

NGUYỄN VŨ THANH

**CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN
TRUNG HỌC CƠ SỞ**

HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương 1.

CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA GIÁC

§ 1. TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác : Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau nếu thỏa một trong các trường hợp sau :

- a) $AB = A'B'$; $\hat{A} = \hat{A}'$; $AC = A'C'$ (c.g.c)
- b) $\hat{A} = \hat{A}'$; $AB = A'B'$; $\hat{B} = \hat{B}'$ (g.c.g)
- c) $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CA = C'A'$ (c.c.c).

2. Trong tam giác ABC :

- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.
- Ba đường cao đồng quy tại một điểm H gọi là *trực tâm* của tam giác.
- Ba đường trung trực đồng quy tại điểm O gọi là *tâm đường tròn ngoại tiếp* tam giác.
- Ba đường phân giác trong đồng quy tại một điểm I gọi là *tâm đường tròn nội tiếp* tam giác.
- Ba đường trung tuyến đồng quy tại một điểm G gọi là *trọng tâm* của tam giác và $AG = 2GM$ (với M là trung điểm của BC).

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 1. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE. Chứng minh rằng đường cao AH của tam giác ABC đi qua trung điểm I của đoạn DE.

Giải

Gọi I là giao điểm của AH và DE. Qua D kẻ $DD' \perp AH$ (D' thuộc đường thẳng AH). Qua E kẻ $EE' \perp AH$ (E' thuộc đường thẳng AH). Hai tam giác vuông ABH và DAD' có:

$$\widehat{ABH} = \widehat{DAD'} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAH}),$$

$$AB = AD.$$

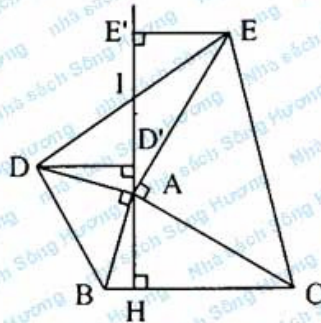
$$\text{Suy ra: } \triangle ABH = \triangle DAD' \Rightarrow DD' = AH. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \triangle AHC = \triangle EE'A \Rightarrow EE' = AH. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } DD' = EE'.$$

Hai tam giác vuông $DD'I$ và $EE'I$ có:

$DD' = EE'$ và $\widehat{IDD'} = \widehat{IEE'}$ (so le trong). Vậy $\triangle DD'I = \triangle EE'I$, suy ra $DI = EI$, tức là I là trung điểm DE.



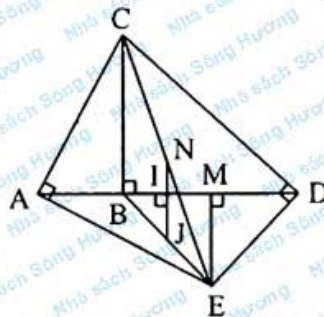
Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại B, trên tia đối của tia BA, lấy điểm D sao cho $AD = 3AB$. Đường thẳng vuông góc với CD tại D cắt đường thẳng vuông góc với AC tại A ở E. Chứng minh tam giác BDE cân.

Giải

Gọi N, I, M lần lượt là trung điểm của CE, AD, BD. Từ $AD = 3AB$ suy ra I là trung điểm BM.

Ta có $AN = DN (= \frac{1}{2} CE$ do các tam giác ACE và DCE vuông) $\Rightarrow IN \perp AD$.

Gọi J là giao điểm của NI kéo dài với BE thì NJ là đường trung bình của $\triangle BCE$. Suy ra IJ là đường trung bình của $\triangle BME$, do đó $ME \parallel IJ \Rightarrow ME \perp BD$. Vậy $\triangle BED$ cân tại E.



Bài 3. Xác định các góc của tam giác ABC, biết rằng đường cao AH và trung tuyến AM chia góc $\widehat{BAC}$ thành ba phần bằng nhau.

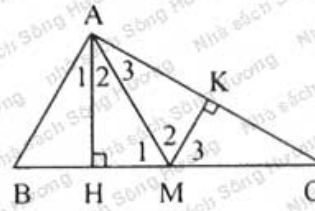
Giải

$$\text{Kẻ } MK \perp AC, \text{ khi đó } \triangle AHM = \triangle AKM, \text{ suy ra } MH = MK. \quad (1)$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle ABM \text{ cân tại A} \Rightarrow BH = MH. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $MK = \frac{1}{2}MC$, suy ra tam giác vuông KMC là nửa tam giác đều cạnh MC đường cao CK. Do đó : $\hat{C} = 30^\circ$, suy ra $\hat{M}_3 = 60^\circ$.

Ta có : $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (do $\triangle AHM = \triangle AKM$)
nên $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{1}{2}\widehat{HMK} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 30^\circ$. Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A và có : $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$.

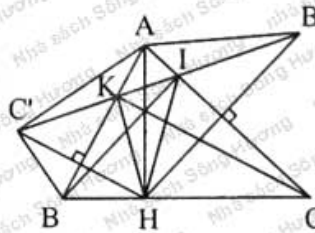


Bài 4. Cho tam giác ABC, kẻ đường cao AH. Gọi C' là điểm đối xứng của H qua AB; B' là điểm đối xứng của H qua AC. Gọi giao điểm của B'C' với AC và AB theo thứ tự là I và K. Chứng minh rằng BI, CK là các đường cao của tam giác ABC.

Giải

Cách 1. Ta có : $\widehat{AC'K} = \widehat{AHK}$ (do tính đối xứng); $\widehat{AHI} = \widehat{AB'I}$. Mà $\widehat{AC'K} = \widehat{AB'I}$ ($\triangle C'AB'$ cân) suy ra $\widehat{AHK} = \widehat{AHI} \Rightarrow AH$ là phân giác của góc $\widehat{KHI} \Rightarrow BH$ là phân giác ngoài của $\triangle HKI$.

Từ định lý ba đường phân giác suy ra BI là phân giác trong của góc $\widehat{HIK} \Rightarrow BI \perp IC$ (hai đường phân giác trong và ngoài của một góc tam giác thì vuông góc nhau). Vậy BI là đường cao của $\triangle ABC$. Tương tự CK là đường cao của $\triangle ABC$.



Cách 2. Chứng minh được 5 điểm A, I, H, B, C' nằm trên cùng một đường tròn đường kính AB. Suy ra : $\widehat{BIA} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{CKB} = 90^\circ$.

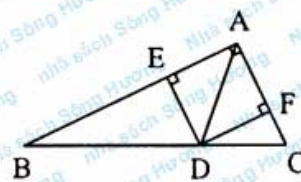
Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác trong $AD = d$. Chứng minh : $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Giải

Vẽ $DE \perp AB$, $FD \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$). Tứ giác AFDE là hình chữ

nhật (vì $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$). Ta lại có AD là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$ nên hình chữ nhật AFDE là hình vuông. Suy ra :

$$DE = DF = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$



$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S_{DAB} + S_{DAC} &= S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} DE \cdot AB + \frac{1}{2} DF \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AC. \\ &\Rightarrow \frac{d\sqrt{2}}{2} c + \frac{d\sqrt{2}}{2} b = c \cdot b \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Bài 6. Cho tam giác đều ABC và điểm M ở trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

a) $MA' + MB' + MC'$ không đổi ;
b) $AC' + BA' + CB'$ không đổi.

Giải

a) Đặt $AB = BC = CA = a$. Kẻ đường cao $AH = h$. Ta có : $S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA}$.

$$\text{Suy ra : } \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot MA' + \frac{1}{2} a \cdot MB' + \frac{1}{2} a \cdot MC'.$$

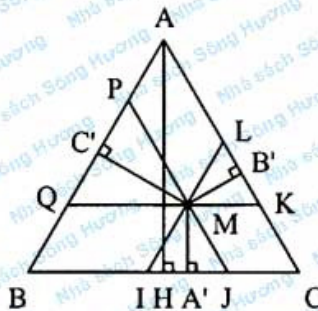
Hay : $h = MA' + MB' + MC'$ (không đổi).

b) Qua M kẻ các đoạn thẳng song song với các cạnh của tam giác. Dễ thấy các tam giác MIJ, MKL, MPQ đều có các đường cao tương ứng là MA' , MB' , MC' . Gọi x, y, z lần lượt là cạnh của các tam giác đều MIJ, MKL, MPQ, ta có :

$$a = AB = AP + PQ + QB = ML + PQ + MI = x + y + z.$$

Do đó ta có : $AC' + BA' + CB' = (AP + PC') + (BI + IA') + (CK + KB')$

$$\begin{aligned} &= \left(y + \frac{z}{2}\right) + \left(z + \frac{x}{2}\right) + \left(x + \frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}(x + y + z) = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$



Bài 7. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BA, CA lần lượt lấy điểm P, Q sao cho $BP = CQ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, PQ. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại B' và C'. Chứng minh rằng tam giác B'AC' cân.

Giải

Gọi I là trung điểm của đoạn BQ. Khi đó IM là đường trung bình của $\triangle BCQ$. Suy ra

$$IM \parallel CQ \text{ và } IM = \frac{1}{2} CQ. \quad (1)$$

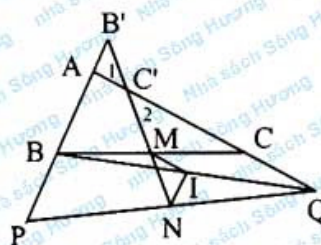
Mặt khác NI là đường trung bình của $\triangle BPQ$, suy ra $IN \parallel BP$ và $IN = \frac{1}{2} BP$. (2)

Theo giả thiết $BP = CQ$ nên từ (1) và (2) suy ra : $IM = IN$. Do đó $\triangle IMN$ cân và $\widehat{IMN} = \widehat{INM}$. (3)

Theo (1) ta có $IM \parallel AQ$, suy ra $\widehat{IMN} = \widehat{C'_2}$ (đồng vị). Mà $\widehat{C'_1} = \widehat{C'_2}$ (đối đỉnh) do đó $\widehat{IMN} = \widehat{C'_1}$. (4)

Theo (2) ta có $IN \parallel AP$, suy ra $\widehat{INM} = \widehat{AB'C'}$ (so le trong) (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $\widehat{C'_1} = \widehat{AB'C'}$. Do đó $\triangle B'AC'$ là tam giác cân.



C. LUYỆN TẬP

- 1.1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đường thẳng d đi qua G cắt hai cạnh AB và AC. Chứng minh rằng khoảng cách từ A đến d bằng tổng các khoảng cách từ B và C đến d.
- 1.2. Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CA. BB' cắt CN ở P, AA' cắt CM ở Q. Tính độ dài đoạn PQ, biết độ dài đoạn AB bằng c.
- 1.3. Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Đường trung trực BD cắt đường trung trực AC tại O. Chứng minh rằng OA là tia phân giác của góc BAC.
- 1.4. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} > 90^\circ$). Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh AO là tia phân

giác của góc $\widehat{EAF}$.

1.5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$) và phân giác trong BD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Kẻ đường cao DH của tam giác BDC. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH tại K. Tính góc $\widehat{DBK}$.

1.6. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC = 3AB$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Chứng minh rằng : $\widehat{BDA} + \widehat{BCA} = 45^\circ$.

1.7. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân ABD, ACE theo thứ tự cân tại B và cân tại C. Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D và E xuống đường thẳng BC. Chứng minh rằng :

- a) $BM = CN$;
- b) $BC = DM + EN$.

1.8. Cho tam giác ABC, vẽ tam giác vuông cân ABD cân tại B, A và D ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng BC. Vẽ tam giác vuông cân CBG cân tại B, G và A ở cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC. Chứng minh rằng GA vuông góc với DC.

1.9. Cho tam giác ABC cân tại A và đường cao AD. Từ D dựng $DE \perp AB$ và $DF \perp AC$ ($E \in AB, F \in AC$).

- a) Chứng minh AD là trung trực đoạn EF.
- b) Trên tia đối của tia DE lấy điểm G sao cho $DG = DE$. Chứng minh tam giác CEG vuông.

1.10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D và trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Các đường vuông góc với CD kẻ từ A và E lần lượt cắt cạnh BC tại G và H. Chứng minh rằng $BG = GH$.

1.11. Ở về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ACE vuông cân tại C (A, E cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC). Đường cao AH của tam giác ABC và đường cao CK của tam giác BCE cắt nhau tại N. Chứng minh $AN = BC$.

1.12. Cho tam giác ABC nhọn và đường cao AH. Lấy các điểm E và F sao cho AB là đường trung trực của HE, AC là đường trung trực của HF. EF cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh MC song song với EH.

1.13. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, các tia phân giác AD, BE, CF.

- a) Chứng minh DE là tia phân giác của góc $\widehat{ADC}$.
- b) Chứng minh tam giác EDF vuông.

- 1.14. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC. Chứng minh BM vuông góc với AN.

HƯỚNG DẪN GIẢI

(Một số bài hướng dẫn không có hình vẽ, học sinh tự vẽ hình để tiện theo dõi).

- 1.1. Áp dụng tính chất trọng tâm và đường trung bình của hình thang.

- 1.2. $MB' \parallel NC \Rightarrow NP$ là đường trung bình của $\triangle BB'M \Rightarrow P$ là trung điểm của BB' .

Gọi C' là trung điểm của AB. Chứng minh PQ là đường trung bình của $\triangle A'B'C'$: $PQ = \frac{c}{4}$.

- 1.3. O nằm trên đường trung trực của BD nên: $OB = OD$; O nằm trên đường trung trực của AC nên $OA = OC$.

Hai tam giác ABO và CDO có:

$OA = OC$, $OB = OD$, $\angle AOB = \angle COD$ (đối đỉnh). Suy ra $\triangle ABO = \triangle CDO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OCD}$. (1)

Mặt khác $\triangle OAC$ cân tại O (vì O nằm trên đường trung trực của AC).

Do đó: $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$.

Mà AO là tia nằm giữa hai tia AB và AC nên AO là tia phân giác của góc BAC.

- 1.4. $\triangle OAE = \triangle OBE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EBO}$.

$\triangle OAF = \triangle OCF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{OCF}$.

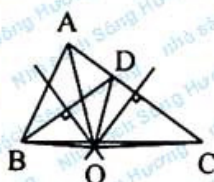
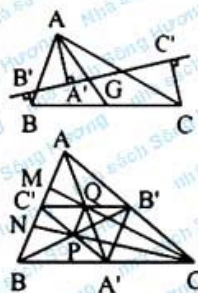
Mà $\widehat{EBO} = \widehat{OCF}$ suy ra $\widehat{EAO} = \widehat{OAF}$.

- 1.5. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt tia EK tại I.

Ta có: $AB = AE = EI = IB$ (tính chất đoạn chắn).

Hai tam giác vuông ABD và HBD có AD chung và $\widehat{ABD} = \widehat{HBD}$
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle HBD \Rightarrow BH = AB = BI$.

$\triangle HBK = \triangle IBK \Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{IBK}$.



$$\text{Do đó : } \widehat{DBK} = \widehat{DBH} + \widehat{HBK} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} + \frac{1}{2} \widehat{CBI} = \frac{1}{2} \widehat{ABI} = 45^\circ$$

- 1.6. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE = AB. Trong nửa mặt phẳng chứa điểm C bờ là đường thẳng AB vẽ tia Et ⊥ BE. Trên tia Et lấy N sao cho EN = AC và lấy điểm F sao cho EF = AB. Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ F xuống AC ta có :

$$FM = AE = AB \text{ (tính chất đoạn chắn).}$$

Xét ba tam giác vuông BEF, CMF, DAB có :

$$EF = MF = AB,$$

$$BE = MC = AD.$$

Suy ra $\triangle BEF = \triangle CMF = \triangle DAB$ (hai cạnh góc vuông c.g.c).

Do đó FB = FC và $\widehat{ADB} = \widehat{MCF}$. Vậy :

$$\widehat{BDA} + \widehat{BCA} = \widehat{ADB} + \widehat{BCA} = \widehat{BCA} + \widehat{MCF} = \widehat{FCB}. \quad (1)$$

Ta có : $\widehat{BFE} = \widehat{CFM}$ (vì $\triangle BEF = \triangle CMF$).

$$\text{Mà } \widehat{BFE} + \widehat{BFM} = \widehat{CFM} + \widehat{CFN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFM} = \widehat{CFN}$$

$$\Rightarrow \widehat{BFM} + \widehat{CFM} = \widehat{BFE} + \widehat{CFN} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ.$$

Vậy tam giác BFC vuông cân, do đó $\widehat{FCB} = 45^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

- 1.7. Kẻ đường cao AH của $\triangle ABC$. Chứng minh

$$\triangle MBD = \triangle HAB \text{ và } \triangle NCE = \triangle HAC \Rightarrow BM = AH = CN.$$

- 1.8. Nối GA cắt BC ở E, cắt CD ở M.

Chứng minh $\triangle ABG = \triangle DBC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BGA} = \widehat{BCD}$$

$$\Rightarrow \widehat{BGA} + \widehat{BEA} = \widehat{BCD} + \widehat{MEC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle EMC$ vuông tại M.

- 1.9. a) Chứng minh $\triangle BDE = \triangle CDF \Rightarrow DE = DF, AE = AF$.

b) Chứng minh $CG \parallel BE \Rightarrow \triangle CEG$ vuông tại G.

- 1.10. Đường thẳng AE cắt đường thẳng AB tại M. Chứng minh $\triangle BEM$ cân tại E ($\widehat{EBM} = \widehat{BME} = \widehat{DCE}$).

Suy ra G là trung điểm của BH (AG là đường trung bình của $\triangle MBH$).

1.11. Chứng minh $\triangle ACN = \triangle CEB$

$$(\widehat{NAC} = \widehat{ECB}, AC = CE, \widehat{ACN} = \widehat{CEB})$$

$$\Rightarrow AN = BC.$$

1.12. Ta có $\widehat{EMB} = \widehat{BMH}$ (do $\triangle EMH$ cân), suy ra AB là phân giác ngoài góc M của $\triangle MHN$. Tương tự NC là phân giác ngoài góc N của $\triangle MHN$.

Hai phân giác ngoài góc M và N cắt nhau tại A nên HA là tia phân giác trong của $\triangle MHN$.

Mặt khác $AH \perp BC$ nên HC là tia phân giác góc ngoài tại H của $\triangle MHN$, NC là phân giác ngoài góc N của $\triangle MHN$. Suy ra MC là phân giác trong góc M của tam giác MHN .

MC và MB là hai phân giác trong và ngoài đỉnh M của $\triangle MHN$ nên $MC \perp MB$. Mà $AB \perp EH$. Do đó $MC \parallel EH$.

1.13. a) E là giao điểm của phân giác ngoài góc A và phân giác trong góc B của $\triangle ABD$, do đó DE là phân giác ngoài của góc D của $\triangle ABD$.

b) DE và DF là hai đường phân giác trong và ngoài đỉnh D của $\triangle ABD$ nên vuông góc với nhau.

1.14. Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ADC$ nên $MN \parallel AC$.

Mà $AC \perp AB$. Suy ra $MN \perp AB$. M là giao điểm của hai đường cao AD và NI của $\triangle ABN$ nên M là trực tâm của $\triangle ABN$. Từ đó suy ra $BM \perp AN$.

§2. HÌNH THANG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Tứ giác $ABCD$ là hình thang $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$.
- Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên được gọi là đường trung bình hình thang.
- Đường trung bình của hình thang song song với hai cạnh đáy và có độ dài bằng nửa tổng độ dài hai đáy.
- Hình thang cân là hình thang có hai góc ở đáy bằng nhau.

- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân và ngược lại.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 8. Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng nối các trung điểm của cặp cạnh đối diện một tứ giác bằng nửa tổng hai cạnh kia thì tứ giác đó là hình thang.

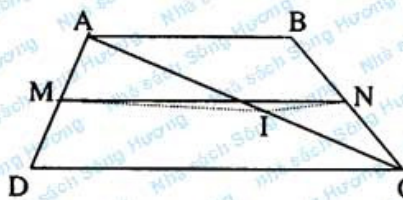
Giải

Cách 1.

Giả sử M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối AD và BC của tứ giác ABCD và $MN = \frac{AB + CD}{2}$, ta chứng minh $AB \parallel CD$.

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có MI là đường trung bình của $\triangle ADC$ nên



$$MI \parallel CD \text{ và } MI = \frac{CD}{2}. \quad (1)$$

Tương tự

$$NI \parallel AB \text{ và } NI = \frac{AB}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$MI + NI = \frac{AB + CD}{2}. \quad (3)$$

Theo đề bài : $MN = \frac{AB + CD}{2}$ nên từ (3) suy ra $MN = MI + NI$.

Do đó M, N, I thẳng hàng. Từ đó suy ra $AB \parallel CD \parallel MN$.

Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

Cách 2. Giả sử

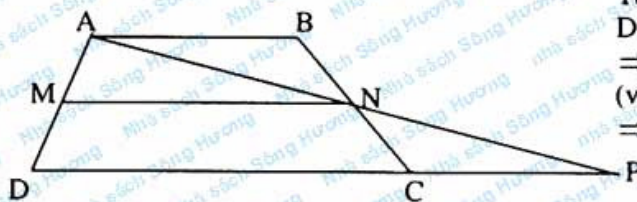
$$MN = \frac{AB + CD}{2}. \quad (1)$$

Trên tia AN lấy điểm P sao cho : $AN = NP$.

Khi đó $\triangle ANB = \triangle PNC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CP$.

Ta lại có MN là đường trung bình của $\triangle ADP$ nên :

$$MN \parallel DP \text{ và } MN = \frac{DP}{2}. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra
 $DP = AB + CD$
 $\Rightarrow DP = DC + CP$
 (vì $AB = CP$)
 $\Rightarrow D, C, P$ thẳng hàng.

Do đó $AB \parallel CD$
 $\Rightarrow ABCD$ là hình thang.

Bài 9. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ ba đỉnh của một tam giác đến một đường thẳng nằm ngoài tam giác bằng ba lần khoảng cách từ trọng tâm tam giác đến đường thẳng đó.

Giải

Gọi E là trung điểm của AC ;

G là trọng tâm của $\triangle ABC$;

M là trung điểm của BG .

Gọi A', B', C', G', M', E'

lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A, B, C, G, M, E trên đường thẳng xy .

Khi đó ta có :

$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel GG' \parallel MM' \parallel EE'$

(vì chúng cùng vuông góc với đường thẳng xy).

Ta phải chứng minh :

$AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

Theo tính chất trọng tâm ta có G là trung điểm ME .

Ta có GG', EE', MM' lần lượt là đường trung bình của các hình thang vuông $MM'E'E, AA'C'C, BB'G'G$.

Do đó theo tính chất đường trung bình của hình thang ta có :

$$2GG' = MM' + EE' \quad (1)$$

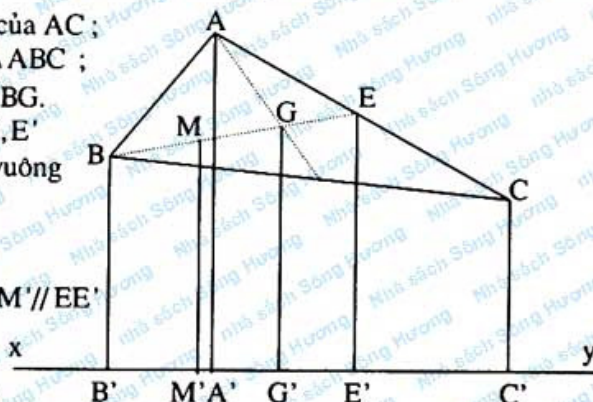
$$2MM' = BB' + GG' \quad (2)$$

$$2EE' = AA' + CC' \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1) khi đã nhân hai vế cho 2 thì được :

$$4GG' = BB' + GG' + AA' + CC'$$

$$\Rightarrow 3GG' = AA' + BB' + CC' \text{ (đpcm).}$$



Bài 10. Cho hình thang cân ABCD ($BC \parallel AD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD. Trên tia đối của tia AB lấy điểm P bất kì. PN cắt BD tại Q. Chứng minh MN là phân giác của góc $\widehat{PMQ}$.

Giải

Ta có $MN \perp AD$ và $MN \perp BC$. (1)

AD cắt PM và MQ lần lượt tại I, K.

PQ cắt đường thẳng BC tại R.

Vì $BC \parallel AD$ nên

$$\frac{IN}{MR} = \frac{AN}{BR} \text{ và } \frac{KN}{MR} = \frac{ND}{BR}.$$

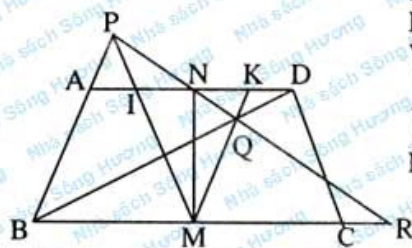
Mà $AN = ND$ nên

$$\frac{IN}{MR} = \frac{KN}{MR} \Rightarrow IN = KN. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác IMK cân tại M.

MN là đường cao nên MN cũng là phân giác của $\triangle IMK$.

Vậy MN là phân giác góc $\widehat{PMQ}$.



C. LUYỆN TẬP

- 2.1. Chứng minh rằng nếu các góc ở đáy của một hình thang không bằng nhau thì đường chéo phải xuất phát từ đỉnh góc nhỏ sẽ lớn hơn đường chéo phát xuất từ đỉnh góc lớn.
- 2.2. Cho hình thang ABCD có tổng các góc ở đáy AD bằng 90° . Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm của hai đáy bằng nửa hiệu hai cạnh đáy.
- 2.3. Dựng một hình thang biết một góc, hai đường chéo và đường trung bình.
- 2.4. Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$), các đường phân giác trong của các góc A và B cắt nhau ở M, các đường phân giác trong của các góc C và D cắt nhau ở N. Chứng minh rằng độ dài đoạn MN bằng nửa hiệu của tổng độ dài hai đáy với tổng độ dài hai cạnh bên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

(Một số bài hướng dẫn không có hình vẽ, học sinh tự vẽ hình để tiện theo dõi).

- 2.1. Giả sử $\hat{A} < \hat{D}$. Chứng minh $AC > BD$.

Dựng tia AE sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ADC}$ để được hình thang cân ADCE.

Ta có : $\widehat{AEC} = \widehat{DCE}$ và $AC = DE$.

Ta lại có : $\widehat{EBD} > \widehat{DCB} > \widehat{DEB} \Rightarrow ED > BD \Rightarrow AC > BD$.

- 2.2. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD ;

I là giao điểm của AB và CD kéo dài.

Ta có $\hat{A} + \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AID} = 90^\circ$.

Chứng minh I, E, F thẳng hàng và $IE = \frac{BC}{2}; IF = \frac{AD}{2}$

$$\Rightarrow EF = IF - IE = \frac{AD - BC}{2}.$$

- 2.3. Giả sử hình thang ABCD đã dựng được, ta có

$AC = a, BD = b, MN = c, \hat{A} = \alpha$.

Qua C kẻ $CE \parallel BD$.

Theo tính chất đoạn chắn ta có $CE = BD = b, DE = BC$, suy ra

$AE = AD + BC = 2MN = 2c$.

Do đó, $\triangle ACE$ dựng được vì biết ba cạnh : $AC = a, CE = b, AE = 2c$.

Vậy ta xác định được hai đỉnh A và C. Dựng đỉnh B thỏa :

- B nằm trên tia $Cx \parallel AE$;
- B nằm trên tia Ay tạo với AE một góc α .

Dựng đỉnh D thỏa :

- D nằm trên tia AE ;
- D cách B một khoảng bằng b.

Bài toán chỉ dựng được khi $|a - b| < 2c < a + b$ và $\alpha < 180^\circ$.

- 2.4. P, Q là trung điểm của AB và CD. Chứng minh $\widehat{AMB} = \widehat{CND} = 90^\circ$.

Sau đó sử dụng tính chất : “Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền”, ta chứng minh $PM \parallel AD$ và $QN \parallel AD$. Mặt khác $PQ \parallel AD \Rightarrow P, M, N, Q$ thẳng hàng. Từ đó áp dụng tính chất đường trung bình hình thang và tính chất nêu trên ta có kết quả.

§ 3. HÌNH BÌNH HÀNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi các cạnh đối bằng nhau.
- Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi các góc đối bằng nhau.
- Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
- Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

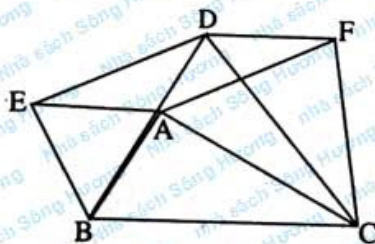
Để chứng minh một tứ giác là hình bình hành ta chứng minh tứ giác có một trong các tính chất sau :

1. Hai cặp cạnh song song.
2. Các cạnh đối (hay góc đối) bằng nhau.
3. Một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
4. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 11. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác hai tam giác đều ABE và ACF. Dựng hình bình hành AEDF. Chứng minh tam giác BDC là tam giác đều.

Giải



Ta có : $AC = AF = ED$ (giả thiết)
và $AB = BE$.

Ta lại có :

$$\widehat{BAC} + \widehat{EAF} = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 240^\circ. \quad (1)$$

Mặt khác :

$$\widehat{BED} + \widehat{EAF} = 60^\circ + \widehat{AED} + \widehat{EAF} = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta được :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BED}.$$

Xét hai tam giác ABC và EBD, có
$$\begin{cases} AB = EB \\ \widehat{BAC} = \widehat{BED} \\ AC = ED \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta EBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow BC = BD$.

(3)

Tương tự ta cũng có

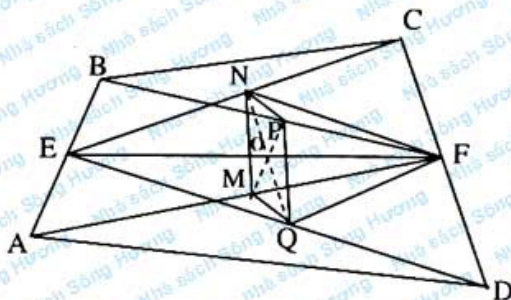
$\Delta ABC = \Delta FDC \Rightarrow BC = DC$.

(4)

Từ (3) và (4) suy ra ΔBDC là tam giác đều.

Bài 12. Cho tứ giác ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AF, CE, BF và DE. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Giải



Ta chứng minh hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ta sử dụng đường chéo EF làm trung gian.

Xét tứ giác có hai đường chéo EF và NQ là ENFQ, tứ giác này có $FQ \parallel NE$ và $FQ = NE$ (vì FQ là đường trung bình của ΔDCE), do đó ENFQ là hình bình hành.

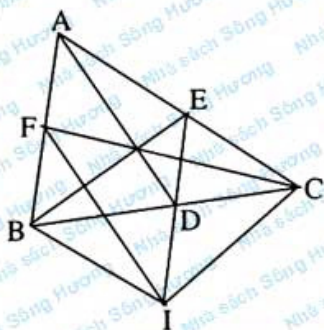
Vậy NQ và EF cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường (1).

Tương tự, xét tứ giác có hai đường chéo MP và EF là EPMF tứ giác này có $EP \parallel MF$ và $EP = MF$ (vì EP là đường trung bình của ΔBAF), do đó nó là hình bình hành.

Vậy MP và EF cũng cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường (2).

Từ (1) và (2) suy ra MP và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 13. Chứng minh rằng trong một tam giác, nếu hai trung tuyến vuông góc với nhau thì đường trung tuyến còn lại sẽ là cạnh huyền của một tam giác vuông mà một cạnh góc vuông có độ dài bằng độ dài của một trong hai trung tuyến kia.



Giải

Giả sử tam giác ABC có hai trung tuyến AD và BE vuông góc nhau. Trên tia ED lấy điểm I sao cho $DE = DI$. Khi đó tứ giác BECI là hình bình hành vì có hai đường chéo BC và EI cắt nhau tại trung điểm D của mỗi đường.

Do đó : $IC \parallel BE$ và $IC = BE$. (1)

Mặt khác : $ED \parallel AF$ và $ED = AF$ (vì ED là đường trung bình của $\triangle ABC$), do đó $DI \parallel AF$ và $DI = AF$.

Suy ra tứ giác AFID là hình bình hành.

Từ đó, $FI \parallel AD$ và $FI = AD$. (2)

Từ (1) và (2), kết hợp với giả thiết $AD \perp BE$, ta được $FI \perp IC$ và $FI = AD$; $IC = BE$.

Vậy FIC là tam giác vuông ở I và hai cạnh góc vuông IF và IC tương ứng bằng hai trung tuyến AD và BE của tam giác ABC.

C. LUYỆN TẬP

3.1. Cho hình bình hành ABCD. M, N là trung điểm của các cạnh BC và CD. Chứng minh rằng AM và AN chia đường chéo BD thành ba phần bằng nhau.

3.2. Chứng minh rằng nếu một tứ giác có giao điểm hai đường chéo trùng với giao điểm các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện thì tứ giác đó là hình bình hành.

3.3. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD.

a) Chứng minh các tứ giác MRPS và RQSN là các hình bình hành.

b) Chứng minh các đường thẳng MP, NQ và RS đồng quy.

3.4. Cho tam giác ABC và một điểm O tùy ý trong tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC và I, K, L lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC. Chứng minh các đường thẳng ML, KP, IN đồng quy.

3.5. Cho hình bình hành ABCD có $BC = 2AB$, M là trung điểm của AD. Kẻ $CE \perp AB$. Chứng minh rằng $\widehat{EMD} = 3\widehat{AEM}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

(Học sinh tự vẽ hình để tiện theo dõi).

3.1. Chứng minh : $BE = EF = FD = \frac{BD}{3}$.

E là trọng tâm $\triangle ABC$ nên : $BE = \frac{2}{3} BO = \frac{1}{3} BD$.

F là trọng tâm $\triangle ACD$ nên : $FD = \frac{2}{3} DO = \frac{1}{3} BD$.

Suy ra : $BE = EF = FD = \frac{BD}{3}$.

3.2. E, F lần lượt là trung điểm BO và DO. Ta có : $ME \parallel PF$ (vì chúng cùng //AC). Chứng minh được MNPQ là hình bình hành

$$\Rightarrow \triangle MOE = \triangle POF \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow OE = OF ; ME = PF$$

$$\Rightarrow OB = OD ; OA = OC.$$

Vậy ABCD là hình bình hành.

3.3. a) Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác và dấu hiệu 3 về việc nhận biết hình bình hành.

b) MRPS là hình bình hành $\Rightarrow$ MP cắt RS tại trung điểm của mỗi đường. RQSN là hình bình hành $\Rightarrow$ NQ cắt RS tại trung điểm của mỗi đường.

Suy ra : MP, NQ và RS đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

3.4. Chứng minh các tứ giác KIPN và MPLK là các hình bình hành rồi áp dụng các tính chất hai đường chéo của hình bình hành (cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

3.5. Kẻ $MI \perp EC \Rightarrow IE = IC$ (MI là đường trung bình của hình thang vuông AECD). Do đó EMC là tam giác cân. Từ đó suy ra các góc bằng nhau, sau cùng, suy ra $\widehat{EMD} = 3\widehat{AEM}$.

§ 4. HÌNH CHỮ NHẬT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông.
- Hình bình hành trở thành hình chữ nhật khi hai đường chéo bằng nhau.

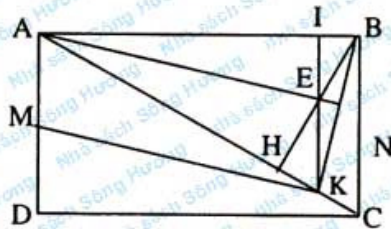
Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật :

- Tứ giác có 3 góc vuông.
- Hình thang cân có một góc vuông.
- Hình bình hành có một góc vuông.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 14. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BH vuông góc với AC. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của HC và AD. Chứng minh rằng BK vuông góc với KM.

Giải



Trong $\triangle AKB$ kẻ đường cao KI cắt BH tại E thì E là trực tâm của $\triangle AKB$. Suy ra $AE \perp BK$.

Ta có $KI \parallel AD$ và $KI \parallel BC$ (vì $KI \perp AB$) $\Rightarrow KE$ là đường trung bình của $\triangle HBC$

$$\Rightarrow KE \parallel BC \text{ và } KE = \frac{BC}{2}$$

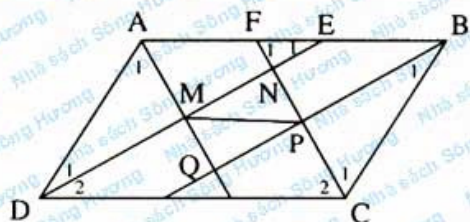
$$\Rightarrow KE \parallel MA \text{ và } KE = MA.$$

Do đó tứ giác MAEK là hình bình hành.

Từ đó suy ra $AE \parallel MK$. Mà $AE \perp BK$ nên $MK \perp BK$ (đpcm).

Bài 15. Chứng minh rằng các đường phân giác trong của một hình bình hành cắt nhau tạo thành hình chữ nhật có đường chéo bằng hiệu hai cạnh kề của hình bình hành.

Giải



Ta chứng minh tứ giác MNPQ có 3 góc vuông và $MP = AB - AD$.

Xét $\triangle AMD$ ta có :

$$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^\circ. (1)$$

$$\text{Tương tự } \widehat{NPQ} = 90^\circ. (2)$$

Xét $\triangle NEF$ có : $\hat{E}_1 = \hat{D}_2$ (so le trong) và : $\hat{F}_1 = \hat{C}_2$ (so le trong)

$$\Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{F}_1 = \hat{D}_2 + \hat{C}_2 = \frac{\hat{D} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{FNE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ. (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Ta chứng minh : $MP = EB$. Ta có tam giác DAE cân tại A vì có

$\hat{D}_1 = \hat{E}_1$, AM là phân giác nên AM là trung tuyến, tức là

$$DM = ME. (4)$$

Mặt khác, xét hai tam giác AMD và CPB có :

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1; \hat{D}_1 = \hat{B}_1; AD = BC$$

$$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CPB \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DM = PB. (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $ME = PB$, đồng thời $ME \parallel PB$ do đó tứ giác MPBE là hình bình hành.

Vậy $MP = EB$ hay $MP = AB - AD$ (vì $AD = AE$).

C. LUYỆN TẬP

4.1. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BH vuông góc với AC. Gọi K, M lần lượt là trung điểm của AH và CD. Chứng minh B, K, M, C nằm trên một đường tròn.

4.2. Dựng một hình chữ nhật ABCD, biết :

a) Đường chéo và tổng hai cạnh kề nhau.

b) Đường chéo và hiệu hai cạnh kề nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

4.1. Tương tự bài 14, chứng minh $BK \perp KM$. Gọi I là trung điểm của BM thì $KI = CI = MI = BI$. Vậy 4 điểm B, K, M, C nằm trên đường tròn tâm I đường kính BM .

4.2. a) Kéo dài AD , về phía D , lấy một đoạn $DE = DC$. Dựng $\triangle ACE$ có AC, AE và $\widehat{AEC} = 45^\circ$.

b) Trên AD đặt $DF = CD$. Dựng $\triangle ACF$ có AC, FA và $\widehat{AFC} = 135^\circ$.

§ 5. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình thoi.

- Hình thoi là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.
- Hình bình hành là một hình thoi khi hai đường chéo vuông góc với nhau hoặc một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Dấu hiệu nhận biết hình thoi:

1. Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
2. Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.
3. Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

2. Hình vuông

- Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh bằng nhau.
- Hai đường chéo của hình vuông bằng nhau và vuông góc với nhau.

Dấu hiệu nhận biết hình vuông :

1. Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.
2. Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc.
3. Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc.
4. Hình thoi có một góc vuông.
5. Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

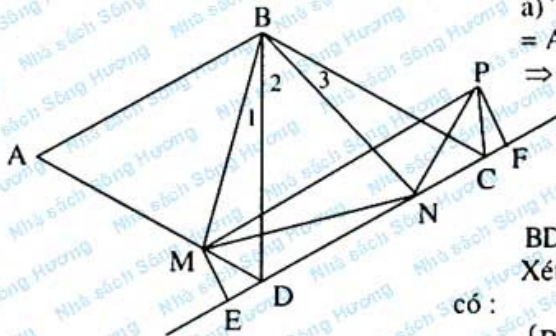
B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 16. Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 60° . Trên các cạnh AD và CD, lấy các điểm M và N sao cho $AM + CN = AD$.

a) Chứng minh rằng tam giác BMN đều.

b) Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh MP song song với CD.

Giải



a) Ta có $AM + CN = AD$
 $= AM + MD$

$\Rightarrow CN = MD$ và $AM = DN$.

ΔABD cân tại A và có
 $\hat{A} = 60^\circ$ nên ΔABD
 đều, do đó

$BD = AB = BC$ và $\widehat{ADB} = 60^\circ$.

Xét hai tam giác BMD và BCN

có :

$$\begin{cases} BD = BC \\ \widehat{BDM} = \widehat{BCN} = 60^\circ \\ DM = CN. \end{cases}$$

Suy ra $\Delta BMD = \Delta BCN$ (c.g.c). Vậy :

$$BM = BN.$$

(1)

Ta lại có : $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 60^\circ$ và $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$ Do đó : $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 60^\circ$ hay

$$\widehat{MBN} = 60^\circ.$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔBMN đều.

b) Chứng minh $MP \parallel CD$:

Kẻ ME và PF vuông góc với CD. Ta có

$$MD = NC = CP \text{ (vì } \Delta NCP \text{ cân).}$$

(3)

$$\text{Mặt khác : } \widehat{MDE} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ và}$$

$$\widehat{PCF} = 180^\circ - \widehat{NCP} = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ.$$

Do đó

$$\widehat{MDE} = \widehat{PCF} = 60^\circ.$$

(4)

Từ (3) và (4) suy ra hai tam giác vuông MED và PFC bằng nhau (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau). Suy ra $ME = PF$, ta lại có $ME \parallel PF$. Tứ giác MPFE là hình bình hành nên $MP \parallel CD$ (dpcm).

Bài 17. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông ABDE và ACGH. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của EH, EB, BC, CH. Chứng minh rằng :

a) $BH = CE$ và $BH \perp CE$.

b) Tứ giác MNPQ là hình vuông.

Giải

a) Chứng minh $BH = CE$ và $BH \perp CE$.

Xét hai tam giác BAH và EAC ta có :

$$\begin{cases} AB = AE \text{ (cạnh hv ABDE)} \\ \widehat{BAH} = \widehat{EAC} = 90^\circ + \widehat{BAC} \\ AC = AH \text{ (cạnh hv ACGH).} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BAH = \triangle EAC \text{ (c.g.c)} \\ \Rightarrow BH = EC.$$

Gọi O, I lần lượt là giao điểm của EC với AB và BH.

Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (đối đỉnh),

$\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$ ($\triangle BAH = \triangle EAC$).

Mà $\widehat{E}_1 + \widehat{O}_1 = 90^\circ$ nên $\widehat{B}_1 + \widehat{O}_2 = 90^\circ$, suy ra $\widehat{BIO} = 90^\circ$ hay $BH \perp CE$ (đpcm).

b) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình vuông.

Ta có $MN \parallel BH$ và $MN = \frac{1}{2}BH$ (vì MN là đường trung bình $\triangle EBH$).

Tương tự $PQ \parallel BH$ và $PQ = \frac{1}{2}BH$.

Do đó MNPQ là hình bình hành.

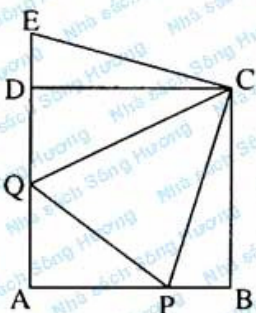
$NP \parallel EC$ và $NP = \frac{1}{2}EC$ (vì NP là đường trung bình $\triangle BEC$).

Mà $BH = EC$ và $BH \perp EC$ nên $MN = NP$ và $MN \perp NP$.

Khi đó MNPQ là hình thoi có một góc vuông.

Vậy MNPQ là hình vuông.

Bài 18. Cho cạnh hình vuông ABCD có độ dài là 1. Trên các cạnh AB, AD lấy các điểm P và Q sao cho chu vi tam giác APQ bằng 2. Chứng minh rằng $\widehat{PCQ} = 45^\circ$.



Giải

Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = BP$. Ta thấy hai tam giác vuông CDE và CBP bằng nhau (c.g.c). Suy ra $CE = CP$ và

$\widehat{ECD} = \widehat{PCB}$. Ta có :

$\widehat{ECP} = \widehat{ECD} + \widehat{DCP} = \widehat{PCB} + \widehat{DCP} = 90^\circ$.

Chu vi tam giác APQ bằng :

$2 = AP + PQ + QA = AB + AD$

$= AP + PB + AQ + QD$. Do đó

$PQ = PB + QD = DE + QD = QE$.

Hai tam giác CEQ và CQP có :

$EC = PC$; $PQ = QE$ và QC chung. Vậy $\triangle CEQ = \triangle CQP$ (c.c.c).

Từ đó suy ra : $\widehat{PCQ} = \frac{1}{2} \widehat{ECP} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Bài 19. Cho hình vuông ABCD có độ dài đường chéo bằng 1. Tứ giác MNPQ có các đỉnh nằm trên các cạnh của hình vuông. Chứng minh rằng chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

Giải

Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các đoạn QM, PN, QN. Ta có :

$$AE = \frac{QM}{2}$$

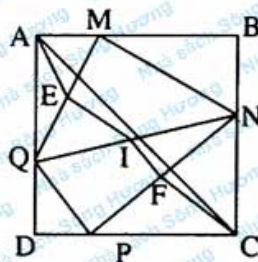
(AE là trung tuyến của tam giác vuông MAQ).

$$\text{Tương tự, } CF = \frac{PN}{2}.$$

$$\text{Ta cũng có } EI = \frac{MN}{2}$$

(EI là đường trung bình của $\triangle QMN$).

$$FI = \frac{QP}{2} \text{ (FI là đường trung bình của } \triangle DPQ).$$



Do đó chu vi của tứ giác MNPQ bằng :
 $MN + NP + PQ + QM = 2(EI + FC + FI + AE)$
 $\geq 2AC = 2$.
 (do $EI + FC + FI + AE$ bằng độ dài đường gấp khúc AEIFC).

C. LUYỆN TẬP

- 5.1. Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, OCD và OAD là các đỉnh của một hình thoi.
- 5.2. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.
 a) Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.
 b) Với điều kiện nào của hai đường chéo AC, BD thì MNPQ là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông ?
- 5.3. Trên hai cạnh của góc nhọn $\widehat{xOy}$ ta lấy hai đoạn AB và CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, DA. Tìm điều kiện tương ứng của góc $\widehat{xOy}$ và các đoạn thẳng AB, CD để EFGH lần lượt là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.
- 5.4. Cho tam giác ABC, trên AB và AC, về phía ngoài tam giác ta dựng hai hình vuông ABDE và ACMN. Chứng minh rằng trung tuyến qua A kéo dài của tam giác AEN là đường cao của tam giác ABC.
- 5.5. Gọi E là điểm thuộc miền trong của hình vuông ABCD sao cho tam giác AEB cân tại E và có góc đáy bằng 15° . Chứng minh rằng tam giác DEC đều.
- 5.6. Cho hình bình hành ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, ta dựng về phía ngoài các hình vuông lần lượt có tâm là O_1, O_2, O_3, O_4 . Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

HƯỚNG DẪN GIẢI

5.1. Ta có $\widehat{BON} = \widehat{DOQ} \left(= \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{\widehat{AOD}}{2} \right) \Rightarrow N, O, Q$ thẳng hàng.

Tương tự M, O, P thẳng hàng.

$\Delta BON = \Delta DOQ$ (g.c.g) $\Rightarrow ON = OQ$,

$$\Delta AMO = \Delta CPO \text{ (g.c.g)} \Rightarrow OM = OP.$$

Do đó MNPQ là hình bình hành.

$$\text{Mặt khác, } \widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BON} = \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{BOC}) = 90^\circ.$$

Vậy MNPQ là hình thoi.

5.2. a) Chứng minh MN // PQ và MN = PQ $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành.

b) MNPQ là hình chữ nhật khi $AC \perp BD$.

MNPQ là hình thoi khi $AC = BD$.

MNPQ là hình vuông khi $AC \perp BD$ và $AC = BD$.

5.3. Chứng minh EFGH là hình bình hành

(EF // HG // AB và EF = HG = AB).

EFGH là hình chữ nhật khi $\widehat{xOy} = 90^\circ$.

EFGH là hình thoi khi $AB = CD$.

EFGH là hình vuông khi $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và $AB = CD$.

5.4. Ta chứng minh đường cao AH của ΔABC kéo dài cắt EN tại trung

điểm của EN. Kẻ EE' và NN' vuông góc với AH kéo dài.

$\Delta AE'E = \Delta BHA$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$$\Rightarrow EE' = AH.$$

(1)

Tương tự :

$$\Delta AN'N = \Delta CHA \Rightarrow NN' = AH.$$

(2)

So sánh (1) và (2) : $EE' = NN'$, hơn nữa $EE' \parallel NN'$. Vậy tứ giác $EE'NN'$ là hình bình hành $\Rightarrow$ AH cắt EN tại trung điểm của EN (đpcm).

5.5. Ta có $EA = EB$ (ΔEAB cân tại E).

$$\widehat{EAD} = \widehat{EBC} = 75^\circ \Rightarrow \Delta EAD = \Delta EBC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow ED = EC. \quad (1)$$

Dựng ΔBFC cân với $\widehat{FBC} = \widehat{FCB} = 15^\circ$.

Ta có $BE = BF$ (vì $\Delta AEB = \Delta BFC$) và $\widehat{EBF} = 90^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 60^\circ$.

Do đó, ΔEFB đều, từ đó suy ra $EF = BF = FC$ tức là ΔEFC cân. Mặt khác, $\widehat{EFC} = 360^\circ - (60^\circ + 150^\circ) = 150^\circ$. Do đó :

$$\widehat{FCE} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Vậy $\widehat{ECB} = \widehat{ECF} + \widehat{FCB} = 30^\circ$. Từ đó :

$$\widehat{DCE} = 60^\circ.$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔEDC đều.

5.6. Xét hai tam giác AO_1O_4 và BO_1O_2 , ta có

$$AO_1 = BO_1, \quad (1)$$

$$AO_4 = BO_2, \quad (2)$$

$$\widehat{O_1AO_4} = 90^\circ + \widehat{A_1}, \quad \widehat{O_1BO_2} = 90^\circ + \widehat{B_1}.$$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$). Do đó :

$$\widehat{O_1AO_4} = \widehat{O_1BO_2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\Delta AO_1O_4 = \Delta BO_1O_2$.

Tương tự, ta cũng có

$$\Delta AO_1O_4 = \Delta BO_1O_2 = \Delta CO_2O_3 = \Delta DO_3O_4$$

$$\Rightarrow O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1.$$

Mặt khác : $\widehat{O_4O_1O_2} = 90^\circ$. Vậy $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

§ 6. ĐA GIÁC

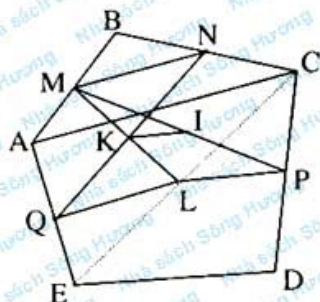
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
- Tổng số đo các góc của hình n-giác bằng $(n-2) : 180^\circ$.
- Số đường chéo của hình n-giác là : $\frac{n(n-3)}{2}$. Suy ra : mỗi góc của đa giác đều n cạnh có số đo là : $\frac{(n-2).180^\circ}{n}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 20. Giả sử M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, EA của ngũ giác lồi ABCDE. Gọi I, K là trung điểm của MP và NQ.

Chứng minh rằng : $IK = \frac{1}{4} ED$.



Giải

Lấy điểm L đối xứng của M qua K.

Khi đó, tứ giác MNPL là hình bình hành nên

$$QL \parallel MN \text{ và } QL = MN, \quad (1)$$

Hơn nữa,

$$MN \parallel AC \text{ và } MN = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

(do MN là đường trung bình của $\triangle ABC$).

Từ (1) và (2) suy ra

$$QL \parallel AC \text{ và } QL = \frac{AC}{2}.$$

Do đó QL là đường trung bình của $\triangle EAC$, tức là L là trung điểm của EC. Ta có KI là đường trung bình của $\triangle MLP$ và LP là đường trung bình của $\triangle CED$ nên: $KI = \frac{LP}{2}$ và $LP = \frac{ED}{2} \Rightarrow KI = \frac{ED}{4}$ (đpcm).

Bài 21. Cho lục giác lồi ABCDEF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, EF và R, S, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AF, BC, DE. Chứng minh rằng trọng tâm của hai tam giác MNP và RSQ trùng nhau.

Giải

(Học sinh tự vẽ hình để theo dõi.)

Gọi O là trung điểm của AD. Ta có

$$\begin{cases} MS \parallel ON \\ MS = ON \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tứ giác MSNO là hình bình hành

$\Rightarrow$ hai đường chéo MN và SO cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Tương tự, tứ giác ROQP là hình bình hành

$\Rightarrow$ hai đường chéo PO và RQ cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đường.

Gọi G là giao điểm của SK và PI thì G là trọng tâm của $\triangle SOP$ do đó:

$$\frac{SG}{SK} = \frac{PG}{PI} = \frac{2}{3} \text{ (tính chất trọng tâm).}$$

Vì SK là trung tuyến của $\triangle SRQ$ và $\frac{SG}{SK} = \frac{2}{3}$ nên G là trọng tâm

của ΔSRQ . Tương tự, PI là trung tuyến của ΔPMN và $\frac{PG}{PI} = \frac{2}{3}$ nên G là trọng tâm của ΔPMN .

Vậy hai tam giác MNP và RSQ có cùng trọng tâm G .

Bài 22. Cho hai đa giác đều n - cạnh và m - cạnh có tỉ số hai góc trong của chúng là $\frac{5}{7}$. Tìm số cạnh của hai đa giác trên.

Giải

Theo công thức tính một góc trong của đa giác đều n - cạnh và theo đề bài ta có :

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} : \frac{(m-2) \cdot 180^\circ}{m} = 5 : 7 \quad (n, m \geq 3 ; n, m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 7(n-2)m = 5(m-2)n$$

$$\Rightarrow nm - 7m + 5n = 0$$

$$\Rightarrow m(n-7) + 5(n-7) = -35 \text{ hay } (7-n)(m+5) = 35.$$

Vì $m \geq 3$ nên $m+5 \geq 8$, do đó 35 chỉ được phân tích thành $1 \cdot 35$ tức là $7-n=1$ và $m+5=35$. Suy ra $n=6$ và $m=30$.

C. LUYỆN TẬP

- 6.1. Cho ngũ giác $ABCDE$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AE, AB và ED . Chứng minh rằng MN song song với CD khi và chỉ khi đường thẳng MN đi qua trung điểm đoạn PQ .
- 6.2. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và EF . Chứng minh rằng MNP là tam giác đều.
- 6.3. Chứng minh rằng trong một đa giác lồi n cạnh ($n \geq 4$), một góc bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn tổng các góc còn lại của đa giác đó.
- 6.4. Tất cả các góc của lục giác lồi $ABCDEF$ đều bằng nhau. Chứng minh rằng : $|BC - EF| = |DE - AB| = |AF - CD|$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- 6.1. a) Giả sử $MN \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của MN và BD . Chứng minh tứ giác $PIQN$ là hình bình hành. Suy ra MN qua trung điểm của PQ .

b) Giả sử MN qua trung điểm PQ. Gọi I' là trung điểm của BD. Tứ giác PI'QN là hình bình hành $\Rightarrow$ NI' qua trung điểm PQ $\Rightarrow$ I' $\in$ MN.
Mà I'M // CD nên MN // CD.

6.2. Chứng minh $\triangle AMF = \triangle BMC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ FM = CM.

Suy ra $\triangle MFP = \triangle MCN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ MP = MN.

Chứng minh tương tự ta được : MN = NP. Vậy MNP là tam giác đều.

6.3. Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \dots + \widehat{A_n} = (n-2)180^\circ \geq 360^\circ$ (vì $n \geq 4$).

Với $\widehat{A_k}$ là góc bất kì của đa giác ($1 \leq k \leq n$) ta có $\widehat{A_k} < 180^\circ$, suy ra

$2\widehat{A_k} < 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{A_k} < \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \dots + \widehat{A_k} + \dots + \widehat{A_n}$, suy ra đpcm.

6.4. Giả sử các đỉnh A, B, C, D, E, F theo thứ tự nằm theo chiều kim đồng hồ. Gọi giao điểm của các cặp cạnh của lục giác (theo chiều kim đồng hồ) là H, K, I, P, Q, R, với H là giao điểm AF và BC.

Chứng minh được : $\triangle HIQ$ và $\triangle KPR$ đều và

$HI \parallel PR$; $IQ \parallel RK$; $QH \parallel KP$.

Suy ra : các tam giác HAB, KCB, ICD, PDE, QEF, RFA đều là những tam giác đều. Ta lại có HCPF là hình bình hành, suy ra HC = PF hay

$$HB - PE = EF - BC$$

$$\Rightarrow AB - DE = EF - BC \Rightarrow |AB - DE| = |BC - EF|.$$

Tương tự $|DE - AB| = |AF - CD|$.

Chương 2.

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§ 1. ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Định lý Ta-lét trong tam giác :

Cho tam giác ABC. B', C' lần lượt trên AB, AC.

Nếu B'C' // BC thì $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{BC'}{BC}$.

Đảo lại nếu $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ thì B'C' // BC.

- Tính chất đường phân giác của tam giác :

AD, AE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác

ABC. Ta có $AD \perp AE$ và $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

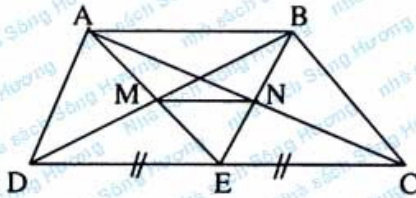
Bài 23. Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD và E là trung điểm của CD. Gọi M là giao điểm AE và BD, N là giao điểm của BE và AC. Chứng minh rằng MN // AB và tính MN, biết AB = a, CD = b.

Giải

Xét $\triangle AMB$ ta có : AB // DE nên theo định lý Ta-lét :

$$\frac{ME}{MA} = \frac{ED}{AB}.$$

Mà ED = EC nên $\frac{ME}{MA} = \frac{EC}{AB}.$ (1)



Xét $\triangle ANB$, có $AB \parallel EC$ nên

$$\frac{NE}{NB} = \frac{EC}{AB} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta được: $\frac{ME}{MA} = \frac{NE}{NB}$.

Theo định lí Ta-lét đảo trong $\triangle EAB$ suy ra $MN \parallel AB$.

Tính MN theo a và b :

Xét $\triangle AEC$, có $MN \parallel EC$ nên

$$\frac{MN}{EC} = \frac{AN}{AC} \quad (3)$$

Xét $\triangle ANB$, có $AB \parallel EC$ nên $\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{EC}$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AN + NC} = \frac{AB}{AB + EC} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{a}{a + \frac{b}{2}} = \frac{2a}{2a + b} \quad (4)$$

So sánh (3) và (4) ta có: $\frac{MN}{EC} = \frac{2a}{2a + b}$.

Mà $EC = \frac{b}{2}$ nên $MN = \frac{ab}{2a + b}$.

Bài 24. Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng l cắt AB ở E , AD ở F và cắt đường chéo AC ở G . Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Kẻ $BM \parallel EF$ và $DN \parallel EF$, với M, N trên AC (học sinh vẽ hình).

Xét $\triangle ABM$, có $EG \parallel BM$ nên:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AM}{AG} \quad (1)$$

Xét $\triangle ADN$, có $FG \parallel DN$ nên:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AN}{AG} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) theo từng vế thì được:

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AM + AN}{AG} \quad (3)$$

Mặt khác, do $\triangle ABM = \triangle CDN$ (g.c.g) nên

$$AM = NC.$$

(4)

Thay (4) vào (3) thì được

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{NC + AN}{AG} = \frac{AC}{AG} \text{ (đpcm).}$$

Bài 25. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Một đường thẳng l qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại B' và C'.

Chứng minh rằng : $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 3$.

Giải

Qua B kẻ đường thẳng song song với l cắt đường thẳng AM tại I.

Qua C kẻ đường thẳng song song với l cắt đường thẳng AM tại J.

(Học sinh vẽ hình để theo dõi.)

Ta có $\triangle BMI = \triangle CMJ$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = MJ$.

Xét $\triangle ABI$, có $B'G \parallel BI$ nên

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AI}{AG}. \quad (1)$$

Xét $\triangle ACJ$, có $C'G \parallel CJ$ nên

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{AJ}{AG}. \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) theo từng vế ta được :

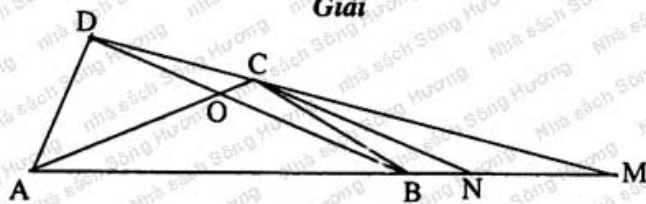
$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{AI + AJ}{AG} = \frac{2AM}{AG} = 3 \text{ (đpcm).}$$

Bài 26. Cho tứ giác lồi ABCD có các đỉnh A và B cố định, các đỉnh C và D thay đổi sao cho giao điểm O của hai đường chéo AC và BD luôn có

tỉ số $\frac{OA}{OC} = k$, $\frac{OB}{OD} = k'$ (k, k' là hai số khác 1 cho trước). Chứng

minh rằng nếu $k \neq k'$ thì đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Với $k \neq k'$ thì $\frac{OA}{OC} \neq \frac{OB}{OD}$. Khi đó CD không song song với AB. Gọi M là giao điểm của các đường thẳng AB và CD. Kẻ CN // DB (N thuộc AM).

Xét $\triangle ACN$, có $OB // CN$ nên $\frac{AB}{BN} = \frac{OA}{OC} = k$

$$\Rightarrow \frac{AB+BN}{AB} = \frac{k+1}{k} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{k+1}{k}$$

A, B cố định, k không đổi nên N là điểm cố định.

Xét $\triangle MBD$, có CN // DB nên:

$$\begin{aligned} \frac{MC}{MD} &= \frac{CN}{DB} = \frac{CN}{BO} \cdot \frac{BO}{BD} = \frac{AC}{AO} \cdot \frac{BO}{BD} = \frac{AO+OC}{AO} \cdot \frac{BO}{BO+OD} \\ &= \left(1 + \frac{OC}{OA}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{OD}{OB}}\right) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k'}}\right) = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k'}{k'+1} \end{aligned}$$

Xét $\triangle MBD$, có CN // DB nên: $\frac{MN}{MB} = \frac{MC}{MD} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k'}{k'+1}$

Vì B, N cố định và k, k' không đổi nên M cũng cố định. Vậy đường thẳng CD đi qua điểm M cố định.

Bài 27. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi x, y, z là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Giải

Giả sử phân giác trong AD = x. (Học sinh vẽ hình để theo dõi.)

Gọi E là giao điểm của đường thẳng qua B song song với AD và đường thẳng AC.

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{BAD}$ (so le trong), $\widehat{BEA} = \widehat{DAC}$ (đồng vị).

Vì $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ nên $\widehat{ABE} = \widehat{BEA}$, suy ra tam giác EAB cân tại A, do đó $AB = AE = c$.

Tam giác CEB có AD // EB nên:

$$\frac{AD}{EB} = \frac{AC}{EC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow AD = x = \frac{b}{b+c} \cdot BE$$

Vì $BE < AE + AB = 2c$ nên

$$x < \frac{2bc}{b+c} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Tương tự ta có : $\frac{1}{y} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ và $\frac{1}{z} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Từ đó suy ra : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài 28. Cho hình thang ABCD có đáy lớn AD. Chứng minh rằng đường thẳng nối giao điểm của hai đường chéo với giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua các trung điểm của hai đáy.

Giải

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD ; O là giao điểm hai đường chéo AC và BD ; M, N là giao điểm của OI với BC và AD. Ta sẽ chứng minh

$BM = CM$ và $AN = DN$.

Xét $\triangle IAN$, có $BM \parallel AN$ nên

$$\frac{BM}{AN} = \frac{IM}{IN}.$$

Xét $\triangle IDN$, có $MC \parallel DN$ nên

$$\frac{MC}{ND} = \frac{IM}{IN}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND}. \quad (1)$$

Tương tự :

$$\frac{BM}{ND} = \frac{MC}{AN} \quad (\text{cùng bằng } \frac{MO}{NO}). \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) ta được :

$$\frac{BM + MC}{AN} = \frac{MC + BM}{ND} \Rightarrow \frac{BC}{AN} = \frac{BC}{DN} \Rightarrow AN = DN.$$

Từ (1) suy ra $BM = MC$.

Bài 29. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G. Từ điểm O khác G ở trong tam giác, kẻ đường thẳng OG cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Tính

$$\frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'}.$$

Giải

Gọi H, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ G xuống các cạnh của tam giác ABC. (Học sinh vẽ hình để theo dõi.). Gọi I, M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống các cạnh của tam giác ABC.

Đặt $AH = h$, $AB = BC = CA = a$.

Ta có :

$$S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}(OI + OM + ON).a = \frac{1}{2}h.a \\ \Rightarrow OI + OM + ON = h.$$

Xét $\triangle A'GH$, có $OI \parallel GH$ nên :

$$\frac{OA'}{GA'} = \frac{OI}{GH} = \frac{3OI}{h}.$$

Tương tự :

$$\frac{OB'}{GB'} = \frac{OM}{GE} = \frac{3OM}{h}; \quad \frac{OC'}{GC'} = \frac{ON}{GF} = \frac{3ON}{h}.$$

$$\text{Suy ra : } \frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'} = 3 \cdot \frac{OI + OM + ON}{h} = 3.$$

Bài 30. Qua điểm O bất kì bên trong tam giác ABC, người ta vẽ ba đường thẳng tương ứng song song với ba cạnh của tam giác đó.

a) Chứng minh hệ thức

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2,$$

trong đó a_1, b_1, c_1 là các đoạn thẳng gồm giữa các cạnh và theo thứ tự song song với ba cạnh a, b, c của tam giác.

b) Tính giá trị của biểu thức

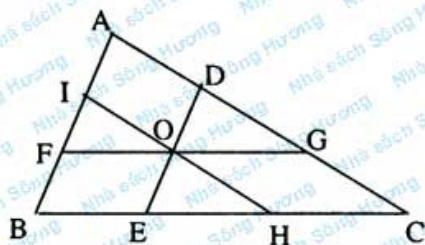
$$P = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c},$$

trong đó a', b', c' là các đoạn thẳng theo thứ tự nằm trên các cạnh a, b, c và gồm giữa các đường thẳng nói trên.

(Thi HSG Quốc gia lớp 9, 1993)

Giải

a) Vẽ qua O các đường thẳng thứ tự song song với các cạnh AB, BC, CA, ta được : $FG = a_1, IH = b_1, DE = c_1$; $EH = a'$; $GB = b'$; $FI = c'$.



Áp dụng định lý Ta-lét ta có :

$$\frac{FG}{BC} = \frac{AG}{AC}; \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}.$$

Vậy :

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} &= \frac{FG}{BC} + \frac{IH}{AC} + \frac{ED}{AB} \\ &= \frac{AG + IH + CD}{AC} \\ &= \frac{AD + DG + IO + OH + CG + GD}{AC} \end{aligned}$$

Theo tính chất các đoạn chắn song song ta được :

$$OI = AD; OD = AI; OH = CG; OG = HC$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = \frac{2(AD + DG + GC)}{AC} = \frac{2AC}{AC} = 2.$$

b) Ta có $OE = BF; OF = BE$. Từ đó :

$$a' = EH = BC - (BE + HC) = a - (OF + OG) = a - FG = a - a_1.$$

Tương tự : $b' = b - b_1, c' = c - c_1$. Suy ra :

$$P = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = \frac{a - a_1}{a} + \frac{b - b_1}{b} + \frac{c - c_1}{c} = 3 - \left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} \right) = 1.$$

Bài 31. Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh a, b, c thỏa điều kiện $a > b > c$ và O là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Các đường thẳng AO, BO, CO thứ tự cắt các cạnh của tam giác ABC tại các điểm P, Q, R. Chứng minh rằng $OP + OQ + OR > a$.

(Thi HSG Quốc gia lớp 9, 1994)

Giải

Gọi $BC = a, CA = b, AB = c$ với $a > b > c$.

Kẻ $OX \parallel AB$ (X trên BC),

$OY \parallel AC$ (Y trên BC).

Kẻ $XK \parallel OR$ (K trên AC),

$YL \parallel OQ$ (L trên AC).

(Học sinh vẽ hình để theo dõi.)

Áp dụng định lý Ta-lét ta có :

$$\frac{XY}{BC} = \frac{OX}{AB} = \frac{OP}{AP} \Rightarrow \frac{XY}{OP} = \frac{BC}{AP} = \frac{a}{AP}.$$

Trong hai góc $\widehat{APB}, \widehat{APC}$ phải có ít nhất một góc tù nếu AP không vuông góc với BC, từ đó suy ra AP ít nhất phải nhỏ hơn một trong hai cạnh AB, AC. Do $a > b > c$ suy ra $AP < a$.

Từ đó ta có

$$\frac{XY}{OP} = \frac{a}{AP} > 1 \Rightarrow XY > OP. \quad (1)$$

Tương tự, $CR < a$ và $BQ < a$. $XK \parallel CR$ nên

$$\frac{BX}{BC} = \frac{XK}{CR} \Rightarrow \frac{BX}{XK} = \frac{BC}{CR} = \frac{a}{CR} > 1 \Rightarrow BX > XK.$$

Mà $XK = OR$ nên

$$BX > OR. \quad (2)$$

Tương tự,

$$YC > OQ. \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3), suy ra

$$a = BX + XY + YC > OP + OQ + OR.$$

Bài 32. Cho tam giác nhọn ABC và AD, BE, CF là các phân giác trong của nó. Gọi S_0, S lần lượt là diện tích các tam giác DEF và ABC. Chứng minh rằng $4S_0 \leq S$.

(Thi HSG Quốc gia lớp 9, 1996)

Giải

Gọi $AB = c, BC = a, CA = b$;

$S_1 = S_{AEF}, S_2 = S_{BDF}, S_3 = S_{CDE}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{S} &\leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} \right) \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{AF}{AF+FB} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{b}{a+b};$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{c}{a+c}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_1}{S} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}. \text{ Tương tự:}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{ab}{(c+a)(c+b)}.$$

$$\text{Khi đó: } \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+a)(b+c)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b + 4ab^2 + 4b^2c + 4bc^2 + 4c^2a + 4ca^2$$

$$\geq 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3c^2a + 3ca^2 + 6abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \geq 6abc$$

$$\Leftrightarrow b(a^2 - 2ac + c^2) + a(b^2 - 2bc + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(a-b)^2 \geq 0. \text{ (dpcm)}$$

C. LUYỆN TẬP

1.1. Trên các cạnh kéo dài của tam giác, đặt các đoạn

$$AA' = AB, BB' = BC, CC' = CA.$$

Chứng minh rằng trọng tâm các tam giác ABC và A'B'C' trùng nhau.

1.2. Cho ba tia Ox, Oy, Oz có $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = 60^\circ$. Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba điểm thẳng hàng tương ứng nằm trên Ox, Oy, Oz thì

$$\frac{1}{OB} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC}.$$

1.3. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lần lượt lấy các điểm M, N, P tương ứng sao cho:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = K \quad (0 < K \neq 1).$$

Hãy tính diện tích tam giác tạo nên bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP theo diện tích tam giác ABC.

1.4. Cho hình thang ABCD với đáy AB và CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD và BC lần lượt tại M, N và cắt AC, BD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng MN = NQ.

1.5. Cho tam giác ABC. Lấy M, N lần lượt trên AB, BC sao cho AM = BN và MN // AC. Chứng minh: $MN = \frac{bc}{a+c}$ (với AB = c, BC = a, CA = b).

1.6. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD ; G là trọng tâm tam giác ABD. GC cắt MN tại O. Tính tỉ số OG : OC.

1.7. Cho tam giác ABC vuông tại A ($BC = a$) và đường cao $AH = h$. Một hình vuông MNPQ cạnh bằng b nội tiếp trong tam giác (M, N ở trên cạnh BC; P, Q lần lượt ở trên các cạnh AC, AB). Chứng minh :

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h}.$$

1.8. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB = a$, $AC = b$). Một hình vuông AMNP có cạnh bằng c với M, P, N lần lượt trên AB, BC, CA. Chứng minh :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

1.9. Cho tam giác ABC và l là đường thẳng qua trọng tâm của G tam giác, đường này cắt các cạnh AB và AC. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ A, B, C tới l . Tìm mối liên hệ giữa x, y, z.

1.10. Cho tam giác OAB có góc $\widehat{O} = 120^\circ$, OC là phân giác trong. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC}.$$

1.11. Cho tam giác ABC, A' là một điểm trên cạnh BC và O là trung điểm BC. Một đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng AB ở M, cắt đường thẳng AC ở N và cắt đường thẳng AO ở I.

a) Chứng minh I là trung điểm của MN.

b) Kẻ MM' và NN' song song với AA' (M', N' trên BC). Tìm tập hợp các tâm đối xứng của hình bình hành $MNN'M'$ khi M chạy trên cạnh AB.

1.12. Giả sử AM, BN, CP là các phân giác trong của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Tính tỉ số $IA : MA$ theo các cạnh của tam giác.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1.1. Gọi E, D lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$.

Tứ giác ABDE là hình bình hành.

Ta có $ED \parallel A'B$ và $ED = \frac{1}{2} A'B$.

$$\Delta GA'B \text{ có } DE \parallel A'B \text{ nên: } \frac{EG}{BG} = \frac{DG}{A'G} = \frac{ED}{A'B} = \frac{1}{2}.$$

Vậy G vừa là trọng tâm của ΔABC vừa là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.

1.2. Kẻ $BB' \parallel Oz$ (B' nằm trên Ox).

ΔAOC có $BB' \parallel OC$ nên:

$$\frac{AB'}{AO} = \frac{BB'}{CO} \Rightarrow \frac{OA - OB'}{OA} = \frac{BB'}{CO} \Rightarrow 1 = \frac{OB'}{OA} + \frac{BB'}{OC}. \quad (1)$$

$\Delta OBB'$ đều nên $OB' = BB' = OB$. Do đó từ (1) suy ra:

$$\frac{OB}{OA} + \frac{OB}{OC} = 1 \text{ hay } \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OB}.$$

1.3. Giả sử X, Y, Z là giao điểm của các đoạn thẳng AM, BN, CP (với X trên AM, Y trên BN và Z trên CP). Ta có:

$$S_{XYZ} = S_{ABC} - S_{ABX} - S_{ACZ} - S_{BCY}.$$

Kẻ $ME \parallel BN$ (E trên AC), ta có:

$$\frac{S_{ABM}}{S} = \frac{BM}{BC} = \frac{K}{K+1}. \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABX}}{S_{ABM}} = \frac{AX}{AM} = \frac{AN}{AE}. \quad (2)$$

$$\text{Mà } \frac{AN}{NC} = \frac{1}{K} \text{ và } \frac{NE}{CN} = \frac{MB}{BC} = \frac{K}{K+1} \text{ nên}$$

$$\frac{AN}{NE} = \frac{K+1}{K^2} \Rightarrow \frac{AN}{AE} = \frac{K+1}{K^2 + K + 1}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } S_{ABX} = \frac{K}{K^2 + K + 1} S.$$

$$\text{Tương tự, } S_{BCY} = S_{ACZ} = \frac{K}{K^2 + K + 1} S.$$

$$\text{Do đó } S_{XYZ} = S - \frac{3K}{K^2 + K + 1} S = \frac{(K-1)^2}{K^2 + K + 1} S.$$

Chú ý: Ta có thể tính tỉ số $\frac{AX}{AM}$ bằng cách sử dụng định lí Mê-nê-la-uyt.

$$\text{Trong } \Delta CAM, \text{ với cát tuyến } BXN \text{ ta có: } \frac{XA}{XM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{XA}{XM} = \frac{BC}{BM} \cdot \frac{NA}{NC} = \frac{K+1}{K} \cdot \frac{1}{K} = \frac{K+1}{K^2} \Rightarrow \frac{AX}{AM} = \frac{K+1}{K^2 + K + 1}.$$

$$1.4. \frac{MQ}{AB} = \frac{MD}{AD}; \frac{PN}{AB} = \frac{CN}{BC}. \text{ Mà } \frac{MD}{AD} = \frac{CN}{BC} \text{ nên } MQ = PN.$$

$$1.5. \frac{MN}{AC} = \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} \\ \Rightarrow \frac{MN}{b} = \frac{BM+BN}{c+a} = \frac{BM+AM}{c+a} = \frac{c}{a+c} \Rightarrow MN = \frac{bc}{a+c}.$$

1.6. Vẽ $MI \parallel AN$ (I trên GC);

$$MI \parallel AG \text{ và } MI = \frac{1}{2} AG$$

$\Rightarrow MI \parallel GN$ và $MI = GN \Rightarrow GMIN$ là hình bình hành.

O là trung điểm GI và I là trung điểm GC nên $OG : OC = 1 : 3$.

1.7. $\triangle ABH$ có $MQ \parallel AH$ nên:

$$\frac{MQ}{AH} = \frac{BQ}{AB}. \quad (1)$$

$\triangle ABC$ có $PQ \parallel BC$ nên

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AB}. \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2):

$$\frac{b}{h} + \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \frac{1}{h} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b}.$$

1.8. Ta có

$$\frac{PN}{AB} = \frac{NC}{BC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{NC}{BC}, \quad (1)$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{BN}{BC}. \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) cộng (2): } \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

1.9. $AA' = x, BB' = y, CC' = z,$

$$\frac{AA'}{MM'} = \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow AA' = 2MM'.$$

Mà $2MM' = BB' + CC'$, suy ra $x = y + z$.

1.10. Kẻ $CM \parallel OA$ và $CN \parallel OB$. $\triangle OMC$ và $\triangle ONC$ là những tam giác đều.

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CM}{OA} = \frac{BC}{AB}; \quad (1)$$

$$\frac{OC}{OB} = \frac{CN}{OB} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) :

$$\frac{OC}{OA} + \frac{OC}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC}.$$

1.11. a) Kẻ MQ và NP song song với OA. Ta có :

$$\frac{OQ}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{OP}{OC} \Rightarrow OP = OQ \Rightarrow MI = NI.$$

b) Kẻ II' // AA'. Giả sử II' cắt MO tại E; E là tâm đối xứng của hình bình hành MNN'M'. I và I' đối xứng nhau qua E. Gọi K là trung điểm của AA'. Chứng minh O, E, K thẳng hàng. Tập hợp E là đoạn OK.

1.12. a) Áp dụng tính chất đường phân giác trong, ta có

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}; \frac{PA}{PC} = \frac{AC}{BC}; \frac{NC}{NA} = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{suy ra } \frac{MB}{MC} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

b) Đặt AB = c, BC = a, CA = b.

$$\frac{BM}{MC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BM = \frac{ac}{b+c}.$$

BI là phân giác trong $\triangle ABM$:

$$\begin{aligned} \frac{IA}{IM} &= \frac{AB}{BM} \Rightarrow \frac{IA}{AM} = \frac{c}{c+BM} \\ &\Rightarrow \frac{IA}{AM} = \frac{c}{c+\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c}. \end{aligned}$$

§ 2. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Định nghĩa :

$$\triangle ABC \text{ đồng dạng } \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k. \end{cases}$$

k được gọi là tỉ số đồng dạng.

- Các trường hợp đồng dạng :

a) Nếu $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ thì ΔABC đồng dạng $\Delta A'B'C'$.

b) Nếu $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \end{cases}$ thì ΔABC đồng dạng $\Delta A'B'C'$.

c) Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ thì ΔABC đồng dạng $\Delta A'B'C'$.

- Trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông :

Cho hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ với $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$. ΔABC đồng dạng $\Delta A'B'C'$ nếu một trong các trường hợp sau đây được thỏa mãn :

a) $\hat{B} = \hat{B}'$ hoặc $\hat{C} = \hat{C}'$;

b) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

- Tỷ số hai đường phân giác, hai đường cao, hai đường trung tuyến, hai bán kính ngoại tiếp, hai bán kính nội tiếp, hai chu vi tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỷ số đồng dạng.
- Tỷ số hai diện tích của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỷ số đồng dạng.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 33. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC . Gọi O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng :

a) ΔABH đồng dạng ΔMNO ;

b) ΔAHG đồng dạng ΔMOG ;

c) H, O, G thẳng hàng. Tính $GH : GO$.

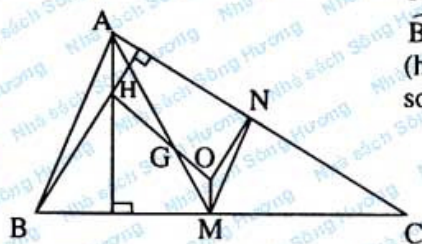
Giải

a) Ta có

$OM \parallel AH$ (vì cùng $\perp BC$) ;

$ON \parallel BH$ (vì cùng $\perp AC$) ;

$MN \parallel AB$ (đường trung bình tam giác ABC).



Từ đó suy ra :

$\widehat{BAH} = \widehat{OMN}$ và $\widehat{ABH} = \widehat{ONM}$
(hai góc nhọn có cạnh tương ứng song song)

Vậy $\triangle ABH$ đồng dạng $\triangle MNO$, tỉ lệ

$$\frac{1}{2} \text{ (vì } \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \text{)}.$$

b) Xét hai tam giác AHG và MOG, có :

$$\widehat{HAG} = \widehat{GMO} \text{ (so le trong)} ; \quad (1)$$

$$\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \text{ (tính chất trọng tâm)} \text{ và } \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \text{ (theo trên)}$$

Do đó

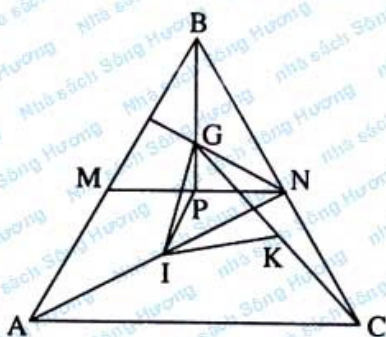
$$\frac{GM}{GA} = \frac{OM}{AH}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MOG$ đồng dạng $\triangle AHG$.

c) Ta có $\triangle MOG$ đồng dạng $\triangle AHG$ nên $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$. Mà A, G, M thẳng hàng nên H, G, O thẳng hàng và $\frac{GH}{GO} = \frac{AH}{OM} = 2$.

Chú ý : Đường thẳng đi qua trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác được gọi là đường thẳng Euler (O-le).

Bài 34. Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và BC sao cho $BM = BN$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN và I là trung điểm của AN. Tính các góc của tam giác GIC.



Giải

Ta có BMN là tam giác đều nên G là tâm của $\triangle BMN$. Gọi P là trung điểm của MN thì :

$$\frac{GP}{GN} = \frac{1}{2}$$

(tính chất trọng tâm của tam giác đều).

Ta lại có :

$$\frac{PI}{MA} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{GP}{GN} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Mặt khác : $\widehat{GPI} = \widehat{GPM} + \widehat{MPI} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ và

$$\widehat{GNC} = \widehat{GNP} + \widehat{PNC} = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ.$$

Do đó

$$\widehat{GPI} = \widehat{GNC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle GPI$ đồng dạng $\triangle GNC$. Từ đó ta có

$$\widehat{PGI} = \widehat{NGC} \text{ và } GI = \frac{1}{2} GC.$$

Suy ra $\widehat{IGC} = 60^\circ$ (vì $\widehat{IGC} = \widehat{PGN} = 60^\circ$).

Gọi K là trung điểm GC thì $\triangle GIK$ đều trên $IK = \frac{GC}{2}$ điều đó chứng

tỏ $\triangle GIC$ vuông tại I. Vậy : $\widehat{GIC} = 90^\circ$, $\widehat{IGC} = 60^\circ$, $\widehat{GCI} = 30^\circ$.

Bài 35. Cho tam giác ABC và một điểm O thuộc miền trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Chứng minh rằng tổng

$$T = \frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP}$$

không phụ thuộc vào vị trí của điểm O.

b) Chứng minh rằng trong ba tỉ số

$$\frac{OA}{OM}, \frac{OB}{ON} \text{ và } \frac{OC}{OP}$$

có ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2 và có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2.

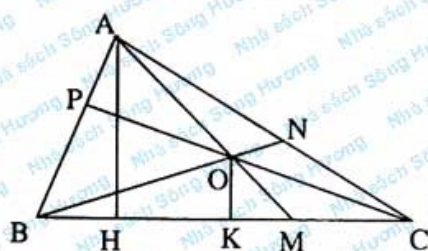
Giải

a) Kẻ $AH \perp BC$ và $OK \perp BC$ (H, K trên BC).

Ta có $OK \parallel AH$ nên :

$$\frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}. \quad (1)$$

Tương tự :



$$\frac{ON}{BN} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}, \quad (2)$$

$$\frac{OP}{CP} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}. \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) theo từng vế ta được : $T = 1$, nghĩa là T không phụ thuộc vào vị trí của điểm O .

b) Đặt $x = \frac{OA}{OM}$, $y = \frac{OB}{ON}$, $z = \frac{OC}{OP}$ ($x, y, z > 0$).

Ta có $\frac{OM}{AM} = \frac{1}{\frac{AM}{OM}} = \frac{1}{\frac{OM+OA}{OM}} = \frac{1}{1+\frac{OA}{OM}} = \frac{1}{1+x}$.

Tương tự : $\frac{ON}{BN} = \frac{1}{1+y}$ và $\frac{OP}{CP} = \frac{1}{1+z}$.

Theo câu a) ta có : $T = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$.

Ta cần chứng minh rằng trong ba số x, y, z phải có ít nhất một số không lớn hơn 2.

Giả sử điều ngược lại xảy ra. Khi đó, nếu $x > 2$, $y > 2$ và $z > 2$ thì

$$\frac{1}{1+z} < \frac{1}{3}, \frac{1}{1+y} < \frac{1}{3}, \frac{1}{1+x} < \frac{1}{3},$$

do đó $T < 1$ (vô lí). Tương tự, nếu $x < 2$, $y < 2$, $z < 2$ thì $T > 1$ (vô lí).

Vậy trong ba số x, y, z ít nhất phải có một số không nhỏ hơn 2 và ít nhất phải có một số không lớn hơn 2.

Bài 36. Cho AC là đường chéo lớn của hình bình hành $ABCD$. Hạ CE vuông góc với AB , CF vuông góc với AD . Chứng minh rằng :
 $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

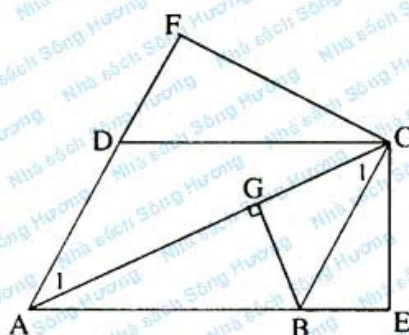
Giải

Kẻ $BG \perp AC$ (G trên AC), ta có

$\triangle AEC$ đồng dạng $\triangle AGB$ (hai tam giác vuông có $\hat{A}$ chung). Suy ra :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AG} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AG, \quad (1)$$

Mặt khác, $\triangle AFC$ đồng dạng $\triangle CGB$ ($\hat{A}_1 = \hat{C}_1$).



Suy ra :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{GC}$$

$$\Rightarrow BC \cdot AF = AC \cdot GC. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) :

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC^2$$

$$\Rightarrow AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

Bài 37. Cho biết các cạnh của tam giác ABC là : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ thì $a^2 = b^2 + bc$;

b) Nếu $a^2 = b^2 + bc$ thì $\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

Giải

a) Kẻ phân giác trong AD.

Ta có : $\widehat{B} = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

(vì $\widehat{A} = 2\widehat{B}$).

ΔABC đồng dạng ΔDAC nên :

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \text{ hay } \frac{b}{DC} = \frac{a}{b}.$$

Suy ra :

$$DC = \frac{b^2}{a}. \quad (1)$$

Tính chất phân giác cho ta : $\frac{DC}{DB} = \frac{b}{c}$. Suy ra :

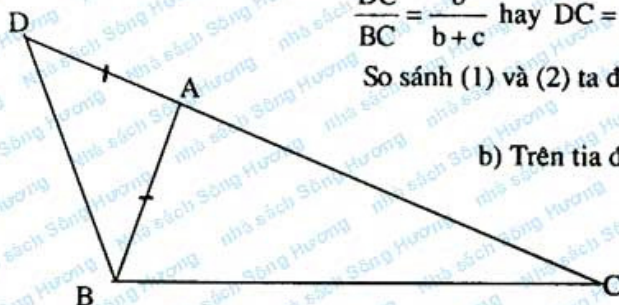
$$\frac{DC}{BC} = \frac{b}{b+c} \text{ hay } DC = \frac{ab}{b+c}. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta được : $a^2 = b^2 + bc$.

b) Trên tia đối tia AC lấy D sao cho :

$$AD = AB = c.$$

$$\text{Khi đó : } \widehat{BAC} = 2\widehat{ABD}.$$



Mặt khác, $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ do $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle BDC$ (vì $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$, suy từ $a^2 = b^2 + bc$). Vậy $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABD} = 2\widehat{BDC} = 2\widehat{ABC}$.

Bài 38. Cho lục giác lồi ABCDEF; các đường thẳng AB và EF, EF và CD, CD và AB lần lượt cắt nhau tại P, Q, R. Các đường thẳng BC và DE, DE và FA, FA và BC lần lượt cắt nhau tại S, T, U. Chứng minh rằng nếu $\frac{AB}{PR} = \frac{CD}{QR} = \frac{EF}{QP}$ thì $\frac{BC}{US} = \frac{DE}{TS} = \frac{FA}{TU}$.

Giải

Qua A, B kẻ các đường thẳng lần lượt song song với EF, CD chúng cắt nhau tại M. (Học sinh vẽ hình để theo dõi.)

$$\text{Ta có: } \triangle ABM \text{ đồng dạng } \triangle PRQ \Rightarrow \frac{AB}{PR} = \frac{AM}{PQ} = \frac{BM}{QR}.$$

$$\text{Mà } \frac{AB}{PR} = \frac{EF}{PQ} = \frac{CD}{QR} \text{ nên } AM = EF, BM = CD, \text{ do đó AMEF và}$$

BMDC là các hình bình hành. Suy ra

$$EM = FA, DM = BC. \quad (1)$$

$\triangle DEM$ đồng dạng $\triangle STU$ cho ta

$$\frac{DE}{ST} = \frac{DM}{SU} = \frac{EM}{TU}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$\frac{DE}{ST} = \frac{BC}{SU} = \frac{FA}{TU}.$$

Bài 39. Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, ta lấy điểm P bất kì. Các đoạn thẳng AP và BC cắt nhau tại Q.

a) Chứng minh $\frac{PQ}{PB} = \frac{CQ}{AC}$.

b) Chứng minh $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Giải

a) Xét $\triangle BPQ$ và $\triangle ACQ$, có $\widehat{PBQ} = \widehat{CAP}$ (chắn cung PC) và

$\widehat{BQP} = \widehat{AQC}$ (đối đỉnh), do đó

ΔBPQ đồng dạng ΔACQ

$$\Rightarrow \frac{PQ}{CQ} = \frac{BP}{AC} \Rightarrow \frac{PQ}{PB} = \frac{CQ}{AC}.$$

b) Trên tia PA lấy điểm I sao cho

$PI = PB$, khi đó ΔBPI là tam giác đều,

suy ra $PB = PI = BI$.

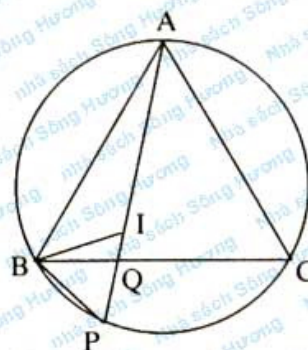
$\Delta ABI = \Delta BPC$ (c.g.c) $\Rightarrow PC = AI$.

Vậy $PA = PB + PC$.

Mặt khác ΔQBP đồng dạng ΔCAP

(vì $\widehat{PBQ} = \widehat{PAC}$ và $\widehat{BPQ} = \widehat{APC}$)

$$\Rightarrow \frac{PQ}{CP} = \frac{PB}{PA} \Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{PA}{PB \cdot PC} = \frac{PB + PC}{PB \cdot PC} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \text{ (dpcm).}$$



C. LUYỆN TẬP

- 2.1. Từ điểm O thuộc miền của tam giác ABC, kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC lần lượt tại D và E; kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại F và K; kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng :

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

- 2.2. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có ba trung tuyến tỉ lệ với nhau từng đôi một thì đồng dạng với nhau.

- 2.3. Tính độ dài đường chéo của ngũ giác đều cạnh a.

- 2.4. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại H. Vẽ các đường trung trực OE, OF của các cạnh AC và BC. Chứng minh rằng : $BH = 2OE$ và $AH = 2OF$.

- 2.5. IA, IB là hai tiếp tuyến với đường tròn (O). A, B là hai tiếp điểm. M là trung điểm của IA, BM cắt (O) tại K. Chứng minh rằng $AB^2 = 2BM \cdot BK$

- 2.6. Cho M ở ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến MAB. Chứng minh rằng : $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$ (R là bán kính của (O)).

- 2.7. Cho hai đường tròn tâm O và O' có bán kính khác nhau. Hai đường