrow AC + BD = BE + BD = ED \text{ (Vì } CD = ED)$$

$$\text{Vậy: } AC + BD = CD.$$

c) Ta có: $\triangle ANC \sim \triangle DNB$.

$$\Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AC}{BD}$$

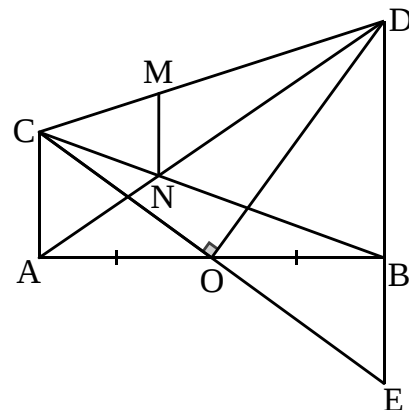
$$\Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{BE}{BD} \text{ (Vì } AC = BE)$$

Vì $CD = ED$ nên $\triangle CDE$ cân tại D.

$\Rightarrow OD$ là đường cao hạ từ đỉnh D.

Theo chứng minh ở câu b, ta có:

$$OB = OM \text{ (2 đường cao tương ứng)}$$



CM = BE (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

MD = BD (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{BE}{BD} = \frac{CM}{MD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$$

Theo định lý Talet, ta có: MN // AC.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình bình hành ABCD với đường chéo AC > BD. Gọi E và F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

a) Chứng minh rằng: $\triangle CBG \sim \triangle ACF$.

b) Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của cạnh BC. Từ một điểm E trên cạnh BC, ta kẻ $Ex \parallel AM$. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: $FE + EG = 2AM$.

Bài tập 3: Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 4: Cho $\triangle ABC$, BD và CE là 2 đường cao của $\triangle ABC$. DF và EG là 2 đường cao của $\triangle ADE$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

b) $FG \parallel BC$.

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) So sánh $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

b) So sánh 2 đoạn thẳng BD và CE.

c) Chứng minh: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Bài tập 6: Cho 4 điểm A, E, F, B theo thứ tự ấy trên 1 đường thẳng. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các hình vuông ABCD; FGHE.

a) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh: $\triangle OHE \sim \triangle OBC$.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng CE và FD cùng đi qua O.

Bài tập 7: Cho $\triangle ABC$ có các trung điểm của BC, CA, AB theo thứ tự là D, E, F. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi P là giao điểm của AM và BE; Q là giao điểm của CF và AN. Chứng minh rằng:

a) F, P, D thẳng hàng và D, Q, E thẳng hàng.

b) $\triangle ABC \sim \triangle DQP$.

Bài tập 8: Cho $\triangle ABC$; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, giao điểm 3 đường trung trực của $\triangle$. Gọi E, D theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Chứng minh :

a) $\triangle OED \sim \triangle HCB$

b) $\triangle GOD \sim \triangle GBH$

c) Ba điểm O, G, H thẳng hàng và $GH = 2OG$.

Bài tập 9: Cho $\triangle ABC$, AD là phân giác $\widehat{A}$; $AB < AC$. Trên tia đối của DA lấy điểm I sao cho $\widehat{ACI} = \widehat{BDA}$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADB \sim \triangle ACI$; $\triangle ADB \sim \triangle CDI$

b) $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

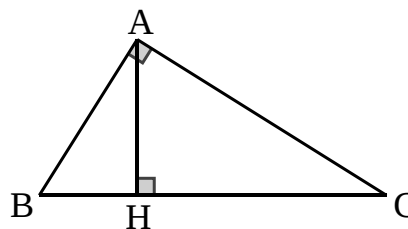
Bài tập 10: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Chứng minh rằng:

- a) $AE.AC = AF.AB$
- b) $\triangle AFE \sim \triangle ACB$
- c) $\triangle FHE \sim \triangle BHC$
- d) $BF.BA + CE.CA = BC^2$.

CHỦ ĐỀ 8
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Kiến thức cơ bản:

- (1) $AB^2 = BH.BC$;
 $AC^2 = CH.BC$
- (2) $AB.AC = AH.BC$
- (3) $AH^2 = BH.HC$
- (4) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$



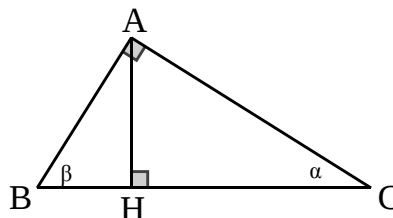
Kết quả:

Với tam giác đều cạnh là a, ta có: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Tỉ số lượng giác áp dụng trong tam giác vuông:

Đặt $\widehat{ACB} = \alpha$; $\widehat{ABC} = \beta$, khi đó:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{HC}; \\ \cos \alpha &= \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC}; \\ \tan \alpha &= \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} \\ \cot \alpha &= \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{AH}\end{aligned}$$



$$b = a \sin B = a \cos C = c \tan B = c \cot C$$

$$c = a \cos B = a \sin C = b \cot B = b \tan C$$

Kết quả suy ra:

$$(1) \sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta$$

$$(2) 0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1; \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$(3) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

4) Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 9\text{cm}$, $CH = 16\text{cm}$.

- a) Tính độ dài các cạnh AB, AC.
- b) Tính chiều cao AH.

Giải

a) Ta có: $BC = BH + HC = 9 + 16 = 25$ (cm)

$\triangle ABC$ vuông tại A, $AH \perp BC$ (giả thiết)

Sử dụng hệ thức về góc vuông và hình chiếu của nó lên cạnh huyền, ta có:

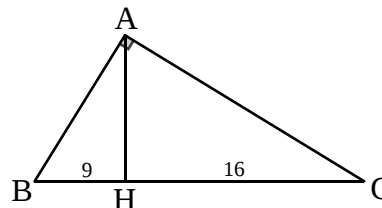
$$AB^2 = BH.HC = 9.25 = 225.$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)}$$

$$AC^2 = CH.CB = 16.25 = 400$$

Suy ra:

$$\Rightarrow AC = \sqrt{400} = 20 \text{ (cm)}$$



b) Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao thuộc cạnh huyền và hình chiếu của hai góc vuông trên cạnh huyền, ta có:

$$AH^2 = BH.HC = 9.16 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ (cm)}$$

Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 30$ (cm), $\tan B = \frac{8}{15}$

a) Tính AC, BC.

b) Tính $\sin B$, $\cos B$, $\cot B$.

Giải

a) Trong $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có:

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{15} \text{ mà } AB = 30 \text{ (cm) nên ta có:}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow AC = \frac{30.8}{15} = 16 \text{ (cm)}$$

Theo định lý Pitago, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$$

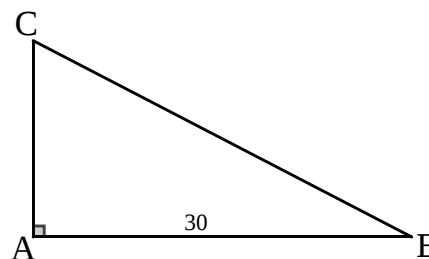
Suy ra: $BC = 34$ (cm)

b) Theo định nghĩa, ta có các tỉ số lượng giác của các góc là:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{16}{34} \approx 0,4706$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{30}{34} \approx 0,8824$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{16}{30} = 1,875$$



Bài tập 3: Cho $\triangle ABC$, đường cao AH ($H \in BC$), $\widehat{B} = 42^\circ$, $AB = 12$ cm, $BC = 22$ cm. Tính các cạnh và góc còn lại của tam giác.

Giải

Trong $\triangle AHB$ vuông tại H, $\widehat{B} = 42^\circ$ nên $\widehat{HAB} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

Áp dụng hệ thức lượng liên hệ giữa các cạnh và góc trong của tam giác vuông AHB, ta có:

$$AH = AB.\sin B = 12.\sin 42^\circ \approx 12.0,669 \approx 8,028 \text{ (cm)}$$

$$BH = AB.\cos B = 12.\cos 42^\circ \approx 12.0,743 \approx 8,916 \text{ (cm)}$$

Trong tam giác vuông AHB, ta có:

$$\tan C = \frac{AH}{HC} \approx \frac{0,028}{13,084} = 0,614$$

$$\Rightarrow \hat{C} \approx 31^{\circ}30'$$

$$\Rightarrow \widehat{HAC} \approx 90^{\circ} - 31^{\circ}30' = 58^{\circ}30'$$

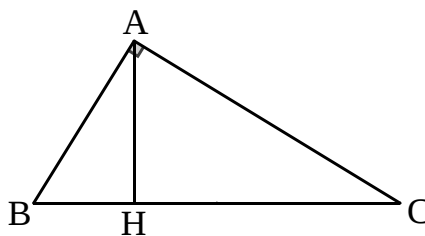
Do đó:

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 48^{\circ} + 58^{\circ}30' = 106^{\circ}30'$$

$$AH = AC \cdot \sin C$$

Suy ra:

$$AC = \frac{AH}{\sin C} \approx \frac{8,028}{\sin 31^{\circ}30'} \approx 15,35 \text{ (cm)}$$



3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, biết:

- a) $a = 72\text{cm}$, $\hat{B} = 58^{\circ}$
- b) $b = 20\text{cm}$, $\hat{B} = 48^{\circ}$
- c) $b = 15\text{cm}$, $\hat{C} = 30^{\circ}$
- d) $b = 21\text{cm}$, $c = 18\text{cm}$.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $HB = 25\text{cm}$, $HC = 64\text{cm}$. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng: Nếu một tam giác có hai cạnh bằng a và b, góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng đó bằng c thì diện tích của tam giác đó bằng: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin c$

Bài tập 4: Cho ΔABC có, $AB = 16\text{cm}$ và $\hat{B} = 60^{\circ}$.

- a) Tính BC.
- b) Tính $S_{\Delta ABC}$.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A. Gọi H là chân đường cao hạ từ A. Biết rằng $AB = 7\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Tính BH, CH, AH.

Bài tập 6: Cho ΔABC vuông cân tại A, đường cao AH. Biết $BC = a$, $AH = h$. Tính độ dài cạnh bên theo a, h.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ $HM \perp AB$ tại M. Chứng minh: $BM = \frac{AB^3}{BC^2}$

Bài tập 8: Cho ΔABC có $AB = 48\text{cm}$, $AC = 14\text{cm}$, $BC = 50\text{cm}$. Tính độ dài đường phân giác của góc C.

Bài tập 9: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. AH là đường cao. Tính BH; CH; AC và AH.

Bài tập 10: Cho ΔABC cân tại A có $BC = 16\text{cm}$, $AH = 6\text{cm}$. Một điểm $D \in BH$ sao cho $BD = 3,5\text{cm}$. Chứng minh: ΔDAC vuông.

Bài tập 11: Cho ΔABC vuông tại A có $AC = 10\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$. Tính:

- a) BC.
- b) Hình chiếu của AB và AC lên BC.
- c) Đường cao AH.

Bài tập 12: Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 10\text{cm}$. Dây cung AB bất kỳ có trung điểm I.

- a) Tính AB nếu $OI = 7\text{cm}$.
- b) Tính OI nếu $AB = 14\text{cm}$.

Bài tập 13: Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 26,5$ cm. Vẽ dây cung $AC = 22,5$ cm. H là hình chiếu của C trên AB, nối BC. Tính BC; BH; CH và OH.

Bài tập 14: Hình thang ABCD cân; đáy lớn $AB = 30$ cm, đáy nhỏ $CD = 10$ cm và góc A là 60° .

a) Tính cạnh BC.

b) Gọi M; N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

Bài tập 15: Cho đa giác lồi ABCD có $AB = AC = AD = 10$ cm, góc B bằng 60° và góc A là 90° .

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính khoảng cách BH và Điều kiện từ B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ $BE \perp DC$ kéo dài. Tính BE; CE và DC.

Bài tập 16: Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Từ trung điểm O của AB vẽ $Ox \perp AB$ tại O. Trên Ox lấy D:

$OD = \frac{a}{2}$. Từ B kẻ $BC \perp AD$ kéo dài.

a) Tính AD; AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn $OE = a$. Chứng minh: Bốn điểm A, C, B và E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tính chất CE với góc ACB.

c) Vẽ đường vuông góc với BC tại B cắt CE tại F. Tính BF.

d) Gọi P là giao điểm của AB và CE. Tính AP và BP.

Bài tập 17: Cho $\triangle ABC$ nhọn, nội tiếp (O; R) có: $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và $\widehat{AOC} = 120^\circ$

a) Chứng minh: O ở trong tam giác ABC.

b) Tính các góc tam giác ABC.

c) Tính đường cao AH và BC theo R.

Bài tập 18: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bài tập 19: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.$$

Bài tập 20: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $\hat{C} = a$, ($a < 45^\circ$) trung tuyến AM. Đường cao AH. Biết $BC = a$, $AC = b$, $AH = h$.

a) Tính: $\sin a$, $\sin 2a$ theo a, b, h.

b) Chứng minh rằng: $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$.

Bài tập 21: Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Đường cao thuộc cạnh bên bằng h, góc ở đáy bằng a. Chứng minh

rằng: $S_{\triangle ABC} = \frac{h^2}{4 \sin a \cdot \cos a}$.

Bài tập 22: Cho hình thang ABCD, đáy lớn $AB = 20$ cm, cạnh bên $AD = 8$ cm và tạo với đáy lớn AB một góc 65° .

a) Tính độ dài đường cao AH và đáy nhỏ CD.

b) Tính số đo góc $\widehat{ABD}$ và đường chéo BD.

Bài tập 23: Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AD = 30$ cm, $CD = 18$ cm và $BC = 20$ cm.

a) Tính các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$.

b) Tính các góc $\widehat{DAC}$, $\widehat{ADB}$ và độ dài các đường chéo AC, BD.

Bài tập 24: Cho $\triangle ABC$. Biết $AB = 10$ cm, $AC = 24$ cm, $BC = 26$ cm.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ vuông tại A.

b) Tính: $\sin B$, $\sin C$.

c) Tính chiều cao AH và đoạn thẳng mà chiều cao nó chia ra trên BC.

CHỦ ĐỀ 9
CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC

1. Kiến thức cơ bản:

- Dùng định lý Talet, tính chất đường phân giác, tam giác đồng dạng, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, ...

Giả sử cần chứng minh: $MA.MB = MC.MD$

Lập sơ đồ: $MA.MB = MC.MD \Leftrightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Leftrightarrow \Delta MAD \sim \Delta MCB$ hoặc $\Delta MAC \sim \Delta MDB$

Ngoài ra cần chú ý đến việc sử dụng các hệ thức trong tam giác vuông; phương tích của một điểm với đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn $(O; R)$, tiếp tuyến Ax . Trên tiếp tuyến Ax , lấy điểm F sao cho BF cắt đường tròn tại C . Tia phân giác của góc ABF cắt Ax tại E và cắt đường tròn tại D .

a) Chứng minh $OD \parallel BC$.

b) Chứng minh hệ thức: $BD.BE = BC.BF$

Chứng minh

a) ΔBOD cân ở O (vì $OD = OB = R$)

$\Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{ODB}$

Mà $\widehat{OBD} = \widehat{CBD}$ (giả thiết) nên $\widehat{ODB} = \widehat{CBD}$.

Do đó: $OD \parallel BC$.

b) Ta có:

$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow AD \perp BE$.

$\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow AC \perp BF$.

ΔEAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có $AD \perp BE$ nên $AB^2 = BD.BE$ (1)

ΔFAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có $AC \perp BF$ nên $AB^2 = BC.BF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BD.BE = BC.BF$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AD.AC = AE.AB$.

Chứng minh

a) Xét tứ giác $BCDE$, có:

$\widehat{BDC} = 90^\circ$

$\widehat{BEC} = 90^\circ$

Ta có hai đỉnh D, E cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

b) Xét ΔADB và ΔAEC , ta có:

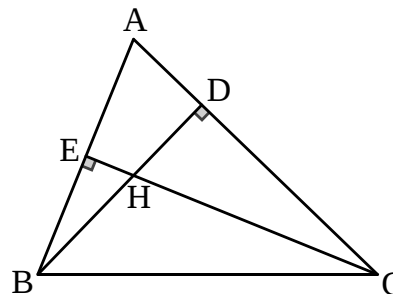
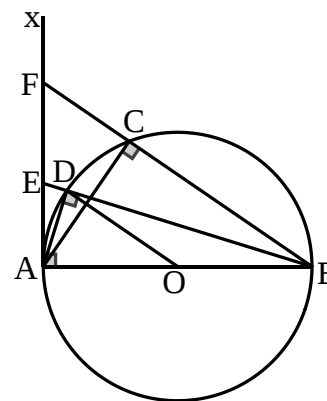
$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ (Vì BD, CE là hai đường cao)

$\widehat{A}$ là góc chung.

$\Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta AEC$ (g - g).

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow AD.AC = AE.AB$



Bài tập 3: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa A và E, dây DE không qua tâm O). Gọi H là trung điểm của DE, AE cắt BC tại K.

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$

c) Chứng minh: $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$.

Chứng minh

a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)

Trong tứ giác ABOC có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Ta có: AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Suy ra: $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

Do đó: $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$.

Vậy HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.

c) Chứng minh: $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$:

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$, có:

$\widehat{BAE}$ là góc chung

$\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ ($= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD}$)

Suy ra: $\triangle ABD \sim \triangle AEB$

Do đó: $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (1)

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle AHB$, có:

$\widehat{BAH}$ là góc chung

$\widehat{ABK} = \widehat{AHB}$ (do $\widehat{AB} = \widehat{AC}$)

$\Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle AHB$.

Suy ra: $\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow AB^2 = AK.AH$ (2)

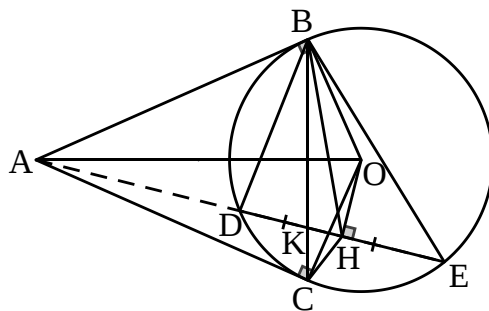
Từ (1) và (2) suy ra: $AE.AD = AK.AH$

$\Rightarrow \frac{1}{AK} = \frac{AH}{AE.AD}$

$\Rightarrow \frac{2}{AK} = \frac{2AH}{AE.AD} = \frac{2(AD+DH)}{AE.AD} = \frac{2AD+2DH}{AE.AD} = \frac{AD+AD+ED}{AE.AD} = \frac{AE+AD}{AE.AD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$

(do $AD + DE = AE$ và $DE = 2DH$).

Vậy $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$ (đpcm).



3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho (O) có đường kính AB. Qua A kẻ tiếp tuyến xy. Lấy điểm $M \in Ax$; nối BM cắt (O) tại C. Chứng minh: $MA^2 = MB.MC$.

Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$ đều, nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên cung BC (BC là cung nhỏ). CD và AB kéo dài cắt nhau ở M; BD và AC kéo dài cắt nhau ở N. Chứng minh: $AB^2 = BM.CN$.

Bài tập 3: Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Từ $M \in AB$ vẽ $MEF \parallel BC$ cắt AC tại E và đường thẳng song song AB vẽ từ C tại F. AC cắt BF tại I. Chứng minh: $IC^2 = IE.IA$.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 36\text{mm}$; $AD = 24\text{mm}$. Từ D nối đến trung điểm M của AB cắt AC tại I và CB kéo dài tại K. Chứng minh: $ID^2 = IM \cdot IK$.

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Vẽ phân giác trong AD của góc A ($D \in BC$). Gọi khoảng cách từ D đến AB là d. Biết $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh: $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài tập 6: Cho (O; R) và hai dây cung song song nhau AD và BE ở về hai phía của dây AB và cùng hợp với AB một góc 45° . Nối DE cắt AB tại M. Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MD^2 + ME^2 = 4R^2$.

Bài tập 7: Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng xy theo thứ tự trên. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB \cdot AC$.

Bài tập 8: Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, lấy một điểm P tùy ý. Gọi I là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh: $BC^2 = AP \cdot AQ$.

b) Trên AP lấy điểm M sao cho $PM = PB$. Chứng minh: $BP + PC = AP$.

c) Chứng minh: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD ($AC > BD$). Vẽ $CE \perp AB$ và $FC \perp AD$. Chứng minh rằng: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ $Ex \parallel AM$. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: $FE + EG = 2AM$.

Bài tập 11: Cho hình bình hành ABCD, trên Đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM \cdot IN$.

Bài tập 12: Lấy 1 điểm O trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC ($AB = AC$) có góc ở đỉnh bằng 20° ; cạnh đáy là a; cạnh bên là b. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài tập 14: Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 30^\circ$. Dựng bên ngoài $\triangle BCD$ đều. Chứng minh: $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài tập 15: Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\hat{A} = 90^\circ$). Từ B kẻ $BM \perp AC$. Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$.

CHỦ ĐỀ 10

TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp:

- Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.
- Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° (bù nhau).
- Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc bằng nhau.
- Chứng minh tổng của góc ngoài tại một đỉnh với góc trong đối diện bù nhau.

Hay diễn đạt là: “Góc ngoài bằng góc đối trong”.

- Nếu $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ hoặc $NA \cdot ND = NC \cdot NB$ thì tứ giác ABCD nội tiếp.

(Trong đó: $M = AB \cap CD$; $N = AD \cap BC$)

- Nếu $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó $P = AC \cap BD$)

- Chứng minh tứ giác đó là hình thang cân; hình chữ nhật; hình vuông; ...

Nếu cần chứng minh cho nhiều điểm cũng thuộc một đường tròn ta có thể chứng minh lần lượt 4 điểm một lúc. Song cần chú ý tính chất “Qua 3 điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một đường tròn”

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$, BD, CE là hai đường cao. Chứng minh: Tứ giác BCDE và AEHD nội tiếp.

Chứng minh

Xét tứ giác BCDE, có:

$$\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (Vì BD, CE là hai đường cao)}$$

$\hat{A}$ là góc chung.

$\Rightarrow$ Hai đỉnh E, D cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90° .

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp.

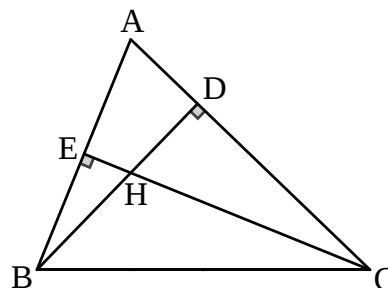
Xét tứ giác AEHD, có:

$$\widehat{AEH} = 90^\circ \text{ (EC là đường cao)}$$

$$\widehat{ADH} = 90^\circ \text{ (BD là đường cao)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp.



Bài tập 2: Cho hình thang cân ABCD ($AB > CD$, $AB \parallel CD$) nội tiếp trong đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D chúng cắt nhau ở E. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Chứng minh

Ta có:

$$\widehat{EAC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC} \text{ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AE và dây AC của đường tròn (O))}$$

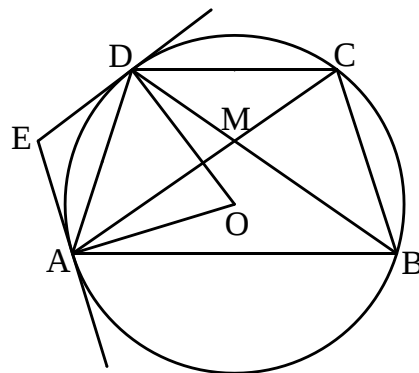
Tương tự:

$$\widehat{xDB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DB} \text{ (Dx là tia đối của tia tiếp tuyến DE)}$$

Mà $AC = BD$ (do ABCD là hình thang cân) nên $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

Do đó $\widehat{EAC} = \widehat{xDB}$.

Vậy tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.



Bài tập 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, dây cung AC. Gọi M là điểm chính giữa cung AC. Đường thẳng kẻ từ C song song với BM cắt tia AM ở K và cắt tia OM ở D. OD cắt AC tại H. Chứng minh tứ giác CKMH nội tiếp.

Chứng minh

Ta có:

$$\widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)}$$

$$\Rightarrow AM \perp MB.$$

Mà $CD \parallel BM$ (giả thiết) nên $AM \perp CD$.

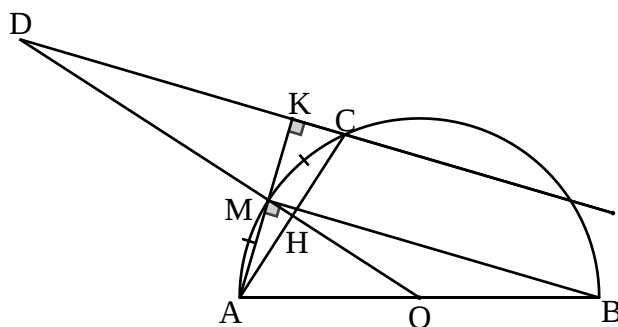
$$\text{Vậy } \widehat{MKC} = 90^\circ.$$

Ta có:

$$\widehat{AM} = \widehat{CM} \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow OM \perp AC$$

$$\Rightarrow \widehat{MHC} = 90^\circ.$$



Tứ giác CKMH có $\widehat{MKC} + \widehat{MHC} = 180^\circ$ nên nội tiếp được đường tròn.

Bài tập 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ điểm M trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng MB cắt nửa đường tròn (O) tại Q. Gọi giao điểm của MO và AC là I. Chứng minh rằng: Tứ giác AMQI nội tiếp.

Chứng minh

Ta có:

MA = MC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

OA = OC (bán kính đường tròn (O))

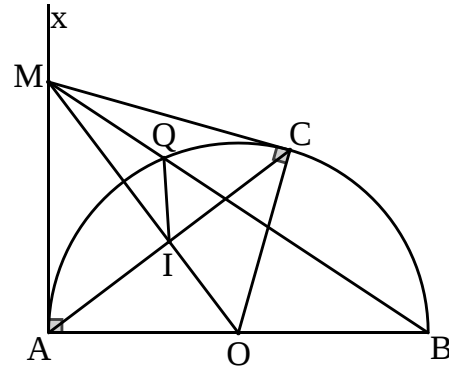
Do đó: $MO \perp AC \Rightarrow \widehat{MIA} = 90^\circ$.

$\widehat{AQB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{MQA} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Hai đỉnh I, Q cùng nhìn cạnh AM với một góc bằng 90°

$\Rightarrow$ Tứ giác AMQI nội tiếp được trong đường tròn.



Bài tập 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia

AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC.

Chứng minh: Tứ giác EFDA nội tiếp.

Chứng minh

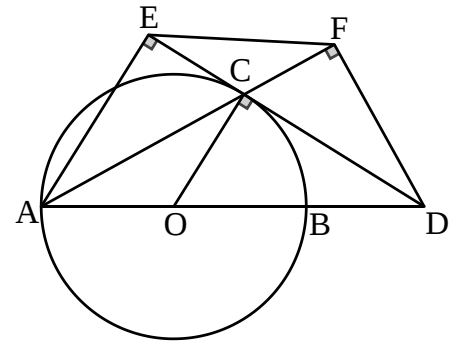
Ta có:

$\widehat{AED} = 90^\circ$ (Vì $AE \perp CD$ tại E)

$\widehat{AFD} = 90^\circ$ (Vì $DF \perp AC$ tại F)

$\Rightarrow$ Hai đỉnh E, F cùng nhìn cạnh AD với một góc bằng 90° .

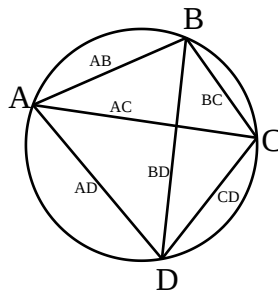
$\Rightarrow$ Tứ giác EFDA nội tiếp.



Bài tập 6: Sử dụng tính chất của định lý Plôtê-mê :

Định lý Ptolemy hay Đẳng thức Ptolemy là đẳng thức trong hình học Euclid miêu tả quan hệ giữa độ dài bốn cạnh và

hai đường chéo của một tứ giác nội tiếp đường tròn. Định lý này mang tên nhà toán học và thiên văn học người Hy Lạp cổ đại Ptolemy (Claudius Ptolemaeus).



Nếu A, B, C, và D là 4 đỉnh của tứ giác nội tiếp đường tròn thì:

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}| + |\overline{BC}| \cdot |\overline{AD}|$$

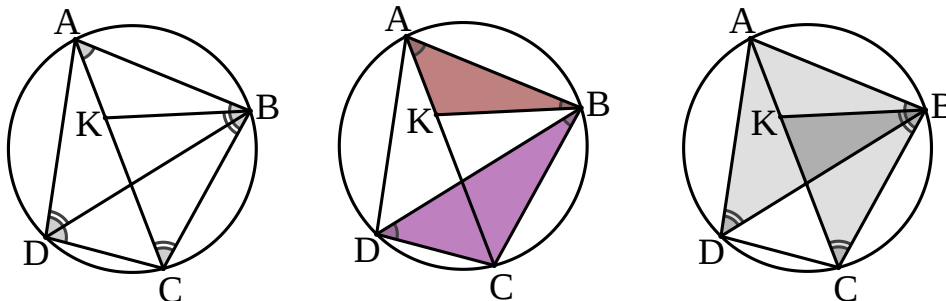
(với dấu gạch ngang kí hiệu độ dài của các cạnh)

Định lý này cũng có thể phát biểu thành định lý thuận và đảo:

Định lý thuận: Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.

Định lý đảo: Nếu một tứ giác thỏa mãn điều kiện tổng các tích của các cặp cạnh đối diện bằng tích của hai đường chéo thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh



Gọi ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Trên cung nhỏ BC, ta có các góc nội tiếp:

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, và trên cung AB, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Lấy 1 điểm K trên AC sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$;

Từ $\widehat{ABK} + \widehat{CBK} = \widehat{ABC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD}$.

Suy ra: $\widehat{CBK} = \widehat{ABD}$.

Do vậy tam giác $\triangle ABK \sim \triangle DBC$, và tương tự có $\triangle ABD \sim \triangle KBC$.

Suy ra: $\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD}$, và $\frac{CK}{BC} = \frac{DA}{BD}$;

Từ đó $AK \cdot BD = AB \cdot CD$, và $CK \cdot BD = BC \cdot DA$;

Cộng các vế của 2 đẳng thức trên: $AK \cdot BD + CK \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$;

Hay: $(AK + CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$;

Mà $AK + CK = AC$, nên $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. (Điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. M là một điểm trên tiếp tuyến xBy. AM cắt (O) tại C; lấy $D \in BM$; nối AD cắt (O) tại I. Chứng minh: Tứ giác CIDM nội tiếp.

Bài tập 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 5\text{cm}$ và $AC = 5\sqrt{3}\text{cm}$. Đường cao AH ($H \in BC$). Đường tròn (H; HA) cắt AB tại D và AC tại E. Chứng minh: Tứ giác CEDB nội tiếp.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B vẽ $Ax \perp AB$ và $By \perp BA$. Vẽ tiếp tuyến x'My' (tiếp điểm M) cắt Ax tại C và By tại D. OC cắt AM tại I và OD cắt BM tại K. Chứng minh: Tứ giác CIKD nội tiếp.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ bán kính $OC \perp AB$. Từ B vẽ tiếp tuyến Bx. Gọi M là trung điểm OC, AM kéo dài cắt đường tròn tại E và Bx tại I. Tiếp tuyến từ E cắt Bx tại D. Chứng minh: Tứ giác MODE nội tiếp.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} < 45^\circ$) nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Dựng tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến tiếp tuyến đó. AH cắt đường tròn (O) tại M ($M \neq A$). Đường vuông góc với AC kẻ từ M cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác MKCH nội tiếp.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N ($A \neq M$ và N). Chứng minh:

a) $\widehat{AHN} = \widehat{ACB}$

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc đường tròn đó ($C \neq A$ và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và BC. Các đường thẳng BN và AC cắt nhau tại I, các dây cung AN và BC cắt nhau ở P. Chứng minh tứ giác ICPN nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB. Trên tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn này lấy điểm C sao cho $AC = AB$. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của đường tròn (O; R), với D là tiếp điểm. Chứng minh rằng tứ giác ACDO nội tiếp.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O) đường kính AB bằng 6cm. Gọi H là điểm nằm giữa A và B. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D. Hai đường thẳng BC và DA cắt nhau tại M. Từ M hạ đường vuông góc MN với đường thẳng AB (N thuộc thẳng AB). Chứng minh MNAC là tứ giác nội tiếp.

CHỦ ĐỀ 11
CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Áp dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.

Phương pháp 2: Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng cũng đi qua điểm đó.

Phương pháp 3: Dùng định lý đảo của định lý Talet.

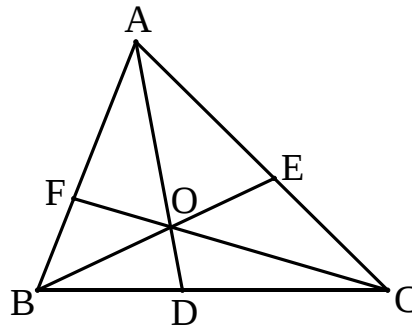
Phương pháp 4:

Định lý Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). $M \in BC$. Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh MA và MC tại E và F đồng thời tiếp xúc với cả đường tròn (O) tại K. Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.

Định lý Pascal: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó các giao điểm của các cặp cạnh AB và DE, BC và EF, CD và FA thẳng hàng.

Phương pháp 6:

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.



Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $MC = NA = PB$

b) $(\overline{AM}, \overline{MC}) = (\overline{MC}, \overline{BP}) = (\overline{BP}, \overline{NA}) = 60^\circ$

c) MC, NA, PB đồng quy

Chứng minh

a) Xét $\triangle ABN$ và $\triangle MBC$, có:

$AB = MB$;

$BC = BN$ (các cạnh của tam giác đều)

$$\widehat{ABN} = \widehat{MBC} \text{ (cùng bằng } 60^\circ + \widehat{ABC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta MBC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AN = MC \quad (*)$$

$$\text{Tương tự: } \Delta ABP = \Delta AMC \text{ (c.g.c)}$$

$$AB = AM;$$

$$BC = BN \text{ (các cạnh của tam giác đều)}$$

$$\widehat{BAP} = \widehat{MAC} \text{ (cùng bằng } 60^\circ + \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\Rightarrow BP = MC \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có: } AN = MC = BP \text{ (đpcm).}$$

b)

$$\text{Trong } \Delta APC, \text{ có: } \widehat{A}_1 + \widehat{C}_2 + \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 = 180^\circ \text{ mà } \widehat{P}_1 = \widehat{C}_1$$

$$\text{Trong } \Delta PCK, \text{ có: } \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 + \widehat{P}_2 + \widehat{K}_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 60^\circ + (\widehat{C}_1 + \widehat{P}_2) + \widehat{K}_2 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{K}_2 = 60^\circ \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \Delta ABN = \Delta MBC$$

$$\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{C}_3 \text{ mà } \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{N}_2 + \widehat{C}_3 = 60^\circ \text{ mà } \widehat{C}_4 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta NKC \text{ có } \widehat{N}_2 + \widehat{C}_3 + \widehat{C}_4 + \widehat{K}_3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{K}_3 = 60^\circ \quad (2)$$

$$\text{Tương tự: } \Delta ACN = \Delta PCB$$

$$\Rightarrow \widehat{P}_2 = \widehat{A}_2 \text{ mà } \widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{P}_1 + \widehat{A}_2 = 60^\circ \text{ mà } \widehat{A}_1 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Trong } \Delta AKP, \text{ có: } \widehat{K}_1 = 60^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh

c) Giả sử $MC \cap BP = K$, ta chứng minh cho A, K, N thẳng hàng.

$$\text{Theo chứng minh trên ta có: } \widehat{K}_2 = 60^\circ, \widehat{K}_3 = 60^\circ, \widehat{K}_1 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 + \widehat{K}_3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow A, K, N \text{ thẳng hàng}$$

$$\text{Vậy } AN, MC, BP \text{ đồng quy (đpcm)}$$

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD. Trên AB và CD lấy 2 điểm E và F sao cho $AE = CF$. Trên AD và BC lấy H và G sao cho $DH = BG$.

a) Chứng minh: Tứ giác EGFH là hình bình hành

b) Chứng minh: AC, BD, EF, GH cắt nhau tại 1 điểm.

Chứng minh

a) Xét ΔDHF và ΔBGE , ta có:

$$DH = BG$$

$$\widehat{HDF} = \widehat{GBE} \text{ (Vì ABCD là hình bình hành)}$$

$$DF = BE \text{ (Vì } AE = CF \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta DHF = \Delta BGE$$

$$\Rightarrow HF = EG. \quad (1)$$

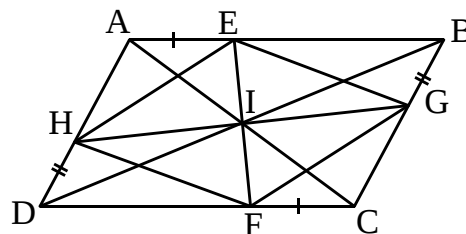
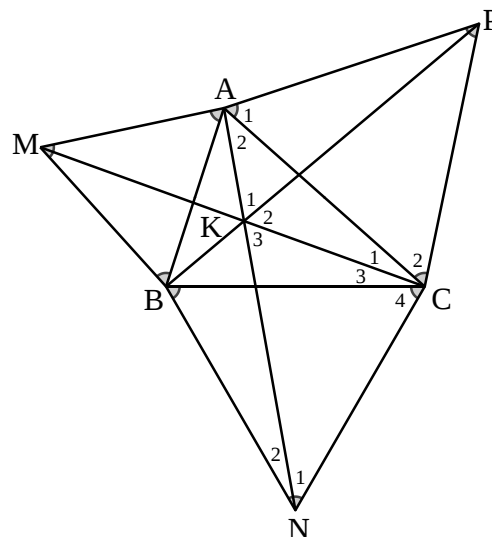
Mặt khác, ta có:

$$\widehat{DHG} = \widehat{BGH} \text{ và } \widehat{HDF} = \widehat{GBE} \Rightarrow \widehat{FCG} = \widehat{EGH} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: Tứ giác EGFH là hình bình hành.

b) (Theo câu a)

$$\Rightarrow \text{Tứ giác EGFH là hình bình hành.}$$



Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo HG và EF (của hình bình hành EGFH)

Ta lại có: Tứ giác AGCH là hình bình hành (AH // CG và AH = CG)

⇒ Giao của 2 đường chéo HG và AC là I (I trung điểm HG)

Tương tự, ta có: Hình bình hành HBGD có giao điểm của 2 đường chéo là HG và BD tại I (I là trung điểm HG)

Suy ra: HG, EF, AC, BD cắt nhau tại điểm I (cũng là điểm duy nhất).

Bài tập 3: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Trên d_1 lần lượt lấy ba điểm phân biệt A, B, C khác O sao cho OA = AB = BC. Trên d_2 lần lượt lấy ba điểm E, M, N khác O sao cho OE = OM = MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, BN và CM đồng quy.

Chứng minh

Gọi D là giao điểm của BN và CM.

Qua M kẻ đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.

Qua O kẻ đường thẳng song song với BN cắt MF tại G.

Xét $\triangle FBO$ và $\triangle OGF$, ta có:

$$\widehat{BOF} = \widehat{GFO} \text{ (so le trong)}$$

OF là cạnh chung

$$\widehat{BFO} = \widehat{GOF} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \triangle FBO = \triangle OGF \text{ (g-c-g).}$$

$$\Rightarrow FG = BO.$$

(1)

Xét $\triangle NFM$ và $\triangle OGM$, ta có:

$$\widehat{GOM} = \widehat{FNM}$$

$$MO = MN$$

$$\widehat{OMG} = \widehat{NMF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle NFM = \triangle OGM.$$

$$\Rightarrow MF = MG.$$

(2)

Từ (1) và (2), suy ra: MF = OA = AB = BC.

Sử dụng kết quả vừa tìm được này kết hợp:

$$\widehat{DCB} = \widehat{DMF} \text{ (so le trong)} \text{ và } \widehat{DBC} = \widehat{DFM} \text{ (so le trong)}$$

Suy ra: $\triangle DBC = \triangle DFM$ (g-c-g).

Do đó: DC = DM

hay D là trung điểm của CM.

(3)

Xét $\triangle CEM$, ta có:

CO là trung tuyến ứng với cạnh ME (do OE = OM)

$$CA = \frac{2}{3} CO$$

⇒ A là trọng tâm của $\triangle CEM$.

Suy ra: AE đi qua trung điểm của cạnh CM. (4)

Từ (3) và (4), ta suy ra: AE đi qua D.

Vậy BN, CM và AE đồng quy tại D.

Bài tập 4: Cho $\triangle ABC$, các đường cao AD, BE, CF của tam giác đồng quy tại H. Gọi I là trung điểm của HC.

a) Chứng minh BCEF là tứ giác nội tiếp.

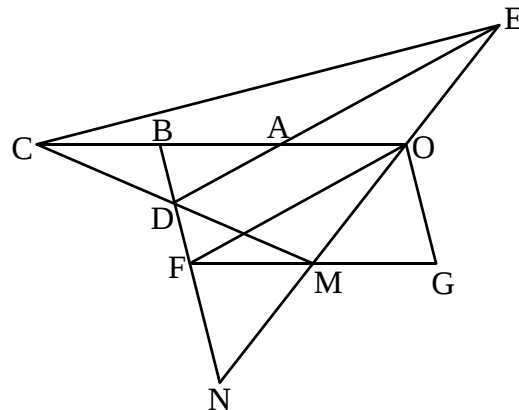
b) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$ và DIEF là tứ giác nội tiếp 1 đường tròn.

c) Về phía ngoài $\triangle ABC$ dựng các $\triangle ABM$ và $\triangle CAN$ sao cho chúng là các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BN, CM đồng quy.

Chứng minh

a) HS tự làm.

b) Ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác AEHF, AEDB nội tiếp trong đường tròn.



Tiếp tục với lực giác NARBMC ta có H, K, S thẳng hàng.

Mà H, K, X thẳng hàng, nên ta có Z', X, H, K thẳng hàng hay Z' trùng Z.

Tương tự, ta có: F, T, Q thẳng hàng.

Gọi (O₃) là đường tròn tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc (O) tại cung nhỏ DC.

Ta sẽ chứng minh (O₃) là (ZFT).

Thật vậy, gọi Z'', T'' là tiếp điểm trên AD, BC của (O₃) thì theo *bổ đề Sawayama*, ta cũng có Z'', T'', H, K thẳng hàng hay Z'', T'' trùng Z, T.

Mà MZ và NT cắt nhau tại F nên ta có ngay ZFT chính là (O₃).

Từ đó, ta quy bài toán về phát biểu đơn giản hơn như sau: (O₃) tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc cung nhỏ CD tại F.

Tương tự có E.

Khi đó AD, BC, EF đồng quy.

Bài tập 6: Chứng minh dựa vào định lý CEVA.

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.

Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Chứng minh

Giả sử AD, BE và CF đồng qui tại một điểm O nào đó (trong hay ngoài tam giác). Do ΔBOD và ΔCOD có chung chiều cao (độ dài của đường cao), ta có:

$$\frac{|\Delta BOD|}{|\Delta COD|} = \frac{BD}{DC}$$

Tương tự,

$$\frac{|\Delta BAD|}{|\Delta CAD|} = \frac{BD}{DC}$$

Ta suy ra

$$\frac{BD}{DC} = \frac{|\Delta BAD| - |\Delta BOD|}{|\Delta CAD| - |\Delta COD|} = \frac{|\Delta ABO|}{|\Delta CAO|}$$

Tương tự,

$$\frac{CE}{EA} = \frac{|\Delta BCO|}{|\Delta ABO|},$$

và

$$\frac{AF}{FB} = \frac{|\Delta CAO|}{|\Delta BCO|}.$$

Nhân ba đẳng thức trên cho ta:

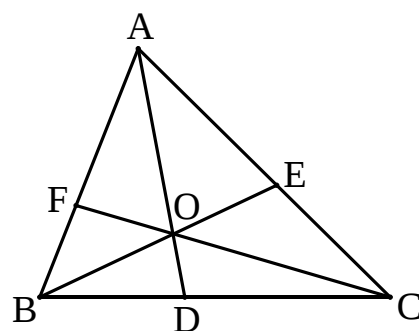
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

(điều phải chứng minh).

Ngược lại, giả sử rằng ta đã có những điểm D, E và F thỏa mãn đẳng thức. Gọi giao điểm của AD và BE là O, và gọi giao điểm của CO và AB là F'. Theo chứng minh trên,

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Kết hợp với đẳng thức trên, ta nhận được:



$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}.$$

Thêm 1 vào mỗi vế và chú ý rằng $AF'' + F''B = AF + FB = AB$, ta có:

$$\frac{AB}{F'B} = \frac{AB}{FB}.$$

Do đó $F'B = FB$, vậy F và F'' trùng nhau. Vì vậy AD, BE và CF = CF'' đồng qui tại O, và định lí đã được chứng minh (là đúng theo cả hai chiều).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh MC, NA, PB đồng quy.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC và có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3 . Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp 3 tam giác đều trên đều đồng quy tại một điểm.

Bài tập 3: Gọi A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: AA', BB', CC' đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \Leftrightarrow AA', BB', CC'$ đồng quy

Bài tập 4: Cho hình thang ABCD ($AB > CD$). Gọi E là giao điểm hai cạnh bên AD và BC; F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: AC, BD, CF đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BK, CL cắt nhau tại I. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của IA, IB, IC. Chứng minh PD, QE, RF đồng quy. Gọi J là điểm đồng quy, chứng minh I là trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn

Chứng minh PEDQ, PRDF là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ PD, QE, RF là đường chéo của 2 hình chữ nhật đó

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi A', B', C' là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB. Qua H, vẽ đường thẳng d bất kì. Chứng minh rằng: Các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của $\triangle ABC$ đồng quy tại một điểm trên (O).

Hướng dẫn

Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của $\triangle ABC$.

Gọi I là giao của d_1 và d_2

Chứng minh tứ giác A'B'C'I là tứ giác nội tiếp. Suy ra A'B'C'I là nội tiếp (O).

Chứng minh I thuộc d_3 .

CHỦ ĐỀ 12

BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1:

Tiên đề O'clit: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với a.

Hệ quả: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với a.

Phương pháp 2: Chứng minh qua một điểm có hai đường thẳng vuông góc với 1 đường thẳng cho trước tại điểm đó.

Phương pháp 3: Chứng minh tổng hai góc bằng 180 độ (sử dụng tứ giác nội tiếp, các góc bằng nhau...).

Phương pháp 4: Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường cao, phân giác, trung trực, trung tuyến...

Phương pháp 5: Chứng minh điểm $AM + MB = AB$ thì A thuộc đoạn thẳng BC. Suy ra A, B, C thẳng hàng.

Phương pháp 7: Dùng tính chất đường trung trực: Chứng minh các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng cho trước thì đều nằm trên một đường thẳng.

Phương pháp 8: Dùng tính chất tia phân giác: Chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.

Phương pháp 9: Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.

Phương pháp 10: Sử dụng tính chất đường kính và dây cung của đường tròn.

Phương pháp 11: Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau.

Đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường tròn và tiếp tuyến chung thì vuông góc với nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ với hai trung tuyến BD và CE. Gọi M và N theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia EC và DB sao cho $EC = EM$ và $DB = DN$. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.

Giải

Tứ giác AMBC có:

$$EA = EB,$$

$$EM = EC \text{ (gt)}$$

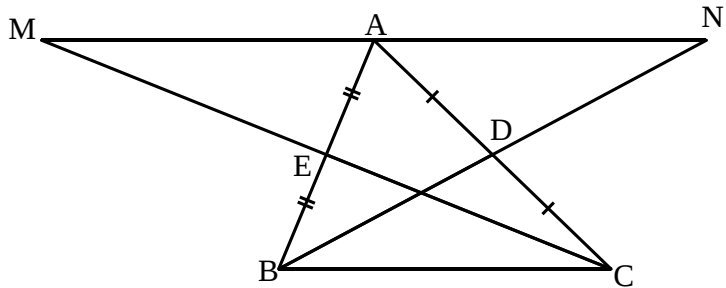
Nên là hình bình hành.

$$\text{Suy ra: } AM \parallel BC. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$AN \parallel BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng (tiên đề Öcolit).



Bài tập 2: Cho hình chữ nhật ABCD ($AB < CD$), có O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$. Gọi F là hình chiếu của D trên BE; I là giao điểm của AB và CF; K là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng ba điểm O, K, I thẳng hàng.

Giải

ABCD là hình chữ nhật nên:

$$AB = CD, AC = BD \text{ và } OA = OB = OC = OD.$$

Ta có $CB \perp AI$ (vì ABCD là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow CB \text{ là đường cao của } \triangle CAI. \quad (1)$$

$\triangle FBD$ vuông tại F (vì F là hình chiếu của D lên BE) có:

$$FO \text{ là trung tuyến ứng với cạnh huyền BD nên } OF = \frac{1}{2} BD$$

$$\Rightarrow OF = \frac{1}{2} AC.$$

$\triangle FAC$ có FO là đường trung tuyến ứng với cạnh AC.

$$\text{Mà } FO = \frac{1}{2} AC \text{ nên } \triangle FAC \text{ vuông tại F.}$$

$$\text{Suy ra } AF \perp CI \text{ hay AF là đường cao của } \triangle CAI. \quad (2)$$

K là giao điểm của AF và BC nên từ (1) và (2), suy ra K là trực tâm của $\triangle CAI$.

$$\text{Do đó } IK \perp AC. \quad (3)$$

Mặt khác, tứ giác ABEC có:

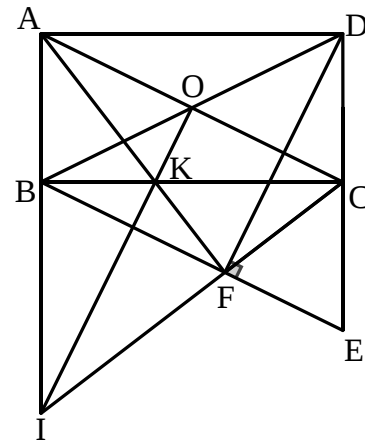
$$AB = CE \text{ (cùng bằng CD) và } AB \parallel CE \text{ (vì } AB \parallel CD)$$

nên là hình bình hành

$$\Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow BF \parallel AC \Rightarrow ABFC \text{ là hình thang.}$$

Lại có $\triangle FDE$ vuông tại F, FC là trung tuyến ứng với cạnh DE (vì $CD = CE$) nên

$$CF = CD \Rightarrow CF = AB \text{ (vì } AB = CD).$$



Suy ra $\triangle BAC = \triangle FCA$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AF = BC$.

Hình thang $ABFC$ có hai đường chéo AF và BC bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: $\widehat{IAC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \triangle IAC$ cân tại I

$\Rightarrow IO$ là trung tuyến đồng thời là đường cao.

Hay $IO \perp AC$.

(4)

Từ (3) và (4) suy ra I, K, O thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 3: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, I và N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và CD . Chứng minh rằng nếu $MN = \frac{AD+BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và $ABCD$ trở thành hình thang.

Giải

Giả sử: $MN = \frac{AD+BC}{2}$ (1)

Vì $MA = MB, IA = IC$ nên MI là đường trung bình của tam giác ABC .

Suy ra: $MI \parallel BC$ và $MI = \frac{1}{2}BC$.

Chứng minh tương tự ta có: $IN \parallel AD$ và $IN = \frac{1}{2}AD$.

Mà $MN = \frac{AD+BC}{2} = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$ hay $MN = MI + IN$.

Từ đó suy ra I nằm giữa M và N , hay M, I, N thẳng hàng.

Lúc đó, ta có: $BC \parallel AD$ vì cùng song song với MN .

Do đó $ABCD$ trở thành hình thang.

Vậy nếu $MN = \frac{AD+BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và $ABCD$ trở thành

hình thang.

Bài tập 4: Đường tròn tâm O và đường tròn tâm O' cắt nhau tại A và B .

Gọi C, D lần lượt đối xứng với B qua O và O' . Chứng minh rằng C, A, D thẳng hàng.

Giải

Vì C đối xứng với B qua O nên O là trung điểm của BC . Suy ra BC là đường kính của (O) .

Ta có $OA = OB = OC = \frac{1}{2}BC$ nên tam giác ABC vuông tại A

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

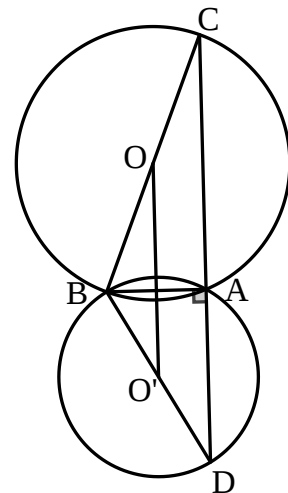
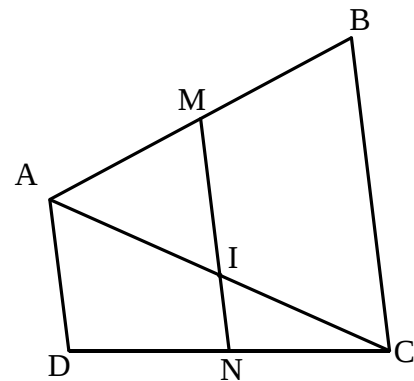
Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{BAD} = 90^\circ$.

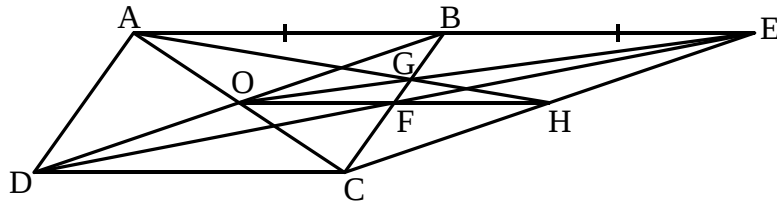
Do đó: $\widehat{CAD} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$\Rightarrow C, A, D$ thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo; E là điểm đối xứng của A qua B ; F là giao điểm của BC và ED ; G là giao điểm của BC và OE ; H là giao điểm của EC và OF . Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.

Giải





Vì O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD nên $OA = OC$

suy ra EO là trung tuyến của $\triangle EAC$.

E đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của EA.

Suy ra CB là trung tuyến của $\triangle EAC$.

G là giao điểm của CB và EO nên G là trọng tâm của $\triangle EAC$.

(1)

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên $CD \parallel AB$, $CD = AB$,

Mà B là trung điểm của AE nên suy ra $CD \parallel BE$, $CD = BE$.

Do đó tứ giác BECD là hình bình hành.

Từ đó F là trung điểm của hai đường chéo ED và BC của hình bình hành BECD.

Ta có OF là đường trung bình của $\triangle CAB$ nên $OF \parallel AB \Rightarrow OH \parallel AE \Rightarrow HE = HC$.

Do đó AH là trung tuyến của $\triangle EAC$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra A, G, H thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy hai điểm E và F sao cho $BE = DF$. Kẻ $EH \perp AB$, $FK \perp CD$ ($H \in AB$, $K \in CD$). Gọi O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm H, O, K thẳng hàng.

Giải

Vì $EH \perp AB$, $FK \perp CD$ và $AB \parallel CD$

nên $EH \parallel FK$ (1)

Xét $\triangle HBE$ và $\triangle KDF$ có $BE = DF$,

$\widehat{KDF} = \widehat{HBE}$, $\widehat{DKF} = \widehat{BHE} = 90^\circ$

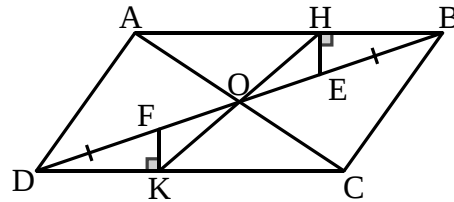
$\Rightarrow \triangle HBE = \triangle KDF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HE = KF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra HEKF là hình bình hành

$\Rightarrow$ Trung điểm của EF cũng là trung điểm của HK.

Vậy E, H, K thẳng hàng (đpcm).



Bài tập 7: Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AC, MN. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Giải

Gọi K' là giao điểm của IJ với MN.

Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N, M tới đường thẳng IJ.

Dễ thấy M, N nằm về hai phía của IJ.

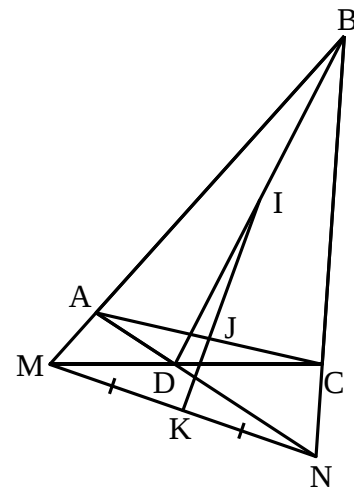
Ta có :

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NDI} - S_{NJC} - S_{NCI} - S_{CID}$$

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{AIC} - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NAB} - \frac{1}{2}S_{ABD} - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}(S_{ADC} - S_{ADIC}) - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$S_{NIJ} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}(S_{ABD} - S_{BCD}) + \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$



Chứng minh tương tự ta có: $S_{MIJ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Do đó $S_{NIJ} = S_{MIJ}$ hay $\frac{1}{2} NF \cdot IJ = \frac{1}{2} ME \cdot IJ \Rightarrow ME = NF \Rightarrow S_{NKJ} = S_{MKJ}$.

Hai $\triangle NKJ$ và $\triangle MKJ$ có chung chiều cao hạ từ J.

Suy ra: $NK' = MK'$.

Mà $MK = NK$ (gt) nên $K \equiv K'$.

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 8: Ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng a, điểm O không thuộc a. Chứng minh rằng nếu ba điểm M, N, P thỏa mãn hệ thức $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OP}{OC}$ thì M, N, P thẳng hàng.

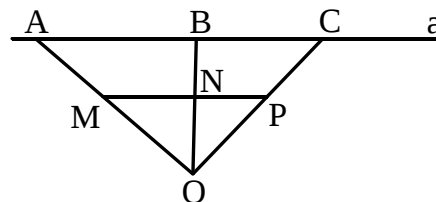
Giải

Thật vậy, theo định lí Talet đảo thì từ $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

Suy ra: $MN \parallel AB$.

Tương tự $MP \parallel AC$.

Nhưng A, B, C thẳng hàng nên M, N, P thẳng hàng (tiên đề O'clit).



Bài tập 9 (Bổ đề hình thang): Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy nằm trên cùng một đường thẳng.

Giải

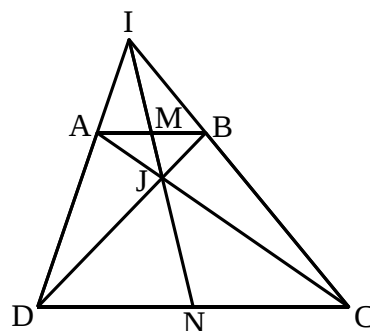
Giả sử hình thang đã cho là ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có I, J tương ứng là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên và của hai đường chéo.

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của IJ với AB và CD.

Do $AB \parallel CD$ nên áp dụng hệ quả của định lí Talet ta có:

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN} \left(= \frac{IM}{IN} \right) \quad \text{và} \quad \frac{AM}{CN} = \frac{BM}{DN} \left(= \frac{JM}{JN} \right) \quad \text{hay}$$

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN} \left(= \frac{IM}{IN} \right).$$



Bài tập 10: Trên mặt phẳng cho n điểm ($n > 3$) và bất kì đường thẳng nào đi qua hai trong những điểm đó đều chứa một điểm đã cho. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

Giải

Giả sử tất cả các điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Qua mỗi cặp điểm đã cho vẽ một đường thẳng (có một số hữu hạn đường này) và chọn khoảng cách khác 0 từ các điểm đã cho đến các đường thẳng này.

Giả sử khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC, trong đó A, B, C là các điểm đã cho là khoảng cách nhỏ nhất.

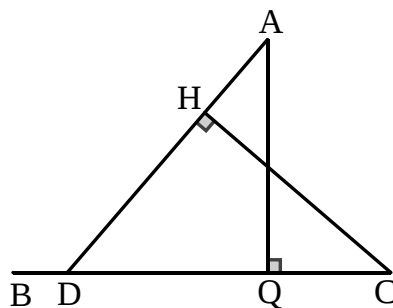
Trên đường thẳng BC còn có một điểm D nào đó.

Từ A kẻ AQ vuông góc với BC tại Q.

Hai trong các điểm B, C, D nằm cùng một phía đối với điểm Q, chẳng hạn C và D như hình vẽ, khi đó ta có $CQ < DQ$.

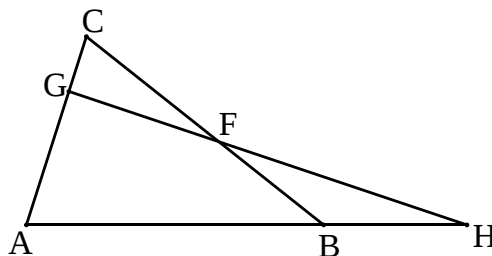
Hạ CH vuông góc với AD tại H.

Dễ thấy $CH < AQ$. Điều này mâu thuẫn với việc chọn điểm A và đường thẳng BC.



Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 11 (Định lý MENELAUS): Là một định lý về các tam giác trong hình học phẳng.



Cho tam giác ABC. Các điểm H, F, G lần lượt nằm trên AB, BC, CA.

Khi đó: G, H, F thẳng hàng khi và chỉ khi :

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = -1.$$

Chứng minh

Phần thuận:

Sử dụng định lý sin trong các tam giác AGH, BFH, CGF, ta được:

$$\frac{AH}{GA} = \frac{\sin \widehat{AGH}}{\sin \widehat{AHG}}; \frac{BF}{HB} = \frac{\sin \widehat{BHF}}{\sin \widehat{HFB}}; \frac{CG}{FC} = \frac{\sin \widehat{GFC}}{\sin \widehat{CGF}}.$$

(với lưu ý rằng $\sin \widehat{AGH} = \sin \widehat{CGF}$; $\sin \widehat{AHG} = \sin \widehat{BHF}$; $\sin \widehat{HFB} = \sin \widehat{GFC}$)

Nhân từng vế ta được điều phải chứng minh.

Phần đảo:

Gọi $F' = GH \cap BC$. Hoàn toàn tương tự ta có được:

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF'}{F'C} \cdot \frac{CG}{GA} = \frac{AH}{HB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} (= -1).$$

Hay

$$\frac{BF'}{F'C} = \frac{BF}{FC}, \text{ suy ra } F \equiv F'.$$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C dựng hình vuông ABDE; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B dựng hình vuông ACMN. Dựng hình bình hành AEIG. Gọi K là giao điểm của CD và BM. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, K, H thẳng hàng.

Bài tập 2: Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD ta lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng M, O, P thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy. Một điểm B cố định trên Ax, còn một điểm C chuyển động trên Ay. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C chuyển động trên Ay.

Bài tập 4: Trong hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 15^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm E vẽ tam giác đều CDF. Chứng minh rằng B, E, F thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Đường thẳng kẻ từ C song song với AD cắt BD và AB lần lượt tại E và F. Đường thẳng kẻ từ D song song với BC cắt AC và AB lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Bài tập 6: Trên một đường thẳng lấy bốn điểm theo thứ tự là A, E, F, B. Dựng các hình vuông ABCD, EFGH sao cho chúng nằm cùng ở một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đã cho. Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng :

a) C, O, E thẳng hàng.

2. D, O, F thẳng hàng.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Lấy điểm F đối xứng với C qua E. Từ điểm F kẻ Fx và Fy lần lượt song song với AD và AB. Gọi I là giao điểm của Fx và AB; K là giao điểm của FI và AD. Chứng minh rằng I, K, E thẳng hàng.

Bài tập 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, cạnh huyền $BC = 2AB$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$; trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi F là giao điểm của BD và CE; G và H theo thứ tự là các điểm đối xứng của F qua các cạnh BC và AC. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm H, D, G thẳng hàng.

b) Tam giác EDF cân.

Bài tập 9: Cho góc vuông xOy tam giác. M thuộc Ox; A, B thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP với MB; K là giao điểm của AM với BP; I, K, E lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng minh rằng I, E, N thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông xEy quay quanh đỉnh E có cạnh Ex cắt FG và GH theo thứ tự tại M và N, còn cạnh Ey cắt các đường FG và GH theo thứ tự tại P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng bốn điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 11: Cho tứ giác ABCD và một điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho các tam giác ABO, BCO, CDO, DAO có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng hoặc ba điểm A, O, C thẳng hàng, hoặc ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Bài tập 12: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, các đường cao BD và CE. Gọi I là điểm thuộc đoạn BC; H là giao điểm của BD và CE; N thuộc đoạn AH; M thuộc đoạn DE. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Bài tập 13: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông xEy quay quanh đỉnh E. Cạnh Ex cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự tại M và N; cạnh Ey cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự ở P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng 4 điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 14: Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Lấy điểm M thuộc Ox, A và B cùng thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP và MB; K là giao điểm của AM và BP; I, E, N lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng minh rằng I, E, N thẳng hàng.

CHỦ ĐỀ 13

ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

1. Kiến thức cơ bản:

Trong hình học THCS, chúng ta hay gặp các bài toán chứng minh các đẳng thức và các bất đẳng thức liên quan đến ba cạnh của, chu vi của tam giác, bán kính của đường tròn nội tiếp “r”, bán kính đường tròn ngoại tiếp “R”, ... và một số yếu tố trong đường tròn.

Phương pháp:

- Vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được:

Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ (m là hằng số)

→ Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

- Vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được:

Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \geq m$ (m là hằng số)

→ Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

Các hệ thức thường gặp:

(1) Diện tích tam giác:

Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi. h_a, h_b, h_c là độ dài 3 đường cao.

$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} b.h_b = \frac{1}{2} c.h_c = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(2) Độ dài đường trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

(3) Độ dài đường phân giác:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$l_a = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

(4) Độ dài đường cao:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

(5) Tính diện tích tứ giác:

(a) Tính diện tích hình bình hành:

$$S = a.h_a$$

(a là độ dài đường chéo, h_a là đường cao ứng với đường chéo a)

(b) Tính diện tích hình chữ nhật:

$$S = a.b$$

(Với a và b là độ dài hai cạnh)

(c) Tính diện tích hình thoi :

$$S = a.b$$

(với a và b là độ dài hai đường chéo)

(d) Tính diện tích hình vuông:

$$S = a^2.$$

(với a là độ dài cạnh)

(6) Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(7) Bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp:

$$r = (p-a) \tan \frac{A}{2}; r_a = p \tan \frac{A}{2}$$

(8) Công thức tính độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Một số định lý hỗ trợ:

Định lí 1: Gọi R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp ΔABC , d là khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC .

Khi đó, ta luôn có:

$$2Rr = R^2 - d^2$$

Định lí 2: Cho ΔABC . Nếu $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ thì $AC > AB$ và ngược lại

Định lí 3: Cho trước ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có 2 cặp cạnh $AB = A'B'$ và $AC = A'C'$. Ta có bất đẳng thức $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ khi và chỉ khi $BC > B'C'$.

Định lý 4: Trong những đường xiên nối một điểm M cho trước với điểm N trên một đường thẳng d cho trước, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

Định lý 5: Trong những đường xiên nối một điểm M cho trước với điểm N trên một mặt phẳng (P) cho trước, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

Định lý 6: $2 \Delta ABC$ và $\Delta A'B'C'$ vuông, có $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ$ và $AB = A'B'$.

Nếu $\widehat{ABC} \geq \widehat{A'B'C'}$ thì $AC \geq A'C'$

Định lý 7: Bán kính của hai đường tròn là R, r ($R \geq r$), còn khoảng cách giữa tâm của chúng là d. Điều kiện cần và đủ để hai đường tròn đó cắt nhau là:

$$R - r \leq d \leq R + r$$

Định lý 8: Các số dương a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác khi và chỉ khi:

$$a + b > c, b + c > a \text{ và } c + a > b$$

Định lý 9: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì thuộc miền trong của tam giác. Khi đó ta luôn có:

$$MB + MC < AB + AC$$

Định lý 10: Trong tam giác ABC ứng với cạnh dài hơn là đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác ngắn hơn

Định lý 11: Trong tam giác ABC kí hiệu h_a là độ dài đường cao, l_a là độ dài đường phân giác, m_a là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A thì ta có bất đẳng thức:

$$m_a \geq l_a \geq h_a$$

Định lý 12: Đường trung tuyến AM của tam giác ABC nhỏ hơn nửa tổng các cạnh AB và AC cùng xuất phát từ một đỉnh A

Định lý 13: Hình tròn nội tiếp là hình tròn lớn nhất có thể chứa trong một tam giác.

Định lý 14: Một tứ giác lồi bị chứa trong một tứ giác khác (không nhất thiết là lồi) thì chu vi của tứ giác bị chứa sẽ nhỏ hơn chu vi của tứ giác chứa nó bên trong

Định lý 15: Trong nửa mặt phẳng bị chia ra bởi đường thẳng đi qua 2 điểm A và B có 2 đường gấp khúc $AC_1C_2...C_kB$ và $AD_1D_2...D_pB$ sao cho 2 đa giác $AC_1C_2...C_kB$ và $AD_1D_2...D_pB$ là 2 đa giác lồi. Nếu đa giác $AC_1C_2...C_kB$ chứa đa giác $AD_1D_2...D_pB$ bên trong nó thì đường gấp khúc $AC_1C_2...C_kB$ dài hơn đường gấp khúc $AD_1D_2...D_pB$

Định lý 16: Một đa giác bất kì có chu vi không nhỏ hơn chu vi của đa giác tạo bởi bao lồi của nó

Định lý 17: Nếu một đa giác lồi chứa đa giác lồi khác thì chu vi của đa giác ngoài lớn hơn chu vi của đa giác nằm trong nó

Định lý 18: Độ dài đoạn thẳng nằm trong một đa giác lồi không lớn hơn khoảng cách lớn nhất nối 2 đỉnh của nó

Định lý 19: Cho (O; r) và 1 điểm M bất kì trong nó.

Khi đó ta có:

$$R - d \leq MN \leq R + d$$

Với N là điểm bất kì trên đường tròn và d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn

Định lý 20: Cho (O; r) và điểm M bất kì ngoài đường tròn. Khi đó ta có:

$$d - R \leq MN \leq d + R$$

Định lý 21: Cho trước điểm M trong hình tròn tâm O. Trong các dây cung qua M, dây cung vuông góc với MO có độ dài nhỏ nhất

Định lý 22: Gọi P là giao điểm của 2 đường tròn (O_1) và (O_2).

Khi đó, ta có bất đẳng thức $MN \leq 2O_1O_2$ cho mọi dây cung qua P. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow MN \parallel O_1O_2$$

Định lý 23: Diện tích tam giác ABC không lớn hơn $\frac{AB \cdot BC}{2}$

Định lý 24: Diện tích của tứ giác ABCD không vượt quá $\frac{AB \cdot BC + AD \cdot DC}{2}$

Định lý 25: Trong các tam giác có cùng chu vi thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.

Nguyên lý đoạn thẳng: Đoạn thẳng AB là con đường ngắn nhất nối hai điểm A và B cho trước trên mặt phẳng.

⇒ Ta có các hệ quả sau:

(1) Tổng hai cạnh của một tam giác luôn lớn hơn cạnh thứ ba của nó.

(2) Đường gấp khúc nối hai điểm A và B cho trước luôn có độ dài lớn hơn độ dài đoạn thẳng AB.

(3) Độ dài của cung AB trên một đường tròn cho trước đi qua A và B lớn hơn độ dài đoạn thẳng AB.

Nguyên lý đường vuông góc ngắn hơn đường xiên: Đoạn vuông góc bao giờ cũng ngắn hơn đường xiên.

Định lý cạnh và góc trong tam giác: Trong một tam giác ứng với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại.

Một số bất đẳng thức cần dùng:

(1) *Bất đẳng thức Cauchy:*

Với $n \geq 2$ số dương tùy ý $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có trung bình cộng của chúng không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

(2) *Bất đẳng thức BCS:*

Cho trước 2 bộ $n \geq 1$ số thực tùy ý $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $y_1, y_2, \dots, y_n$ ta có bất đẳng thức:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

(3) *Bất đẳng thức Minkowski:*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 + (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2}$$

(4) *Bất đẳng thức Ploteme:*

Cho 4 điểm A, B, C, D trên mặt phẳng ta luôn có: $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$

Dấu “=” xảy ra ⇔ Tứ giác ABCD nội tiếp.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn (P không trùng với O). Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Xét dây AB bất kỳ đi qua P. Kẻ $OH \perp AB$

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

AB nhỏ nhất ⇔ OH lớn nhất

Ta lại có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$

Do đó $\max OH = OP$

Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.

Bài tập 2: Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm. Hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải

Xét hình bình hành ABCD có: $AC = 8$ cm; $BD = 6$ cm.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo.

Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC \cdot BH$

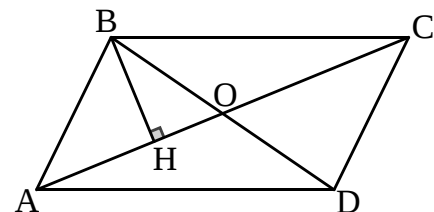
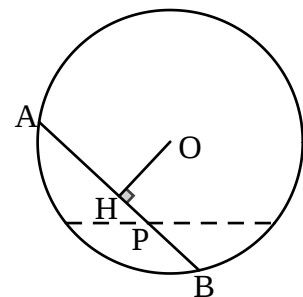
Ta có $AC = 8$ cm, $BH \leq BO = 3$ cm.

Do đó:

$$S_{ABCD} \leq 8 \cdot 3 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow BH \equiv BO$$



$$\Leftrightarrow H \equiv O$$

$$\Leftrightarrow BD \perp AC$$

$$\text{Vậy } \max S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2.$$

Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi có diện tích 24cm^2 .

Bài tập 3: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải

$$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH$$

$$\Rightarrow EFGH \text{ là hình thoi.}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AHE} = \widehat{BEF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow EFGH \text{ là hình vuông.}$$

Gọi O là giao điểm của AC và EG.

Tứ giác AECG có $AE = CG$, $AE \parallel CG$ nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

$$\Delta HOE \text{ vuông cân: } HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$$

$$\text{Chu vi } EFGH = 4HE = 4\sqrt{2} OE.$$

Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow OE$ nhỏ nhất

$$\text{Kẻ } OK \perp AB \Rightarrow OE \geq OK \text{ (OK không đổi)}$$

$$OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$$

$$\text{Do đó: } \min OE = OK$$

Như vậy, chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Bài tập 4: Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua trung điểm M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho ΔMCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác đó?

Giải

Gọi K là giao điểm của CM và DB

$$MA = MB; \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ, \widehat{AMC} = \widehat{BMK}$$

$$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MBK$$

$$\Rightarrow MC = MK$$

Mặt khác $DM \perp CK$

$$\Rightarrow \Delta DCK \text{ cân}$$

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$$

Kẻ $MH \perp CD$.

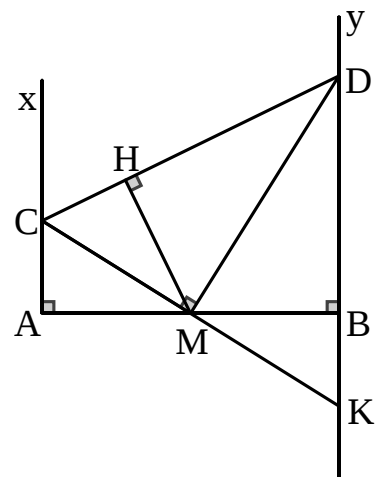
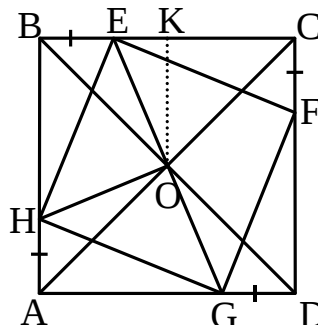
$$\Delta MHD = \Delta MBD \Rightarrow MH = MB = a$$

$$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2} CD \cdot MH \geq \frac{1}{2} AB \cdot MH = \frac{1}{2} 2a \cdot a = a^2$$

$$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax.$$

$$\text{Khi đó: } \widehat{AMC} = 45^\circ; \widehat{BMD} = 45^\circ.$$

Vậy $\min S_{MCD} = a^2$. Các điểm C, D được xác định trên Ax, By sao cho $AC = BC = a$.



Bài tập 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ là góc tù. Điểm D di chuyển trên cạnh BC. Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.

Giải

Gọi S là diện tích ΔABC .

Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có:

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S$$

Kẻ $BE \perp AD$, $CF \perp AD$

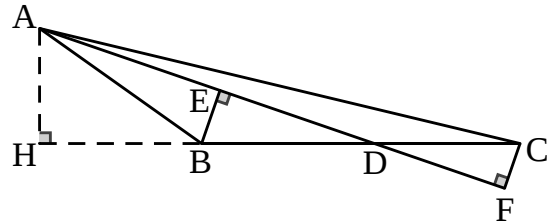
$$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF = S$$

$$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$$

Do đó $BE + CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hình chiếu HD nhỏ nhất.

Do $HD \geq HB$ (do $\widehat{ABD} > 90^\circ$) và $HD = HB \Leftrightarrow D \equiv B$.

Vậy Khi $D \equiv B$ thì tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.



Bài tập 6: Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B $\in Ox$, điểm C $\in Oy$ sao cho $OB = OC$ và tổng $AB + AC$ là nhỏ nhất.

Giải

Kẻ tia Om nằm ngoài góc $\widehat{xOy}$ sao cho $\widehat{yOm} = \widehat{xOA}$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho $OD = OA$. Các điểm D và A cố định.

$$OD = OA, OC = OB, \widehat{COD} = \widehat{BOA}$$

$$\Rightarrow \Delta DOC = \Delta AOB \Rightarrow CD = AB$$

$$\text{Do đó: } AC + AB = AC + CD$$

$$\text{Mà } AC + CD \geq AD$$

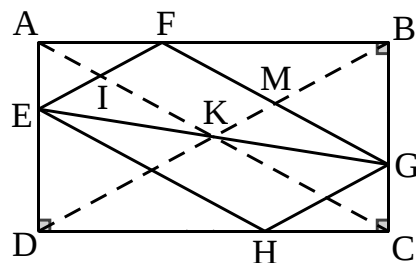
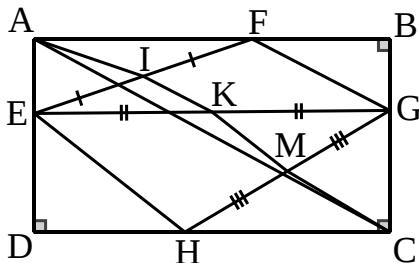
$$\Rightarrow AC + AB \geq AD$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi C $\in$ AD.

Vậy $\min(AC + AB) = AD$. Khi đó C là giao điểm của AD và Oy, B thuộc tia Ox sao cho $OB = OC$.

Bài tập 7: Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc cạnh AD. Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB, G $\in$ BC, H $\in$ CD sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải



Gọi I, K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, EH.

$$\Delta AEF \text{ vuông tại A có AI là trung tuyến} \Rightarrow AI = \frac{1}{2} EF$$

$$\Delta CGH \text{ vuông tại C có CM là trung tuyến} \Rightarrow CM = \frac{1}{2} GH$$

$$IK \text{ là đường trung bình của } \Delta EFG \Rightarrow IK = \frac{1}{2} FG$$

KM là đường trung bình của $\triangle EGH \Rightarrow KM = \frac{1}{2}EH$

Do đó: chu vi EFGH = EF + FG + GH + EH = 2(AI + IK + KM + MC)

Ta lại có: AI + IK + KM + MC $\geq$ AC

Suy ra: Chu vi EFGH $\geq$ 2AC (độ dài AC không đổi)

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC $\Leftrightarrow$ A, I, K, M, C thẳng hàng.

Khi đó, ta có: EH // AC, FG // AC, $\widehat{AEI} = \widehat{EAI} = \widehat{ADB}$ nên EF // DB.

Tương tự, ta có: GH // DB.

Suy ra: Tứ giác EFGH là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD.

Bài tập 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D. Xác định vị trí của cát tuyến CBD để $\triangle ACD$ có chu vi lớn nhất.

Giải

$$\widehat{C} = \frac{1}{2} \widehat{AmB};$$

$$\widehat{D} = \frac{1}{2} \widehat{AnB}$$

$\Rightarrow$ Số đo các góc $\triangle ACD$ không đổi

$\Rightarrow \triangle ACD$ có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất, chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O), do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O).

Khi đó: AD là đường kính của đường tròn (O').

Cát tuyến CBD ở vị trí C'B'D' vuông góc với dây chung AB.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho $\widehat{OAB}$ có giá trị lớn nhất.

Giải

Xét $\triangle OAB$ cân, góc ở đáy $\widehat{OAB}$ lớn nhất nếu góc ở đỉnh $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \widehat{sđ AB}$$

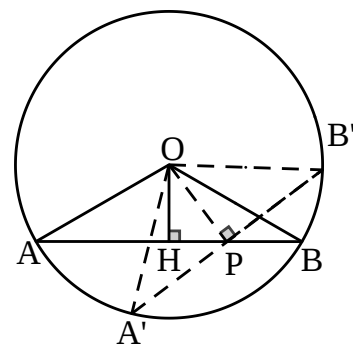
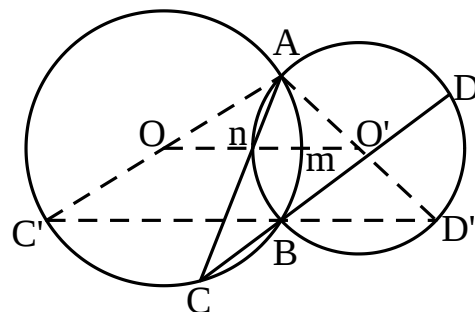
Góc $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Cung $\widehat{AB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dây AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$

Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$ nên $\max OH = OP \Leftrightarrow AB \perp OP$

Suy ra: Dây AB phải xác định là dây $A'B' \perp OP$ tại P.



Bài tập 10: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = D. Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải

$$\triangle AHE = \triangle BEF = \triangle CFG = \triangle DGH$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH, \angle HEF = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất.

Đặt AE = x thì HA = EB = 4 - x.

$\triangle HAE$ vuông tại A nên :

$$HE^2 = AE^2 + AE^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x-2)^2 + 8 \geq 8$$

$$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm, khi đó $AE = 2$ cm.

Bài tập 11: Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.

Giải

ADME là hình chữ nhật.

Đặt $AD = x$ thì $ME = x$

$$ME \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow AE = 8 - \frac{4}{3}x$$

Ta có:

$$S_{ADME} = AD \cdot AE = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right) = 8x - \frac{4}{3}x^2 = -\frac{4}{3}(x-3)^2 + 12 \leq 12$$

$$S_{ADME} = 12 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ cm.}$$

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm^2 . Khi đó D là trung điểm của AB, M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

Bài tập 12: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB. Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Đặt $MA = x$, $MB = y$

Ta có: $x + y = AB$, ($0 < x, y < AB$)

Gọi S và S' theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB.

Ta có:

$$S + S' = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$$

Ta có bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\Rightarrow S + S' \geq \pi \cdot \frac{(x+y)^2}{8} = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

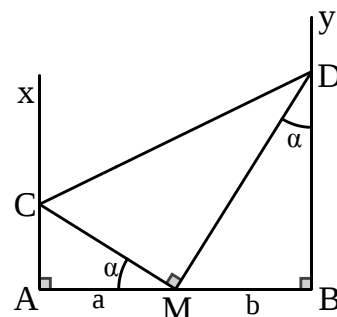
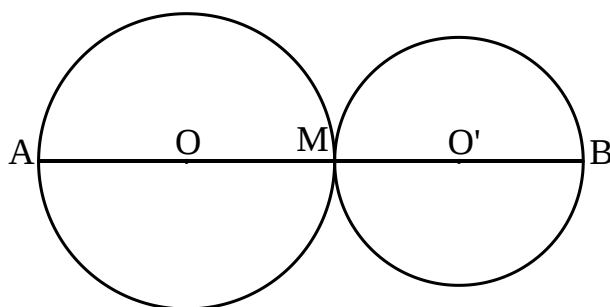
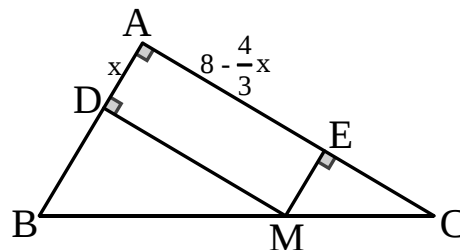
$$\text{Do đó: } \min(S + S') = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}.$$

Khi đó M là trung điểm của AB.

Bài tập 13: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho ΔMCD có diện tích nhỏ nhất.

Giải

$$\text{Ta có: } S_{MCD} = \frac{1}{2} MC \cdot MD$$



Đặt $MA = a$, $MB = b$, $\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

$$MC = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad MD = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} \frac{ab}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

Theo bất đẳng thức $2xy \leq x^2 + y^2$ ta có :

$$2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{nên} \quad S_{MCD} \geq ab$$

$$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\Leftrightarrow \triangle AMC$ và $\triangle BMD$ vuông cân.

Vậy min $S_{MCD} = ab$.

Khi đó các điểm C, D được xác định trên tia Ax ; By sao cho $AC = AM$, $BD = BM$.

Bài tập 14: Cho $\triangle ABC$, điểm M di động trên cạnh BC . Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB , chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E . Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành $ADME$ có diện tích lớn nhất.

Giải

$$S_{ADME} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} \text{ lớn nhất}$$

Kẻ $BK \perp AC$ cắt MD ở H .

$$S_{ADME} = MD \cdot HK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$$

$$\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2 \cdot \frac{MD}{AC} \cdot \frac{HK}{BK}$$

Đặt $MB = x$, $MC = y$,

$MD \parallel AC$ ta có:

$$\frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y};$$

$$\frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$$

Theo bất đẳng thức:

$$\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

$$\text{Vậy } \max S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Khi đó M là trung điểm của BC .

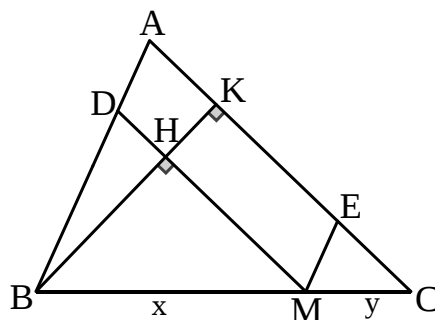
Bài tập 15: Cho $\triangle ABC$ vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Gọi D là trung điểm của AB . Điểm E di chuyển trên cạnh AC . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC . Tính diện tích lớn nhất của hình thang $DEKH$. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

Giải

Ta có:

$$2S_{DEKH} = (DH + EK) \cdot HK = (BH + KC) \cdot HK$$

$$\text{Mà } (BH + KC) + HK = BC = a \text{ không đổi.}$$



Nên $(BH + KC).HK$ lớn nhất $\Leftrightarrow BH + KC = HK = \frac{a}{2}$

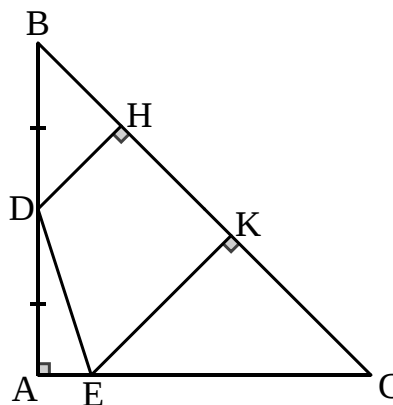
Do đó:

$$\max S_{DEKH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

Khi đó: Đường cao $HK = \frac{a}{2}$.

$$\text{Suy ra: } KC = BC - BH - HK = a - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{Do đó: } DH = HB = \frac{a}{4}, EK = KC = \frac{a}{4}.$$



Hình thang DEKH là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC.

Bài tập 16: Cho hình vuông ABCD. Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là:

- Lớn nhất
- Nhỏ nhất

Giải

Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD

Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến d.

$$m = 2(AA' + BB')$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A'B'

Suy ra: $m = 4MN$. Do đó:

m lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

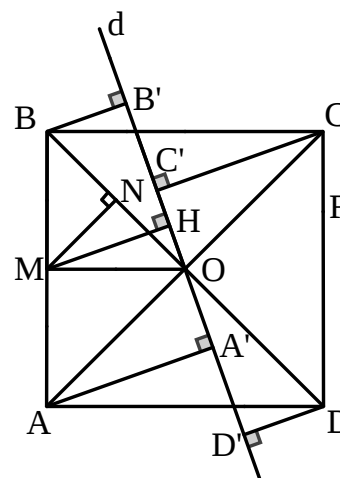
m nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

a) $MN \leq MO \Rightarrow m$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv O \Leftrightarrow d \parallel AB$

b) Kẻ $MH \perp OB$.

Chứng minh: $MN \geq MH$

$\Rightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N \equiv H \Leftrightarrow d \equiv BD$ hoặc $d \equiv AC$.



Bài tập 17: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A các điểm D, E theo thứ tự

di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí các điểm D, E sao cho:

- DE có độ dài nhỏ nhất.
- Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất.

Giải

a) Gọi M là trung điểm của BC.

$$\triangle BDM = \triangle AEM \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AME}$$

$$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = \widehat{DMA} + \widehat{BMD} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

Gọi I là trung điểm của DE.

$$DE = DI + IE = AI + IM \geq AM$$

Min $DE = AM \Leftrightarrow I$ là trung điểm của AM

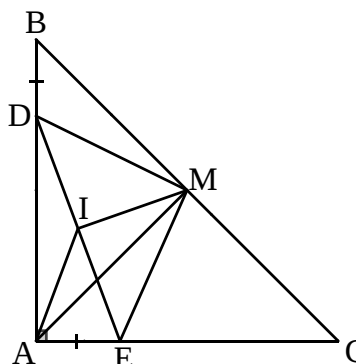
$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

$$\text{b) Đặt } AE = x, AB = AC = a \text{ thì } AD = a - x, S_{ADE} = \frac{x(a-x)}{2}$$

$$S_{BDEC} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow S_{ADE} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x(a-x) \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Do } x + (a-x) = a \text{ không đổi nên } x(a-x) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC.



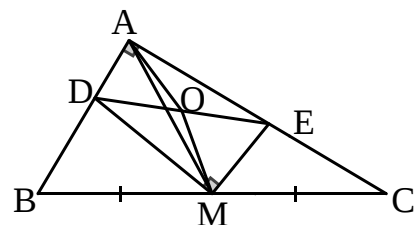
Bài tập 18: Cho ΔABC vuông tại A, có $BC = a$, diện tích là S. Gọi m là trung điểm của BC. Hai đường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB, AC ở D, E. Tìm:

- a) Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE.
b) Giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMDE .

Giải

- a) Gọi O là trung điểm của DE
Ta có $OA = OD = OE = OM$

$$\Rightarrow DE = OA + OM \geq AM = \frac{a}{2}$$

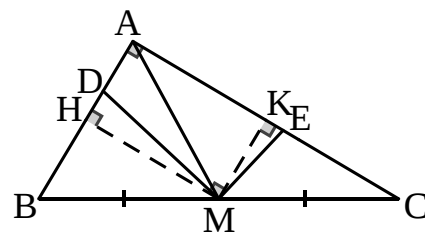


$$\min DE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow O \text{ là trung điểm của } AM$$

$\Leftrightarrow D$ là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

- b) Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$
 $ME \geq MK$, $MD \geq MH$.

$$2S_{MDE} = MD \cdot ME \geq MH \cdot MK = \frac{AC}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S}{2}$$



$$\min S_{MDE} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow D \equiv H \text{ và } E \equiv K$$

Bài tập 19: Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB. Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB. Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất.

Giải

Gọi K là giao điểm của AC và BD.

Các tam giác AMC, BMD đồng dạng với ΔAKB

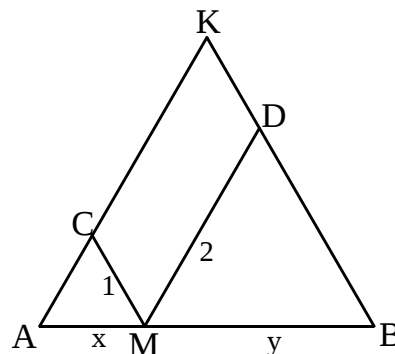
Đặt $AM = x$, $BM = y$, $AB = a$, ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2; \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{(x+y)^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

$$\text{Do đó: } \min (S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } AB.$$



Bài tập 20: Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a, b, c tương ứng đường cao $AH = h$. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất. Biết $M \in AB$; $N \in AC$; $P, Q \in BC$.

Giải

Gọi I là giao điểm của AH và MN

Đặt $NP = x$; $MN = y$; $AI = h - x$

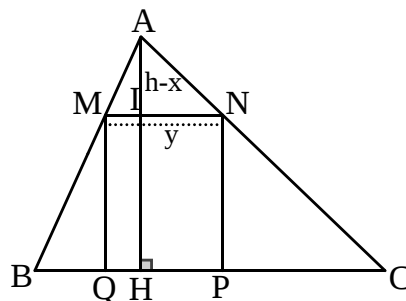
$\Delta AMN \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = a \cdot \frac{h-x}{h}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h} \cdot x(h-x)$$

$\Rightarrow S_{MNPQ}$ lớn nhất $\Leftrightarrow x(h-x)$ lớn nhất $x + (h-x) = h$ không đổi nên $x(h-x)$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow x = h-x \Leftrightarrow x = h/2$$



Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC .

Bài tập 21: Cho ΔABC vuông tại A. Từ một điểm I nằm trong tam giác, kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Giải

Kẻ $AH \perp BC$, $IE \perp AH$

ANIK, IMHE là các hình chữ nhật.

$$IK^2 + IN^2 = IK^2 + AK^2 = AI^2 \geq AE^2$$

$$IM = EH$$

$$\text{nên } IK^2 + IN^2 + IM^2 = AI^2 + EH^2 \geq AE^2 + EH^2$$

$$\text{Đặt } AE = x, EH = y \text{ ta có: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$$

$$\Rightarrow IK^2 + IN^2 + IM^2 \geq \frac{AH^2}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH.

Bài tập 22: Cho ΔABC nhọn. Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Đặt $AK = x$; $BM = y$; $CN = z$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.

Giải

Đặt:

$$BK = k, CM = m, AN = n, BC = a, AC = b, AB = c.$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (IA^2 - IK^2) + (IB^2 - IM^2) + (IC^2 - IN^2) \\ &= (IA^2 - IN^2) + (IB^2 - IK^2) + (IC^2 - IM^2) \\ &= n^2 + k^2 + m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) &= x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2 \\ &= (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2) \end{aligned}$$

$$x^2 + k^2 \geq \frac{(x+k)^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$y^2 + m^2 \geq \frac{(y+m)^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$z^2 + n^2 \geq \frac{(z+n)^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow x = k, y = m, z = n.$$

$\Leftrightarrow$ I là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC .

Bài tập 23: Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 10$ cm. Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ABFE.

Giải

Kẻ $OH \perp CD$, ta tính được: $OH = 4$ cm.

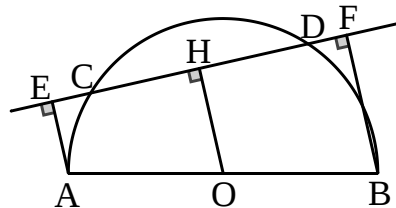
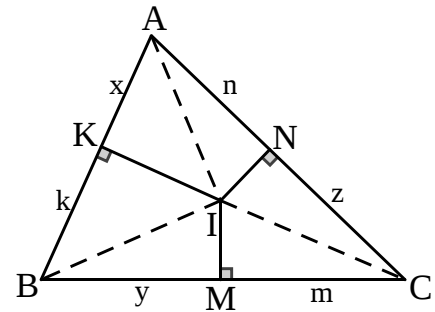
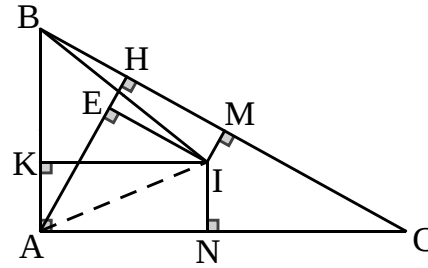
$$S_{ABFE} = \frac{1}{2} (AE + BF).EF$$

$$= OH.EF \leq OH.AB = 4.10 = 40$$

$$\max S_{ABFE} = 40 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow EF \parallel AB.$$

Khi đó: $OH \perp AB$



Bài tập 24: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông). Một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC, CD theo thứ tự ở M và N. Tính độ dài nhỏ nhất của MN.

Giải

Đặt:

$$CM = m, CN = n, MN = x$$

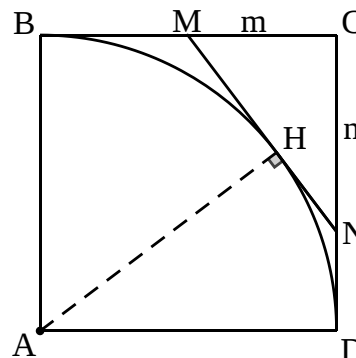
$$m + n + x = 2CD = 2a \text{ và } m^2 + n^2 = x^2$$

$$\text{Do đó : } x^2 = m^2 + n^2 \geq \frac{(m+n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2a}{\sqrt{2} + 1} = 2a(\sqrt{2} - 1)$$

$$\min MN = 2a(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow m = n.$$



Khi đó: Tiếp tuyến MN // BD, AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, AN là phân giác của $\widehat{DAC}$

Bài tập 25: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt các đường tròn (O), (O') lần lượt tại B và C. Xác định vị trí của các tia đó để ΔABC có diện tích lớn nhất.

Giải

Kẻ $OD \perp AB$; $O'E \perp AC$ ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot 2AE = 2 \cdot AD \cdot AE$$

$$\text{Đặt: } OA = R; O'A = r; \widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$$

$$AD = R \sin \alpha; AE = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = Rr \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq Rr$$

Do đó:

$$\max S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy nếu ta vẽ các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^\circ$ thì ΔABC có diện tích lớn nhất.

Bài tập 26: Cho đường tròn (O; R) đường kính BC, A là một điểm di động trên đường tròn. Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB. Gọi D, E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác DEFG đạt giá trị lớn nhất.

Giải

DEFG là hình bình hành.

Kẻ $OI \perp FH$, ta có OI là đường trung bình của ΔBHC nên

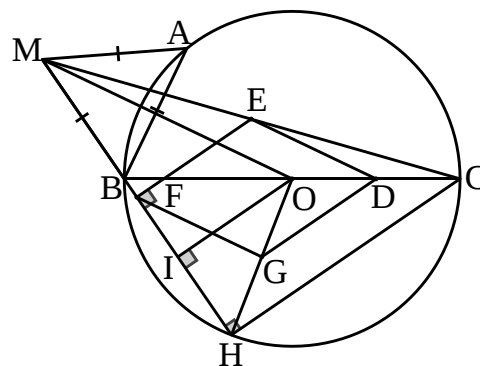
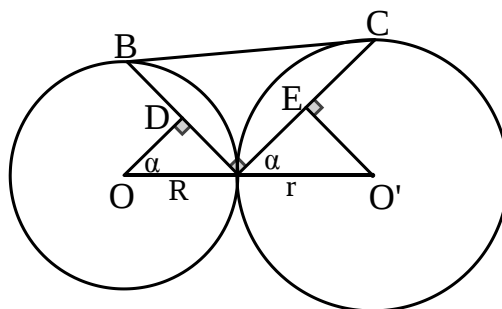
$$OI = \frac{1}{2} HC = GD$$

MO là đường trung trực của AB nên $\widehat{IMO} = 30^\circ$

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2} OM \Rightarrow GD = \frac{1}{2} OM$$

$$\text{Mà } ED = \frac{1}{2} OM \Rightarrow EG = GD$$

$\Rightarrow$ DEFG là hình thoi



$$\widehat{HFG} = \widehat{HMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{EFG} = 60^\circ \Rightarrow \Delta EFG \text{ đều}$$

$$\Rightarrow S_{DEFG} = 2S_{EFG} = 2 \cdot \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\frac{HC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} \leq \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\max S = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow \widehat{MBC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ \Leftrightarrow AC = R.$$

Bài tập 27: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) . D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B, C . Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC, AC, AB . Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, DH = x, DI = y, DK = z$.

a) Chứng minh rằng: $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$

b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ nhỏ nhất.

Giải

a) Lấy E trên BC sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$
 ΔCDE đồng dạng với ΔADB

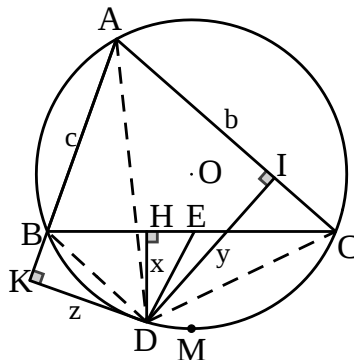
$$\Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{CE}{c} \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{CE}{x}$$

Tương tự ΔBDE đồng dạng với ΔADC

$$\Rightarrow \frac{DH}{DI} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BE}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BE + CE}{x} = \frac{a}{x}$$

b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}$.



Do đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x$ lớn nhất $\Leftrightarrow D \equiv M$ (M là điểm chính giữa của cung BC

không chứa A).

Bài tập 28: Cho ΔABC nhọn, điểm M di chuyển trên cạnh BC . Gọi P, Q là hình chiếu của M trên AB, AC . Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Tứ giác $APMQ$ là tứ giác nội tiếp. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APMQ$.

Kẻ $OH \perp PQ$. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ thì $\widehat{POH} = \alpha$

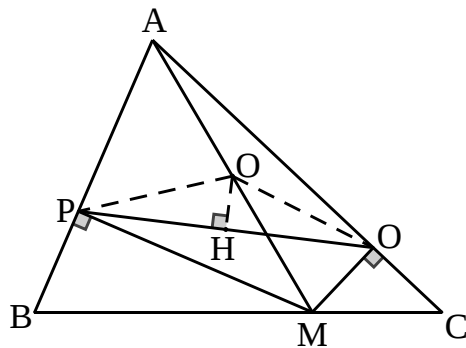
$$PQ = 2PH = 2 \cdot OP \cdot \sin \alpha = AM \cdot \sin \alpha$$

Do α không đổi nên

PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$.

Bài tập 29: Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB . Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB, AC, BC . Xác định vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó đạt giá trị lớn nhất.

Giải



Gọi $(O_1; r_1)$; $(O_2; r_2)$; $(O_3; r_3)$ là các đường tròn có đường kính là AB, AC, BC

Đặt: $AB = 2a$, $AC = 2x$ thì $r_1 = a$, $r_2 = x$.

Suy ra: $BC = 2a - 2x$ và $r_3 = a - x$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn

Ta có :

$$S = \frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi (a-x)^2}{2} = \pi x(a-x)$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ lớn nhất

Mặt khác $x + (a-x) = a$ không đổi nên

$$x(a-x) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow C \equiv O_1$$

Lúc đó ta có $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

Bài tập 30: Cho đường tròn $(O; R)$. Trong đường tròn (O) vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O_2) gấp đôi bán kính đường tròn (O_1) . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O_1) và (O_2) .

Giải

Gọi x là bán kính đường tròn (O_1) .

Khi đó $2x$ là bán kính đường tròn (O_2)

Xét $\triangle OO_1O_2$, ta có: $O_1O_2 \leq OO_1 + OO_2$

$$\Rightarrow 3x \leq (R-x) + (R-2x) \Rightarrow 6x \leq 2R \Rightarrow x \leq \frac{R}{3}$$

Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O_1) và (O_2) , ta có:

$$S = \pi R^2 - \pi x^2 - \pi 4x^2 = \pi (R^2 - 5x^2)$$

$$\text{Do } x \leq \frac{R}{3} \text{ nên } x^2 \leq \frac{R^2}{9} \Rightarrow S \geq \frac{4\pi R^2}{9};$$

$$\min S = \frac{4\pi R^2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}.$$

Khi đó: O_1, O, O_2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn (O_1)

và (O_2) là $\frac{R}{3}$ và $\frac{2R}{3}$.

Bài tập 31: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, điểm M nằm trên đường chéo BD.

a) Nếu cách dựng đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AD và CD. Nếu cách dựng đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AB, BC.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường chéo BD thì tổng chu vi hai đường tròn không đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để tổng diện tích của hai hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất.

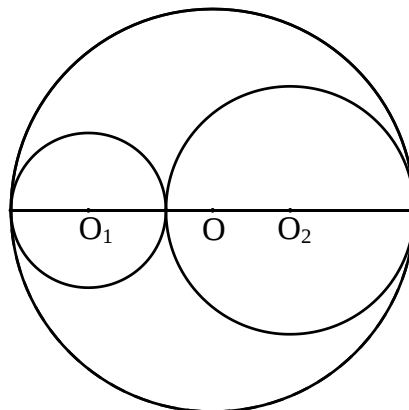
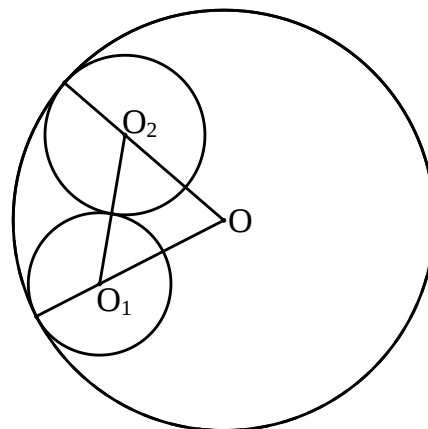
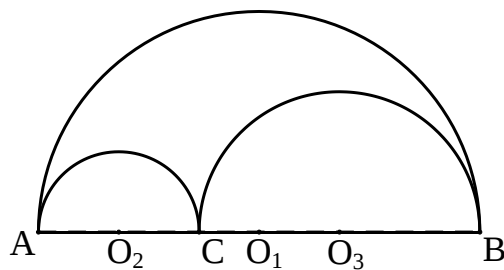
Giải

a) Qua M kẻ đường vuông góc với BD cắt AB, BC, CD, DA tại P, Q, F, E.

Do AB, BC tiếp xúc với (K) nên $K \in MB$

$PQ \perp KM$ nên PQ là tiếp tuyến của (K)

Vậy (K) là đường tròn nội tiếp $\triangle PBQ$



Tương tự (I) là đường tròn nội tiếp $\triangle EDF$.

b) Tổng chu vi hai đường tròn (I) và (K) bằng:

$$2\pi \cdot IM + 2\pi \cdot MK = 2\pi \cdot IK$$

$$MD = ID + IM = \sqrt{2} \cdot IJ + IM = \sqrt{2} \cdot IM + IM = (\sqrt{2} + 1) \cdot IM$$

$$MB = KB + MK =$$

$$\sum \sqrt{2} \cdot KH + KM = \sqrt{2} \cdot KM + KM = (\sqrt{2} + 1) \cdot KM$$

$$\Rightarrow BD = MD + MB = (\sqrt{2} + 1)(IM + MK) = (\sqrt{2} + 1)IK$$

$$\Rightarrow IK = \frac{BD}{\sqrt{2} + 1} = BD(\sqrt{2} - 1).$$

$$\text{Do } BD = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow IK = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

Vậy tổng chu vi hai đường tròn bằng $2\pi(2 - \sqrt{2})$

c) Gọi x và y là bán kính các đường tròn (I) và (K)

$$\text{Ta có: } x + y = 2 - \sqrt{2}$$

Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình tròn trên

$$S_1 + S_2 = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2) \geq \pi \frac{(x+y)^2}{2} = \pi \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}$$

$$S_1 + S_2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } BD.$$

Bài tập 32: Cho đường tròn (O; R), A và B là hai điểm cố định nằm ngoài đường tròn. M là điểm cố định trên đường tròn (O). Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB có giá trị:

a) Lớn nhất b) nhỏ nhất

Giải

Vẽ đường thẳng d qua O và vuông góc AB tại K
d cắt đường tròn (O) tại C và D.

Hạ $AH \perp AB$

$$\Rightarrow S_{MAB} = \frac{MH \cdot AB}{2}$$

a) Ta có: $MH \leq MK$

Xét 3 điểm M, O, K, ta có: $MK \leq OM + OK$

$$\Leftrightarrow MK \leq OC + OK$$

$$\Leftrightarrow MH \leq CK$$

$$\Rightarrow S_{MAB} \leq \frac{CK \cdot AB}{2} \text{ (không đổi)}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow M \equiv C$.

b) Xét 3 điểm M, O, H, ta có: $MH \geq |OH - OM|$

Mà $OK \leq OH$ và $OK - OM = OK - OD = DK \Rightarrow MH \geq DK$

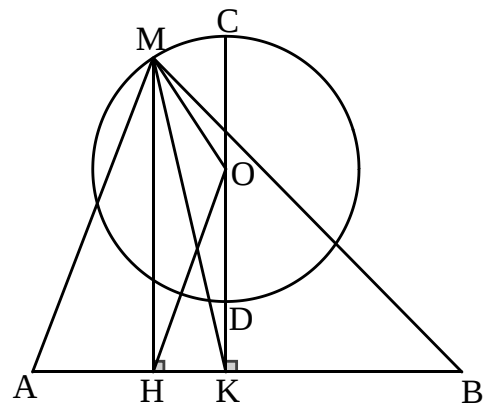
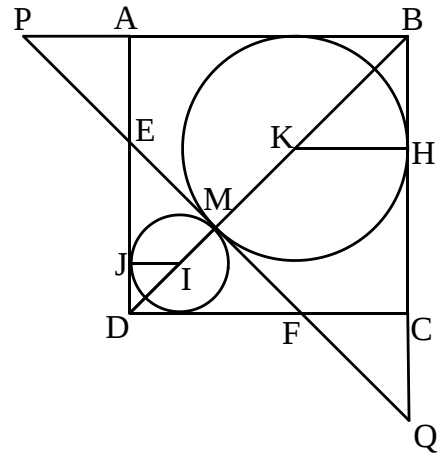
$$\Rightarrow S_{MAB} \geq \frac{DK \cdot AB}{2} \text{ (không đổi). Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow M \in [OH]$$

Và $M \equiv K \Leftrightarrow M \equiv D$

Bài tập 33: Cho đường tròn (O; R); A là điểm cố định trong đường tròn ($A \neq O$). Xác định vị trí của điểm B trên đường tròn O sao cho góc OBA lớn nhất.

Giải

Giả sử có $B \in (O)$.



Vẽ dây BC của đường tròn (O) qua A ta có $OB = OC = R$.

$$\Rightarrow \triangle OBC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OBC} = \frac{180^\circ - \widehat{COB}}{2}$$

Nên $\widehat{OBA} \text{ max} \Leftrightarrow \widehat{COB} \text{ min}$.

Trong $\triangle COB$, có: $CO = OB = R$ không đổi

$$\Rightarrow \widehat{COB} \text{ min} \Leftrightarrow BC \text{ min} = OH \text{ max}$$

Mà $OH \leq OA$ nên $OH \text{ max} \Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow BC \perp OA$ tại A

Vậy $\widehat{OBA} \text{ max} \Leftrightarrow B \in (O)$ sao cho $BC \perp OA$ tại A.

Bài tập 34: Cho tứ giác lồi ABCD. Tìm điểm M trong tứ giác đó sao cho $AM + MB + MC + MD$ đạt cực trị nhỏ nhất.

Giải

Với 3 điểm M, A, C, ta có: $MA + MC \geq AC$

Ta có: $MB + MD \geq BD$.

$AM + MB + MC + MD \geq AC + BD$ (không đổi).

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in AC \Leftrightarrow M \equiv O \\ M \in BD \end{cases}$$

Vậy $\min(AM + MB + MC + MD) = AC + BD \Leftrightarrow M \equiv O$

Bài tập 35: Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) M là điểm chuyển động trên cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$; $ME \perp AC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Xác định vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), H cố định và AH không đổi, tứ giác AEMD có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ AEMD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow DE = AM$ mà $AM \geq AH$ (không đổi)

(Theo tính chất đường xiên và đường vuông góc).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$.

Vậy khi $M \equiv H$ thì DE nhỏ nhất.

Bài tập 36: Cho đường thẳng d và đường tròn (O; R) có khoảng cách từ tâm đến d là $OH \geq R$. Lấy hai điểm bất kỳ $A \in d$; $B \in (O; R)$. Hãy chỉ ra vị trí của A và B sao cho độ dài của AB ngắn nhất? Chứng minh điều đó.

Giải

Từ tâm (O) kẻ $OH \perp d$, OH cắt đường tròn (O) tại K. Xét ba điểm A, B, O, ta có:

$AB + OB \leq OA$ mà $OA \geq OH$ (quan hệ đường xiên và đường vuông góc).

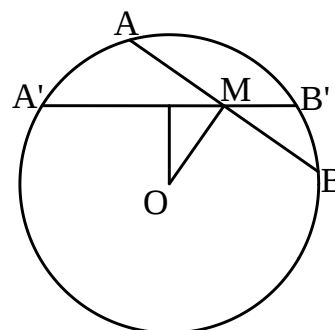
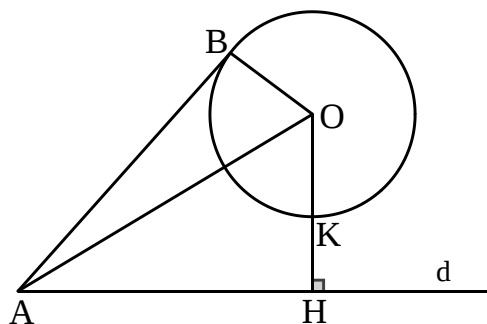
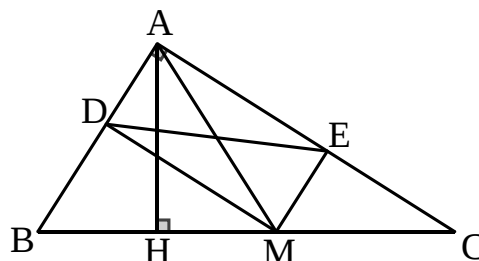
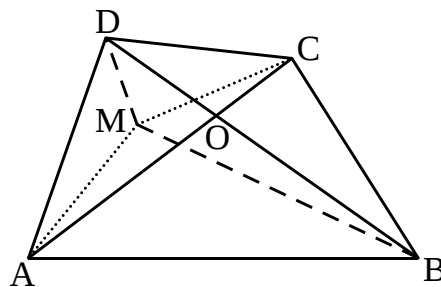
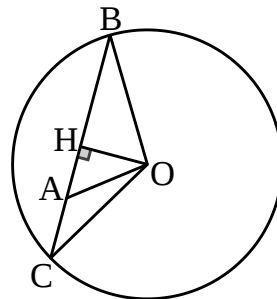
$\Rightarrow AB \geq OH - OB = HK$ không đổi

$$\text{Vậy } \min AB = KH \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv H \\ B \equiv K \end{cases}$$

Bài tập 37: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm trong đường tròn đó ($M \neq O$). Xác định vị trí của dây cung AB của đường tròn (O) qua M sao cho độ dài AB ngắn nhất.

Giải

Ta có dây $AB \perp OM$ tại M là dây cung có độ dài nhỏ nhất.



Thật vậy:

Qua M vẽ dây A'B' bất kỳ của (O), A'B' không vuông góc với OM. Vẽ $OM' \perp A'B'$.

$M' \in A'B'$; $M' \neq M$

$\Rightarrow OM' \perp MM'$

$\Rightarrow OM > OM'$

$\Rightarrow AB < A'B'$ (theo định lý khoảng cách từ tâm đến dây).

Bài tập 38: Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R). M là điểm di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí của M để $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Ta xét $M \in$ cung BC. Trên MA lấy D sao cho $MB = MD$.

Ta chứng minh được: $\triangle BMD$ là tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = 60^\circ$.

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_3} = 60^\circ$.

Chứng minh cho $\triangle BAD = \triangle BCM$ (g-c-g)

$\Rightarrow AD = MC$

$\Rightarrow MA + MB + MC = MA + MD + DA = 2MA$

Mà MA là dây cung của đường tròn (O; R) $\Rightarrow MA = 2R$

$\Rightarrow \max(MA + MB + MC) = 2.2R = 4R$

$\Leftrightarrow MA$ là đường kính của đường tròn (O) $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung BC.

Tương tự ta xét M thuộc cung AB và M thuộc cung AC

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB hoặc cung AC thì $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 39: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB, M là điểm chuyển động trên đường tròn. Xác định vị trí của M trên đường tròn, để $MA + \sqrt{3} MB$ đạt giá trị lớn nhất

Giải

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle MAB$, có: $\widehat{M} = 90^\circ$. Theo định lý Pitago ta có:

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski, ta có:

$$MA + \sqrt{3} MB \leq \sqrt{(1+3)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{4.4R^2} = 4R$$

$$MA + \sqrt{3} MB \leq 4R$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{1}{MA} = \frac{\sqrt{3}}{MB} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan A = \frac{MB}{MA} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{MAB} = 60^\circ \text{ nên } \max(MA + \sqrt{3} MB) = 4R$$

$$\Leftrightarrow \widehat{MAB} = 60^\circ$$

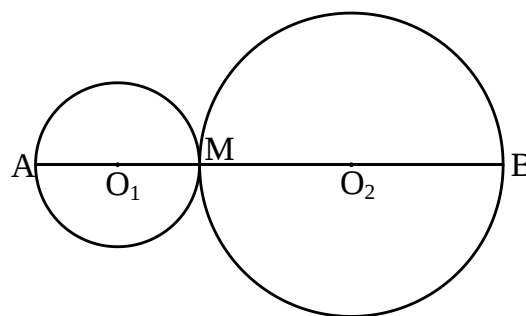
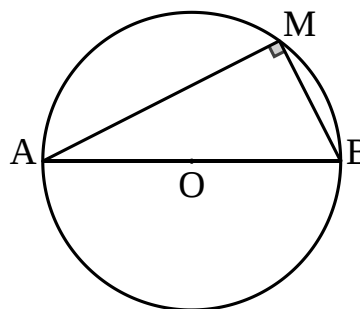
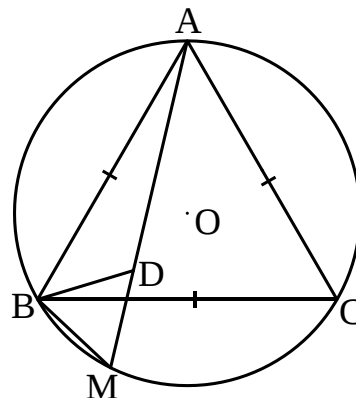
Bài tập 40: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn ấy. Vẽ các đường tròn đường kính MA, MB. Xác định vị trí của M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Đặt $MA = x$, $MB = y$.

Ta có: $x + y = AB$ ($0 < x < y < AB$)

Gọi S và S' thứ tự là diện tích của 2 hình tròn có đường kính là MA và MB



Ta có: $S + S' = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2 + y^2}{4}$

Áp dụng BĐT: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow S + S' \geq \pi \cdot \frac{(x+y)^2}{8} = \pi \cdot \frac{AB^2}{8}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Vậy $\text{Min}(S + S') = \pi \cdot \frac{AB^2}{8} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB .

Bài tập 41: Cho ΔABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Tìm điểm M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ có giá trị nhỏ nhất. Trong đó x, y, z là khoảng cách từ M đến BC, AC, AB .

Giải

Gọi diện tích ΔABC là S .

Ta có $ax + by + cz = 2S$ (không đổi)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$(ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq \left(\sqrt{ax} \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by} \sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz} \sqrt{\frac{c}{z}} \right)^2$$

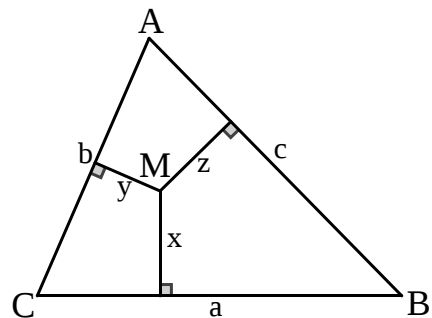
$$\Rightarrow (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq (a + b + c)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \geq \frac{(a + b + c)^2}{2S}$$

Vậy $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = \frac{(a + b + c)^2}{2S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều.}$$



Bài tập 42: Cho đường tròn $(O; R)$, dây BC cố định. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC để tam giác ABC có chu vi lớn nhất.

Giải

BC cố định nên $\widehat{CAB}$ không đổi, độ dài BC không đổi

Chu vi ΔABC chỉ còn phụ thuộc vào $AB + AC$.

Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho $AC = AD$.

Vậy chu vi của ΔABC phụ thuộc vào độ dài của BD .

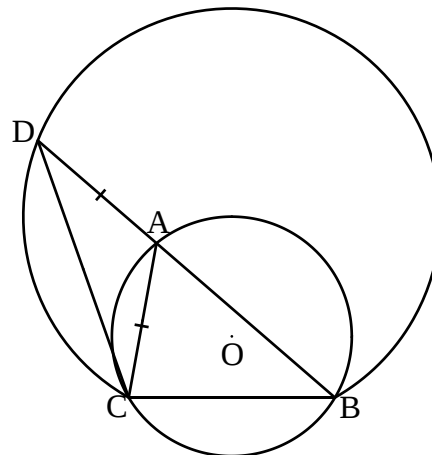
Ta có:

$\widehat{CDB}$ cũng không đổi hay BD là dây của cung chứa góc $\frac{1}{2} \widehat{A}$ dựng trên BC .

Vậy BD lớn nhất bằng đường kính của cung chứa góc $\frac{1}{2} \widehat{A}$.

Dựng trên $BC \Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung lớn BC .

Bài tập 43: Cho đường tròn $(O; R)$ với dây AB cố định sao



cho khoảng cách từ O tới AB bằng $\frac{R}{2}$. Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt đường tròn (O; R) tại C. Trên cung nhỏ AB lấy M tùy ý (khác A, B). Đường thẳng qua A và song song với MB cắt CM tại I. Dây CM cắt dây AB tại K.

a) So sánh góc AIM với góc ACB.

b) Chứng minh: $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MK}$.

c) Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MAK$ và $\triangle MBK$. Hãy xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AB để tích $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

a) Xét $\triangle AOH$ có $\cos O = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOH} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow sđ\widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$
 $\triangle ABC$ có đường cao CH đồng thời là trung tuyến.

Vậy tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$

$AI \parallel MB \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{CMB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$

Vậy $\widehat{AIM} = \widehat{ACB}$.

b) $\triangle AIM$ đều (có hai góc bằng 60°) $\Rightarrow AM = MI$.

$\triangle AIC = \triangle AMB$ (c - g - c) $\Rightarrow CI = MB$

$\triangle MKA \sim \triangle MBC$ nên $\frac{MK}{MA} = \frac{MB}{MC}$

$\triangle MKB \sim \triangle MAC$ nên $\frac{MK}{MB} = \frac{MA}{MC}$

Vậy $\frac{MK}{MA} + \frac{MK}{MB} = \frac{MB}{MC} + \frac{MA}{MC} = \frac{MB + MA}{MC} = 1$

hay $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MK}$.

c)

Trong $\triangle AKM$: $R_1 = \frac{AK}{2\sin M} = \frac{AK}{2\sin 60^\circ} = \frac{AK}{\sqrt{3}}$

Trong $\triangle BKM$: $R_2 = \frac{BK}{2\sin M} = \frac{BK}{2\sin 60^\circ} = \frac{BK}{\sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm R_1, R_2 có:

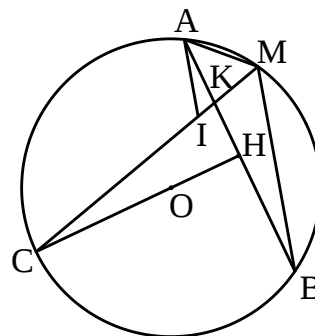
$\sqrt{R_1 R_2} \leq \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{AK + BK}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2} = \text{const}$

dấu "=" xảy ra khi $R_1 = R_2 \Leftrightarrow AK = BK \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AB.

Vậy $R_1 R_2 \max = \frac{R^2}{4}$ khi M là điểm chính giữa của cung AB.

Bài tập 44: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Lấy điểm C là trung điểm của AO. Kẻ hai tia Ax và By vuông góc với AB và ở cùng một phía với nửa đường tròn. Điểm M di động trên nửa đường tròn ($M \neq A, B$). Một đường thẳng vuông góc với CM tại M cắt Ax ở P, cắt By ở Q. Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn để tứ giác APQB có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị diện tích nhỏ nhất đó.

Giải



Tứ giác APMC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PCA} = \widehat{PMA}$

Có $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PMA} + \widehat{BMQ} = 90^\circ$

Tứ giác BQMC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BMQ} = \widehat{BCQ}$.

Có $\widehat{CAQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCQ} + \widehat{BQC} = 90^\circ$.

Vậy $\widehat{PCA} = \widehat{BQC}$.

Do đó: $\triangle APC \sim \triangle BCQ$:

$$\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BC}{BQ} \Rightarrow AP \cdot BQ = AC \cdot BC$$

$$= \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} = \text{const.}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{AP+BQ}{2} \geq \sqrt{AP \cdot BQ} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \text{ dấu "=" xảy ra khi } AP = BQ.$$

$$\Leftrightarrow CM \perp AB.$$

$$\text{Hay } S_{ABQP} = \frac{1}{2} AB(AP+BQ)_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sqrt{3}R = \sqrt{3}R^2 \text{ khi } \widehat{AM} = 60^\circ.$$

Bài tập 45: Cho tam giác đều ABC, E là một điểm trên cạnh AC ($E \neq A$), K là trung điểm của đoạn AE. Đường thẳng EF đi qua E và vuông góc với đường thẳng AB ($F \in AB$) cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng BC tại D. Xác định vị trí của E sao cho đoạn KD có độ dài nhỏ nhất.

Giải

$\triangle AEF$ vuông tại F, $\widehat{A} = 60^\circ$, FK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow \triangle AKF$ đều $\Rightarrow \widehat{FKC} = 120^\circ$.

Vậy tứ giác BCKF nội tiếp.

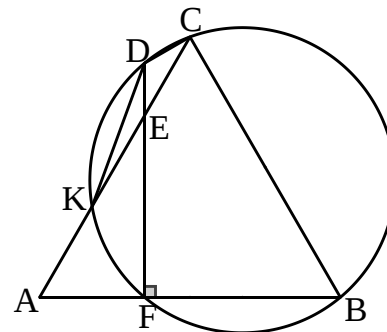
Tứ giác BCDF có $\widehat{F} = \widehat{C} = 90^\circ$

Vậy tứ giác BCDF nội tiếp hay 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.

$$\text{sđ } \widehat{DK} = 2\widehat{DFK} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow KD = \frac{1}{2} DB \leq \frac{1}{2} CB \text{ dấu "=" xảy ra khi } E \equiv C.$$

$$\text{Vậy } KD_{\min} = \frac{1}{2} CB \text{ khi } E \equiv C.$$



Bài tập 46: Cho $\triangle ABC$ cân ở B có $\widehat{ABC} = \beta$, O là trung điểm của cạnh AC, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB, (ω) là đường tròn tâm O bán kính OK. E là một điểm thay đổi trên cạnh BA sao cho góc AOE bằng α ($20^\circ < \alpha < 90^\circ$). F là điểm trên cạnh BC sao cho EF tiếp xúc với (ω). Tìm α để AE + CF nhỏ nhất.

Giải

Trong $\triangle OEF$:

$$\widehat{EOF} = 180^\circ - \widehat{OEF} - \widehat{OFE} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AEF} - \frac{1}{2} \widehat{CFE}$$

Trong tứ giác AEFC:

$$\widehat{AEF} + \widehat{AFE} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 360^\circ - (180^\circ - \beta) = 180^\circ + \beta$$

Vậy: $\widehat{EOF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$

ΔABC cân $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$

Vậy $\widehat{EOF} = \widehat{A} = \widehat{C}$.

$\Rightarrow \Delta AEO \sim \Delta OEF$ và $\Delta OEF \sim \Delta COF$.

Vậy $\Delta AEO \sim \Delta COF$.

$\Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{CO}{CF} \Rightarrow AE.CF = AO.CO = \text{const}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$AE + CF \geq 2\sqrt{AE.CF} = 2\sqrt{AO.CO} = \text{const}.$

Dấu "=" xảy ra khi $AE = CF$

$\Leftrightarrow \Delta OEF$ cân tại O

$\Leftrightarrow \Delta AEO$ cân tại A

$\Leftrightarrow \widehat{AOE} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{A} = 90^\circ - \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{1}{2}\beta\right) = 45^\circ + \frac{1}{4}\beta$ thì $AE + CF$ nhỏ nhất

Bài tập 47: Cho hai đường tròn $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Biết rằng $r_1 = 1\text{cm}$; $r_2 = 2\text{cm}$; $AB = 1\text{cm}$ và hai điểm O_1, O_2 ở hai phía của đường thẳng AB . Xét đường thẳng (d) đi qua A , cắt $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ lần lượt tại các điểm M và N sao cho A nằm trong đoạn MN . Tiếp tuyến của $(O_1; r_1)$ tại M và tiếp tuyến của $(O_2; r_2)$ tại N cắt nhau tại điểm E .

a) Chứng minh tứ giác $EMBN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính O_1O_2

b) Tìm giá trị lớn nhất của $2EM + EN$.

Giải

a) $\widehat{ABN} = \widehat{ANE}$; $\widehat{ABM} = \widehat{AME}$

$\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{EMN} + \widehat{ENM} = 180^\circ - \widehat{MEN}$

Vậy $\widehat{MBN} + \widehat{MEN} = 180^\circ$ nên tứ giác $EMBN$ nội tiếp.

b) $O_1O_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$

c) $\Delta O_1O_2A \sim \Delta MNB$.

$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{AO_2}{AO_1} = 2$ (vì $R_1 = 1\text{cm}$, $R_2 = 2\text{cm}$)

$\Rightarrow BN = 2BM$

$\Delta EMB \sim \Delta NAB$

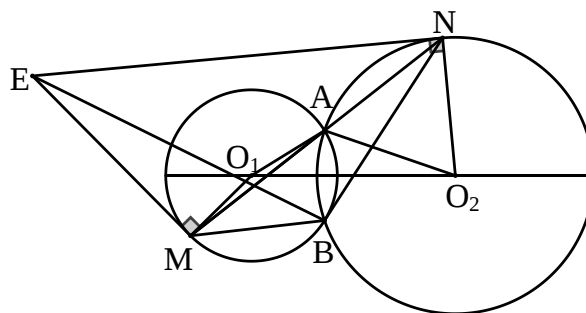
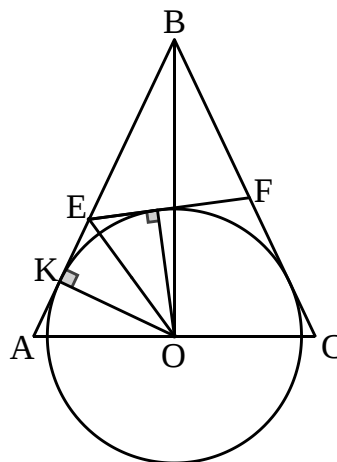
$\Rightarrow \frac{EM}{MB} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow EM = MB.AN$ (vì $AB = 1\text{cm}$)

Tương tự, ta cũng chỉ ra: $EN = NB.AM$

Vậy

$$\begin{aligned} 2.EM + EN &= 2.MB.AN + NB.AM \\ &= 2.MB.AN + 2.MB.AM \\ &= 2.MB.(AM + AN) \\ &= 2MB.MN \end{aligned}$$

Lại có $\Delta MBN \sim \Delta O_1AO_2$ đồng dạng theo tỉ số $\frac{MN}{O_1O_2} = \frac{MB}{r_1} \leq 2$



Vậy $2MBMN \leq 2.2r_1.2O_1O_2 = 8. \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15}) = 4(\sqrt{3} + \sqrt{15})$ dấu "=" xảy ra khi $MB = 2r_1$ hay M đối xứng với B qua O_1 .

Bài tập 48: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi N, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{BC}{MH} + \frac{AB}{MN} + \frac{AC}{MK}$

Giải

Nhận thấy: Nếu K nằm ngoài AC thì N nằm trong AB.

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BN}{MN} + \frac{AN}{MN}$$

$$\frac{AC}{MK} = \frac{AK}{MK} - \frac{CK}{MK}$$

$$\Delta MCK \sim \Delta MBN \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{CK}{MK}$$

$$\Delta MAK \sim \Delta MBH \Rightarrow \frac{AK}{MK} = \frac{BH}{MH}$$

$$\Delta MAN \sim \Delta MCH \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{CH}{HM}$$

$$\text{Vậy } \frac{BC}{MH} + \frac{AB}{MN} + \frac{AC}{MK} = \frac{BC}{MH} + \frac{CH}{MH} + \frac{BH}{MH} = 2 \frac{BC}{MH}$$

$$\text{Vậy } \frac{BC}{MH} + \frac{AB}{MN} + \frac{AC}{MK} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MH \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow MH = R \Leftrightarrow M$$

là điểm chính giữa của cung BC.

Bài tập 49: Trên mặt phẳng cho trước tam giác đều ABC và điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$MA + MB \geq MC$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức Ptolemy vào tứ giác MABC ta có:

$$MA.BC + MB.AC \geq MC.AB$$

Nên $MA + MB \geq MC$ (đpcm)

Bài tập 50: Chứng minh rằng điểm B nằm trong đường tròn đường kính AC khi và chỉ khi ta có $\widehat{ABC} > 90^\circ$

Chứng minh

Cần và đủ để điểm B nằm trong hình tròn đường kính AC là

$$BM < \frac{AC}{2}.$$

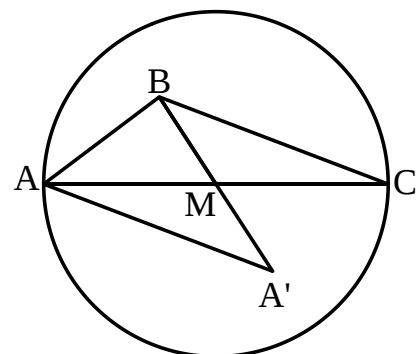
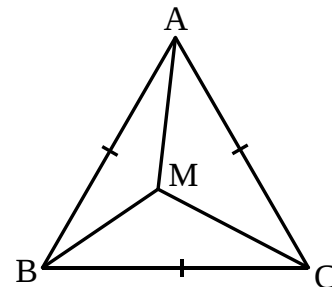
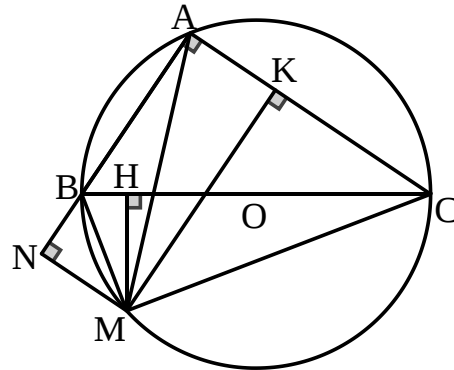
Gọi A' là điểm đối xứng với B qua trung điểm M của cạnh AC.

Theo định lí 3, ta có $BC > AA'$ khi và chỉ khi $\widehat{BAC} > \widehat{ABA'}$.

Do $\widehat{BAC} > \widehat{ABA'}$ bù nhau nên $\widehat{BAC} > \widehat{ABA'}$ khi và chỉ khi $\widehat{ABC}$ là góc tù.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho góc vuông xOy; điểm A thuộc miền trong của góc. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho $\widehat{MAB} = 90^\circ$. Xác định vị trí của M, N để MN có độ dài nhỏ nhất.



Bài tập 2: Cho 2 đường tròn ở ngoài nhau ($O; R$) và ($O'; R'$). A nằm trên (O), B nằm trên (O'). Xác định vị trí của điểm A, B để đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất.

Bài tập 3: Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC không vượt quá $AD(\sqrt{2}-1)$, với AD là độ dài đường phân giác của góc vuông A .

Bài tập 4: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho $BM = CN$. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài tập 5: Cho nửa đường tròn ($O; R$) đường kính AB . M là một điểm trên nửa đường tròn, kẻ $MH \perp HB$. Xác định vị trí của M để:

- $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất.
- Chu vi của $\triangle MAB$ lớn nhất.

Bài tập 6: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho $BM = CN$. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài tập 7: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn ($O; R$) cho trước. Tìm tứ giác có tổng $AB \cdot CD + AD \cdot BC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 8: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a . Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho chu $\triangle AMN = 2a$. Tìm vị trí của M và N để $S_{\triangle AMN}$ lớn nhất.

Bài tập 9: Cho $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn ($O; R$). Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn ($O; R$) song song với các cạnh của tam giác. Các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác thành 3 tam giác nhỏ có diện tích là S_1, S_2, S_3 . Gọi S là diện tích của $\triangle ABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$

Bài tập 10: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O và D là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A . Xác định vị trí của D sao cho $DA + DB + DC$ lớn nhất.

Bài tập 11: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai tâm O và O' nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AB . Đường thẳng (d) quay quanh B cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D ($C \neq A, B$ và $D \neq A, B$). Xác định vị trí của (d) sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.

Bài tập 12: Cho đường tròn ($O; R$) đường kính AB , điểm M di động trên đường tròn sao cho $MA \leq MB$. Trong tam giác AMB kẻ đường cao MH . Gọi r_1, r_2, r_3 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMH và BMH . Hãy xác định vị trí của M để tổng: $r_1 + r_2 + r_3$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 13: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = c$, $AC = b$, M là trung điểm của BC . Một đường thẳng (d) quay xung quanh trọng tâm G của tam giác ABC sao cho (d) cắt đoạn AB tại P và (d) cắt đoạn AC tại Q .

a) Đặt $AP = x$, hãy tìm tập hợp các giá trị của x .

b) Tính giá trị của biểu thức $\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}$.

c) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác APQ theo b, c .

Bài tập 14: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và M là một điểm thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C và D . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai $\triangle ACM$ và $\triangle BDM$.

Bài tập 15: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O), (A khác B và C). Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại D khác C , lấy I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác B .

- Chứng minh: $\triangle KAC$ cân.
- Xác định vị trí của A để độ dài đoạn AI là lớn nhất.

Bài tập 16: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Điểm M lưu động trên cung nhỏ BC . Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC ($H \in AB, K \in AC$). Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

Bài tập 17: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Đường thẳng (d) đi qua A cắt đường tròn (O_1, R_1) tại M và cắt đường tròn (O_2, R_2) tại N (các điểm M, N khác A). Xác định vị trí của đường thẳng (d) để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

Bài tập 18: Đường tròn tâm O có dây AB cố định và I là điểm chính giữa của cung lớn AB . Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB , dựng tia $Ax \perp MI$ tại H và cắt BM tại C .

a) Chứng minh: $\triangle AIB$ và $\triangle AMC$ cân.

b) Khi M di động trên cung lớn AB . Chứng minh rằng điểm C di động trên một cung tròn cố định.

c) Xác định vị trí của điểm M để chu vi $\triangle AMC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 19: Cho $\triangle ABC$ nhọn. Điểm D di động trên cạnh BC . Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các $\triangle ABD, \triangle ACD$ tương ứng.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle AO_1O_2$ luôn đi qua một điểm cố định khác A .

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AO_1O_2$. Hãy xác định vị trí của D trên BC sao cho IO nhỏ nhất.

Bài tập 20: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C trên AB . Tia phân giác của $\widehat{ACD}$ cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là E , cắt tia phân giác $\widehat{ABC}$ tại H .

a) Chứng minh: $AE \parallel BH$.

b) Tia phân giác $\widehat{CAB}$ cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là F , cắt CE tại I . Tính diện tích $\triangle FID$ trong trường hợp tam giác đó là đều.

c) Trên đoạn BH lấy K sao cho $HK = HD$, gọi J là giao của AF và BH . Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 21: Cho đường tròn tâm O , bán kính R và dây $BC < 2R$, các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A . M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC và không trùng với B, C . Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . BM cắt HK tại P , CM cắt HI tại Q .

a) Chứng minh: $PQ \parallel BC$.

b) Xác định vị trí của M để tích $MH \cdot MI \cdot MK$ đạt giá trị lớn nhất.

CHỦ ĐỀ 14

QUỸ TÍCH - TẬP HỢP ĐIỂM

1. Kiến thức cơ bản:

1.1. Để giải bài toán quỹ tích, ta thực hiện các bước sau:

Phân thuận: Phân tích các yếu tố cố định và thay đổi để chỉ ra tập hợp mà điểm cần tìm quỹ tích phải thuộc vào (thường là đường tròn, đường thẳng). Ta sẽ sử dụng các quỹ tích cơ bản (như cung chứa góc, trung trực, đường tròn Apollonius ...) để xác định và chứng minh quỹ tích. Để dự đoán quỹ tích, có thể phải vẽ một số vị trí (trong đó có các vị trí đặc biệt) của cấu hình.

Phản đảo: Sau khi đã làm phân thuận, tức là xác định tập hợp M những điểm mà quỹ tích thuộc vào, ta cần xem xét xem với những điểm P nào thuộc M thì tồn tại một cấu hình có vị trí điểm cần tìm quỹ tích trùng với P . Bước này sẽ loại bỏ những điểm không tương ứng với một cấu hình nào.

Giới hạn: Sau khi thực hiện phản đảo, ta có thể sẽ thấy rằng chỉ một phần của M thuộc về quỹ tích. Bước này mô tả rõ phần đó. Ví dụ mặc dù điểm P thuộc đường tròn (C) nhưng quỹ tích có thể chỉ là một cung của (C) .

Kết luận: Dựa trên các phần trên kết luận quỹ tích là tập hợp những điểm như thế nào.

2.2. Một số quỹ tích cơ bản

- (1) Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B là *đường trung trực* của đoạn thẳng đó, tức là đường thẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB.
- (2) Quỹ tích những điểm A cách một điểm I cố định một đoạn $AI = R$ không đổi là *đường tròn* tâm I bán kính R.
- (3) Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau a và b là hai *đường phân giác* của góc tạo bởi hai đường thẳng đó.
- (4) Quỹ tích những điểm cách một đường thẳng a cho trước một đoạn d không đổi là *hai đường thẳng* song song với a và cách a một khoảng cách bằng d.
- (5) Quỹ tích những điểm nhìn đoạn AB cố định một góc α cố định là *hai cung chứa góc α nhận AB làm dây cung*. Đặc biệt, nếu $\alpha = 90^\circ$ thì quỹ tích là đường tròn đường kính AB.
- (6) Cho hai điểm A, B và số thực k. Quỹ tích những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$ là một đường thẳng vuông góc với AB tại H, trong đó H xác định bởi hệ thức:

$$(\overline{HA} + \overline{HB})\overline{BA} = k$$

- (7) Cho hai điểm A, B với $AB = 2a$ và số thực dương k.

Quỹ tích những điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = 2k^2$ là tập rỗng nếu $k^2 < a^2$ và là đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{k^2 - a^2}$.

- (8) Cho hai điểm A, B và số thực dương $k \neq 1$. Quỹ tích những điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$ là đường tròn đường kính EF, trong đó E và F là các điểm thuộc đường thẳng AB sao cho

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k \quad \text{và} \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -k$$

(Đường tròn Apollonius)

Lưu ý: Ta phải rèn cách giải bài toán quỹ tích:

- Các quỹ tích cơ bản.
- Đoán quỹ tích.
- Chứng minh quỹ tích đoán nhận là đúng.

Phương pháp 1: Chứng minh quỹ tích (tập hợp điểm) dựa vào tính chất của trục đối xứng, đối xứng tâm, phép tịnh tiến, phép quay, phép vị tự.

Phương pháp 2: Chứng minh quỹ tích nhanh và chính xác học sinh cần phải luyện :

- Xác định yếu tố cố định.
- Xác định yếu tố không đổi.
- Xác định yếu tố thay đổi.

Lưu ý: Phải rèn phán đoán quỹ tích.

Các dạng quỹ tích thường gặp:

- (1) Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
- (2) Quỹ tích các điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.
- (3) Tập hợp các điểm cách đều một điểm O cho trước một khoảng không đổi R là đường tròn (O; R).
- (4) Quỹ tích các điểm cách đều một đường thẳng cố định một khoảng bằng h là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.
- (5) Quỹ tích các điểm nhìn một cạnh dưới một góc bằng 90° là một đường tròn có tâm là trung điểm của cạnh đó và đường kính là độ dài của cạnh đã cho.
- (6) Quỹ tích các điểm nhìn đoạn AB dưới một góc không đổi là hai cung chứa góc đi qua A, B và đối xứng với nhau qua AB.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O; R) và tam giác cân ABC có $AB = AC$ nội tiếp đường tròn (O; R) Kẻ đường kính AI. Gọi M là một điểm bất kì trên cung nhỏ AC. Mx là tia đối của tia MC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho $MD = MC$.

Suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$.

Suy ra: B, E, C thẳng hàng.

b) $\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{DN} = \widehat{DM} \Rightarrow DM = DN$.

$\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow DB = DC$

$\widehat{DCN} = \widehat{DBM}$

$\Rightarrow \triangle BMD = \triangle CND \Rightarrow BM = CN$.

c) Tính được $DI = 2KD \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{DI}{DK} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \text{const}$

K thuộc trung trực của AD $\Rightarrow I$ thuộc đường thẳng vuông góc với

AD cắt AD tại P sao cho $\frac{DP}{DA} = \sin^2 \frac{A}{2}$

Bài tập 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC sao cho $AM = CN$.

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$ luôn đi qua một điểm cố định khác A.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$.

Giải

a) Đường cao AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại P

$\Rightarrow \triangle AMP = \triangle CNP$

$\Rightarrow PA = PC$

$\Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$\Rightarrow P$ cố định.

b) Tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$ nằm trên đường trung trực của AP.

Bài tập 4: Tìm quỹ tích đỉnh C các $\triangle ABC$ có AB cố định, đường cao BH bằng cạnh AC.

Hướng dẫn

Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại A, trên đó lấy E sao cho $AE = AB$

$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle BHA$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = 90^\circ \Rightarrow C$ thuộc cung chứa góc 90° dựng trên AE.

Bài tập 5: Tứ giác lồi ABCD có AC cố định, góc $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

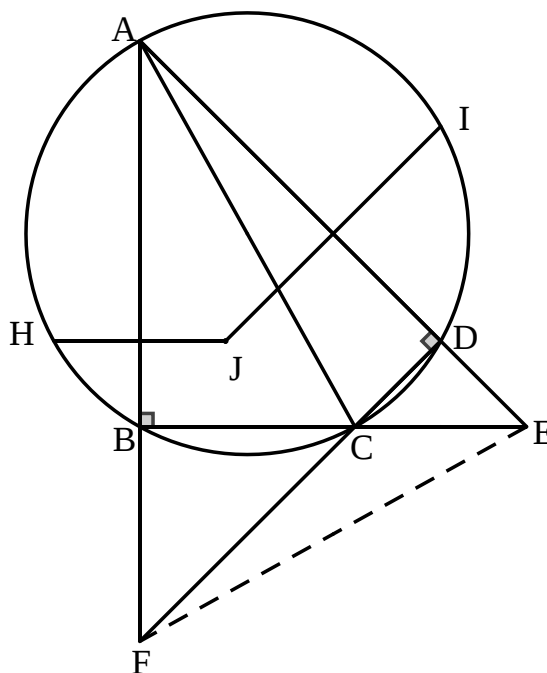
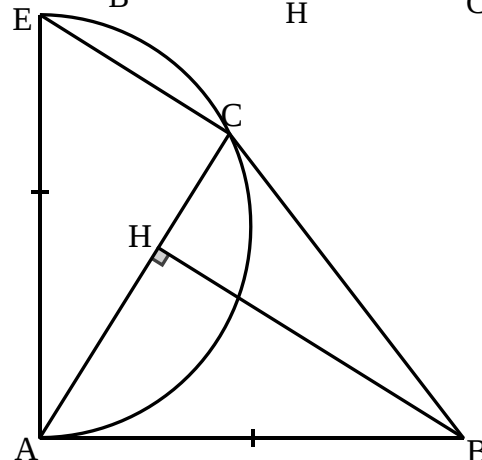
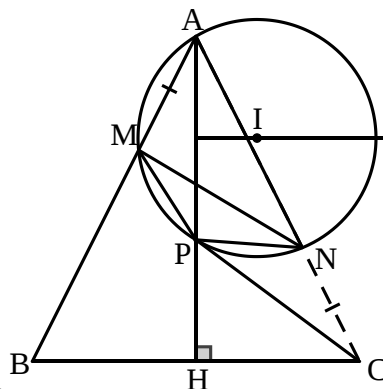
a) Chứng minh rằng BD có độ dài không đổi.

b) Gọi E là giao của BC và AD, F là giao của DC và AB. Chứng minh EF có độ dài không đổi?

c) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$.

Hướng dẫn

a) $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow B, D$ thuộc đường tròn đường kính AC



$$\widehat{A} = 45^\circ \Rightarrow BD = R\sqrt{2} = \text{const.}$$

b) $\triangle CDE$ vuông cân $\Rightarrow CD = ED$.

$\triangle ADF$ vuông cân $\Rightarrow DA = DF$.

$$\Rightarrow \triangle ACD = \triangle FED$$

$$\Rightarrow EF = AC = \text{const}$$

c) Trung trực của AF cắt trung trực của AE tại J, cắt (O) tại H. Trung trực của AE cắt (O) tại I
 $\Rightarrow H, I$ là điểm chính giữa của hai cung AC $\Rightarrow H, I$ cố định.

$$\widehat{HJI} = \widehat{BCD} = 135^\circ$$

$\Rightarrow J$ thuộc cung chứa góc 135 độ dựng trên HI.

Bài tập 6: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và D có các đường kính AOB và AO'C vuông góc với nhau tại A. Một đường thẳng d đi qua A và cắt các nửa đường tròn không chứa điểm D của (O), (O') tương ứng tại các điểm M, N khác A.

a) Chứng minh: $\triangle ABM \sim \triangle CAN$.

b) Tìm quỹ tích giao điểm P của OM và O'N khi d di động.

c) Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AD tại I. Chứng minh rằng: $IM^2 = IA \cdot ID$.

d) Tìm vị trí của cát tuyến d để cho tiếp tuyến tại M của (O) và tiếp tuyến tại N của (O') cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AD.

e) Xác định vị trí của d sao cho tứ giác MNCB có diện tích lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo R và R'.

Hướng dẫn

a) $\triangle ABM \sim \triangle CAN$.

b) $\widehat{PMA} = \widehat{PNA} = \widehat{OAM} + \widehat{O'AN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OPO'} = 90^\circ \Rightarrow P$ thuộc đường tròn đường kính OO'.

c) $\triangle IMA \sim \triangle IDM \Rightarrow IM^2 = IA \cdot ID$

d) Tương tự câu c giả sử tiếp tuyến tại N của (O') cắt AD tại I' $\Rightarrow I'M^2 = I'A \cdot I'D$.

Vậy I trùng $I' \Leftrightarrow IM = I'N \Leftrightarrow I$ thuộc trung trực của NM.

Vậy khi I là giao của AD và trung trực của MN thì tiếp tuyến tại M của (O) và tiếp tuyến tại N của (O') cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AD.

e) Diện tích tứ giác BMNC lớn nhất $\Leftrightarrow (S_{BMA} + S_{ANC})_{\min} \Leftrightarrow (S_{BMA})_{\min} \Leftrightarrow (BM \cdot AM)_{\min}$
 Ta lại có: $BM^2 + AM^2 = R^2$.

Vậy: $BM \cdot AM \leq \frac{R^2}{2}$ dấu bằng khi $BM = AM \Leftrightarrow d$ tạo với AB một góc 45° .

Khi đó diện tích tứ giác BMNC là: $\frac{1}{2}(R \cdot R' + R^2 + R'^2)$.

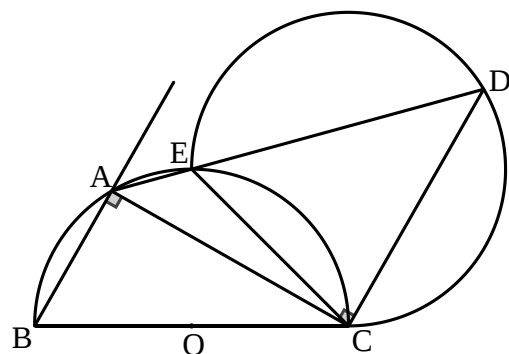
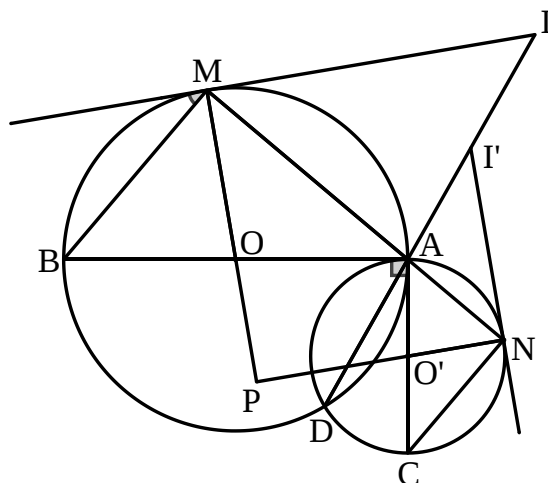
Bài tập 7: Một điểm A di động trên nửa đường tròn đường kính BC cố định. Đường thẳng qua C song song với BA cắt đường phân giác ngoài của góc BAC của tam giác ABC tại D. Tìm quỹ tích D.

Hướng dẫn

AD cắt (O) tại E $\Rightarrow E$ cố định

Ta lại có: $\widehat{CDE} = 45^\circ$.

Vậy D thuộc cung chứa góc 45° dựng trên CE.



Bài tập 8: Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và đường thẳng d cắt $(O; R)$ tại hai điểm A, B cố định. Một điểm M di động trên d và ở bên ngoài đoạn AB . Vẽ các tiếp tuyến MP và MN với $(O; R)$. Gọi N, P là hai tiếp điểm.

a) Chứng minh rằng khi M di động, đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

c) Trình bày cách dựng điểm M sao cho tam giác MNP

là tam giác đều.

Hướng dẫn

a) Giả sử (I) cắt AB tại H khác $M \Rightarrow \widehat{OHM} = 90^\circ$

$\Rightarrow HA = HB$ hay H cố định.

Vậy (I) đi qua O và H cố định.

b) $IO = IH \Rightarrow I$ thuộc trung trực của OH .

c) Tam giác MNP đều $\Leftrightarrow \widehat{OMN} = 30^\circ$

$\Leftrightarrow OM = 2ON = 2R$.

Vậy M thuộc đường tròn $(O; 2R)$.

Bài tập 9: Cho hình vuông $ABCD$ cố định. Một điểm I di động trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E . Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M . Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F . Tìm quỹ tích điểm F .

Hướng dẫn

Trên BC lấy G sao cho $AI = BG \Rightarrow AI \perp EG$.

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác AEB với 3 điểm thẳng hàng C, I, M , ta có:

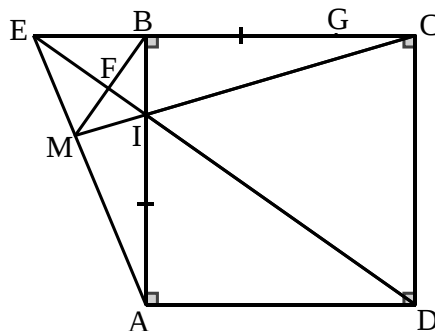
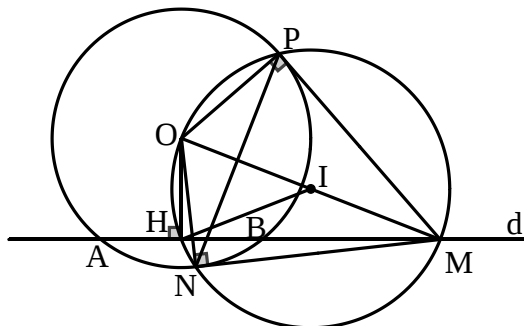
$$\frac{CB}{CE} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{ME}{MA} = 1 \quad (1)$$

Lại có $\frac{CB}{CE} = \frac{CD}{CE} = \frac{IB}{BE}$

Thay vào (1) $\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{BE}{IA} = \frac{BE}{BG}$

$\Rightarrow MB \parallel AG$ hay $\widehat{DFB} = 90^\circ$.

Vậy F thuộc đường tròn đường kính BD (cung nhỏ AB).



Bài tập 10: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A cố định

trên đường tròn. Điểm M luôn động trên tiếp tuyến xy tại A của $(O; R)$. Qua M vẽ tiếp tuyến thứ hai với $(O; R)$. Gọi tiếp điểm là B .

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn ngoại tiếp ΔAMB .

ΔAMB .

b) Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔAMB .

Hướng dẫn

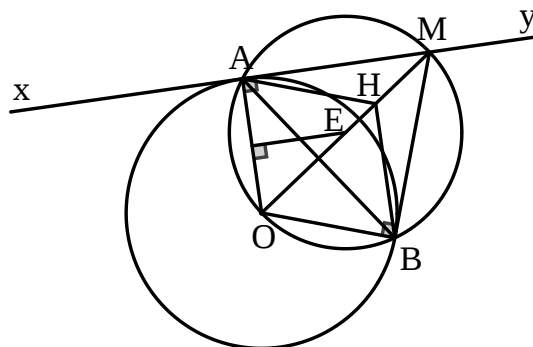
a) Đường tròn ngoại tiếp ΔAMB là đường tròn tâm E , đường kính OM .

$\Rightarrow E$ thuộc trung trực của OA

b) Tứ giác $AOBH$ là hình thoi

$\Rightarrow AH = R$.

Vậy H thuộc đường tròn $(A; R)$ (thuộc nửa mặt phẳng bờ xy chứa B).



Bài tập 11: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác của góc A cắt đường tròn tại điểm D. Một đường tròn (L) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm A và D. (L) cắt hai đường thẳng AB, AC ở giao điểm thứ hai là M, N (có thể trùng với A).

- a) Chứng minh rằng: $BM = CN$.
b) Tìm quỹ tích trung điểm K của MN.

Hướng dẫn

a) $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$

$\Rightarrow DB = DC; DM = DN$.

Ta lại có: $\widehat{MBD} = \widehat{NCD}; \widehat{BMD} = \widehat{NCD}$

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{CDN}$.

Vậy $\triangle BDM = \triangle CDN \Rightarrow BM = CN$.

b) Tương tự câu c bài b)

Bài tập 12: Cho góc vuông xOy. Một chiếc êke ABC trượt trong mặt phẳng của góc xOy sao cho đỉnh B di chuyển trên cạnh Ox, đỉnh C di chuyển trên cạnh Oy và đỉnh góc vuông A di chuyển trong góc xOy. Tìm quỹ tích điểm A.

Hướng dẫn

Tứ giác OBAC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{yOA} = \widehat{CBA} = \alpha$.

Vậy A thuộc tia tạo với tia Oy một góc α (phần nằm trong góc xOy)

Bài tập 13: Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến PA và cát tuyến PBC bất kì (A, B, C trên (O; R)). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi cát tuyến PBC quay quanh P.

- a) Tìm quỹ tích điểm đối xứng của O qua BC.
b) Tìm quỹ tích điểm H.

Hướng dẫn

a) Ta có: $PO' = PO = \text{const}$; P cố định

$\Rightarrow O'$ thuộc đường tròn (P; PO)

b) Tứ giác OO'HA là hình bình hành. Vẽ hình bình hành AOPK.

$\Rightarrow K$ cố định $\Rightarrow HO'PK$ cũng là hình bình hành

$\Rightarrow HK = O'P = OP = \text{const}$.

Vậy H thuộc đường tròn (K; OP).

Bài tập 14: Cho tam giác cân ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có $AB = AC = R\sqrt{2}$.

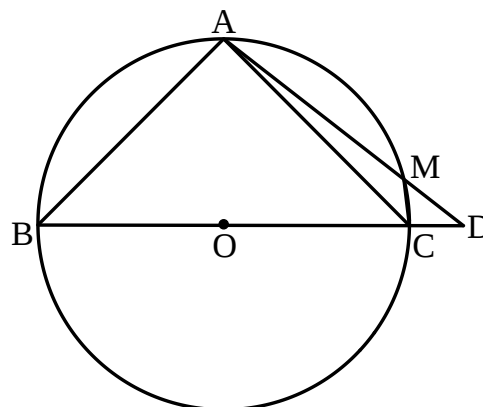
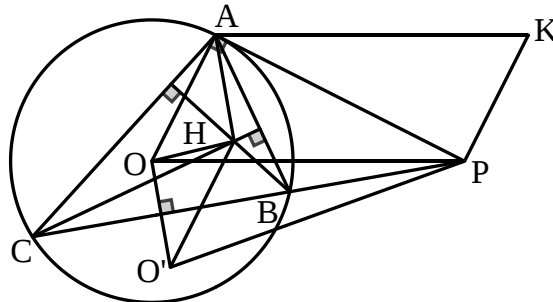
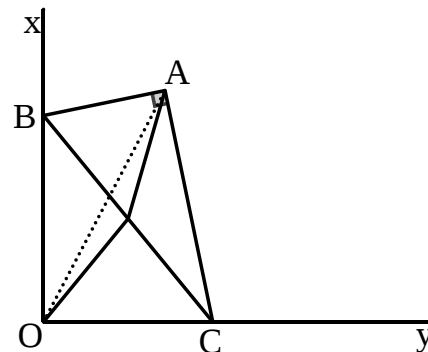
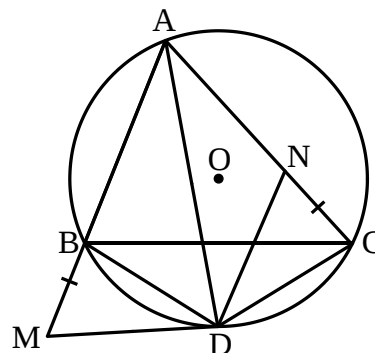
- a) Tính độ dài BC theo R
b) M là một điểm di động trên cung nhỏ AC, đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng: $AM \cdot AD$ luôn luôn là hằng số
c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MCD$ di động trên một đường cố định khi M di động trên cung nhỏ AC.

Hướng dẫn

a) BC là đường kính của (O).

b) Tam giác AMC đồng dạng với tam giác ACD

$\Rightarrow AM \cdot AD = AC^2 = R\sqrt{2}$.



c) $\widehat{ACM} = \widehat{MDC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CM} \Rightarrow AC \text{ là tiếp tuyến của (I)}$

$\Rightarrow IC$ vuông góc với AC cố định

$\Rightarrow I$ thuộc đường thẳng qua C và vuông góc với CA .

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC cân tại A . Một điểm P di động trên cạnh BC . Vẽ PQ song song với AC (Q thuộc AB), vẽ PR song song với AB (R thuộc AC). Tìm quỹ tích các điểm D đối xứng với P qua QR .

Bài tập 2: Cho góc vuông xOy . Các điểm A và B tương ứng thuộc tia Ox , Oy sao cho $OA = OB$. Một đường thẳng d đi qua A và cắt OB tại M nằm giữa O và B . Từ B hạ đường thẳng vuông góc với AM cắt AM tại H và cắt đường thẳng OA tại I .

a) Chứng minh rằng $OI = OM$ và tứ giác $OMHI$ nội tiếp.

b) Gọi K là hình chiếu của O lên BI . Chứng minh rằng $OK = HK$.

c) Tìm quỹ tích điểm K khi M di động trên đoạn OB .

Bài tập 2: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M di động trên cung BC .

a) Trên tia đối của tia CM , lấy đoạn $CE = MB$. Tìm tập hợp các điểm E khi M di động.

b) Trên tia đối của tia MC , lấy đoạn $MF = MB$. Tìm tập hợp các điểm F khi M di động.

Bài tập 3: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một cát tuyến (d) bất kỳ qua B cắt (O) tại C và (O') tại C' . Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn CC' khi d quay quanh B .

Bài tập 4: Cho hai đường thẳng xx' và yy' vuông góc với nhau tại O và một điểm P cố định. Một góc vuông đỉnh P quay quanh P . các cạnh của góc vuông này cắt xx' tại A và yy' tại B . Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn AB .

Bài tập 5: Trên mỗi bán kính OM của đường tròn (O) lấy đoạn OI bằng khoảng cách từ M đến đường kính cố định AB . Tìm tập hợp các điểm I .

Bài tập 6: Cho đường tròn (O) cố định và một dây AB cố định. Trên cung nhỏ AB , ta lấy điểm C di động. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài tập 7: Cho đường tròn (O) và một dây AB cố định. Kẻ một dây AC . Trên đường thẳng AC lấy hai điểm M , M' sao cho $CM = CM' = CB$, M nằm ngoài đường tròn. Tìm tập hợp các điểm M và M' khi C vạch cung AB .

Bài tập 8: Cho đường tròn $(O; R)$, 2 điểm B, C cố định trên (O) và một điểm A di động trên (O) . Tìm tập hợp các trực tâm H của tam giác ABC .

Bài tập 9: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng sao cho hình chiếu của M trên ba cạnh của tam giác là ba điểm thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý trên đoạn AB . Dựng trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB các hình vuông $ANCD$ và $BMEF$. Các đường tròn ngoại tiếp chúng tâm P và Q cắt nhau tại M và N .

a) Chứng minh rằng: AE, BC đi qua N .

b) Chứng minh rằng: MN đi qua một điểm cố định khi M di động.

c) Tìm tập hợp trung điểm I của PQ khi M di động.

Bài tập 11: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm P cố định trong đường tròn không trùng với O . Qua P dựng dây cung APB , các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại M . Tìm tập hợp các điểm M khi dây AB quay quanh P .

Bài tập 12: Hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại A và B . Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại C và (O') tại D . Tìm tập hợp tâm I của các đường tròn nội tiếp tam giác BCD .

Bài tập 13: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O . Vẽ đường thẳng (d) quay quanh O cắt AD, BC tại E, F . Từ E, F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với DB, AC chúng cắt nhau tại I .

a) Chứng minh rằng I thuộc một đường thẳng cố định

b) Từ I kẻ IH vuông góc với EF tại H . Chứng minh H thuộc một đường cố định và IH đi qua một điểm cố định.

Bài tập 14: Cho tam giác ABC có BC cố định còn A di động sao cho góc BAC bằng 60° . Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài tập 15: Cho đường tròn (C) tâm O. P là một điểm cố định nằm trong (C) nhưng không trùng với O. Một đường thẳng (d) thay đổi qua P cắt (C) tại A và B. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn BC khi (d) quay quanh P.

Bài tập 16: Cho hai điểm A, B cố định. C là một điểm thay đổi trên đoạn AB, C khác A và B. Dựng các hình vuông ACDE và BCFG nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Tìm quỹ tích trung điểm I của EG.

Bài tập 17: Cho một góc nhọn Oxy và một điểm M nằm trong góc ấy. Từ M ta kẻ các đường vuông góc MH xuống cạnh Ox và MK xuống cạnh Oy. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $MH + MK = a$, trong đó a là một độ dài cho trước.

Bài tập 18: Cho tam giác đều ABC và một điểm P nằm trong tam giác. Hạ PA_1, PB_1, PC_1 vuông góc với BC, CA, AB tương ứng. Tìm tập hợp các điểm P sao cho $A_1B_1C_1$ là tam giác cân.

Bài tập 19: Cho tam giác đều ABC. P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ P đến cạnh BC, CA, AB tương ứng.

a) Biết rằng $x = 1, y = 2, z = 3$. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm quỹ tích những điểm P trong tam giác sao cho $x + y = z$. Từ đó suy ra tập hợp những điểm P trong tam giác sao cho x, y, z lập thành 3 cạnh của một tam giác.

Bài tập 20: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng (d) thay đổi nhưng luôn đi qua A cắt $(C_1), (C_2)$ tại các điểm thứ hai C và D tương ứng. Tìm quỹ tích trung điểm M của CD khi (d) quay quanh A.

Bài tập 21: Cho đường tròn (C) tâm O bán kính R. Đường tròn (C_1) có bán kính $R/2$ tiếp xúc trong với (C) tại A. Bây giờ ta cố định vị trí điểm A trên đường tròn (C_1) là cho (C_1) lăn nhưng luôn tiếp xúc trong với (C). Hãy tìm quỹ tích điểm A.

Bài tập 22 (*): Cho hai điểm A, B cố định, $AB = 2a$.

Tìm quỹ tích những điểm M sao cho $MA + MB = 2c$ không đổi, với $c > a$.

Bài tập 23: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm di động trên cạnh CD. AM và BM kéo dài cắt BC và AD kéo dài tại P và Q. DP cắt CQ tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi M di động trên cạnh BC.

Bài tập 24: Cho tam giác ABC. Trên AB kéo dài về phía B lấy điểm M và trên AC kéo dài về phía C lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Bài tập 25: Cho hai điểm A, B cố định. C là một điểm thay đổi trên đoạn AB, C khác A và B. Dựng các hình vuông ACDE và BCFG nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Gọi I, J là tâm các hình vuông ACDE và BCFG. Tìm quỹ tích trung điểm K của IJ.

Bài tập 26: Tìm quỹ tích những điểm cách đều một điểm đã cho và một đường thẳng đã cho.

Hướng dẫn

Bài toán tưởng như rất đơn giản này không thể giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Ta có thể dựng một số vị trí để thấy rằng quỹ tích không phải là đường thẳng. Một đặc điểm đáng chú ý nữa là trên 1 đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho sẽ tìm được duy nhất 1 điểm thỏa mãn tính chất.

Bài này có thể giải được dễ dàng bằng phương pháp tọa độ. Gọi điểm đã cho là P và đường thẳng đã cho là d. Xét hệ trục tọa độ có Ox là đường thẳng d và Oy là đường thẳng qua điểm P và vuông góc với d. Giả sử P có tung độ là $p > 0$.

Xét điểm $M(x, y)$ bất kỳ nằm trên quỹ tích. Dễ thấy $y > 0$. Khi đó khoảng cách từ M đến d là y và từ M đến P là $\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$.

Từ đó ta có $y = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \Leftrightarrow y^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$.

Đó là phương trình của một parabol!

CHỦ ĐỀ 15

DỤNG HÌNH

1. Kiến thức cơ bản:

Dụng hình bằng thước và com-pa là dạng toán khó đòi hỏi người giải phải nắm vững các kiến thức cơ bản, kỹ năng cũng như sự sáng tạo trong việc kẻ thêm các yếu tố phụ để kết nối các dữ kiện. Vì thế nắm vững kỹ năng dụng hình sẽ có ý nghĩa quan trọng trong việc giải toán hình học nói chung. Bài toán dụng hình bằng thước và compa có ý nghĩa toán học rất sâu sắc và nội dung của nó nhiều lúc vượt ra khỏi lĩnh vực hình học. Ông Vua của các nhà Toán học Carl Friederich Gauss rất tự hào với kết quả tìm ra cách dựng đa giác đều 17 cạnh của mình. Kết quả này có được nhờ vào lượng giác, cụ thể Gauss đã tính được $\cos \frac{360^\circ}{17}$ chỉ thông qua các phép tính số học và phép khai căn bậc 2.

Để giải bài toán dụng hình, ta đi theo các bước cơ bản sau:

Phân tích: Giả sử hình đã dựng được, tìm cách kết nối các đối tượng đã biết với các đối tượng cần dựng bằng những cầu nối để tìm ra quy trình dựng: Bắt đầu từ một thành phần có thể dựng được, tiếp tục dựng ra các thành phần khác cho đến khi hoàn thành yêu cầu. Ví dụ phép dựng một tam giác sẽ hoàn thành khi ta dựng được 3 đỉnh của nó.

Cách dựng: Nêu ra các bước để dựng được cấu hình thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mỗi bước dựng phải là những động tác có thể thực hiện được bằng thước và compa (kẻ đường thẳng nối hai điểm, vẽ một đường tròn có tâm và bán kính xác định, tìm giao điểm của hai đường thẳng, hai đường tròn ...).

Chứng minh: Chứng minh cách dựng vừa nêu ở phần trên sẽ cho ta cấu hình cần dựng.

Biện luận: Biện luận số nghiệm của bài toán theo các điều kiện ban đầu cho. Khi nào vô nghiệm, khi nào có nghiệm duy nhất, khi nào có 2 nghiệm hình ...

Kết luận: Tổng kết lại các bước trên để đưa ra kết luận.

Ta đã biết vẽ hình bằng nhiều dụng cụ: thước (thước thẳng), compa, êke, thước đo góc, ...

Ta xét các bài toán về hình mà chỉ sử dụng hai dụng cụ là thước và compa, chúng được gọi là các bài toán dụng hình.

Với thước, ta có thể:

- Vẽ được một đường thẳng khi biết hai điểm của nó.
- Vẽ được một đoạn thẳng khi biết hai đầu mút của nó.
- Vẽ được một tia khi biết góc và một điểm của tia.
- Với compa, ta có thể vẽ được một đường tròn khi biết tâm và bán kính của nó.

Ở hình học lớp 6 và hình học lớp 7, với thước và compa, ta đã biết cách giải các bài toán dụng hình sau :

(1) Dựng trung trực của một đoạn thẳng.

Dựng trung điểm của một đoạn thẳng.

Dựng một đường thẳng đi qua một điểm đã cho và vuông góc với một điểm đã cho.

(2) Dựng một đường thẳng đi qua một điểm đã cho và song song với một điểm đã cho.

(3) Dựng một đoạn thẳng bằng n lần đoạn thẳng đã cho.

Dựng một đoạn thẳng bằng $1/n$ đoạn thẳng đã cho.

(4) Dựng một góc bằng góc đã cho. Chia đôi một góc.

Dựng tổng và hiệu của hai góc.

(5) Cho hai đoạn thẳng có độ dài a, b, dựng đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{ab}$.

(6) Dựng tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến một đường tròn.

(7) Dựng đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của một tam giác.

(8) Dựng tam giác biết ba cạnh, hoặc biết hai cạnh và góc xen giữa, hoặc biết một cạnh và hai góc kề.

Dựng hình bằng phương pháp đại số:

Giải một bài toán dựng hình bằng phương pháp đại số thường được quy về dựng một số đoạn thẳng. Ta gọi các độ dài các đoạn thẳng phải tìm là x, y, z . Sau đó ta lập phương trình để biểu thị mối tương quan giữa các đoạn thẳng đã biết là a, b, c . Sau đó giải hệ phương trình để được các ẩn x, y, z .

Một vài đoạn thẳng dựng được biểu thị bằng biểu thức đơn giản là:

$$x = a \pm b \quad ; \quad x = \frac{a \cdot b \cdot c}{e \cdot f}$$

$$x = na, n \in \mathbb{N} \quad ; \quad x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2} \quad (a^2 + d^2 > b^2 + c^2)$$

$$x = \frac{a}{n}, n \in \mathbb{N} \quad ; \quad x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$$

$$x = \frac{na}{m}; m, n \in \mathbb{N} \quad ; \quad x = \sqrt{ab}$$

$$x = \frac{ab}{c} \quad ; \quad x = a\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}$$

Dựng hình bằng phương pháp biến hình:

Dựng hình bằng phương pháp biến hình là áp dụng phép đối xứng, phép tịnh tiến, phép quay, đồng dạng. Ta quy việc dựng một hình về việc dựng một điểm M . Dựng trực tiếp điểm M đôi khi gặp khó khăn. Trong trường hợp này ta chọn một phép biến hình là một song ánh f (để f có ánh xạ ngược) biến điểm M thành điểm M' mà điểm M' này ta có thể dựng được một cách dễ dàng. Sau khi đã dựng được điểm M' ta được phép biến hình ngược: $f^{-1}(M') = M$. Ví dụ như tịnh tiến $\vec{a}$.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Dựng $\triangle ABC$ biết cạnh $BC = a$, đường cao $AH = h$, trung tuyến $AM = m$.

Giải

Phân tích

Giả sử ta dựng được $\triangle ABC$ thoả mãn:

$BC = a$; $AH = h$; $AM = m$.

Ta phải xác định đỉnh A thoả mãn 2 điều kiện:

- A cách BC một khoảng bằng h , suy ra $A \in$ đường thẳng $d // BC$ và cách BC một khoảng h .
- A cách điểm M là trung điểm của BC một khoảng m .

Cách dựng

- Dựng BC bằng a
- Dựng đường thẳng $d // BC$ và cách BC một khoảng bằng h .
- Dựng đường tròn tâm M bán kính m cắt d tại A .

$\Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác cần dựng.

Chứng minh

$\triangle ABC$ có $BC = a$ (cách dựng)

Đường cao $AH = h$ (cách dựng)

Trung tuyến $AM = m$ (cách dựng)

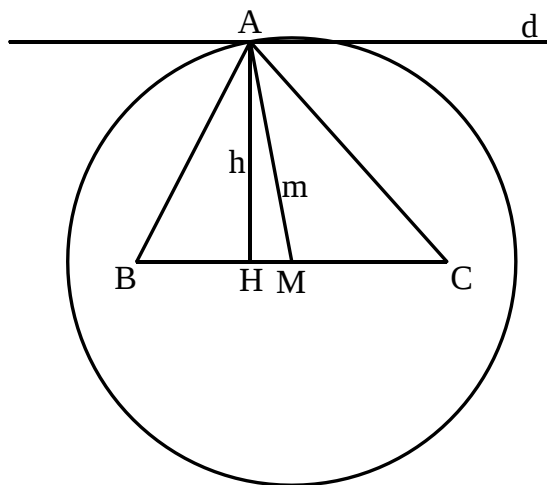
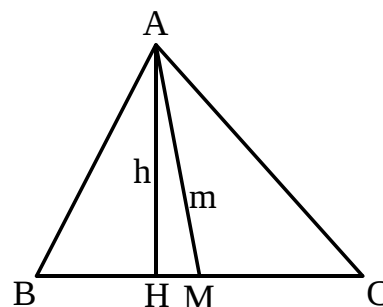
$\Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác cần dựng.

Biện luận

* $m > h \Rightarrow$ bài toán có 4 nghiệm (4 điểm A)

* $m = h \Rightarrow$ bài toán có 2 nghiệm (2 điểm A)

* $m < h \Rightarrow$ bài toán vô nghiệm (không có điểm A)



Bài tập 2: Cho đường thẳng m song song với đường thẳng n và điểm A không thuộc 2 đường thẳng đó. Dụng điểm $B \in m$, $C \in n$ sao cho $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Giải

Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm $B \in m$, điểm $C \in n$ để $\triangle ABC$ đều.

Dựng hình chiếu vuông góc của A trên điểm M là E

Dựng tam giác đều AEF .

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ ta có:

$$AE = AF \text{ (}\triangle AEF \text{ đều)}$$

$$\widehat{CAF} = \widehat{BAE} (= 60^\circ + \widehat{CAE})$$

$$AB = AC \text{ (}\triangle ABC \text{ đều)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEB = \triangle AFC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CFA} = 90^\circ \text{ (vì } AE \perp BE)$$

Cách dựng

Từ A hạ $AE \perp m$ tại E

- Dụng $\triangle AEF$ đều

- Từ F dựng đường vuông góc với AF cắt n tại C

- Nối A với C , dựng đường tròn tâm A bán kính AC cắt m tại B .

- Nối A với B , B với C ta được $\triangle ABC$ cần dựng

Chứng minh

Xét $\triangle$ vuông ABE và $\triangle$ vuông ACF có:

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AF \end{array} \right\} \text{(Cách dựng)} \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACF \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AE = AF$$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAF}$$

$$\text{Mà } \widehat{CAF} = \widehat{EAF} + \widehat{CAE} = 60^\circ + \widehat{CAE}$$

$$\text{Và } \widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$$\triangle ABC \text{ có: } AB = AC \text{ và } \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ đều}$$

d) Biện luận

Bài toán có 2 nghiệm vì ta có thể dựng được 2 $\triangle$ đều

Bài tập 3: Dụng $\triangle ABC$ biết $BC = a$; $AB + AC = d$; $\widehat{ABC} = \alpha$.

Giải

a) Phân tích

Giả sử ta đã dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn các điều kiện của đầu bài.

Kéo dài BA và trên đường kéo dài lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$$\text{Suy ra: } BD = AB + AD = AB + AC = d$$

$$\Rightarrow \triangle DAC \text{ cân} \Rightarrow A = BD \cap \text{đường trung trực của } CD$$

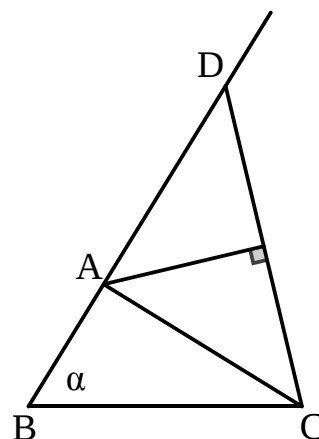
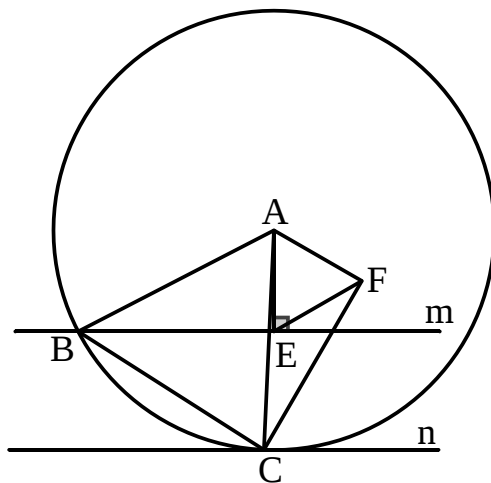
b) Cách dựng

- Dụng đoạn $BC = a$

- Dụng tia Bx sao cho $\widehat{xBC} = \alpha$.

- Dụng điểm D trên Bx sao cho $BD = d$

- Nối D với C .



- Dựng điểm A là giao của BD và đường trung trực của CD.

- Nối A với C ta được $\triangle ABC$ cần dựng.

c) *Chứng minh*

$ABC = \alpha$ (cách dựng)

$BC = a$ (cách dựng)

$A \in$ đường trung trực của DC $\Rightarrow AD = AC$

$A, D \in Bx$; $BD = d$ (cách dựng)

$\Rightarrow BD = AB + AD = AB + AC = d$

$\Rightarrow \triangle ABC$ là $\triangle$ cần dựng.

d) *Biện luận*

- $d < a \Rightarrow$ bài toán vô nghiệm

- $d > a \Rightarrow$ Bài toán có một nghiệm

Bài tập 4: Dựng $\triangle ABC$ biết $BC = a$, trung tuyến $AM = m$, đường cao $CH = h$.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thoả mãn điều kiện của đầu bài

$\Rightarrow A \in$ đường tròn tâm M bán kính m.

$H \in$ đường tròn đường kính BC

$CH = h$; B, H, A thẳng hàng

Cách dựng:

- Dựng $BC = a$, trung điểm M của BC

- Dựng đường tròn (M, m)

- Dựng đường tròn đường kính BC

- Dựng điểm $H \in$ đường tròn đường kính BC sao cho $HC = h$

- Dựng điểm A là giao điểm của BH và (M, m)

Chứng minh:

$BC = a$

$CH = h$ (cách dựng)

$\Rightarrow A \in (M, m) \Rightarrow AM = m$

$\Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác cần dựng

Biện luận:

Bài toán có nghiệm khi $\begin{cases} h < BC = a \\ 2m > h \end{cases}$

Bài toán có hai nghiệm do BH cắt (M, m) tại hai điểm là A và A'.

Bài tập 5: Dựng $\triangle ABC$ biết $B = \beta < 90^\circ$, đường cao BH và đường cao AD.

Giải

Phân tích:

Giả sử $\triangle ABC$ đã dựng được.

$\triangle$ vuông ABD là dựng được

$\Rightarrow$ ta chỉ cần dựng điểm C.

Muốn vậy ta phải đi dựng điểm H: $H \in$ giao của hai đường tròn đường kính AB và đường tròn tâm B bán kính BH $\Rightarrow C = AH \cap BD$

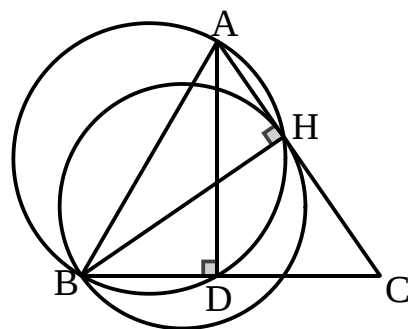
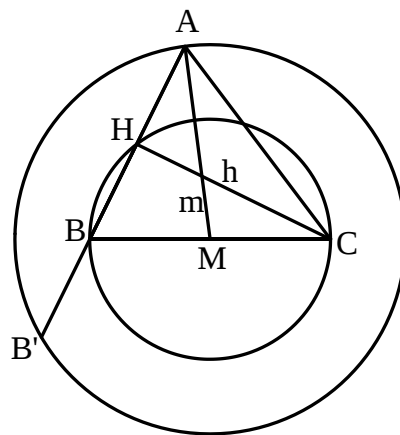
Cách dựng:

- Dựng $\triangle ABD$ vuông tại D

sao cho $ABD < 90^\circ$

và AD cho trước.

- Dựng điểm H là giao điểm



của hai đường tròn: (B, BH)

và đường tròn đường kính AB (BH cho trước).

- Dựng điểm C là giao của BD và AH $\Rightarrow \Delta ABC$ là Δ ta cần dựng.

Chứng minh:

$\angle ABD = \beta < 90^\circ$ (cách dựng)

AD là đường cao có độ dài cho trước (cách dựng)

BH bằng đoạn cho trước (cách dựng)

$\Rightarrow \Delta ABC$ thoả mãn yêu cầu của đề bài

Biện luận:

Bài toán luôn có nghiệm

Bài toán có một nghiệm

Bài tập 6: Dựng hình bình hành ABCD biết 2 đỉnh đối diện A và C còn 2 đỉnh B và D thuộc một đường tròn (O, R) cho trước.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được hình bình hành thoả mãn điều kiện của đề bài là ABCD. Nếu I là giao điểm của 2 đường chéo của ABCD thì: $I \in AC$ và $IA = IC$, $I \in BD$ và $IB = ID$; $B, D \in (O, R) \Rightarrow OI \perp BD$

Cách dựng:

- Dựng I là trung điểm của AC

- Dựng đường thẳng qua I

và $\perp OI$ cắt (O) tại B và D

$\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành cần dựng.

Chứng minh:

$OI \perp BD \Rightarrow IB = ID$

$IA = IC$ (cách dựng); $B, D \in (O, R)$ (cách dựng)

$\Delta AIB = \Delta DIC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ABI = \angle IDC \Rightarrow AB \parallel CD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành thoả mãn đầu bài.

Biện luận:

Bài toán có nghiệm khi điểm I ở trong đường tròn (O) khi đó bài toán có 1 nghiệm.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O, R) và điểm A $\in$ đường thẳng d.

Dựng đường tròn tiếp xúc với (O, R) và tiếp xúc với d tại A.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được (O', R') tiếp xúc với (O, R) và tiếp xúc với d tại A $\Rightarrow O' \in d'$ là đường thẳng qua A và $\perp$ với d.

Dựng điểm E sao cho $O'E = O'O$ ($AE = R$).

$\Rightarrow O'$ nằm trên đường trung trực của OE

$\Rightarrow O'$ là giao của đường trung trực của OE & d'

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng $d' \perp d$ tại A

- Dựng điểm E $\in d'$ sao cho $AE = R$

- Dựng đường trung trực của

OE là m, $m \cap d' \equiv O'$

- Dựng đường tròn (O', O'A)

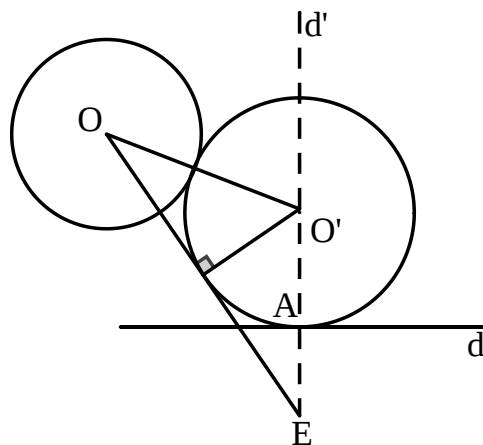
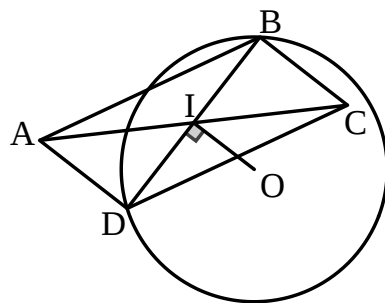
Đó là đường tròn cần dựng

Chứng minh:

(O', O'A) tiếp xúc với d tại A (cách dựng)

Nối O với O'. Vì $O' \in$ đường trung trực của OE

$\Rightarrow OO' = O'E$



Mà $O'E = O'A + AE \Rightarrow OO' = OA + AE = O'A + R$

$\Rightarrow (O, R)$ & $(O', O'A)$ tiếp xúc với nhau

$\Rightarrow (O')$ là đường tròn cần dựng

Biện luận:

Trên p có thể lấy E_1 ở trong đường tròn (O') sao cho $AE_1 = R$.

Vậy bài toán có 2 nghiệm hình.

Bài tập 8: Cho hình thang ABCD, $AD \parallel BC$. Dựng đường thẳng $EF \parallel BC$ chia đôi diện tích hình thang.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được $EF \parallel BC$ chia đôi diện tích hình thang kéo dài BC, CD cắt nhau tại O.

Suy ra:

$$\triangle OBC \sim \triangle OEF \sim \triangle OAD$$

$$\text{Đặt } OB = a, OA = b, OE = x$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OEF}} = \frac{a^2}{x^2}; \quad \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OEF}} = \frac{b^2}{x^2}$$

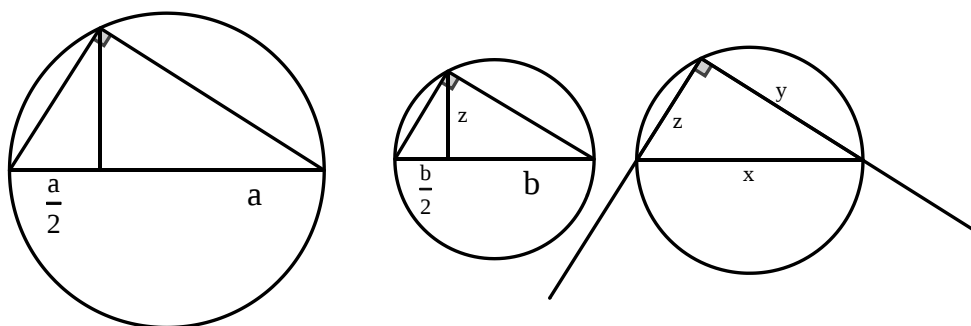
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OEF}} = \frac{a^2 + b^2}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà: } S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAD} &= S_{\triangle OEF} + S_{\text{hình thang EBCF}} + S_{\triangle OAD} \\ &= S_{\triangle OEF} + S_{\text{hình thang AEFD}} + S_{\triangle OAD} \\ &= 2S_{\triangle OEF} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 2x^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}}$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{\frac{a^2}{2}}; z = \sqrt{\frac{b^2}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + z^2}$$



Cách dựng:

- Kéo dài BA, CD cắt nhau ở O

- Dựng đoạn trung bình nhân của $a, \frac{a}{2}$ ta được y.

- Dựng đoạn trung bình nhân của $\frac{b}{2}, b$ ta được z.

- Dựng $\triangle$ vuông có y, z là 2 cạnh góc vuông

$\Rightarrow$ độ dài cạnh huyền của $\triangle$ đó là x.

- Trên OB lấy OE = x, dựng $EF \parallel BC$ ta sẽ được đoạn EF cần dựng.

Chứng minh:

Gọi hình thang ADEF diện tích là S_1 và hình thang EBCF có diện tích là S_2

Ta phải chứng minh $S_1 = S_2$

Ta có $\triangle OAD \sim \triangle DEF$ (vì $AD \parallel EF$)

$\Rightarrow$ Tỷ số đồng dạng là: $\frac{a}{x}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OEF}} = \frac{a^2}{x^2} = \frac{S_0}{S_0 + S_1}$$

$$\triangle OEF \sim \triangle OBC \Rightarrow \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OEF}} = \frac{b^2}{x^2} = \frac{S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1} = 2 \Rightarrow 2S_0 + S_1 + S_2 = 2S_0 + 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$$

$\Rightarrow S_{\text{hình thang ADEF}} = S_{\text{hình thang EBCF}}$

Biện luận:

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD. Dựng hai đường thẳng đi qua đỉnh A và chia hình bình hành thành 3 phần có diện tích bằng nhau.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được đường thẳng qua A cắt BC tại E, cắt CD tại F thỏa mãn:

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BECF} = S_{\triangle AFD} = \frac{1}{3} S_{\text{hình bình hành ABCD}}$$

$$\text{Gọi độ dài: } BE = x, \text{ đường cao } AH = h \Rightarrow S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} h \cdot x$$

$$S_{\text{hình bình hành ABCD}} = AH \cdot BC = h \cdot BC. \text{ Mà } S_{\text{hình bình hành ABCD}} = 3 S_{\triangle ABE}$$

$$\Rightarrow h \cdot BC = 3 \cdot \frac{1}{2} h x \Leftrightarrow BC = \frac{3}{2} x \Rightarrow x = \frac{2}{3} BC$$

$$\text{Tương tự ta gọi: } DF = y \Rightarrow y = \frac{2}{3} DC$$

Cách dựng:

$$\text{- Dựng đoạn } BE = \frac{2}{3} BC$$

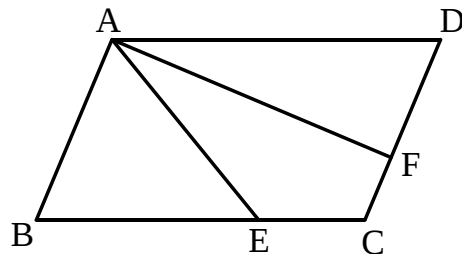
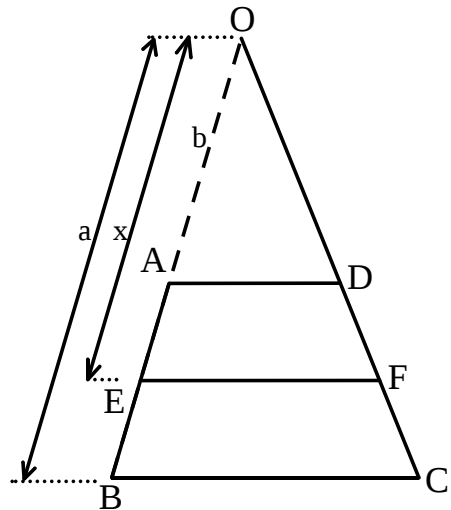
$$\text{- Dựng đoạn } DF = \frac{2}{3} DC$$

- Nối A với E, A với F ta được:

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AFD} = S_{\triangle AECF} = \frac{1}{3} S_{\text{hình bình hành ABCD}}$$

Chứng minh:

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} h x = \frac{1}{2} h \cdot \frac{2}{3} BC = \frac{1}{3} h \cdot BC = \frac{1}{3} S_{\text{hình bình hành ABCD}}$$



Tương tự: $S_{\triangle ADF} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABCD}$

$\Rightarrow S_{\triangle AECF} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABCD} \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

Biện luận:

Bài toán có một nghiệm hình

Bài tập 10: Cho 2 điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d.

Tìm điểm M $\in d$ sao cho AM + MB là nhỏ nhất.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được điểm M $\in d$ để (AM + MB) ngắn nhất.

Ta lấy điểm A' đối xứng với A qua d.

$\Rightarrow IA = IA'; MA = MA' \Rightarrow (AM + MB)$ ngắn nhất khi: A, M, B thẳng hàng.

$\Rightarrow M \in$ giao của đường thẳng nối 2 điểm A', B và đường thẳng d.

Cách dựng:

- Dựng điểm A' đối xứng A qua d

- Nối A' với B

- Dựng M = A'B $\cap$ d

Đó là điểm M cần dựng

Chứng minh:

- Lấy M' $\in d$ (M' tùy ý) và ta chứng minh:

$M'A + M'B > MA + MB$

Theo cách dựng thì A', M, B thẳng hàng và AM = A'M

Xét $\triangle A'BM'$ ta có: $M'A + M'B > A'B$ (1)

Mà theo cách dựng thì $A'B = MA' + MB = MA + MB$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$MA' + MB' > MA + MB \Rightarrow (MA + MB)$ min (đpcm)

Biện luận:

Bài toán có 1 nghiệm hình vì điểm A' dựng được là duy nhất.

Bài tập 11: Cho 2 đường thẳng b // c, điểm A $\notin$ b, c. Dựng $\triangle ABC$ đều sao cho B $\in$ b, C $\in$ c.

Giải

Phân tích:

Giả sử ta dựng được $\triangle ABC$ đều thỏa mãn điều kiện của bài toán.

B $\in$ b, C $\in$ c.

Ta thực hiện phép quay theo chiều kim đồng hồ ta có:

$r(A, 60^\circ)(B) = C;$

$r(A, 60^\circ)(b) = b'$

Mà B $\in$ b $\Rightarrow C \in b'$.

Mặt khác: C $\in$ c

$\Rightarrow c \cap b' = C$

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng

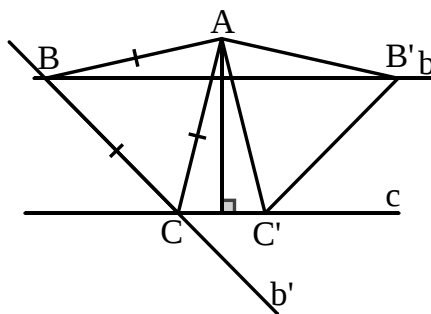
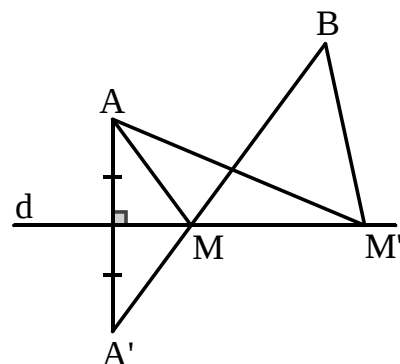
$b' = r(A, 60^\circ)(b)$

- Dựng điểm C

là giao điểm của b' và c

- Dựng điểm B bằng cách:

$r(A, 60^\circ)(C) = B$



Chứng minh:

$$r(A, -60^\circ)(C) = B; \quad r(A, -60^\circ)(b') = b$$

Mà $C \in b' \Rightarrow B \in b \Rightarrow (\text{đpcm})$.

Biện luận:

Bài toán có 2 nghiệm hình

Bài tập 12: Cho $\triangle ABC$. Dựng hình vuông MNPQ sao cho $M \in AB$; $N, P \in BC$, $Q \in AC$.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Nối B với Q và thực hiện phép vị tự: $V(B, k = \frac{BQ'}{BQ})$ ($Q' \in BQ$): $Q \rightarrow Q'$; $M \rightarrow M'$; $N \rightarrow N'$; $P \rightarrow P'$

P'

$$\frac{M'Q'}{MQ} = \frac{N'M'}{NM} = \frac{N'P'}{NP} = \frac{P'Q'}{PQ}$$

Mà $MQ = MN = NP = PQ$ và $NMQ = 90^\circ$

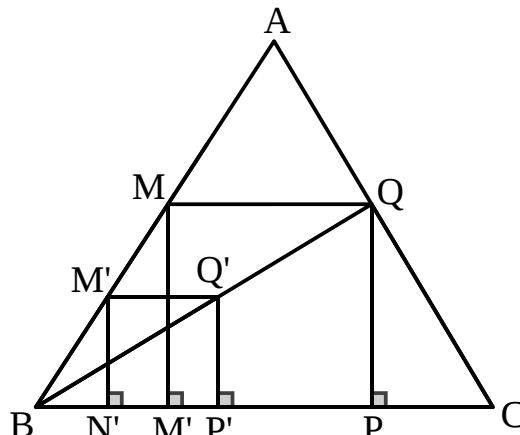
$$\Rightarrow M'Q' = M'N' = N'P' = P'Q'; \quad N'M'Q' = 90^\circ$$

$\Rightarrow \square M'N'P'Q'$ là hình vuông.

Cách dựng:

- Lấy $M' \in AB$, dựng $M'N' \perp BC$
- Dựng hình vuông $M'N'P'Q'$
- Kẻ BQ' cắt AC tại Q
- Thực hiện phép vị tự:

$$V(B; k = \frac{BQ'}{BQ}) (Q') = Q; \quad p' \mapsto p; \quad M' \mapsto M; \quad N' \mapsto N$$



ta dựng được hình vuông MNPQ cần dựng.

Chứng minh:

Theo cách dựng ta có: $\frac{MQ}{M'Q'} = \frac{NM}{N'M'} = \frac{NP}{N'P'} = \frac{PQ}{P'Q'}$ và tứ giác $M'N'P'Q'$ là hình vuông;

$$\widehat{N'M'P'} = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow MN = NP = PQ = MQ \text{ \& } NMP = 90^\circ$$

$\Rightarrow \diamond MNPQ$ là hình vuông

Biện luận:

Bài toán có 1 nghiệm hình

Bài tập 13: Dựng tam giác biết độ dài ba đường trung tuyến.

Giải

Phân tích:

Giả sử $\triangle ABC$ đã dựng xong và có trung tuyến:

$$AM = m_a, \quad BN = m_b, \quad CP = m_c.$$

Nhìn vào hình vẽ ta chưa thấy có yếu tố nào có thể dựng được, trừ các đoạn thẳng AM , BN , CP một cách riêng lẻ.

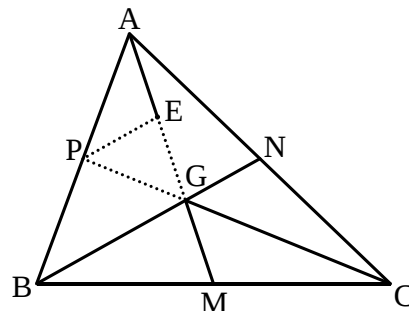
Và dĩ nhiên, nếu ta đã dựng, chẳng hạn AM thì có thể xác định thêm được G.

Tuy nhiên, nếu ta gọi E là trung điểm của AG thì do

$$PE = \frac{BG}{2} = \frac{BN}{3}; \quad EG = \frac{AG}{2} = \frac{AM}{3} \text{ và } PG = \frac{CP}{3} \quad (\text{tính chất}$$

đường trung tuyến và tính chất đường trung bình) nên các cạnh của $\triangle PEG$ hoàn toàn xác định.

Khi đã xác định được $\triangle PEG$, ta dễ dàng xác định được các điểm C, A, M và cuối cùng là B.



Từ đó suy ra cách dựng.

Cách dựng:

- Dựng ΔPEG có: $PE = \frac{m_b}{3}$; $PG = \frac{m_c}{3}$; $EG = \frac{m_a}{3}$.
- Nối dài PG về phía G, trên đó dựng C sao cho $GC = 2GP$;
- Nối dài GE về phía E, trên đó dựng A sao cho $EA = EG$;
- Nối dài EG về phía G, trên đó dựng M sao cho $GM = GE$;
- Nối AP và MC cắt nhau tại B.

ΔABC chính là tam giác cần dựng.

Chứng minh:

Theo cách dựng ở trên thì $AM = m_a$ và $CP = m_c$.

Cũng theo cách dựng và tính chất đường trung tuyến thì G chính là trọng ΔABC .

Do đó BG là đường trung tuyến.

Vì PE là đường trung bình trong tam giác ABG nên $BG = 2PE = \frac{2m_b}{3}$.

Suy ra đường trung tuyến kẻ từ B bằng m_b .

Như vậy ta có ΔABC có ba trung tuyến bằng với m_a, m_b, m_c .

Biện luận:

Bước dựng thứ nhất dựng được khi $\frac{m_a}{3}; \frac{m_b}{3}; \frac{m_c}{3}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Điều này tương đương với m_a, m_b, m_c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Các bước dựng tiếp theo đều thực hiện được một cách duy nhất.

Suy ra nếu độ dài 3 đoạn thẳng đã cho là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì bài toán có 1 nghiệm hình.

Trong trường hợp ngược lại bài toán vô nghiệm.

Ghi chú: Từ bài toán dựng hình nói trên, ta suy ra một kết quả thú vị sau: “Ba đường trung tuyến của tam giác ABC là độ dài 3 cạnh của một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC”.

Bài tập 14: Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính $R_1 < R_2$ cắt nhau tại A và B. Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Giải

Phân tích:

Giả sử tiếp tuyến chung tiếp xúc (C_1) tại M và (C_2) tại N.

Nối dài NM cắt đường thẳng O_1O_2 tại P.

Vì O_1M và O_2N đều vuông góc với MN nên chúng song song với nhau.

Theo định lý Talet ta có $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{R_1}{R_2}$ nên từ đây ta dựng

được điểm P.

Vì $\angle PMO_1 = 90^\circ$ nên M nằm trên đường tròn đường kính PO_1 .

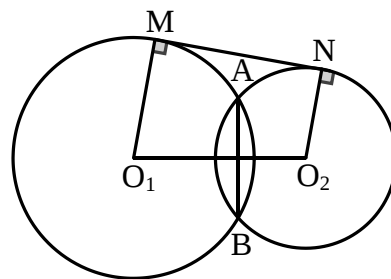
Như vậy M là giao điểm của đường tròn đường kính PO_1 và (C_1) .

Cách dựng:

- Dựng điểm P trên O_2 sao cho $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{R_1}{R_2}$
- Dựng đường tròn đường kính PO_1 ;
- Đường tròn đường kính PO_1 cắt (C_1) tại M;
- Nối PM, đó là tiếp tuyến chung cần dựng.

Chứng minh:

Theo bước 2, 3 thì PM vuông góc với MO_1 .



Suy ra PM là tiếp tuyến của (C_1) .

Từ O_2 kẻ O_2N vuông góc với PM thì $O_2N \parallel O_1M$.

Áp dụng định lý Talet ta có: $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1M}{O_2N}$.

Theo bước 1 thì ta có: $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

Từ hai đẳng thức cuối, với chú ý $O_1M = R_1$, ta có $O_2N = R_2$, tức là điểm N nằm trên (C_2) .

Suy ra PM tiếp xúc (C_2) tại N, tức là PM chính là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Biện luận: Bài toán luôn có 2 nghiệm hình (HS tự chứng minh).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho trước một đoạn thẳng có độ dài bằng 1, hãy dựng các đoạn thẳng có độ dài bằng

- a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\sqrt{5}$; g) $\sqrt[4]{2}$

Bài tập 2: Dựng $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 52^\circ$, $AB = 5\text{cm}$, $AC = 7\text{ cm}$

Bài tập 3: Dựng $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $AC + BC = 7,5\text{ cm}$.

Bài tập 4: Dựng $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$, phân giác $AD = 10\text{ cm}$, đường cao $AH = 6\text{ cm}$.

Bài tập 5: Dựng $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, đường cao $AH = 2\text{cm}$.

Bài tập 6: Dựng tam giác biết b, a + c và C.

Phân tích: Giả sử $\triangle ABC$ đã dựng được. Nối dài CB về phía B tới điểm D sao cho $BD = BA$. Khi đó tam giác ACD có góc C đã cho, $AC = b$ và $CD = a + c$ nên hoàn toàn xác định. Đỉnh B là đỉnh của tam giác cân BDA, do đó là giao điểm của trung trực đoạn AD với CD.

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng $a \parallel b$ và một điểm C. Hãy dựng tam giác đều ABC có A nằm trên a và B nằm trên b.

Gợi ý: Hãy chọn một số điểm A tùy ý trên a rồi dựng tam giác đều ABC. Chú ý xem B sẽ vạch ra đường gì?

Bài tập 8: Dựng tam giác ABC biết độ dài đường trung tuyến, đường phân giác và đường cao kẻ từ đỉnh A.

Câu hỏi gợi ý: Đường phân giác góc A và đường trung trực cạnh BC cắt nhau ở đâu?

Bài tập 9: Cho tứ giác ABCD. Từ A hãy kẻ một đường thẳng chia đôi diện tích tam giác.

Câu hỏi gợi ý: Nếu tứ giác ABCD suy biến thành tam giác ABC thì vẽ như thế nào?

Bài tập 10: Dựng tam giác biết a, b và m_a .

Bài tập 11: Dựng tam giác có chu vi 2p, góc A và đường cao h_a .

Bài tập 12: Dựng tứ giác biết độ dài 4 cạnh liên tiếp và đoạn nối trung điểm hai đường chéo.

Bài tập 13: Cho biết $\cos(72^\circ) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. Hãy nêu cách dựng ngũ giác đều cạnh bằng a cho trước.

Bài tập 14: Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với d. Hãy dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với (d).

Bài tập 15: Nêu cách dựng trục đẳng phương của hai đường tròn trong các trường hợp sau

- a) Hai đường tròn cắt nhau
b) Hai đường tròn ngoài nhau
c) Hai đường tròn chứa nhau

Bài tập 16: Cho tam giác ABC. Hãy nêu cách dựng đường thẳng chia tam giác thành 2 phần có diện tích và chu vi bằng nhau.

Bài tập 17: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) và phương Δ . Dựng đoạn $AB = a$ song song với Δ sao cho $A \in (O_1, R_1)$, $B \in (O_2, R_2)$.

Bài tập 18: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cùng đường thẳng d. Dựng hình vuông ABCD sao cho $A \in (O_1, R_1)$, $C \in (O_2, R_2)$; $B, D \in d$.

Bài tập 19: Dựng một Δ đều sao cho diện tích của nó bằng diện tích một Δ cho trước

Bài tập 20: Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Dùng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với d.

Bài tập 21: Cho hai điểm A, B $\notin$ đường thẳng d cho trước. Dùng đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng d.

Bài tập 22: Dùng hai đường thẳng đi qua A chia hình bình hành thành 3 phần bằng nhau về diện tích.

Bài tập 23: Cho ΔABC , dựng đường thẳng song song với BC chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài tập 24: Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B $\in$ (O, R) cùng một đoạn thẳng đã biết l. Dựng hai dây cung song song đi qua A và B sao cho tổng của chúng bằng l.

Bài tập 25: Cho điểm A ở ngoài (O, R).

Dựng cát tuyến đi qua A cắt (O, R) tại B và C sao cho $AB = BC$.

Bài tập 26: Cho đường tròn (O) và một dây cung AB cố định. Dựng Δ đều MNP thỏa mãn: M & P $\in$ (O); N $\in$ AB và $MN \perp AB$.

Bài tập 27: Cho hình vuông ABCD có giao điểm hai đường chéo là O. hãy dựng ảnh của các điểm A, B, C, D trong phép quay tâm O một góc 45° ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 28: Dựng một hình vuông nội tiếp một đường tròn bán kính R, dựng một lục giác và một tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

BÀI TẬP TỔNG HỢP KIẾN THỨC

Bài tập 1: Cho ΔABC có các đường cao BD và CE. Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại hai điểm M và N.

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$.

c) Chứng minh: $DE \parallel$ với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh: OA là phân giác của góc MAN

e) Chứng tỏ: $AM^2 = AE \cdot AB$.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O), đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O'), đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Từ M vẽ dây cung $DE \perp AB$; DC cắt đường tròn (O') tại I.

a) Tứ giác ADBE là hình gì?

b) Chứng minh: Tứ giác DMBI nội tiếp.

c) Chứng minh: Ba điểm B; I; C thẳng hàng và $MI = MD$.

d) Chứng minh: $MC \cdot DB = MI \cdot DC$.

e) Chứng minh: MI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bài tập 3: Cho ΔABC có góc $A = 90^\circ$. Trên AC lấy điểm M sao cho $AM < MC$. Vẽ đường tròn (O), đường kính CM. Đường thẳng BM cắt (O) tại D. Kéo dài AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh: Tứ giác BADC nội tiếp.

b) Kẻ BC cắt (O) tại E. Chứng minh rằng: MR là phân giác của $\widehat{AED}$.

c) Chứng minh: CA là phân giác của góc $\widehat{BCS}$.

Bài tập 4: Cho ΔABC có góc $A = 90^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM > MC$. Dựng đường tròn (O) đường kính MC. Đường tròn này cắt BC tại E. Đường thẳng BM cắt (O) tại D và đường thẳng AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh: Tứ giác ADCB nội tiếp.

b) Chứng minh: ME là phân giác của $\widehat{AED}$.

c) Chứng minh: Góc $\widehat{ASM} = \widehat{ACD}$.

d) Chứng tỏ ME là phân giác của $\widehat{AED}$.

e) Chứng minh: Ba đường thẳng BA; EM; CD đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD và đường kính AA'. Gọi E; F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AA'.

- Chứng minh: Tứ giác AEDB nội tiếp.
- Chứng minh: $DB.A'A = AD.A'C$.
- Chứng minh: $DE \perp AC$.
- Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh: $MD = ME = MF$.

Bài tập 6: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC. Gọi P là trung điểm AB; Q là trung điểm FE.

- Chứng minh: Tứ giác MFEC nội tiếp.
- Chứng minh: $BM.EF = BA.EM$.
- Chứng minh: $\triangle AMP \sim \triangle FMQ$.
- Chứng minh: $\widehat{PQM} = 90^\circ$.

Bài tập 7: Cho (O) đường kính BC. Lấy điểm A bất kỳ nằm trên cung BC. Trên tia AC lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Dựng hình vuông ABED; AE cắt (O) tại điểm thứ hai F. Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại G.

- Chứng minh: Tứ giác BGDC nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn này.
- Chứng minh: $\triangle BFC$ vuông cân và F là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.
- Chứng minh: Tứ giác GEFB nội tiếp.
- Chứng tỏ: C; F; G thẳng hàng và G cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$. Có nhận xét gì về I và F?

Bài tập 8: Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn cắt nhau tại D. Từ D kẻ đường thẳng song song với AB, đường này cắt đường tròn ở E và F, cắt AC ở I (E nằm trên cung nhỏ BC).

- Chứng minh: Tứ giác BDCO nội tiếp.
- Chứng minh: $DC^2 = DE.DF$.
- Chứng minh: Tứ giác DOIC nội tiếp.
- Chứng tỏ I là trung điểm EF.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O), có dây cung AB. Từ điểm M bất kỳ trên cung AB ($M \neq A$ và $M \neq B$). Kẻ dây cung $MN \perp AB$ tại H. Gọi MQ là đường cao của tam giác MAN.

- Chứng minh: 4 điểm A; M; H; Q cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh: $NQ.NA = NH.NM$.
- Chứng minh: MN là phân giác của góc BMQ.
- Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN. Xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ.AN + MP.BN$ có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

- Xác định vị trí của M trên cung AB để $MQ.AN + MP.BN$ có giá trị lớn nhất:

$$2S_{\triangle MAN} = MQ.AN$$

Ta có:

$$2S_{\triangle MBN} = MP.BN$$

$$2S_{\triangle MAN} + 2S_{\triangle MBN} = MQ.AN + MP.BN$$

Ta lại có:

$$2S_{\triangle MAN} + 2S_{\triangle MBN} = 2(S_{\triangle MAN} + S_{\triangle MBN}) = 2S_{\triangle MBN} = 2 \cdot \frac{AB.MN}{2} = AB.MN.$$

Vậy: $MQ.AN + MP.BN = AB.MN$

Mà AB không đổi nên tích $AB.MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ là đường kính $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB.

Bài tập 10: Cho đường tròn (O; R) và (I; r) tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Dựng tiếp tuyến chung ngoài BC (B nằm trên đường tròn (O) và C nằm trên đường tròn (I)). Tiếp tuyến BC cắt tiếp tuyến tại A của hai đường tròn ở E.

- Chứng minh tam giác ABC vuông ở A.
- Kẻ OE cắt AB ở N; IE cắt AC tại F.
Chứng minh: N; E; F; A cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng tỏ rằng: $BC^2 = 4Rr$.
- Tính diện tích tứ giác BCIO theo R; r.

Hướng dẫn

- Chứng minh: $BC^2 = 4Rr$.
Ta có tứ giác FANE có 3 góc vuông (cmt)
 $\Rightarrow$ FANE là hình vuông
 $\Rightarrow \triangle OEI$ vuông ở E và $EA \perp OI$ (tính chất tiếp tuyến).
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:
 $AH^2 = OA \cdot AI$ (bình phương đường cao bằng tích hai hình chiếu)

$$\text{Mà } AH = \frac{BC}{2} \text{ và } OA = R; AI = r \Rightarrow \frac{BC^2}{4} = Rr \Rightarrow BC^2 = 4Rr.$$

- $S_{BCIO} = ?$
Ta có BCIO là hình thang vuông

$$\Rightarrow S_{BCIO} = \frac{OB + IC}{2} \cdot BC$$

$$\Rightarrow S = \frac{(r + R)\sqrt{rR}}{2}.$$

Bài tập 11: Trên hai cạnh góc vuông xOy lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. Một đường thẳng qua A cắt OB tại M (M nằm trên đoạn OB). Từ B hạ đường vuông góc với AM tại H, cắt AO kéo dài tại I.

- Chứng minh: Tứ giác OMHI nội tiếp.
- Tính $\widehat{OMI}$.
- Từ O vẽ đường vuông góc với BI tại K. Chứng minh: $OK = KH$.
- Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.

Hướng dẫn

- Tập hợp các điểm K:
Do $OK \perp KB$
Suy ra: $\widehat{OKB} = 90^\circ$.
OB không đổi khi M di động $\Rightarrow$ K nằm trên đường tròn đường kính OB.
Khi $M \equiv O$ thì $K \equiv O$.
Khi $M \equiv B$ thì K là điểm chính giữa cung AB.

Vậy quỹ tích điểm K là $\frac{1}{4}$ đường tròn đường kính OB.

Bài tập 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây CD vuông góc với AB tại F. Trên cung BC lấy điểm M. Nối A với M cắt CD tại E.

- Chứng minh: AM là phân giác của góc CMD.
- Chứng minh: Tứ giác EFBM nội tiếp.
- Chứng tỏ: $AC^2 = AE \cdot AM$.
- Gọi giao điểm CB với AM là N; MD với AB là I. Chứng minh: $NI \parallel CD$.
- Chứng minh: N là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CIM$

Hướng dẫn

- Chứng tỏ N là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CIM$:

Ta phải chứng minh N là giao điểm 3 đường phân giác của $\triangle CIM$.

Theo chứng minh, ta có MN là phân giác của $\widehat{CMI}$.

Do MNIB nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{NIM} = \widehat{NBM}$ (cùng chắn cung MN)

Góc $\widehat{MBC} = \widehat{MAC}$ (cùng chắn cung CM)

Ta lại có:

$\widehat{CAN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp $\widehat{ACB} = 90^\circ$);

$\widehat{NIA} = 90^\circ$ (vì $\widehat{NIB} = 90^\circ$)

Suy ra: ACNI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{CIN}$ (cùng chắn cung CN)

$\Rightarrow \widehat{CIN} = \widehat{NIM}$

$\Rightarrow IN$ là phân giác $\widehat{CIM}$.

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ICM$.

Bài tập 13: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB; AC và cát tuyến ADE. Gọi H là trung điểm DE.

a) Chứng minh: A; B; H; O; C cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Chứng minh: HA là phân giác của góc $\widehat{BHC}$.

c) Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh: $AB^2 = AI \cdot AH$.

d) Kẻ BH cắt (O) ở K. Chứng minh: $AE \parallel CK$.

Bài tập 14: Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$; xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là 1 đường kính bất kỳ. Gọi giao điểm của AC; AD với xy theo thứ tự là M; N.

a) Chứng minh: Tứ giác MCDN nội tiếp.

b) Chứng tỏ: $AC \cdot AM = AD \cdot AN$

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN và H là trung điểm MN. Chứng minh: AOIH là hình bình hành.

d) Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

Hướng dẫn

d) Quỹ tích điểm I:

Do AOIH là hình bình hành.

Suy ra: $IH = AO = R$ không đổi

$\Rightarrow$ CD quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng R.

Bài tập 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là 1 điểm trên cung nhỏ BC. Kẻ DE; DF; DG lần lượt vuông góc với các cạnh AB; BC; AC. Gọi H là hình chiếu của D lên tiếp tuyến Ax của (O).

a) Chứng minh: Tứ giác AHED nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của AH với HB và với (O) là P và Q; ED cắt (O) tại M.

Chứng minh: $HA \cdot DP = PA \cdot DE$.

c) Chứng minh: $QM = AB$.

d) Chứng minh: $DE \cdot DG = DF \cdot DH$.

e) Chứng minh: E; F; G thẳng hàng. (đường thẳng Sim son)

Hướng dẫn

e) Chứng minh: E; F; G thẳng hàng:

Ta có: $\widehat{BFE} = \widehat{BDE}$ (cmt) và $\widehat{GFC} = \widehat{CDG}$ (cmt)

Do ABCD nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BMC} = 180^\circ$

Do GDEA nội tiếp

Suy ra: $\widehat{EDG} + \widehat{EAG} = 180^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{EDG} = \widehat{BDC}$$

$$\text{Mà } \widehat{EDG} = \widehat{EDB} + \widehat{BDG} \text{ và } \widehat{BCD} = \widehat{BDG} + \widehat{CDG}$$

$$\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{CDG}$$

$$\Rightarrow \widehat{GFC} = \widehat{BEF}$$

Vậy E; F; G thẳng hàng.

Bài tập 16: Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$; $AB < AC$. Gọi I là trung điểm BC. Qua I kẻ $IK \perp BC$ (K nằm trên BC). Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $MA = AK$.

a) Chứng minh: Tứ giác ABIK nội tiếp được trong đường tròn (O).

b) Chứng minh: $\widehat{BMC} = 2\widehat{ACB}$.

c) Chứng tỏ rằng: $BC^2 = 2AC.KC$.

d) Kéo dài AI cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh $AC = BN$.

e) Chứng minh: Tứ giác NMIC nội tiếp.

Bài tập 17: Cho (O) đường kính AB cố định. Điểm C di động trên nửa đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt (O) tại M. Gọi H; K là hình chiếu của M lên AC và AB.

a) Chứng minh: Tứ giác MOBK nội tiếp.

b) Chứng minh: Tứ giác CKMH là hình vuông.

c) Chứng minh: Ba điểm H; O; K thẳng hàng.

d) Gọi giao điểm HK và CM là I. Khi C di động trên nửa đường tròn thì I chạy trên đường nào?

Hướng dẫn

c) Chứng minh: Ba điểm H, O, K thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm HK và MC.

Do MHCK là hình vuông

$\Rightarrow HK \perp MC$ tại trung điểm I của MC.

Do I là trung điểm MC

$\Rightarrow OI \perp MC$ (t/c đường kính và dây cung)

Vậy $HI \perp MC$; $OI \perp MC$ và $KI \perp MC$

Suy ra: H; O; I thẳng hàng.

d) Do $\widehat{OIM} = 90^\circ$; OM cố định

Suy ra: I nằm trên đường tròn đường kính OM.

Giới hạn:

Khi $C \equiv B$ thì $I \equiv Q$;

Khi $C \equiv A$ thì $I \equiv P$.

Vậy khi C di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên cung tròn PHQ của đường tròn đường kính OM.

Bài tập 18: Cho hình chữ nhật ABCD có chiều dài $AB = 2a$, chiều rộng $BC = a$. Kẻ tia phân giác của $\widehat{ACD}$. Từ A hạ AH vuông góc với đường phân giác nói trên.

a) Chứng minh: Tứ giác AHDC nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó xác định tâm và bán kính của đường tròn theo a.

b) Kẻ HB cắt AD tại I và cắt AC tại M; HC cắt DB tại N.

Chứng tỏ rằng: $HB = HC$ và $AB.AC = BH.BI$.

c) Chứng tỏ MN song song với tiếp tuyến tại H của (O)

d) Từ D kẻ đường thẳng song song với BH; đường này cắt HC ở K và cắt (O) ở J.

Chứng minh: Tứ giác HOKD nội tiếp.

Bài tập 19: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, bán kính $OC \perp AB$. Gọi M là 1 điểm trên cung BC. Kẻ đường cao CH của $\triangle ACM$.

a) Chứng minh: Tứ giác AOHC nội tiếp.

b) Chứng tỏ $\triangle CHM$ vuông cân và OH là phân giác của $\widehat{COM}$.

c) Gọi giao điểm của OH với BC là I. MI cắt (O) tại D. Chứng minh rằng: Tứ giác CDBM là hình thang cân.

d) Kẻ BM cắt OH tại N. Chứng minh: $\triangle BNI \sim \triangle AMC$. Từ đó suy ra: $BN \cdot MC = IN \cdot MA$.

Bài tập 20: Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp trong (O; R). Trên cạnh AB và AC lấy hai điểm M; N sao cho $BM = AN$.

a) Chứng tỏ rằng: $\triangle OMN$ cân.

b) Chứng minh: Tứ giác OMAN nội tiếp.

c) Kéo dài BO cắt AC tại D và cắt (O) ở E. Chứng minh: $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.

d) Đường thẳng CE và AB cắt nhau ở F. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt FC tại I; AO kéo dài cắt BC tại J. Chứng minh: BI đi qua trung điểm của AJ.

Hướng dẫn

c) Chứng minh: $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.

Do BO là phân giác của $\triangle$ đều

$\Rightarrow BO \perp AC$ hay $\triangle BOD$ vuông ở D.

Áp dụng định lý Pi-ta-go, ta có:

$$BC^2 = DB^2 + CD^2 = (BO + OD)^2 + CD^2 = BO^2 + 2 \cdot OB \cdot OD + OD^2 + CD^2. \quad (1)$$

Mà $OB = R$.

$\triangle AOC$ cân ở O có $\widehat{OAC} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AOE} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AOE \text{ là tam giác đều, có } AD \perp OE \Rightarrow OD = ED = \frac{R}{2}$$

$$\text{Áp dụng định lý Pi-ta-go, ta có: } OD^2 = OC^2 - CD^2 = R^2 - CD^2. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } BC^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot \frac{R}{2} + CD^2 - CD^2 = 3R^2.$$

Bài tập 21: Cho $\triangle ABC$, ($A = 90^\circ$) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi M là trung điểm cạnh AC. Đường tròn (I) đường kính MC cắt cạnh BC ở N và cắt (O) tại D.

a) Chứng minh: Tứ giác ABNM nội tiếp và $CN \cdot AB = AC \cdot MN$.

b) Chứng tỏ rằng: B, M, D thẳng hàng và OM là tiếp tuyến của (I).

c) Tia IO cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh: Tứ giác BMOE là hình bình hành.

d) Chứng minh: NM là phân giác của $\widehat{AND}$.

Bài tập 22: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi I là điểm bất kỳ trên đường chéo AC. Qua I kẻ các đường thẳng song song với AB; BC. Các đường này cắt AB; BC; CD; DA lần lượt ở P; Q; N; M.

a) Chứng minh: Tứ giác INCQ là hình vuông.

b) Chứng tỏ rằng: $NQ \parallel DB$.

c) Kéo dài BI cắt MN tại E; MP cắt AC tại F. Chứng minh: Tứ giác MFIN nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

d) Chứng tỏ tứ giác MPQN nội tiếp. Tính diện tích của nó theo a.

e) Chứng minh: Tứ giác MFIE nội tiếp.

Bài tập 23: Cho hình vuông ABCD. Gọi N là trung điểm DC; Kẻ BN cắt AC tại F. Vẽ đường tròn (O) đường kính BN. (O) cắt AC tại E. Kéo dài BE cắt AD ở M; MN cắt (O) tại I.

a) Chứng minh: Tứ giác MDNE nội tiếp.

b) Chứng tỏ rằng: $\triangle BEN$ vuông cân.

c) Chứng minh: MF đi qua trực tâm H của $\triangle BMN$.

d) Chứng minh: $BI = BC$ và $\triangle IEF$ vuông.

e) Chứng minh: $\triangle FIE$ là tam giác vuông.

Bài tập 24: Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH. Từ H kẻ HK; HM lần lượt vuông góc với AB; AC. Gọi J là giao điểm của AH và MK.

- a) Chứng minh: Tứ giác AMHK nội tiếp.
b) Chứng minh: $JA.JH = JK.JM$
c) Từ C kẻ tia $Cx \perp AC$ và Cx cắt AH kéo dài ở D. Vẽ $HI \perp DB$ và $HN \perp DC$. Chứng minh rằng:
 $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$.
d) Chứng minh: M; N; I; K cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 25: Cho $\triangle ABC$ ($A = 90^\circ$). Đường cao AH. Đường tròn tâm H, bán kính HA cắt đường thẳng AB tại D và cắt AC tại E; Trung tuyến AM của $\triangle ABC$ cắt DE tại I.

- a) Chứng minh: D; H; E thẳng hàng.
b) Chứng minh: Tứ giác BDCE nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn này.
c) Chứng minh: $AM \perp DE$.
d) Chứng minh: Tứ giác AHOM là hình bình hành.

Bài tập 26: Cho $\triangle ABC$ có 2 góc nhọn. Đường cao AH. Gọi K là điểm đối xứng của H qua AB; I là điểm đối xứng của H qua AC. Gọi E; F là giao điểm của KI với AB và AC.

- a) Chứng minh: Tứ giác AICH nội tiếp.
b) Chứng minh: $AI = AK$.
c) Chứng minh: Các điểm A; E; H; C; I cùng nằm trên một đường tròn.
d) Chứng minh: CE; BF là các đường cao của $\triangle ABC$.
e) Chứng tỏ giao điểm 3 đường phân giác của $\triangle HFE$ chính là trực tâm của $\triangle ABC$.

Bài tập 27: Cho $\triangle ABC$, ($AB = AC$) nội tiếp trong (O). Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC. Trên tia BM lấy $MK = MC$ và trên tia BA lấy $AD = AC$.

- a) Chứng minh: $\widehat{BAC} = 2\widehat{BKC}$.
b) Chứng minh: Tứ giác BCKD nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn này.
c) Gọi giao điểm của DC với (O) là I. Chứng minh: B; O; I thẳng hàng.
d) Chứng minh: $DI = BI$.

Bài tập 28: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong (O). Gọi I là điểm chính giữa cung AB (cung AB không chứa điểm C; D). IC và ID cắt AB ở M; N.

- a) Chứng minh: D; M; N; C cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh: $NA.NB = NI.NC$.
c) Kéo dài DI cắt đường thẳng BC ở F; đường thẳng IC cắt đường thẳng AD ở E.
Chứng minh: $EF \parallel AB$.
d) Chứng minh: $IA^2 = IM.ID$.

Bài tập 29: Cho hình vuông ABCD, trên cạnh BC lấy điểm E. Dựng tia $Ax \perp AE$, Ax cắt cạnh CD kéo dài tại F. Kẻ trung tuyến AI của $\triangle AEF$. Kéo dài AI cắt CD tại K. Qua E dựng đường thẳng song song với AB, cắt AI tại G.

- a) Chứng minh: Tứ giác AECF nội tiếp.
b) Chứng minh: $AF^2 = KF.CF$.
c) Chứng minh: Tứ giác EGFK là hình thoi.
d) Chứng minh rằng: Khi E di động trên BC thì $EK = BE + DK$ và chu vi $\triangle CKE$ có giá trị không đổi.
e) Gọi giao điểm của EF với AD là J. Chứng minh: $GJ \perp JK$.

Hướng dẫn

- d) Chứng minh: $EK = BE + DK$.

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle ABE$ có:

$$AD = AB;$$

$$AF = AE \text{ (}\triangle AEF \text{ vuông cân)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle ABE$$

$$\Rightarrow BE = DF$$

$$\text{Mà } FD + DK = FK \text{ và } FK = KE \text{ (t/c hình thoi)}$$

$$\Rightarrow KE = BE + DK.$$

Chứng minh chu vi ΔCKE không đổi:

Gọi chu vi là $C = KC + EC + KE = KC + EC + BE + DK = (KC + DK) + (BE + EC) = 2BC$ không đổi.

e) Chứng minh: $IJ \perp JK$.

Do $\widehat{JIK} = \widehat{JDK} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IJDK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{JIK} = \widehat{IDK}$ (cùng chắn cung IK),

$\widehat{IDK} = 45^\circ$ (t/c hình vuông)

$\Rightarrow \widehat{JIK} = 45^\circ \Rightarrow \Delta JIK$ vuông cân ở I

$\Rightarrow JI = IK$, mà $IK = GI$

$\Rightarrow JI = IK = GI = \frac{1}{2} GK$

$\Rightarrow \Delta GJK$ vuông ở J hay $GJ \perp JK$.

Bài tập 30: Cho ΔABC . Gọi H là trực tâm của tam giác. Dựng hình bình hành $BHCD$. Gọi I là giao điểm của HD và BC .

a) Chứng minh: Tứ giác $ABDC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O , nêu cách dựng (O).

b) So sánh $\widehat{BAH}$ và $\widehat{OAC}$.

c) Kẻ CH cắt OD tại E . Chứng minh: $AB.AE = AH.AC$.

d) Gọi giao điểm của AI và OH là G . Chứng minh: G là trọng tâm của ΔABC .

Bài tập 31: Cho đường tròn (O) và $\widehat{AB} = 90^\circ$. C là một điểm tùy ý trên cung lớn AB . Các đường cao AI ; BK ; CJ của ΔABC cắt nhau ở H . Kẻ BK cắt (O) ở N ; AH cắt (O) tại M . BM và AN gặp nhau ở D .

a) Chứng minh: B ; K ; C ; J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: $BI.KC = HI.KB$.

c) Chứng minh: MN là đường kính của đường tròn (O).

d) Chứng minh: Tứ giác $ACBD$ là hình bình hành.

e) Chứng minh: $OC \parallel DH$.

Bài tập 32: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi N là một điểm bất kỳ trên CD sao cho $CN < ND$; Vẽ đường tròn tâm O đường kính BN . Đường tròn (O) cắt AC tại F ; BF cắt AD tại M ; BN cắt AC tại E .

a) Chứng minh: ΔBFN vuông cân.

b) Chứng minh: $MEBA$ nội tiếp.

c) Gọi giao điểm của ME và NF là Q . Kẻ MN cắt (O) ở P .

Chứng minh: B ; Q ; P thẳng hàng.

d) Chứng tỏ: $ME \parallel PC$ và $BP = BC$.

e) Chứng minh: ΔFPE là tam giác vuông.

Bài tập 33: Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy bốn điểm A ; B ; C ; D sao cho $AB = DB$. AB và CD cắt nhau ở E . Kẻ BC cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở Q ; DB cắt AC tại K .

a) Chứng minh: CB là phân giác của $\widehat{ACE}$.

b) Chứng minh: Tứ giác $AQEC$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $KA.KC = KB.KD$.

d) Chứng minh: $QE \parallel AD$.

Bài tập 34: Cho (O) và tiếp tuyến Ax . Trên Ax lấy hai điểm B và C sao cho $AB = BC$. Kẻ cát tuyến BEF với đường tròn. Kẻ CE và CF cắt (O) lần lượt ở M và N . Dựng hình bình hành $AECD$.

a) Chứng minh: D nằm trên đường thẳng BF .

b) Chứng minh: Tứ giác $ADCF$ nội tiếp.

c) Chứng minh: $CF.CN = CE.CM$.

d) Chứng minh: $MN \parallel AC$.

e) Gọi giao điểm của AF với MN là I. Chứng minh rằng: DF đi qua trung điểm của NI.

Bài tập 35: Cho (O; R) và đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ CB.

a) Chứng minh: Tứ giác ACBD là hình vuông.

b) Kẻ AM cắt CD; CB lần lượt ở P và I. Gọi J là giao điểm của DM và AB.

Chứng minh: $IB \cdot IC = IA \cdot IM$.

c) Chứng tỏ rằng: $IJ \parallel PD$ và IJ là phân giác của $\widehat{CJM}$.

d) Tính diện tích ΔAID theo R.

Hướng dẫn

d) Tính diện tích ΔAID theo R:

$$\Rightarrow S_{IAD} = S_{CAD}.$$

$$\text{Mà } S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

$$\Rightarrow S_{IAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \text{ (diện tích có 2 đường chéo vuông góc)}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} 2R \cdot 2R = 2R^2$$

$$\Rightarrow S_{IAD} = R^2$$

Bài tập 36: Cho (O; R). Một cát tuyến xy cắt (O) ở E và F. Trên xy lấy điểm A nằm ngoài đoạn EF. Vẽ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O). Gọi H là trung điểm EF.

a) Chứng tỏ 5 điểm: A; B; C; O; H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OA ở I và cắt đường thẳng OH ở K. Chứng minh: $OI \cdot OA = OH \cdot OK = R^2$.

c) Khi A di động trên xy thì I di động trên đường nào?

d) Chứng minh: KE và KF là hai tiếp tuyến của (O).

Bài tập 37: Cho ΔABC ($A = 90^\circ$); $AB = 15$; $AC = 20$ (cùng đơn vị đo độ dài). Dựng đường tròn tâm O đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AC. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm thứ hai D.

a) Chứng tỏ D nằm trên BC.

b) Gọi M là trung điểm của cung nhỏ DC. AM cắt DC ở E và cắt (O) ở N.

Chứng minh: $DE \cdot AC = AE \cdot MC$

c) Chứng minh: $AN = NE$ và O; N; O' thẳng hàng.

d) Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh: $\widehat{OIO'} = 90^\circ$.

e) Tính diện tích ΔAMC .

Hướng dẫn

c) Chứng minh: $AN = NE$.

Do $BA \perp AO'$ (ΔABC vuông ở A)

$\Rightarrow BA$ là tiếp tuyến của (O')

$$\Rightarrow sđ \widehat{AE} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AM}$$

$$Sđ \widehat{ED} = sđ \frac{1}{2} (\widehat{MC} + \widehat{AD})$$

$$\text{Mà } \widehat{MC} = \widehat{DM} \Rightarrow \widehat{MC} + \widehat{AD} = \widehat{AM}$$

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \Delta BAE \text{ cân ở B, mà } BM \perp AE$$

$$\Rightarrow NA = NE.$$

Chứng minh: O; N; O' thẳng hàng:

Ta có: ON là đường trung bình của ΔABE

$\Rightarrow ON \parallel BE$ và $OO' \parallel BE$

$\Rightarrow O, N, O'$ thẳng hàng.

Bài tập 38: Cho $\triangle ABC$ đều, có cạnh bằng a . Gọi D là giao điểm hai đường phân giác góc A và góc B của $\triangle ABC$. Từ D dựng tia $Dx \perp DB$. Trên Dx lấy điểm E sao cho $ED = DB$ (D và E nằm hai phía của đường thẳng AB). Từ E kẻ $EF \perp BC$. Gọi O là trung điểm của EB .

a) Chứng minh: Tứ giác $AEBC$ và $EDFB$ nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác trên theo a .

b) Kéo dài FE về phía F , cắt (D) tại M . Kẻ EC cắt (O) ở N .

Chứng minh: Tứ giác $EBMC$ là thang cân. Tính diện tích.

c) Chứng minh: EC là phân giác của $\widehat{DAC}$.

d) Chứng minh: FD là đường trung trực của MB .

e) Chứng tỏ A, D, N thẳng hàng.

f) Tính diện tích phần mặt trắng được tạo bởi cung nhỏ EB của hai đường tròn.

Hướng dẫn

e) Chứng minh: A, N, D thẳng hàng:

Ta có: $\widehat{BND} = \widehat{BED} = 45^\circ$ (cùng chắn $\widehat{DB}$) và $\widehat{ENB} = 90^\circ$ (cmt); $\widehat{ENA}$ là góc ngoài $\triangle ANC$

$$\Rightarrow \widehat{ENA} = \widehat{NAC} + \widehat{CAN} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ENA} + \widehat{ENB} + \widehat{BND} = 180^\circ$$

$\Rightarrow A, N, D$ thẳng hàng.

f) Gọi diện tích mặt trắng cần tính là S .

Ta có: $S = S_{\text{nửa } (O)} - S_{\text{viên phân EDB}}$

$$S_{(O)} = \pi \cdot OE^2 = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{6} \right)^2 = \frac{a^2\pi}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\frac{1}{2}(O)} = \frac{a^2\pi}{12}$$

$$S_{\text{quạt EBD}} = \frac{\pi \cdot BD^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{6} \right)^2 = \frac{a^2\pi}{12}$$

$$S_{\triangle EBD} = \frac{1}{2} DB^2 = \frac{a^2}{6}$$

$$S_{\text{viên phân}} = S_{\text{quạt EBD}} - S_{\triangle EDB} = \frac{a^2\pi}{12} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2(\pi - 2)}{12}$$

$$S = \frac{a^2\pi}{12} - \frac{a^2(\pi - 2)}{12} = \frac{a^2}{6}$$

Bài tập 39: Cho hình vuông $ABCD$, E là một điểm thuộc cạnh BC . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE , đường này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K .

a) Chứng minh: Tứ giác $BHCD$ nội tiếp.

b) Tính $\widehat{CHK}$.

c) Chứng minh: $KC \cdot KD = KH \cdot KB$.

d) Khi E di động trên BC thì H di động trên đường nào?

Hướng dẫn

d) Do $\widehat{BHD} = 90^\circ$ không đổi

Suy ra: E di chuyển trên BC thì H di động trên đường tròn đường kính DB .

Bài tập 40: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc đường tròn đó ($C \neq A$ và B). Hai điểm M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và BC. Các đường thẳng BN và AC cắt nhau tại I, các dây cung AN và BC cắt nhau ở P.

- Chứng minh: Tứ giác ICPN nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
- Chứng minh: KN là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).
- Chứng minh rằng khi C di động trên đường tròn (O; R) thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

- Chứng minh rằng khi C di động trên đường tròn (O) thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định:

Ta có $\widehat{AM} = \widehat{MC}$ (gt) nên $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$.

Vậy OM là phân giác của $\widehat{AOC}$.

Tương tự ON là phân giác của $\widehat{COB}$, mà $\widehat{AOC}$ và $\widehat{COB}$ kề bù nên $\widehat{MON} = 90^\circ$.

Vậy tam giác MON vuông cân ở O.

Kẻ $OH \perp MN$, ta có $OH = OM \cdot \sin M = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ không đổi.

Vậy khi C di động trên đường tròn (O) thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định $\left(O; \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài tập 41: Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Trên đường tròn (O; R) lấy điểm M sao cho $\widehat{MAB} = 60^\circ$. Vẽ đường tròn (B; BM) cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là N.

- Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM).
- Kẻ các đường kính MI của đường tròn (O; R) và MJ của đường tròn (B; BM). Chứng minh N, I và J thẳng hàng và $JI \cdot JN = 6R^2$
- Tính phần diện tích của hình tròn (B; BM) nằm bên ngoài đường tròn (O; R) theo R.

Hướng dẫn

- Chứng minh: N; I; J thẳng hàng và $JI \cdot JN = 6R^2$.

$\widehat{MNI} = \widehat{MNJ} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O và tâm B).

Nên $IN \perp MN$ và $JN \perp MN$.

Vậy ba điểm N; I và J thẳng hàng.

ΔMJI có BO là đường trung bình nên $IJ = 2BO = 2R$.

ΔAMO cân ở O (vì $OM = OA$), $\widehat{MAO} = 60^\circ$ nên ΔMAO đều.

$AB \perp MN$ tại H (tính chất dây chung của hai đường tròn (O) và (B) cắt nhau).

Nên $OH = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Vậy $HB = HO + OB = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$

$\Rightarrow NJ = 2 \cdot \frac{3R}{2} = 3R$.

Vậy $JI \cdot JN = 2R \cdot 3R = 6R^2$.

- Tính diện tích phần hình tròn (B; BM) nằm ngoài đường tròn (O; R) theo R:

Gọi S là diện tích phần hình tròn nằm (B; BM) nằm bên ngoài hình tròn (O; R).

S_1 là diện tích hình tròn tâm (B; BM).

S_2 là diện tích hình quạt MBN.

S_3, S_4 là diện tích hai viên phân cung MB và NB của đường tròn (O; R).

Ta có : $S = S_1 - (S_2 + S_3 + S_4)$.

Tính S_1 : $\widehat{MAB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow MB = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy: } S_1 = \pi(R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2.$$

Tính S_2 :

$$\widehat{MBN} = 60^\circ \Rightarrow S_2 = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{2}$$

Tính S_3 : $S_3 = S_{\text{quạt MOB}} - S_{\text{MOB}}$.

$$\widehat{MOB} = 120^\circ \Rightarrow S_{\text{quạt MOB}} = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

$$OA = OB \Rightarrow S_{\text{MOB}} = \frac{1}{2} S_{\text{AMB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MB = \frac{1}{4} R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } S_3 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = S_4 \text{ (do tính chất đối xứng).}$$

$$\text{Từ đó } S = S_1 - (S_2 + 2S_3) = 3\pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{2} + \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} \right) = \frac{11\pi R^2 + 3R^2 \sqrt{3}}{6} \text{ (đvdt).}$$

Bài tập 42: Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.

a) Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB \cdot AC$

b) Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh $IN \parallel AB$

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Bài tập 43: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN). Các tia AM và BN cắt nhau ở I. Các dây AN và BM cắt nhau ở K.

a) Tính $\widehat{MIN}$ và $\widehat{AKB}$.

b) Tìm quỹ tích điểm I và quỹ tích điểm K khi dây MN thay đổi vị trí.

c) Chứng minh I là trực tâm của tam giác KAB.

d) AB và IK cắt nhau tại H. Chứng minh $HA \cdot HB = HI \cdot HK$.

e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất? Tính giá trị diện tích lớn nhất đó theo R.

Bài tập 44: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

a) Chứng minh $AC + BD = CD$.

b) Chứng minh: $\widehat{COD} = 90^\circ$.

c) Chứng minh: $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.

d) Chứng minh: $OC \parallel BM$

e) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

f) Chứng minh: $MN \perp AB$.

g) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

g) Ta có:

$$\text{Chu vi tứ giác: } ACDB = AB + AC + CD + BD.$$

$$\text{Mà } AC + BD = CD.$$

$$\text{Suy ra chu vi tứ giác } ACDB = AB + 2CD.$$

Mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất.

Và CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By.

Khi đó $CD \parallel AB$.

Suy ra: M phải là trung điểm của cung AB.

Bài tập 45: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP. Kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

- Chứng minh: Tứ giác AMBO nội tiếp.
- Chứng minh: Năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh: $OI \cdot OM = R^2$; $OI \cdot IM = IA^2$.
- Chứng minh: Tứ giác OAHB là hình thoi.
- Chứng minh: Ba điểm O, H, M thẳng hàng.
- Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

Hướng dẫn

e) Theo trên OAHB là hình thoi.

Suy ra: $OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB$

Suy ra: O, H, M thẳng hàng (vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

f) Theo trên OAHB là hình thoi.

Suy ra: $AH = AO = R$.

Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính $AH = R$.

Bài tập 46: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

- Chứng minh: $AC + BD = CD$.
- Chứng minh: $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- Chứng minh: $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.
- Chứng minh: $OC \parallel BM$
- Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
- Chứng minh: $MN \perp AB$.
- Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

f) Ta có chu vi tứ giác $ACDB = AB + AC + CD + BD$ mà $AC + BD = CD$.

Suy ra chu vi tứ giác $ACDB = AB + 2CD$ mà AB không đổi.

Chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất.

Mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By, tức là CD vuông góc với Ax và By.

Khi đó $CD \parallel AB \Rightarrow M$ phải là trung điểm của cung AB.

Bài tập 47: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP. Gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

- Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
- Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh: $OI \cdot OM = R^2$; $OI \cdot IM = IA^2$.
- Chứng minh OAHB là hình thoi.
- Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

f) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Hướng dẫn

e) Theo trên OAHB là hình thoi. Suy ra: $OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB$.

Suy ra: O, H, M thẳng hàng (vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

f) Theo trên OAHB là hình thoi. Suy ra: $AH = AO = R$.

Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính $AH = R$.

Bài tập 48: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh $BM \parallel OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

d) Tứ giác OBNP là hình bình hành.

Suy ra: $PN \parallel OB$ hay $PJ \parallel AB$.

Mà $ON \perp AB \Rightarrow ON \perp PJ$.

Ta cũng có $PM \perp OJ$ (PM là tiếp tuyến).

Mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ.

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật.

Vì có $\widehat{PAO} = \widehat{AON} = \widehat{ONP} = 90^\circ$.

Suy ra: K là trung điểm của PO (tính chất đường chéo hình chữ nhật). (6)

Ta có: AONP là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{NOP}$ (so le) (7)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì:

PO là tia phân giác của góc $\widehat{APM} \Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{MPO}$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \Delta IPO$ cân tại I có IK là trung tuyến đồng thời là đường cao.

Suy ra: $IK \perp PO$. (9)

Từ (6) và (9) $\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài tập 49: Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

a) Tứ giác OMNP nội tiếp.

b) Tứ giác CMPO là hình bình hành.

c) CM, CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

d) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

Hướng dẫn

d) Dễ thấy $\Delta OMC = \Delta DPO$ (c.g.c).

Suy ra: $\widehat{ODP} = 90^\circ$.

Suy ra: P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên đoạn thẳng A'B' song song và bằng AB.

Bài tập 50: Cho ΔABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

a) Chứng minh: $\Delta ABC \sim \Delta EBD$.

b) Chứng minh: Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.

c) Chứng minh: $AC \parallel FG$.

d) Chứng minh: Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Hướng dẫn

d) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của $\triangle DBC$ nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài tập 51: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID. Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp.

Bài tập 52: Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ $1/4$ đường tròn phía trong hình vuông. Lấy AB làm đường kính, vẽ $1/2$ đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tùy ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

a) Chứng minh I là trung điểm của AP.

b) Chứng minh PH, BI, AM đồng qui.

c) Chứng minh $PM = PK = AH$

d) Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.

e) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Bài tập 53: Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ đường kính MN cắt AB tại I. Gọi D là một điểm thuộc dây AB. Tia MD cắt đường tròn (O) tại C.

a) Chứng minh rằng tứ giác CDIN nội tiếp được

b) Chứng minh rằng tích MC. MD có giá trị không đổi khi D di động trên dây AB.

c) Gọi O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Chứng minh rằng: $\widehat{MAB} = \frac{1}{2} \widehat{AO'D}$.

d) Chứng minh rằng ba điểm A, O', N thẳng hàng và MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Bài tập 54: Cho tam giác vuông cân ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), trung điểm I của cạnh BC. Xét một điểm D trên tia AC. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BD, DA tại các điểm tương ứng M, N, P.

a) Chứng minh rằng 5 điểm B, M, O, I, N nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng ba điểm N, I, P thẳng hàng.

c) Gọi giao điểm của tia BO với MN, NP lần lượt là H, K. Tam giác HNK là tam giác gì, tại sao?

d) Tìm tập hợp điểm K khi điểm D thay đổi vị trí trên tia AC.

Bài tập 55: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và C'. Đường thẳng AO' cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại D và D'.

a) Chứng minh C, B, D' thẳng hàng

b) Chứng minh tứ giác ODC'O' nội tiếp

c) Đường thẳng CD và đường thẳng D'C' cắt nhau tại M. Chứng minh tứ giác MCBC' nội tiếp.

Bài tập 56: Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ cát tuyến CBA. Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N.

a) Chứng minh rằng IN, JM và AB đồng quy tại một điểm D.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N đi qua trung điểm E của CD.

Bài tập 57: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại B và C (B và C khác A). EF là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm I của BC, EC cắt đường tròn (O') tại D.

a) Tứ giác BEFC là hình gì?

b) Chứng minh ba điểm A, D, F thẳng hàng.

c) CF cắt đường tròn (O') tại G. Chứng minh ba đường EG, DF và CI đồng quy.

d) Chứng minh ID tiếp xúc với đường tròn (O').

Bài tập 58: Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại C. AC và BC là đường kính của (O) và (O'), DE là tiếp tuyến chung ngoài ($D \in (O), E \in (O')$). AD cắt BE tại M.

- a) ΔMAB là tam giác gì?
 b) Chứng minh: MC là tiếp tuyến chung của (O) và (O').
 c) Kẻ Ex, By vuông góc với AE, AB. Ex cắt By tại N. Chứng minh: D, N, C thẳng hàng.
 d) Vẽ cùng phía của nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và OO'. Đường thẳng qua C cắt hai nửa đường tròn trên tại I, K. Chứng minh $OI \parallel AK$.

Bài tập 59: Cho đường tròn (O ; R). Đường thẳng d cắt (O) tại A, B. C thuộc d ở ngoài (O). Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ cắt AB tại D. CP cắt (O) tại điểm thứ hai I, AB cắt IQ tại K.

- a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp.
 b) Chứng minh: $CI \cdot CP = CK \cdot CD$.
 c) Chứng minh IC là phân giác ngoài của tam giác AIB.
 d) A, B, C cố định, (O) thay đổi nhưng vẫn luôn qua A, B. Chứng minh rằng IQ luôn đi qua điểm cố định.

Bài tập 60: Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O ; R). M di động trên AB. N di động trên tia đối của tia CA sao cho $BM = CN$.

- a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D. Chứng minh rằng D cố định.
 b) Tính góc MDN.
 c) MN cắt BC tại K. Chứng minh DK vuông góc với MN.
 d) Đặt $AM = x$. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

Bài tập 61: Cho (O; R). Điểm M cố định ở ngoài (O). Cắt tuyến qua M cắt (O) tại A và B. Tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C.

- a) Chứng minh tứ giác OACB nội tiếp đường tròn tâm K.
 b) Chứng minh: (K) qua hai điểm cố định là O và H khi cắt tuyến quay quanh M.
 c) CH cắt AB tại N, I là trung điểm AB. Chứng minh: $MA \cdot MB = MI \cdot MN$.
 d) Chứng minh: $IM \cdot IN = IA^2$

Bài tập 62: Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O. C là điểm chính giữa cung AB. M di động trên cung nhỏ AC. Lấy N thuộc BM sao cho $AM = BN$.

- a) So sánh ΔAMC và ΔBCN .
 b) ΔCMN là tam giác gì?
 c) Kẻ dây AE//MC. Chứng minh tứ giác BECN là hình bình hành.
 d) Đường thẳng d đi qua N và vuông góc với BM. Chứng minh d luôn đi qua điểm cố định.

Bài tập 63: Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D. Điểm M tùy ý trên d, kẻ tiếp tuyến MA, MB. I là trung điểm của CD.

- a) Chứng minh 5 điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.
 b) Gọi H là trực tâm của ΔMAB , tứ giác OAHB là hình gì?
 c) Khi M di động trên d. Chứng minh rằng AB luôn qua điểm cố định.
 d) Đường thẳng qua C vuông góc với OA cắt AB, AD lần lượt tại E và K. Chứng minh: $EC = EK$.

Bài tập 64: Cho ΔABC cân ($AB = AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và M là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu của B trên AM và P là giao điểm của BD với CM.

- a) Chứng minh ΔBPM cân.
 b) Tìm quỹ tích của điểm D khi M di chuyển trên đường tròn (O).

Bài tập 65: Đường tròn (O ; R) cắt một đường thẳng d tại hai điểm A, B. Từ một điểm M trên d và ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MP, MQ.

- a) Chứng minh rằng: $\widehat{QMO} = \widehat{QPO}$ và đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ đi qua hai điểm cố định khi M di động trên d.
 b) Xác định vị trí của M để MQOP là hình vuông?
 c) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn nội tiếp ΔMPQ khi M di động trên d.

Bài tập 66: Hai đường tròn tâm O và tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn (O) và (I) lần lượt tại P, Q. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng PO và QI.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BCQP, OBCI nội tiếp.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AP, AQ, K là trung điểm của EF. Khi đường thẳng d quay quanh A thì K chuyển động trên đường nào?

c) Tìm vị trí của d để ΔPQB có chu vi lớn nhất.

Bài tập 67: Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Biết $AB = 4$ cm; $AC = 5$ cm và $A'C = 13$ cm. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Bài tập 68: Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có diện tích mặt chéo $ACC'A'$ bằng $25\sqrt{2}$ cm². Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

Bài tập 69: Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Biết $AB = 15$ cm, $AC' = 20$ cm và $\widehat{A'AC'} = 60^\circ$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

Bài tập 70: Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C'. Tính diện tích xung quanh và thể tích của nó biết cạnh đáy dài 6 cm và góc $AA'B$ bằng 30° .

Bài tập 71: Cho ΔABC đều cạnh a. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của ΔABC . Trên đường thẳng d lấy một điểm S. Nối SA, SB, SC.

a) Chứng minh rằng: $SA = SB = SC$.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp S.ABC, cho biết $SG = 2a$.

Bài tập 72: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là a và đường cao là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác đều.

b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài tập 73: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a.

a) Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

b) Tính thể tích của hình chóp.

Bài tập 74: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao 15cm và thể tích là 1280cm³.

a) Tính độ dài cạnh đáy.

b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài tập 75: Một hình chóp cắt diện tích đáy nhỏ là 75cm², diện tích đáy lớn gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ và chiều cao là 6 cm. Tính thể tích của hình chóp cắt đó.

Bài tập 76: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD).

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Chứng minh rằng bốn mặt bên là những tam giác vuông.

c) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài tập 77: Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích hình trụ là 128π cm³, tính diện tích xung quanh của nó.

Bài tập 78: Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh bằng 65π cm². Tính thể tích của hình nón đó.

Bài tập 79: Cho hình nón cắt, bán kính đáy lớn bằng 8 cm, đường cao bằng 12cm và đường sinh bằng 13 cm.

a) Tính bán kính đáy nhỏ.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cắt đó.

Bài tập 80: Một hình cầu có diện tích bề mặt là 36π cm². Tính thể tích của hình cầu đó.