

VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
NGUYỄN TAM SƠN

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

TOÁN 6

TẬP MỘT

SỐ HỌC



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH (CHỦ BIÊN) - NGUYỄN TAM SƠN

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

LỚP 6

TẬP MỘT - SỐ HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN :

Vũ Hữu Bình : Các chuyên đề từ 1 đến 14.

Nguyễn Tam Sơn : Chuyên đề 15



*Ảnh minh họa bìa một : Nhà toán học cổ Hy Lạp Eratosthenes
(khoảng 276 - 194 trước CN)*

Lời nói đầu

Bộ sách **Tài liệu chuyên Toán Trung học cơ sở** gồm 8 cuốn, từ lớp 6 đến lớp 9, mỗi lớp 2 tập (tập một: Đại số, tập hai: Hình học), được biên soạn nhằm :

- Cung cấp cho các em học sinh một tài liệu có hệ thống và khá đầy đủ để học tập chuyên sâu về môn Toán ở cấp Trung học cơ sở.
- Tạo nguồn cho các lớp chuyên Toán ở Trung học phổ thông và giúp các em học sinh lớp 9 thi vào lớp 10 chuyên Toán.
- Giúp các cán bộ chỉ đạo môn Toán, các thầy cô giáo dạy Toán có thêm tài liệu để chỉ đạo và giảng dạy chuyên sâu về Toán tại các hoạt động chuyên đề, ngoại khóa, các câu lạc bộ Toán học nhằm bồi dưỡng cho học sinh về kiến thức, kỹ năng, tư duy và những phẩm chất tốt trong học tập, nghiên cứu và sáng tạo, góp phần vào việc đào tạo và bồi dưỡng nhân tài.

Nhóm tác giả của bộ sách là những thầy cô giáo đã và đang giảng dạy ở các lớp chuyên Toán của các trường Đại học, các trường Trung học cơ sở có uy tín, những chuyên gia Toán có kinh nghiệm ở Tạp chí Toán học & tuổi trẻ và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Cuốn sách **Tài liệu chuyên toán THCS Toán 6, tập một : Số học** gồm 13 chuyên đề cơ bản và 2 chuyên đề nâng cao.

Ở mỗi chuyên đề cơ bản, cuốn sách không lặp lại các nội dung đã có trong Sách giáo khoa mà chỉ tóm tắt các kiến thức cơ bản, đồng thời bổ sung thêm một số kiến thức cần thiết. Do đó, khi giảng dạy các chuyên đề, các thầy cô giáo nên sử dụng kết hợp tài liệu này với Sách giáo khoa. Các ví dụ minh họa được chọn lọc nhằm giúp học sinh biết cách giải và trình bày một số dạng toán nâng cao thường gặp. Sau đó là các bài tập có hướng dẫn giải.

Các chuyên đề nâng cao nhằm giúp bạn đọc hiểu sâu và rộng hơn những nội dung có liên quan đến chương trình, chúng được trình bày để học sinh có thể tiếp thu được.

Chúng tôi hi vọng cuốn sách này sẽ là một tài liệu thiết thực và bổ ích giúp các em hiểu sâu sắc những kiến thức Toán đã học, góp phần vào việc nâng cao chất lượng đào tạo và bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở cấp Trung học cơ sở.

Mặc dù các tác giả đã làm việc nhiệt tình, nghiêm túc và có trách nhiệm với bạn đọc, tuy nhiên, cuốn sách vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc. Các góp ý xin gửi về :

*Ban Toán - Tin, Công ty CP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội,
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.*

Chủ biên
VŨ HỮU BÌNH

CÁC CHUYÊN ĐỀ CƠ BẢN

Chương I

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

Chuyên đề 1. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ TỰ NHIÊN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tập hợp các số tự nhiên là $\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
Tập hợp các số tự nhiên khác 0 là $\mathbf{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.
2. Với phép cộng và phép nhân, cần nhớ các tính chất giao hoán và kết hợp. Giữa phép nhân và phép cộng có tính chất phân phối :
$$a(b + c) = ab + ac.$$
3. Điều kiện để có hiệu $a - b$ là $a \geq b$.
4. Số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b khác 0 nếu có số tự nhiên k sao cho $a = bk$.
– Trong phép chia hết ta có
$$\text{Số bị chia} = \text{Số chia} \times \text{Thương}.$$

– Trong phép chia có dư ta có
$$\text{Số bị chia} = \text{Số chia} \times \text{Thương} + \text{Số dư}$$
$$a = bk + r \text{ với } 0 < r < b.$$
5. Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a .
Công thức nhân, chia hai lũy thừa cùng cơ số :
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m \geq n).$$
6. Quy ước về thứ tự thực hiện phép tính :
Lũy thừa $\rightarrow$ Nhân, chia $\rightarrow$ Cộng, trừ (đối với biểu thức không có dấu ngoặc) ;
() $\rightarrow$ [] $\rightarrow$ { } (đối với biểu thức có dấu ngoặc).

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. SỐ TỰ NHIÊN VÀ CÁC CHỮ SỐ

Ví dụ 1.1. Xét 100 số tự nhiên đầu tiên 0, 1, 2, ..., 99. Tìm số tự nhiên k sao cho trong 100 số trên, có nhiều nhất các số có tổng các chữ số bằng k .

Giải

Viết các số tự nhiên từ 0 đến 99 theo từng chục. Các số có tổng các chữ số bằng nhau được nối với nhau bởi các nét chấm.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Quan sát bảng trên, ta thấy số lượng các số có tổng các chữ số bằng 9 là nhiều nhất, tức là $k = 9$. Mười số có tổng các chữ số bằng 9 là 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.

Dạng 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC

Ví dụ 1.2. Tìm các tích :

$$\text{a) } a = 234 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{50 \text{ chữ số } 9} ;$$

$$\text{b) } b = \underbrace{11 \dots 1}_{100 \text{ chữ số } 1} \cdot 3456$$

Giải

$$\text{a) } a = 234 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{50 \text{ chữ số } 9} = 234 \left(\underbrace{100 \dots 0}_{50 \text{ chữ số } 0} - 1 \right) = 234 \underbrace{0 \dots 0}_{50 \text{ chữ số } 0} - 234.$$

Đặt phép trừ

$$\begin{array}{r}
 2\ 3\ 4\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 - \qquad \qquad \qquad 2\ 3\ 4 \\
 \hline
 2\ 3\ 3\ \underbrace{9\ 9\ \dots\ 9}_{47\ \text{chữ số } 9}\ 7\ 6\ 6
 \end{array}$$

Vậy $a = 233\ \underbrace{99\dots 9}_{47\ \text{chữ số } 9}\ 766.$

b) $b = \underbrace{11\dots 1}_{100\ \text{chữ số } 1}\ .3456$ mà $3456 = 9.384$ nên

$$b = 384.\ \underbrace{99\dots 9}_{100\ \text{chữ số } 9}$$

Giải tương tự câu a) ta được

$$b = 383\ \underbrace{99\dots 9}_{97\ \text{chữ số } 9}\ 616.$$

Ví dụ 1.3. Tính hiệu $a - b$, biết

$$a = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99,$$

$$b = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 a &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 \\
 &= 1(1 + 1) + 2(2 + 1) + 3(3 + 1) + \dots + 98(98 + 1) \\
 &= 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \dots + 98^2 + 98 \\
 &= b + (1 + 2 + 3 + \dots + 98) \\
 &= b + (1 + 98).98 : 2 \\
 &= b + 4851.
 \end{aligned}$$

Vậy $a - b = 4851.$

Dạng 3. TÌM SỐ CHƯA BIẾT

Ví dụ 1.4. Tìm các số tự nhiên x và y ($x < y$) sao cho

$$2^x + 2^y = 20.$$

Giải

Xét các lũy thừa của 2 nhỏ hơn 20, ta có

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16.$$

Chỉ có hai số có tổng bằng 20 là $4 + 16$, tức là $2^2 + 2^4 = 20$. Vậy $x = 2$ và $y = 4$.

Dạng 4. GIẢI BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN THÀNH PHẦN CỦA PHÉP TÍNH

Ví dụ 1.5. Trong một phép chia có dư, số bị chia bằng 24, thương bằng 3. Tìm số chia và số dư.

Giải

Gọi số chia là b , số dư là r , ta có

$$24 = 3b + r \text{ với } 0 < r < b.$$

Từ $r = 24 - 3b$ và $r > 0$ suy ra $3b < 24$ nên $b < 8$. (1)

Từ $r = 24 - 3b$ và $r < b$ suy ra $24 - 3b < b$
nên $24 < 4b$, do đó $b > 6$. (2)

Do b là số tự nhiên nên từ (1) và (2) suy ra $b = 7$. Do đó $r = 24 - 3 \cdot 7 = 3$.

Vậy số chia bằng 7, số dư bằng 3.

Dạng 5. ĐIỂN CHỮ SỐ

Ví dụ 1.6. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 4 vào trước chữ số hàng chục thì được số A, nếu viết thêm chữ số 8 vào sau chữ số hàng đơn vị thì được số B, trong đó B gấp đôi A.

Giải

Cách 1. Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có phép tính

$$\begin{array}{r} 4ab \\ \times \quad 2 \\ \hline ab8 \end{array}$$

Xét phép nhân ở cột hàng trăm được $2 \cdot 4 \leq a$ nên $a \geq 8$. (1)

Xét phép nhân ở cột hàng đơn vị được $2b = 8$ hoặc $2b = 18$, tức là $b = 4$ hoặc $b = 9$.

– Trường hợp $b = 4$, ta có phép tính

$$\begin{array}{r} 4a4 \\ \times \quad 2 \\ \hline a48 \end{array}$$

Xét phép nhân ở cột hàng chục được $2a = 4$ hoặc $2a = 14$, tức là $a = 2$ hoặc $a = 7$. Loại cả $a = 2$ và $a = 7$ vì trái với (1).

– Trường hợp $b = 9$, ta có phép tính

$$\begin{array}{r} 4a9 \\ \times \quad 2 \\ \hline a98 \end{array}$$

Xét phép nhân ở cột hàng chục được $2a = 8$ hoặc $2a = 18$, tức là $a = 4$ hoặc $a = 9$.

Loại $a = 4$ vì trái với (1).

Với $a = 9$ ta được

$$\begin{array}{r} 499 \\ \times \quad 2 \\ \hline 998, \text{thoả mãn bài toán.} \end{array}$$

Vậy số phải tìm là 99.

Cách 2. Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$, ta có

$$\overline{ab8} = \overline{4ab} \cdot 2.$$

Đặt $\overline{ab} = x$ ta được

$$10x + 8 = (400 + x) \cdot 2$$

$$10x + 8 = 800 + 2x$$

Ta tìm được $x = 99$.

Lưu ý. Khi trong phép tính có một nhóm chữ số được lặp lại, ta có thể biểu thị nhóm chữ số ấy bởi số x .

Ví dụ 1.7. Điền chữ số thoả mãn cả hai phép cộng sau

$$\begin{array}{r} \text{one} \\ + \text{one} \\ \hline \text{one} \\ \text{four} \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{r} \text{four} \\ + \text{one} \\ \hline \text{five} \end{array}$$

Giải

Ở cột hàng đơn vị của phép cộng thứ hai, $r + e = e$ nên $r = 0$.

Ở cột hàng đơn vị của phép cộng thứ nhất, $4e$ tận cùng 0 mà $e \neq 0$ (vì đã có $r = 0$) nên $e = 5$.

Ở phép cộng thứ nhất, $\text{one} \cdot 4$ là số có bốn chữ số nên $\text{o} \geq 2$. Ở phép cộng thứ hai, cột hàng trăm không nhớ sang cột hàng nghìn nên $\text{o} \leq 4$. Vậy $\text{o} \in \{2; 3; 4\}$.

Xét phép cộng thứ nhất. Giả sử cột hàng trăm được nhớ k từ cột hàng chục sang. Do $4n + 2 \leq 4 \cdot 9 + 2 = 38$ nên $k \leq 3$. (1)

Ở cột hàng trăm ta có $4.o + k$ tận cùng o .

Nếu $o = 2$ thì $4.2 + k$ tận cùng 2 nên $k = 4$, trái với (1).

Nếu $o = 4$ thì $4.4 + k$ tận cùng 4 nên $k = 8$, trái với (1).

Nếu $o = 3$ thì $4.3 + k$ tận cùng 3 nên $k = 1$. Do đó ở cột hàng chục có $10 \leq 4n + 2 \leq 19$, suy ra $2 \leq n \leq 4$. Loại $n = 2$ vì khi đó $u = 0$, trùng với $r = 0$. Loại $n = 3$ vì đã có $o = 3$. Vậy $n = 4$.

Ta có

$$\begin{array}{r} 345 \\ + 345 \\ + 345 \\ + 345 \\ \hline 1380 \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{r} 1380 \\ + 345 \\ \hline 1725 \end{array}$$

Dạng 6. TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT LŨY THỪA

Trong nhiều trường hợp, ta cần tìm một hoặc nhiều chữ số tận cùng của một số. Ở *Chuyên đề 3*, ta sẽ thấy : Để xét xem một số có chia hết cho 2, cho 5 hay không, ta cần biết chữ số tận cùng của số ấy ; để xét xem một số có chia hết cho 4, cho 25 hay không, ta cần biết hai chữ số tận cùng của số ấy.

Tìm một chữ số tận cùng

Khi tìm chữ số tận cùng của một lũy thừa, cần chú ý đến những số vẫn giữ nguyên chữ số tận cùng khi nâng lên lũy thừa bất kì (khác 0) :

– Các số có tận cùng là 0, 1, 5, 6 nâng lên lũy thừa n (khác 0) vẫn giữ nguyên chữ số tận cùng :

$$(\dots 0)^n = \dots 0 ; (\dots 1)^n = \dots 1 ; (\dots 5)^n = \dots 5 ; (\dots 6)^n = \dots 6 .$$

– Với các số có tận cùng khác 0, 1, 5, 6, ta đưa về số có tận cùng là 1 hoặc 6 :

$$(\dots 2)^4 = \dots 6 ; (\dots 3)^4 = \dots 1 ; (\dots 4)^2 = \dots 6 ;$$

$$(\dots 7)^4 = \dots 1 ; (\dots 8)^4 = \dots 6 ; (\dots 9)^2 = \dots 1 .$$

Ví dụ 1.8. Tìm chữ số tận cùng của 3^{2015} .

Giải

Ta thấy $3^4 = 81$, số tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào cũng tận cùng bằng 1 nên

$$3^{2015} = \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot 3^4}_{503 \text{ lần}} \cdot 3^3 = 81^{503} \cdot 27 = (\dots 1) \cdot 27 = \dots 7$$

Vậy chữ số tận cùng của 3^{2015} là 7.

Tìm hai chữ số tận cùng

Khi tìm hai chữ số tận cùng của một lũy thừa, cần chú ý đến những số vẫn giữ nguyên hai chữ số tận cùng khi nâng lên lũy thừa bất kì (khác 0).

– Các số có tận cùng là 00, 01, 25, 76 nâng lên lũy thừa n (khác 0) vẫn giữ nguyên hai chữ số tận cùng :

$$(\dots 00)^n = \dots 00 ; \quad (\dots 01)^n = \dots 01 ;$$

$$(\dots 25)^n = \dots 25 ; \quad (\dots 76)^n = \dots 76.$$

– Với những trường hợp khác, ta thường nâng lên lũy thừa thích hợp để được số có tận cùng 01 hoặc 76.

Ví dụ 1.9. Tìm hai chữ số tận cùng của 6^{2011} .

Giải

Ta thấy 6^5 tận cùng bằng 76, số tận cùng là 76 nâng lên lũy thừa n (khác 0) vẫn tận cùng là 76 nên $6^{2011} = \underbrace{6^5 \cdot 6^5 \cdot \dots \cdot 6^5}_{402 \text{ lần}} \cdot 6 = (\dots 76)^{402} \cdot 6 = (\dots 76) \cdot 6 = \dots 56$.

Vậy hai chữ số tận cùng của 6^{2011} là 56.

BÀI TẬP

1.1. Tính giá trị của các biểu thức (tính nhanh nếu có thể) :

a) $215.62 + 42 - 52.215$;

b) $14.29 + 14.71 + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99)(199199.198 - 198198.199)$.

1.2. Người ta đánh số trang của một cuốn sách bằng dãy số tự nhiên 1, 2, 3, ...

a) Nếu quyển sách có 180 trang thì phải viết tất cả bao nhiêu chữ số ?

b) Nếu phải viết tất cả 327 chữ số thì quyển sách có bao nhiêu trang ?

1.3. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng gấp ba hiệu của chúng và bằng nửa tích của chúng.

1.4. Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, biết rằng khi chia nó cho 69 thì thương và số dư bằng nhau.

1.5. Tìm số dư của phép chia số $\underbrace{11 \dots 1}_{100 \text{ chữ số } 1}$ cho 1001.

1.6. Điền chữ số thích hợp để

$$\begin{array}{r} 8 \text{ a b a} \\ + \text{ c 2 5 d} \\ \hline \text{d 5 2 c} \end{array}$$

1.7. Điền chữ số $\overline{abc} + \overline{bca}$ sao cho tổng trên là lớn nhất và a, b, c nhận các giá trị 1, 2, 3 (không nhất thiết tương ứng).

1.8. Điền chữ số thích hợp để

$$\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{bac}.$$

1.9. Điền chữ số thích hợp để :

a)
$$\begin{array}{r} ***1 \\ *** \\ \hline *** \\ *** \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} ab \\ \hline ba \end{array}$$

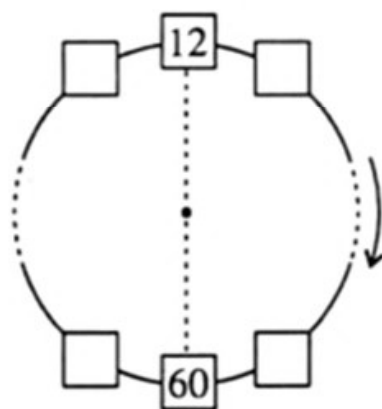
b)
$$\begin{array}{r} **** \\ **8 \\ *** \\ \hline 432 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4* \\ \hline ** \end{array}$$

1.10. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị ?

1.11. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, trong đó có ít nhất hai chữ số giống nhau ?

1.12. Trong các số tự nhiên từ 1 đến 500, có bao nhiêu số có ít nhất một chữ số 5 ?

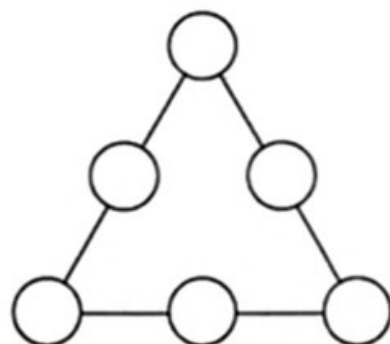
1.13. Trên n ô vuông cách đều nhau của một đường tròn, người ta ghi n số tự nhiên liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Biết rằng ô ghi số 12 đối diện với ô ghi số 60 (h.1). Tính n .



Hình 1

1.14. Tìm số tự nhiên n , biết rằng có đúng 100 số lẻ nằm giữa n và $2n$.

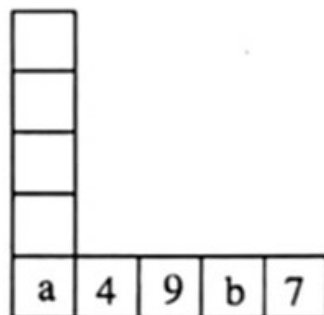
1.15. Người ta ghép hai chữ số 1, hai chữ số 2, hai chữ số 3 làm thành một số có sáu chữ số. Tìm số có sáu chữ số ấy, biết rằng hai chữ số 1 cách nhau một chữ số, hai chữ số 2 cách nhau hai chữ số, hai chữ số 3 cách nhau ba chữ số.



Hình 2

1.16. Hãy xếp sáu số 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào các hình tròn đặt trên các cạnh của tam giác (h.2) sao cho tổng các số trên cạnh nào của tam giác cũng bằng 9.

1.17. Người ta đặt chín số tự nhiên từ 1 đến 9 vào các ô vuông ở hình 3 sao cho tổng năm số ở hàng ngang bằng tổng năm số ở cột dọc. Các ô kí hiệu a và b có thể nhận những giá trị nào ?



Hình 3

1.18. Chia số tự nhiên a cho 72 thì dư 69. Chia số a cho 18 thì thương bằng số dư. Tìm số a .

1.19. Xét phép chia số tự nhiên a cho số tự nhiên b khác 0 , ta có

$$a = bk + r \quad (0 \leq r < b).$$

Nếu $r = 0$ thì k còn gọi là thương đúng của phép chia.

Nếu $r \neq 0$ thì k còn gọi là thương hụt của phép chia.

Kí hiệu $[a : b]$ là thương đúng hoặc thương hụt của phép chia a cho b . Tính :

a) $[32 : 4] ; [61 : 4] ;$

b) $[800 : 5] + [800 : 5^2] + [800 : 5^3] + [800 : 5^4].$

1.20. Điền chữ số thích hợp để

$$\overline{84 **} : 47 = \overline{*8*}.$$

1.21. Tính :

a) $(2^9 \cdot 16 + 2^9 \cdot 34) : 2^{10} ;$

b) $(3^4 \cdot 57 - 9^2 \cdot 21) : 3^5.$

1.22. Cho biết $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025$. Hãy tính

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 18^3.$$

1.23. Cho $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$.

Không tính giá trị của biểu thức a , hãy chứng tỏ rằng $a + 2 = 2^{11}$.

1.24. Tìm số tự nhiên x , biết rằng

$$(2x + 1)^2 = 625.$$

1.25. Quan sát $11 - 2 = 9 = 3^2$

$$1111 - 22 = 1089 = 33^2.$$

Hãy chứng minh rằng $\underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ chữ số } 1} - \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ chữ số } 2}$ là số chính phương.

1.26. Tìm chữ số tận cùng của

a) $7^{35} - 4^{31} ;$

b) $2^{1930} \cdot 9^{1945}.$

1.27. Tìm hai chữ số tận cùng của :

a) $351^{2011} ;$

b) $218^{218}.$

Chuyên đề 2. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 2.1. Ông Toàn đi công tác trở về nhà thì chiếc đồng hồ lên dây cót của ông đã đứng. Ông lên dây cót, vận kim đồng hồ chỉ 8 giờ rồi sang ngay nhà bạn gần đó để chơi và hỏi giờ. Trên đường đi, ông phát hiện mình không mang theo đồng hồ. Do đó ông đã ghi lại lúc vừa đến nhà bạn là 8 giờ 20 phút và lúc bắt đầu rời nhà bạn để về nhà mình là 8 giờ 50 phút. Khi về đến nhà, ông thấy đồng hồ của mình chỉ 8 giờ 50 phút. Hỏi ông phải chỉnh đồng hồ của mình để kim đồng hồ chỉ mấy giờ?

Giải

Thời gian từ lúc ông Toàn rời nhà đến lúc trở về nhà là

$$8 \text{ giờ } 50 \text{ phút} - 8 \text{ giờ} = 50 \text{ phút.}$$

Thời gian ông Toàn ở nhà bạn là

$$8 \text{ giờ } 50 \text{ phút} - 8 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = 30 \text{ phút.}$$

Thời gian ông Toàn đi từ nhà bạn đến nhà mình là

$$(50 - 30) : 2 = 10 \text{ (phút).}$$

Ông Toàn phải chỉnh để kim đồng hồ chỉ

$$8 \text{ giờ } 50 \text{ phút} + 10 \text{ phút} = 9 \text{ giờ.}$$

Ví dụ 2.2. Bạn An về nghỉ hè ở quê trong một số ngày, trong đó có 10 ngày mưa. Biết rằng có 11 buổi sáng không mưa, có 9 buổi chiều không mưa và không bao giờ trời mưa cả sáng lẫn chiều. Hỏi bạn An về nghỉ ở quê trong bao nhiêu ngày?

Giải

Gọi X là số ngày An về nghỉ hè thì số ngày trời mưa vào buổi sáng là $X - 11$, số ngày trời mưa vào buổi chiều là $X - 9$.

Suy ra số ngày mưa vào buổi chiều nhiều hơn số ngày mưa vào buổi sáng là

$$(X - 9) - (X - 11) = 2 \text{ (ngày).}$$

Số ngày trời mưa vào buổi sáng và buổi chiều có tổng là 10.

Số ngày trời mưa vào buổi sáng là

$$(10 - 2) : 2 = 4 \text{ (ngày).}$$

Số ngày trời không mưa vào buổi sáng là 11 (theo đề bài).

Số ngày An về nghỉ hè là

$$4 + 11 = 15 \text{ (ngày).}$$

Lưu ý. Bài toán trên thuộc loại tìm hai số khi biết tổng (là 10) và hiệu (là 2). Số nhỏ bằng (Tổng - Hiệu) : 2.

Ví dụ 2.3. Một số học sinh dự thi học sinh giỏi toán.

Nếu xếp 25 học sinh một phòng thì thừa 5 học sinh chưa có chỗ.

Nếu xếp 28 học sinh một phòng thì thừa 1 phòng.

Tính số học sinh dự thi.

Giải

Nếu xếp 28 học sinh một phòng thì thừa 1 phòng, tức là thiếu 28 học sinh.

Số học sinh chênh lệch trong hai trường hợp xếp phòng là

$$5 + 28 = 33 \text{ (học sinh).}$$

Số học sinh chênh lệch ở mỗi phòng trong hai trường hợp là

$$28 - 25 = 3 \text{ (học sinh).}$$

Số phòng thi là

$$33 : 3 = 11 \text{ (phòng).}$$

Số học sinh là

$$25.11 + 5 = 280 \text{ (học sinh).}$$

Lưu ý. Bài toán trên thuộc loại tìm số khi biết hai hiệu số. Chia số học sinh chênh lệch trong hai trường hợp (là 33) cho số học sinh chênh lệch ở mỗi phòng trong hai trường hợp (là 3), ta tìm được số phòng.

Ví dụ 2.4. Trong một bảng đấu loại bóng đá, có bốn đội thi đấu vòng tròn một lượt : đội thắng được 3 điểm, đội hoà được 1 điểm, đội thua được 0 điểm. Tổng số điểm của bốn đội khi kết thúc vòng đấu bảng là 16 điểm. Tính số trận hoà.

Giải

Số trận đấu trong vòng đấu bảng là $4.3 : 2 = 6$ (trận).

Tổng số điểm của hai đội trong trận hoà là $1 + 1 = 2$ (điểm).

Tổng số điểm của hai đội trong trận có thắng – thua là $3 + 0 = 3$ (điểm).

Giả sử không có trận hoà thì tổng số điểm của các đội là

$$3.6 = 18 \text{ (điểm)}$$

Đôi ra $18 - 16 = 2$ (điểm).

Tổng số điểm trong một trận hoà ít hơn tổng số điểm trong trận có thắng thua là $3 - 2 = 1$ (điểm).

Số trận hoà là : $2 : 1 = 2$ (trận).

Lưu ý. Bài toán trên thuộc loại giả thiết tạm. Để tính số trận hoà, ta giả sử không có trận hoà. Chia số điểm chênh lệch trong hai trường hợp (giả sử và thực tế) cho số điểm chênh lệch trong mỗi trận đấu do giả sử, ta tìm được số trận hoà.

Ví dụ 2.5. Một câu lạc bộ lúc đầu có một thành viên, sau một tháng thì thành viên đó phải tìm thêm 2 thành viên mới. Cứ như vậy, mỗi thành viên (cả cũ lẫn mới) sau một tháng phải tìm được thêm 2 thành viên mới. Nếu kế hoạch phát triển hội viên như trên được thực hiện thì số thành viên của câu lạc bộ đó là bao nhiêu :

a) Sau 6 tháng ?

b) Sau 12 tháng ?

Giải

a) Cứ sau một tháng thì số thành viên lại tăng gấp ba lần. Sau 6 tháng, số thành viên của câu lạc bộ là

$$3^6 = 729 (\text{người}).$$

b) Sau 12 tháng, số thành viên của câu lạc bộ là

$$3^{12} = 3^6 \cdot 3^6 = 729 \cdot 729 = 531441 (\text{người}).$$

Ví dụ 2.6. Tính số sách Toán bán được trong mỗi ngày của một cửa hàng, biết số sách đã bán ra như sau :

Thứ hai, thứ ba, thứ tư : 115 quyển

Thứ tư, thứ năm : 85 quyển

Thứ ba, thứ năm : 90 quyển

Thứ hai, thứ sáu : 70 quyển

Thứ năm, thứ sáu : 80 quyển.

Giải

Gọi số sách cửa hàng bán trong ngày thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu lần lượt là a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 (quyển). Theo đề bài ta có :

$$a_2 + a_3 + a_4 = 115 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 = 85 \quad (2)$$

$$a_3 + a_5 = 90 \quad (3)$$

$$a_2 + a_6 = 70 \quad (4)$$

$$a_5 + a_6 = 80 \quad (5)$$

Từ (1) và (5) suy ra $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 115 + 80 = 195$.

Từ (3) và (4) suy ra $a_2 + a_3 + a_5 + a_6 = 90 + 70 = 160$.

Suy ra $a_4 = 195 - 160 = 35$.

Từ (2) suy ra $a_5 = 85 - a_4 = 85 - 35 = 50$.

Từ (3) suy ra $a_3 = 90 - a_5 = 90 - 50 = 40$.

Từ (5) suy ra $a_6 = 80 - a_5 = 80 - 50 = 30$.

Từ (4) suy ra $a_2 = 70 - a_6 = 70 - 30 = 40$.

Số sách của hàng đã bán trong các ngày thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu lần lượt là

40 quyển, 40 quyển, 35 quyển, 50 quyển, 30 quyển.

Ví dụ 2.7. (Bài toán bò ăn cỏ của Newton)

Trên một cánh đồng cỏ, cỏ mọc đều như nhau và lớn đều như nhau. Biết rằng 70 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm trên cánh đồng ấy trong 24 ngày, nếu có 30 con bò thì chúng ăn hết cỏ trong 60 ngày.

a) Gọi số cỏ một con bò ăn trong một ngày là một bó. Hỏi số cỏ mọc thêm trên cánh đồng trong 36 ngày là bao nhiêu bó ?

b) Bao nhiêu con bò sẽ ăn hết cỏ của cánh đồng trong 96 ngày ?

Giải

a) 70 con bò trong 24 ngày ăn hết $1.70.24 = 1680$ (bó).

30 con bò trong 60 ngày ăn hết $1.30.60 = 1800$ (bó).

Số cỏ mọc thêm trong $60 - 24 = 36$ (ngày) là

$$1800 - 1680 = 120 \text{ (bó)}.$$

b) Số cỏ trên cánh đồng trong 96 ngày bằng tổng của số cỏ trên cánh đồng trong 60 ngày và số cỏ mọc thêm trong $96 - 60 = 36$ (ngày) nên bằng

$$1800 + 120 = 1920 \text{ (bó)}.$$

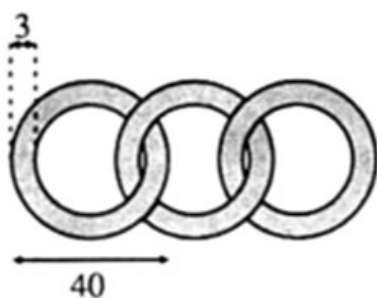
Số con bò ăn hết số cỏ trên trong 96 ngày là

$$1920 : 96 = 20 \text{ (con bò)}.$$

BÀI TẬP

- 2.1.** Một cửa hàng mua một xe ô tô giá 1500 triệu đồng, đem cho thuê 20 tuần với giá cho thuê 30 triệu đồng một tuần. Phí bảo hiểm cửa hàng phải nộp là 80 triệu đồng, chi phí sửa chữa hết 120 triệu đồng. Sau đó cửa hàng bán chiếc xe với giá 1300 triệu đồng. Tính lợi nhuận của thương vụ này.

- 2.2.** Một vòng xích có đường kính ngoài là 40mm, độ dày của kim loại là 3mm (h.4). Có 10 vòng xích được nối với nhau. Tính chiều dài lớn nhất của dây xích.



Hình 4

- 2.3. An và Bích làm việc tại cùng một nhà máy. Cứ sau 9 ngày làm việc thì An nghỉ một ngày. Cứ sau 6 ngày làm việc thì Bích nghỉ một ngày. Hôm nay là ngày nghỉ của An và ngày mai là ngày nghỉ của Bích. Hỏi sau ít nhất bao lâu (kể từ hôm nay) thì cả hai người sẽ có cùng ngày nghỉ ?
- 2.4. Có 10 người, tuổi của mỗi người là một số tự nhiên. Tổng số tuổi của 9 người trong 10 người đó là 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 90, 91, 92. Tìm tuổi của người trẻ nhất, tuổi của người già nhất.
- 2.5. Ta gọi *số đối xứng* là số mà viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại vẫn được chính số đó (chẳng hạn 353, 1221,...). Đồng hồ đo quãng đường của một xe máy chỉ số 15951. Tìm số đối xứng nhỏ nhất tiếp theo xuất hiện trên mặt đồng hồ.
- 2.6. Có một số con mèo chui vào chuồng bồ câu. Người ta đếm trong chuồng thấy tổng cộng có 34 cái đầu và 80 cái chân. Tính số mèo.
- 2.7. Ở một bến cảng có 15 con tàu, mỗi con tàu có 3 cột buồm hoặc 5 cột buồm, tổng cộng có 61 cột buồm. Hỏi có bao nhiêu con tàu có 5 cột buồm ?
- 2.8. Đội tuyển của một trường dự một cuộc thi đấu được chia đều thành sáu nhóm, mỗi học sinh dự thi đạt 8 điểm hoặc 10 điểm. Tổng số điểm của cả đội là 160 điểm. Tính số học sinh đạt điểm 10.
- 2.9. Có 64 bạn tham gia giải bóng bàn theo thể thức đấu loại trực tiếp. Những người được chọn ở mỗi vòng chia thành từng nhóm hai người, hai người trong nhóm đấu với nhau một trận để chọn lấy một người. Tìm số trận đấu ở :
a) Vòng 1 ; b) Vòng 5.
- 2.10. Tâm có 5 tờ tiền mệnh giá 2000 đồng và 4 tờ tiền mệnh giá 5000 đồng. Tâm có bao nhiêu cách khác nhau để trả tiền bằng cách dùng một hoặc cả hai loại tiền trên ?

2.11. Có 40 bạn lớp 6A và 30 bạn lớp 6B xếp hàng đôi để vào tham quan Viện bảo tàng. Gọi a là số trường hợp hai bạn lớp 6A xếp cùng hàng đôi, gọi b là số trường hợp hai bạn lớp 6B xếp cùng hàng đôi. So sánh a và b , số nào lớn hơn, và lớn hơn bao nhiêu ?

2.12. Dưới đây là tờ lịch của một tháng

CN	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Xét một bảng 3×3 , chẳng hạn bảng giới hạn bởi nét chấm.

Tổng chín số của bảng này là $3 + 4 + 5 + 10 + 11 + 12 + 17 + 18 + 19 = 99$.

Biết một bảng 3×3 của một tờ lịch khác có tổng chín số trong bảng là 162.

a) Tính số ở chính giữa của bảng đó.

b) Hãy lập bảng 3×3 nói trên.

Chuyên đề 3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT.

DẤU HIỆU CHIA HẾT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa (nhắc lại) : Số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b khác 0 nếu có số tự nhiên k sao cho $a = bk$.

Ta kí hiệu $a : b$ (đọc là a chia hết cho b)

hoặc $b | a$ (đọc là b chia hết a).

2. Tính chất chia hết của tổng và hiệu

– Nếu a và b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m (giả sử $a \geq b$).

– Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m , số kia không chia hết cho m thì $a + b$ không chia hết cho m và $a - b$ không chia hết cho m (giả sử $a \geq b$).

3. Tính chất chia hết của tích

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m .
- Nếu a chia hết cho b thì a^n chia hết cho b^n .
- (Bổ sung) Nếu ab chia hết cho c , đồng thời a và c không cùng chia hết cho một số tự nhiên khác 1 nào thì b chia hết cho c .

4. Dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5

- Các số có chữ số tận cùng chia hết cho 2 (hoặc 5) thì chia hết cho 2 (hoặc 5);
- Và chỉ những số đó mới chia hết cho 2 (hoặc 5).

5. Dấu hiệu chia hết cho 3, cho 9

- Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3 (hoặc 9) thì chia hết cho 3 (hoặc 9);
- Và chỉ những số đó mới chia hết cho 3 (hoặc 9).

KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Dấu hiệu chia hết cho 4, cho 25

- Các số có hai chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 4 (hoặc 25) thì chia hết cho 4 (hoặc 25);
- Và chỉ những số đó mới chia hết cho 4 (hoặc 25).

Chứng minh

Xét số tự nhiên $n = \overline{A\overline{bc}}$ trong đó A là số trăm (A có thể bằng 0, có thể có một hoặc có nhiều chữ số).

$n = 100A + \overline{bc}$. Ta thấy $100 : 4$ và $100 : 25$ nên :

Nếu $\overline{bc} : 4$ thì $n : 4$. Nếu $\overline{bc} \not: 4$ thì $n \not: 4$.

Nếu $\overline{bc} : 25$ thì $n : 25$. Nếu $\overline{bc} \not: 25$ thì $n \not: 25$.

2. Dấu hiệu chia hết cho 8, cho 125

- Các số có ba chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 8 (hoặc 125) thì chia hết cho 8 (hoặc 125);
- Và chỉ những số đó mới chia hết cho 8 (hoặc 125).

Chứng minh

Xét số tự nhiên $n = \overline{Abcd}$ trong đó A là số nghìn (A có thể bằng 0, có thể có một hoặc có nhiều chữ số).

$n = 1000A + \overline{bcd}$. Ta thấy $1000 : 8$ và $1000 : 125$ nên :

Nếu $\overline{bcd} : 8$ thì $n : 8$. Nếu $\overline{bcd} \not: 8$ thì $n \not: 8$.

Nếu $\overline{bcd} : 125$ thì $n : 125$. Nếu $\overline{bcd} \not: 125$ thì $n \not: 125$.

3. Dấu hiệu chia hết cho 11

Xét số tự nhiên $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3 a_2 a_1}$. Ta gọi $a_1, a_3, a_5, \dots$ là các chữ số hàng lẻ ; gọi $a_2, a_4, a_6, \dots$ là các chữ số hàng chẵn (kể từ phải sang trái).

– Các số có tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn có hiệu chia hết cho 11 thì chia hết cho 11 ;

– Và chỉ những số đó mới chia hết cho 11.

Chứng minh. Đối với số $A = \overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ (trường hợp tổng quát chứng minh tương tự)

$$\begin{aligned} A &= 100\,000 a_6 + 10\,000 a_5 + 1000 a_4 + 100 a_3 + 10 a_2 + a_1 \\ &= 100001 a_6 + 9999 a_5 + 1001 a_4 + 99 a_3 + 11 a_2 - a_6 + a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 \\ &= (100\,001 a_6 + 9999 a_5 + 1001 a_4 + 99 a_3 + 11 a_2) \\ &\quad + (a_1 + a_3 + a_5) - (a_2 + a_4 + a_6) \\ &= 11 m + (a_1 + a_3 + a_5) - (a_2 + a_4 + a_6) \text{ với } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nếu $a_1 + a_3 + a_5 \geq a_2 + a_4 + a_6$ thì

$$A = 11m + [(a_1 + a_3 + a_5) - (a_2 + a_4 + a_6)].$$

Nếu $a_1 + a_3 + a_5 < a_2 + a_4 + a_6$ thì $A = 11m - [(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5)]$.

Do đó :

– Nếu hiệu $(a_1 + a_3 + a_5) - (a_2 + a_4 + a_6)$

hoặc $(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5)$ chia hết cho 11 thì A chia hết cho 11.

– Nếu hiệu đó không chia hết cho 11 thì A không chia hết cho 11.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 3.1. Hãy điền chín số tự nhiên từ 1 đến 9 vào chín vòng tròn ở hình 5 sao cho tổng ba số thẳng hàng chia hết cho 5.

Giải

Gọi số ở chính giữa là a .

Tổng các số tự nhiên từ 1 đến 9 bằng

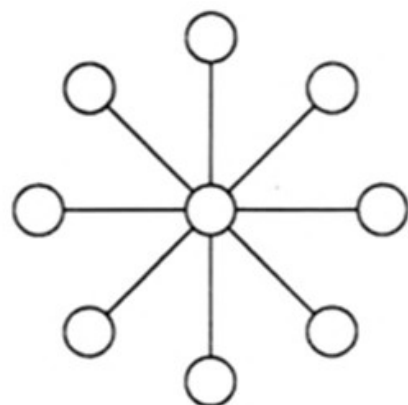
$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45.$$

Khi cộng bốn bộ ba số thẳng hàng thì số a được cộng bốn lần, do đó tổng của bốn bộ ba số thẳng hàng bằng $45 + 3a$.

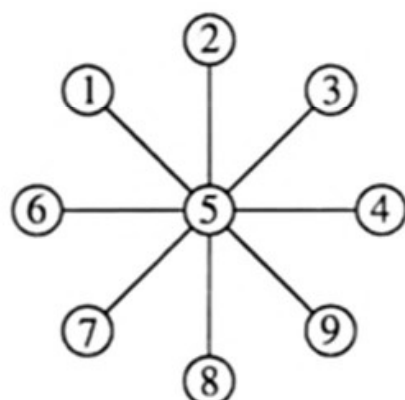
Theo đề bài $45 + 3a : 5$ nên $3a : 5$. Hai số 3 và 5 không cùng chia hết cho một số nào khác 1 nên $a : 5$. Vậy $a = 5$.

Hai số thẳng hàng với a phải có tổng chia hết cho 5.

Ta chọn chúng là 1 và 9 ; 2 và 8 ; 3 và 7 ; 4 và 6. Các số được điền như trên hình 6.



Hình 5



Hình 6

Ví dụ 3.2. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên chia hết cho 37 và có tổng các chữ số bằng :

a) 27 ;

b) 37.

Giải

a) Ta thấy 111 chia hết cho 37. Do đó số gồm chín bộ 111 thì chia hết cho 37, tức là $m = \underbrace{11 \dots 1}_{27 \text{ chữ số } 1}$ chia hết cho 37 và tổng các chữ số của m bằng 27.

b) Số 37 chia hết cho 37 và có tổng các chữ số bằng 10.

Ta có $n = \underbrace{11 \dots 1}_{27 \text{ chữ số } 1}$ 37 chia hết cho 37 và tổng các chữ số của n bằng 37.

Ví dụ 3.3. Gọi A là tổng của tất cả các số tự nhiên có hai chữ số. Số A chia hết cho số nào trong các số 2, 5, 3, 9 ?

Giải

$$A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99.$$

Tổng trên có $99 - 10 + 1 = 90$ (số) nên

$$A = (10 + 99).90 : 2 = 4905.$$

Số A tận cùng bằng 5 và có tổng các chữ số bằng $4 + 9 + 0 + 5 = 18$. Do đó A chia hết cho 5, chia hết cho 3, chia hết cho 9, nhưng không chia hết cho 2.

Ví dụ 3.4. Khi đổi chỗ các chữ số của số tự nhiên a, ta được số tự nhiên b gấp ba lần số a. Chứng minh rằng a chia hết cho 9.

Giải

Ta có $b = 3a$ (1) nên $b : 3$, do đó tổng các chữ số của b chia hết cho 3, tức là tổng các chữ số của a chia hết cho 3, suy ra $a : 3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $b : 9$, do đó tổng các chữ số của b chia hết cho 9, tức là tổng các chữ số của a chia hết cho 9, suy ra $a : 9$.

Ví dụ 3.5. Cho a và d là các số tự nhiên khác 0. Chứng minh rằng $d = 1$ nếu :

a) a và $2a - 1$ cùng chia hết chia d ;

b) a và $6a - 1$ cùng chia hết cho d.

Giải

a) Nếu $a : d$ thì $2a : d$. Ta lại có $2a - 1 : d$ nên $2a - (2a - 1) : d$, tức là $1 : d$. Vậy $d = 1$.

b) Nếu $a : d$ thì $6a : d$. Ta lại có $6a - 1 : d$ nên $6a - (6a - 1) : d$, tức là $1 : d$. Vậy $d = 1$.

Ví dụ 3.6. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó gấp đôi tích các chữ số của nó.

Giải

Gọi số tự nhiên phải tìm là $\overline{ab}$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Theo đề bài $10a + b = 2ab$

$$\Rightarrow 10a = 2ab - b$$

$$\Rightarrow 10a = b(2a - 1)$$

Ta có $10a : 2a - 1$ mà a và $2a - 1$ không cùng chia hết cho một số tự nhiên khác 1 nào (xem Ví dụ 3.5) nên $10 : 2a - 1$.

Ta thấy $2a - 1$ là số lẻ, mà 10 chỉ chia hết cho các số lẻ 1 và 5 nên

$2a - 1$	1	5
$2a$	2	6
a	1	3

Với $a = 1$ thì $b = 10$, loại.

Với $a = 3$ thì $b = 6$.

Số phải tìm là 36, ta có $36 = 2.3.6$.

Ví dụ 3.7. Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, biết rằng số đó chia hết cho 4 và chia cho 25 thì dư 2.

Giải

Số chia hết cho 25 thì tận cùng 00, 25, 50, 75 nên số chia cho 25 dư 2 tận cùng 02, 27, 52, 77.

Trong các số tận cùng như trên, chỉ có số tận cùng 52 chia hết cho 4.

Để số đó là số lớn nhất có ba chữ số, ta chọn số đó là 952.

Ví dụ 3.8. Tìm số tự nhiên có dạng $\overline{aba}$, biết rằng số đó chia hết cho 33.

Giải

Số $\overline{aba}$ chia hết cho 33 nên chia hết cho 11 và chia hết cho 3.

$\overline{aba} : 11$ nên $2a - b : 11$ (dùng dấu hiệu chia hết cho 11 hoặc chứng minh trực tiếp).

Ta có $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b \leq 9$ nên $0 \leq 2a - b \leq 18$, do đó $2a - b \in \{0; 11\}$.

Trường hợp $2a - b = 0$. Khi đó $b = 2a$. Lần lượt cho a bằng 1, 2, 3, 4 ta được các số 121, 242, 363, 484. Chỉ có 363 chia hết cho 3. Thử lại : $363 : 33 = 11$.

Trường hợp $2a - b = 11$. Khi đó $b = 2a - 11$. Lần lượt cho a bằng 6, 7, 8, 9 ta được các số 616, 737, 858, 979. Chỉ có 858 chia hết cho 3. Thử lại : $858 : 33 = 26$.

Đáp số : Có hai số phải tìm là 363 và 858.

Ví dụ 3.9. An làm một bài thi gồm 20 câu. Mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm, bỏ qua không trả lời được 0 điểm. Trong bài thi, có câu An trả lời sai.

Tính số câu trả lời đúng, số câu trả lời sai, số câu bỏ qua không trả lời nếu An được :

a) 60 điểm ;

b) 55 điểm.

Giải

a) Gọi số câu An trả lời đúng là a , số câu An trả lời sai là b . Ta có

$$5a - 2b = 60. \quad (1)$$

Suy ra $2b \vdots 5$. Ta lại có 2 và 5 không cùng chia hết cho một số tự nhiên nào khác 1 nên $b \vdots 5$.

Do $b \geq 1$ nên từ (1) suy ra $5a > 60$, do đó $a > 12$. Do bài thi có 20 câu nên $a + b \leq 20$ suy ra $b < 20 - 12 = 8$.

Từ $1 \leq b < 8$ và $b \vdots 5$ suy ra $b = 5$.

Do đó $a = (60 + 2b) : 5 = (60 + 2.5) : 5 = 14$.

An trả lời đúng 14 câu, trả lời sai 5 câu, bỏ qua không trả lời 1 câu.

b) Bạn đọc tự giải.

Đáp số : An trả lời đúng 13 câu, trả lời sai 5 câu, bỏ qua không trả lời 2 câu.

BÀI TẬP

- 3.1. Lấy số 6, nhân gấp 9 được 54, rồi ghép lại thành 546, số này chia hết cho 7.
a) Nếu thay số 6 lần lượt bởi các số 1, 2, 3, 4, 5 và cũng làm như trên thì các số nhận được có chia hết cho 7 không ?
b) Hãy nêu một ví dụ để chứng tỏ rằng lấy một số khác 6 rồi cũng làm như trên thì ta có thể được một số không chia hết cho 7.
- 3.2. Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} + \overline{cd}$ chia hết cho 11 thì $\overline{abcd}$ chia hết cho 11.
- 3.3. a) Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ thì chia hết cho 7.
b) Điền chữ số để $\overline{31a31a31a}$ chia hết cho 7.
- 3.4. Dùng ba trong bốn chữ số 4, 6, 3, 0, hãy viết tất cả các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho tất cả các số 2, 5, 3, 9.
- 3.5. Điền chữ số thích hợp để :
a) $\overline{abcd0} - \overline{1110n} = \overline{abcd}$;
b) $\overline{3a4b5} \vdots 9$, biết $a - b = 2$.
- 3.6. Chứng minh rằng số $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ chữ số } 1} - 10n$ chia hết cho 9.
- 3.7. Các số tự nhiên a và $6a$ có tổng các chữ số như nhau. Chứng minh rằng a chia hết cho 9.
- 3.8. Gọi n là số tạo bởi các số tự nhiên viết liên tiếp từ 16 đến 89. Tìm số tự nhiên k lớn nhất để n chia hết cho 3^k .

3.9. Điền chữ số thích hợp để :

a) $\overline{*378*}$ chia hết cho 72 ;

b) $\overline{24*68*}$ chia hết cho 48.

3.10. Cho số $\overline{abc}$ chia hết cho 4 có các chữ số đều chẵn và b khác 0. Chứng minh rằng số $\overline{bac}$ chia hết cho 4.

3.11. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có ba chữ số, biết rằng số nhỏ chia hết cho 8, số lớn chia hết cho 125.

3.12. Dùng mười chữ số từ 0 đến 9 viết số nhỏ nhất có mười chữ số và chia hết cho :

a) 4 ;

b) 8 ;

c) 25 ;

d) 125.

3.13. Điền chữ số thích hợp để :

a) $3*4827$ chia hết cho 11 ;

b) $*2013*$ chia hết cho 88 ;

c) $3576 - \overline{abc} = \overline{abcd}$.

3.14. Xét số tự nhiên $n = \overline{Aabcd}$ trong đó A là số nghìn (A có thể bằng 0, có thể có một hoặc có nhiều chữ số). Chứng minh rằng nếu $A + \overline{bcd}$ chia hết cho 37 thì n chia hết cho 37.

3.15. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó gấp sáu lần tích các chữ số của nó.

3.16. Cho bốn chữ số 1, 2, 3, 4.

a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số gồm cả bốn chữ số trên ?

b) Chứng minh rằng trong các số lập được ở câu a, không có hai số nào mà một số chia hết cho số còn lại.

3.17. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta có :

a) $n(n+2)(n+7)$ chia hết cho 3 ;

b) $5^n - 1$ chia hết cho 4 ;

c) $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 5.

3.18. Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số sao cho $n^2 - n$ chia hết cho 5.

3.19. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có chín chữ số, chia hết cho 9 và có các tính chất sau :

Nếu xoá một chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 8,

nếu xoá hai chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 7,

nếu xoá ba chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 6,
nếu xoá bốn chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 5,
nếu xoá năm chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 4,
nếu xoá sáu chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 3,
nếu xoá bảy chữ số tận cùng thì được số chia hết cho 2.

- 3.20.** Hai bạn An và Bảo chơi trò chơi lấy bi trong hộp có 100 viên bi. Mỗi người lần lượt phải lấy từ 4 đến 8 viên bi, người lấy được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. An được đi trước. Hãy nêu cách chơi để An thắng cuộc.
- 3.21.** Bạn Tùng viết mười số tự nhiên liên tiếp rồi xoá đi một số thì tổng của chín số còn lại là 490. Tìm số bị xoá.
- 3.22.** Cho dãy số 1, 2, 3, 4, ..., 100.
- Chứng minh rằng tổng của ba số liên tiếp bất kì trong dãy chia hết cho 3.
 - Có thể đổi chỗ các số trong dãy đã cho để được một dãy mới có tổng của bốn số liên tiếp bất kì trong dãy cũng chia hết cho 3 được không ?
- 3.23.** Bạn Hoà mua một số hộp bút và một số quyển vở hết tất cả 100 nghìn đồng. Biết một hộp bút giá 13 nghìn đồng, một quyển vở giá 5 nghìn đồng. Hỏi bạn Hoà đã mua bao nhiêu hộp bút, bao nhiêu quyển vở ?
- 3.24.** Bạn Long có 50 tờ tiền mệnh giá 1 nghìn đồng, 50 tờ tiền mệnh giá 5 nghìn đồng, 50 tờ tiền mệnh giá 10 nghìn đồng. Long cần chọn như thế nào để có 100 nghìn đồng gồm 18 tờ tiền, tờ tiền nào cũng có và số tờ tiền 1 nghìn đồng là ít nhất ?
- 3.25.** Một cửa hàng có năm hộp, mỗi hộp chỉ đựng bát hoặc đĩa. Số lượng bát hoặc đĩa trong năm hộp đó là 19, 22, 32, 35, 37 chiếc. Sau khi bán hết số đĩa trong một hộp thì số bát nhiều gấp bốn số đĩa còn lại. Tính số đĩa đã bán và số đĩa tổng cộng.
- 3.26.** Tìm các số tự nhiên x và y lớn hơn 1 thoả mãn cả hai điều kiện là $x + 1$ chia hết cho y và $y + 1$ chia hết cho x .

Chuyên đề 4. SỐ NGUYÊN TỐ. HỢP SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nếu có số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì ta nói a là bội của b , còn b là ước của a .
2. Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
3. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.
4. Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố. Nhờ phân tích một số tự nhiên ra thừa số nguyên tố, ta dễ dàng tìm được các ước của số tự nhiên đó.

KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Nếu một số n phân tích ra thừa số nguyên tố có dạng

$$n = a^x \cdot b^y \cdot c^z \cdot \dots$$

thì số lượng các ước của n là $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \dots$

Chứng minh

Ước của n là số có dạng $A.B.C \dots$, trong đó

A có $x + 1$ cách chọn là $a^0, a^1, a^2, \dots, a^x$;

B có $y + 1$ cách chọn là $b^0, b^1, b^2, \dots, b^y$;

C có $z + 1$ cách chọn là $c^0, c^1, c^2, \dots, c^z$;

.....

Do đó số lượng các ước của n bằng

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) \dots$$

2. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

Do đó :

- Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4.
- Số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9.
- Số chính phương chia hết cho 5 thì phải chia hết cho 25.

3. Nếu tích ab chia hết cho số nguyên tố p thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho p .

Đặc biệt, nếu a^n chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p .

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 4.1. Các số 30 và 17 chia cho số tự nhiên a khác 1 đều dư r . Tìm a và r .

Giải

Các số 30 và 17 chia cho a có cùng số dư nên hiệu $30 - 17$ chia hết cho a , tức là $13 \vdots a$.

Số nguyên tố 13 có hai ước là 1 và 13. Do $a \neq 1$ nên $a = 13$.

Ta có 30 chia 13 được 2, dư 4.

Vậy $a = 13$ và $r = 4$.

Ví dụ 4.2. Có hơn 20 học sinh xếp thành một vòng tròn. Khi đếm theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ số 1, thì các số 24 và 900 rơi vào cùng một học sinh. Hỏi ít nhất có bao nhiêu học sinh ?

Giải

Gọi số học sinh là a ($a > 20$). Các số 24 và 900 chia cho a có cùng số dư nên $900 - 24 \vdots a$ tức là $876 \vdots a$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố :

$$876 = 2^2 \cdot 3 \cdot 73.$$

Ước của 876, lớn hơn 20 và nhỏ nhất là 73.

Vậy có ít nhất 73 học sinh.

Ví dụ 4.3. Tìm số tự nhiên n , biết rằng

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 378.$$

Giải

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Do đó $\frac{n(n+1)}{2} = 378$, tức là $n(n+1) = 756$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố :

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Do đó $756 = 3^3 \cdot (2^2 \cdot 7) = 27 \cdot 28$.

Vậy $n = 27$.

Ví dụ 4.4. Cho tích 800 số tự nhiên từ 1 đến 800 :

$$A = 1.2.3. \dots 800.$$

a) Dạng phân tích của số A ra thừa số nguyên tố chứa thừa số 5 với số mũ bao nhiêu ?

b) Số A tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

Giải

a) Trong các số tự nhiên từ 1 đến 800 :

– Các bội của 5 là 5, 10, 15, ..., 800 gồm

$$(800 - 5) : 5 + 1 = 160 \text{ (số).}$$

– Các bội của 5^2 là 25, 50, 75, ..., 800 gồm

$$(800 - 25) : 25 + 1 = 32 \text{ (số).}$$

– Các bội của 5^3 là 125, 250, ..., 750 gồm

$$(750 - 125) : 5 + 1 = 6 \text{ (số).}$$

– Các bội của 5^4 là 625, gồm 1 số.

– Không có bội của 5^5 .

Vậy dạng phân tích của số A ra thừa số nguyên tố chứa thừa số 5 với số mũ là :

$$160 + 32 + 6 + 1 = 199.$$

b) Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của số A chứa thừa số 5 với số mũ 199, chứa thừa số 2 với số mũ lớn hơn 199 (vì chỉ riêng các số chẵn từ 2 đến 800 đã có 400 số).

Mỗi cặp thừa số 2 và 5 làm cho tích A tận cùng một chữ số 0. Do đó A tận cùng bằng 199 chữ số 0.

Lưu ý

Ở câu a), với nhận xét kể từ số 1, cứ 5 số lại có một bội của 5, cứ 25 số lại có một bội của 25,... ta có thể tìm được 199 như sau :

$$\begin{aligned} & [800 : 5] + [800 : 5^2] + [800 : 5^3] + [800 : 5^4] \\ &= 160 + 32 + 6 + 1 = 199. \end{aligned}$$

Xem bài tập 1.19.

Ví dụ 4.5. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một bộ ba số nguyên tố mà hiệu của hai số liên tiếp bằng 4.

Giải

Giả sử $p, p + 4, p + 8$ là ba số nguyên tố.

Ta thấy $p \neq 2$, vì nếu $p = 2$ thì $p + 4 = 6$ là hợp số.

Xét $p = 3$ thì 3, 7, 11 là bộ ba số nguyên tố mà hiệu của hai số liên tiếp bằng 4.

Xét $p > 3$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Loại $p = 3k + 1$ vì khi đó $p + 8 = 3k + 9$ là hợp số.

Loại $p = 3k + 2$ vì khi đó $p + 4 = 3k + 6$ là hợp số.

Vậy chỉ có duy nhất bộ ba số nguyên tố 3, 7, 11 thoả mãn đề bài.

Ví dụ 4.6. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 8 ước số.

Giải

Ta biết rằng nếu số n phân tích ra thừa số nguyên tố được $a^x b^y c^z \dots$ thì n có $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \dots$ ước, trong đó $x + 1, y + 1, z + 1 \dots$ đều lớn hơn 1.

Theo đề bài $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \dots = 8$.

Số 8 có ba cách viết thành một tích của một hay nhiều thừa số lớn hơn 1 là 8, 4.2, 2.2.2. Xét ba trường hợp :

– Nếu $x + 1 = 8$ thì $x = 7$. Ta có $n = a^7$. Để n nhỏ nhất, ta chọn $n = 2^7 = 128$.

– Nếu $(x + 1)(y + 1) = 4.2$ thì $x = 3, y = 1$ (giả sử $x \geq y$).

Ta có $n = a^3.b$. Để n nhỏ nhất, ta chọn $n = 2^3.3 = 24$.

– Nếu $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 2.2.2$ thì $x = y = z = 1$. Ta có $n = abc$. Để n nhỏ nhất, ta chọn $n = 2.3.5 = 30$.

So sánh ba trường hợp trên, ta thấy số nhỏ nhất có 8 ước là 24.

Ví dụ 4.7. Viết mỗi số sau thành một tổng của các hợp số sao cho số số hạng của tổng là nhiều nhất :

a) 100 ; b) 102 ; c) 101 ; d) 103.

Giải

Muốn có nhiều số hạng nhất thì giá trị của mỗi số hạng phải nhỏ nhất. Các hợp số chẵn nhỏ nhất là 4 và 6. Hợp số lẻ nhỏ nhất là 9.

a) 100 chia cho 4 được 25 lần. Ta viết 100 thành tổng của 25 số 4 :

$$100 = 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (25 số hạng).}$$

b) 102 chia cho 4 được 25, dư 2. Ta viết 102 thành tổng của 25 hợp số gồm một số 6 và 24 số 4 :

$$102 = 6 + 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (24 số 4).}$$

c) 101 chia cho 4 được 25, dư 1. Ta viết 101 thành tổng của 24 hợp số gồm một số 9 và 23 số 4 :

$$101 = 9 + 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (23 số 4).}$$

d) 103 chia cho 4 được 25, dư 3. Ta viết 103 thành tổng của 24 hợp số gồm một số 9, một số 6 và 22 số 4 :

$$103 = 9 + 6 + 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (22 số 4).}$$

BÀI TẬP

- 4.1. Trong một tháng, có ba ngày chủ nhật là ba số nguyên tố. Ngày 15 của tháng đó là ngày thứ mấy ?
- 4.2. Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 99, ta được một số A. Số A là số nguyên tố hay hợp số ?
- 4.3. Các số sau có là số chính phương không ?
- a) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$;
- b) $10^{15} + 8$.
- 4.4. Cho p và p + 14 là các số nguyên tố. Chứng minh rằng p + 7 là hợp số.
- 4.5. Cho p, p + 20, p + 40 là các số nguyên tố. Chứng minh rằng p + 80 là số nguyên tố.
- 4.6. Tìm số nguyên tố p sao cho p + 6, p + 12, p + 18, p + 24 cũng là các số nguyên tố.
- 4.7. Tìm số nguyên tố nhỏ hơn 200, biết rằng khi chia nó cho 60 thì số dư là hợp số.
- 4.8. Chứng minh rằng số $\underbrace{11 \dots 1}_{10 \text{ chữ số } 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{10 \text{ chữ số } 1}$ là hợp số.
- 4.9. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp có tích bằng 13800.
- 4.10. Tìm số tự nhiên n, biết rằng :
- a) $2n + 1$ chia hết cho $n - 3$;
- b) $n^2 + 3$ chia hết cho $n + 1$.

4.11. Tìm số tự nhiên n , biết rằng :

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 231$;

b) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = 169$.

4.12. Tìm hai số tự nhiên không chia hết cho 10 và có tích bằng 10 000.

4.13. Bạn Chi tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Bạn Hoàng tính tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến m và cũng nhận thấy tổng đó chia hết cho 29. Tìm m và n , biết rằng $m < n < 50$.

4.14. Chứng minh rằng tồn tại 99 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số.

4.15. Tìm số tự nhiên lớn nhất có hai chữ số :

a) Có ít ước số nhất ;

b) Có 12 ước số.

4.16. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất :

a) Có 7 ước số ;

b) Có 15 ước số.

4.17. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chỉ chứa các thừa số nguyên tố 2 và 5, biết rằng khi chia nó cho 2 thì được một số chính phương.

4.18. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 sao cho khi chia nó cho 2 thì được một số chính phương, khi chia nó cho 3 thì được lập phương của một số tự nhiên.

4.19. Số tự nhiên n chỉ chứa hai thừa số nguyên tố. Biết rằng n^2 có 21 ước số. Hỏi số n^3 có bao nhiêu ước số ?

Chuyên đề 5. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT. BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.
2. Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong các ước chung của các số đó.
3. Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau :

- Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
 - Chọn ra các thừa số nguyên tố *chung*.
 - Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ *nhỏ nhất* của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.
4. Để tìm ước chung của nhiều số, ta có thể tìm ƯCLN của các số đó rồi tìm ước của ƯCLN đó.
 5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.
 6. Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong các bội chung của các số đó.
 7. Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau :
 - Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
 - Chọn ra các thừa số nguyên tố *chung và riêng*.
 - Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ *lớn nhất* của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.
 8. Để tìm bội chung của nhiều số, ta có thể tìm BCNN của các số đó rồi nhân BCNN đó lần lượt với 0, 1, 2, 3,...

KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Khi cần kí hiệu gọn, ta có thể viết ƯCLN (a, b) là (a, b), viết BCNN (a, b) là [a, b].
2. Nếu $ab : c$ và $(b, c) = 1$ thì $a : c$.
3. Nếu $a : m$ và $a : n$ thì $a : \text{BCNN}(m, n)$. Đặc biệt, nếu $a : m$, $a : n$ và $(m, n) = 1$ thì $a : mn$.
4. Nếu $\text{ƯCLN}(a, b) = d$ thì $a = dm$, $b = dn$ với $(m, n) = 1$.
5. Nếu $\text{BCNN}(a, b) = c$ thì $c = am$, $c = bn$ với $(m, n) = 1$.
6. $\text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = a.b$.
7. Người ta chứng minh được rằng :
 Cho hai số tự nhiên a và b trong đó $a > b$. Nếu a chia hết cho b thì $\text{ƯCLN}(a, b) = b$. Nếu a không chia hết cho b thì $\text{ƯCLN}(a, b)$ bằng ƯCLN của b và số dư trong phép chia a cho b.
 Từ đó, ta có thuật toán Euclide tìm ƯCLN của hai số mà không cần phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố như sau :

- Chia số lớn cho số nhỏ.
- Nếu phép chia còn dư, lấy số chia đem chia cho số dư.
- Nếu phép chia này còn dư, lại lấy số chia mới chia cho số dư mới.
- Cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi được số dư bằng 0 thì số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm.

Chẳng hạn tìm ƯCLN (135, 105) bằng thuật toán Euclide như sau :

$$\begin{array}{r}
 135 \mid 105 \\
 30 \mid 15 \\
 0 \mid 2
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 135 \mid 105 \\
 30 \mid 15 \\
 3 \mid 1
 \end{array}$$

Số chia cuối cùng (là 15) là ƯCLN (135, 105).

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 5.1. Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho khi chia 364, 414, 539 cho n , ta được ba số dư bằng nhau.

Giải.

364, 414, 539 chia cho n có cùng số dư nên các hiệu của hai số trong ba số ấy chia hết cho n . Ta có :

$$539 - 414 : n, \text{ tức là } 125 : n,$$

$$539 - 364 : n, \text{ tức là } 175 : n,$$

$$414 - 364 : n, \text{ tức là } 50 : n.$$

Để n lớn nhất thì n là ƯCLN (125, 175, 50).

Phân tích ra thừa số nguyên tố :

$$125 = 5^3.$$

$$175 = 5^2 \cdot 7.$$

$$50 = 5^2 \cdot 2.$$

$$\text{ƯCLN}(125, 175, 50) = 5^2 = 25.$$

Vậy $n = 25$.

Ví dụ 5.2. Tìm số tự nhiên n nhỏ hơn 30 để các số $3n + 4$ và $5n + 1$ có ước chung khác 1.

Giải.

Gọi d là một ước chung của $3n + 4$ và $5n + 1$.

Ta có $3n + 4 \div d$ và $5n + 1 \div d$ nên $5(3n + 4) - 3(5n + 1) \div d$, tức là $17 \div d$.

Suy ra $d \in \{1; 17\}$.

Để $3n + 4$ và $5n + 1$ có ước chung khác 1, ta phải có $3n + 4 \div 17$ tức là $3n + 4 - 34 \div 17$ hay $3(n - 10) \div 17$.

Ta lại có $(3, 17) = 1$ nên $n - 10 \div 17$.

Do $n < 30$ nên $n = 10$ hoặc $n = 27$.

Ví dụ 5.3. Tổng của năm số tự nhiên bằng 156. Ước chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Giải.

Gọi năm số tự nhiên đã cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , ước chung lớn nhất của chúng là d . Ta có

$$a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, a_3 = dk_3, a_4 = dk_4, a_5 = dk_5$$

$$\text{nên} \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)$$

$$\text{do đó} \quad 156 = d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5).$$

Suy ra d là ước của 156.

Ta lại có $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 \geq 5$ nên $5d \leq 156$, suy ra $d \leq 31$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố: $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$.

Ước lớn nhất của 156 không vượt quá 31 là 26.

Giá trị lớn nhất của d là 26, xảy ra khi chẳng hạn $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 26$ và $a_5 = 52$.

Ví dụ 5.4. Có ba đèn tín hiệu, chúng phát sáng cùng một lúc vào 8 giờ sáng. Đèn thứ nhất cứ 4 phút phát sáng một lần, đèn thứ hai cứ 6 phút phát sáng một lần, đèn thứ ba cứ 7 phút phát sáng một lần. Thời gian đầu tiên để cả ba đèn cùng phát sáng sau 12 giờ trưa là lúc mấy giờ?

Giải.

Gọi thời gian ít nhất để sau đó, cả ba đèn lại cùng phát sáng là a (phút). Ta có a là BCNN (4, 6, 7).

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $4 = 2^2$, $6 = 2.3$, $7 = 7$ nên

$$\text{BCNN}(4, 6, 7) = 2^2.3.7 = 84.$$

Sau 84 phút, cả ba đèn cùng phát sáng. Chúng cùng phát sáng vào lúc 9 giờ 24 phút, 10 giờ 48 phút, 12 giờ 12 phút...

Thời gian đầu tiên sau 12 giờ trưa để cả ba đèn cùng phát sáng là lúc 12 giờ 12 phút.

Ví dụ 5.5. Điền các chữ số thích hợp vào dấu * để số $A = \overline{679***}$ chia hết cho tất cả các số 5, 6, 7, 9.

Giải.

Điều kiện để A chia hết cho tất cả các số 5, 6, 7, 9 là A chia hết cho BCNN (5, 6, 7, 9).

$$\text{BCNN}(5, 6, 7, 9) = 2.3^2.5.7 = 630.$$

Ta thấy $679\,999$ chia 630 được 1079 , dư 229

nên $679\,999 - 229 = 679\,770$ chia hết cho 630 ,

$679\,770 - 630 = 679\,140$ chia hết cho 630 .

Đáp số: 679 770 và 679 140.

Ví dụ 5.6. Tìm các số tự nhiên a và b ($a < b$) biết

$$\text{ƯCLN}(a, b) = 12, \text{BCNN}(a, b) = 240.$$

Giải.

Ta có $ab = \text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b) = 12 \cdot 240 = 2880$. (1)

$\text{ƯCLN}(a, b) = 12$ nên $a = 12m$, $b = 12n$ trong đó $(m, n) = 1$.

Suy ra $ab = 12m \cdot 12n = 144mn$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $144mn = 2880$ hay $mn = 20$.

Ta có $a < b$ nên $m < n$. Các số m, n nguyên tố cùng nhau và có tích bằng 20 nên

m	1	4
n	20	5

Suy ra

a	12	48
b	240	60

BÀI TẬP

- 5.1. Tìm ước chung của các số 1820, 3080, 4900 trong khoảng từ 40 đến 100.
- 5.2. Tìm ước chung lớn nhất của các số 121 212 và 181 818.
- 5.3. Tìm ước chung lớn nhất của các số sau bằng cách dùng thuật toán Euclide :
a) 11 111 và 1111 ; b) 342 và 266.
- 5.4. Tìm số tự nhiên a , biết rằng 296 chia cho a thì dư 16, còn 230 chia cho a thì dư 10.
- 5.5. Chứng minh rằng các cặp số sau nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n :
a) $2n + 1$ và $6n + 5$; b) $3n + 2$ và $5n + 3$.
- 5.6. Tìm số tự nhiên n để $3n + 1$ chia hết cho 7.
- 5.7. Tìm số tự nhiên n để $2n + 1$ và $7n + 2$ là hai số nguyên tố cùng nhau.
- 5.8. Tìm các số tự nhiên a và b ($a < b$) biết :
a) $a + b = 96$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 12$;
b) $a + b = 72$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 8$.
- 5.9. Tìm các số tự nhiên a và b nhỏ hơn 200, biết :
a) $a - b = 96$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 16$;
b) $a - b = 90$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$.
- 5.10. Tìm các số tự nhiên a và b ($a < b$) biết :
a) $ab = 448$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 4$;
b) $ab = 294$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 7$.
- 5.11. Tìm các số tự nhiên a và b , biết rằng $\text{ƯCLN}(a, b) = 10$ và $\text{BCNN}(a, b) = 120$.
- 5.12. Tìm số tự nhiên n , biết rằng trong ba số 6, 16, n , bất cứ số nào cũng là ước của tích hai số kia.
- 5.13. Hai anh Tuấn và Tú ở cùng một nhà và làm việc tại hai công ty khác nhau. Anh Tuấn cứ 10 ngày lại đi trực một lần, anh Tú cứ 15 ngày lại đi trực một lần. Hai người cùng trực vào ngày chủ nhật 1-1-2012. Hỏi trong năm 2012, hai anh cùng trực vào một ngày chủ nhật mấy lần?

- 5.14.** Có hai chiếc đồng hồ. Trong một ngày, chiếc thứ nhất chạy nhanh 10 phút, chiếc thứ hai chạy chậm 6 phút. Cả hai đồng hồ được lấy lại theo giờ chính xác. Hỏi sau ít nhất bao lâu, cả hai đồng hồ lại cùng chỉ giờ chính xác?
- 5.15.** Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, biết rằng chia nó cho 10 thì dư 3, chia nó cho 12 thì dư 5, chia nó cho 15 thì dư 8 và nó chia hết cho 19.
- 5.16.** Tìm các số tự nhiên a, b, c nhỏ nhất khác 0 sao cho $16a = 25b = 30c$.
- 5.17.** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất để khi chia cho 5, 8, 12 thì số dư theo thứ tự là 2, 6, 8.
- 5.18.** Điền chữ số thích hợp vào dấu * để số $\overline{456**}$ chia hết cho tất cả các số 4, 5, 6.
- 5.19.** Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 24.
- 5.20.** Tìm các số tự nhiên a và b ($a < b$), biết rằng :
- a) $\text{BCNN}(a, b) + \text{ƯCLN}(a, b) = 19$;
 - b) $\text{BCNN}(a, b) - \text{ƯCLN}(a, b) = 3$.

Chuyên đề 6. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ NGUYÊN**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

1. Tập hợp gồm các số nguyên âm, số 0 và các số nguyên dương gọi là tập hợp các số nguyên, và được kí hiệu là $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots \}.$$

2. Thứ tự trong tập hợp các số nguyên được xác định như sau : Khi biểu diễn trên trục số (nằm ngang), nếu điểm a nằm bên trái điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b.

$$\dots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 \dots$$

3. Để diễn đạt quy tắc so sánh hai số nguyên, quy tắc các phép tính số nguyên, người ta đưa ra khái niệm giá trị tuyệt đối (GTTĐ) của một số : Khoảng cách từ điểm a đến điểm 0 trên trục số là GTTĐ của số nguyên a, kí hiệu $|a|$.

Cần nhớ :

$$|a| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a = 0 \\ a & \text{nếu } a > 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Như vậy $|a| \geq a$. Dấu "=" xảy ra nếu $a \geq 0$.

4. Với khái niệm GTTĐ, ta có quy tắc so sánh hai số nguyên âm : Trong hai số nguyên âm, số nào có GTTĐ nhỏ hơn thì số đó lớn hơn.
5. Quy tắc cộng hai số nguyên :
- Nếu một trong hai số bằng 0 thì tổng bằng số kia.
 - Hai số nguyên đối nhau có tổng bằng 0.
 - Muốn cộng hai số nguyên cùng dấu, ta cộng hai GTTĐ với nhau, còn dấu là dấu chung.

– Muốn cộng hai số nguyên khác dấu không đối nhau, ta lấy GTTĐ lớn trừ GTTĐ nhỏ, rồi đặt trước kết quả tìm được dấu của số có GTTĐ lớn hơn.

6. Phép cộng các số nguyên có các tính chất :

- Giao hoán : $a + b = b + a$.
- Kết hợp : $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Cộng với số 0 : $a + 0 = 0 + a = a$.
- Cộng với số đối : $a + (-a) = 0$.

7. Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b, ta cộng a với số đối của b.

8. Quy tắc dấu ngoặc :

– Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "+" đằng trước, dấu các số hạng trong ngoặc vẫn giữ nguyên :

$$a + (b - c + d) = a + b - c + d.$$

– Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "-" đằng trước, ta phải đổi dấu tất cả các số hạng trong dấu ngoặc :

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

9. Quy tắc chuyển vế :

Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó.

10. Quy tắc nhân hai số nguyên :

- Nếu một trong hai thừa số bằng 0 thì tích bằng 0.
- Muốn nhân hai số nguyên cùng dấu, ta nhân GTTĐ của chúng, rồi đặt dấu "+" trước kết quả.
- Muốn nhân hai số nguyên khác dấu, ta nhân GTTĐ của chúng, rồi đặt dấu "-" trước kết quả.

11. Phép nhân các số nguyên có các tính chất :

- Giao hoán : $ab = ba$.
- Kết hợp : $(ab)c = a(bc)$.
- Nhân với số 1 : $a.1 = 1.a = a$.
- Phân phối của phép nhân đối với phép cộng : $a(b + c) = ab + ac$.

12. Cần nhớ quy tắc về dấu khi nhân nhiều thừa số khác 0 :

- Nếu số thừa số âm là số chẵn thì tích là số dương.
- Nếu số thừa số âm là số lẻ thì tích là số âm.

KIẾN THỨC NÂNG CAO

1. GTTĐ của một tổng nhỏ hơn hoặc bằng tổng các GTTĐ : $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Xảy ra đẳng thức nếu $ab \geq 0$.

2. GTTĐ của một hiệu lớn hơn hoặc bằng hiệu các GTTĐ :

Với $|a| \geq |b|$ thì $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Xảy ra đẳng thức nếu $ab \geq 0$.

3. GTTĐ của một tích bằng tích các GTTĐ : $|ab| = |a| \cdot |b|$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 6.1. Tìm số tự nhiên a , biết rằng có 31 số nguyên nằm giữa a và $-a$.

Giải.

Trong 31 số nguyên nằm giữa $-a$ và a , ngoài số 0 có 15 số nguyên dương (từ 1 đến 15) và 15 số nguyên âm (từ -1 đến -15). Vậy $a = 16$.

Ví dụ 6.2. Cho bảng vuông 3×3 như trên hình 7. Điền các số 2, -2 , 3, -3 , 4, -4 vào các ô còn lại sao cho tổng ba số ở mỗi hàng, ở mỗi cột, ở mỗi đường chéo đều bằng nhau.

Giải.

Các số được điền như trên hình 8.

Lưu ý. Để điền các số nguyên từ -4 đến 4 vào bảng vuông 3×3 thỏa mãn yêu cầu của đề bài, ta có thể làm như sau :

- Viết chín số nguyên từ -4 đến 4 và chia thành ba nhóm : $(-4, -3, -2)$, $(-1, 0, 1)$, $(2, 3, 4)$.

-1		
	0	
		1

Hình 7

-1	4	-3
-2	0	2
3	-4	1

Hình 8

- Viết ba số ở nhóm giữa (là $-1, 0, 1$) vào một đường chéo.
- Viết số ở giữa của nhóm cuối (là 3) vào một trong hai góc còn lại.
- Điền tiếp các số còn lại vào các ô vuông.

Ví dụ 6.3. Tìm hai số nguyên mà hiệu của chúng bằng ba lần tổng của chúng.

Giải.

Gọi hai số nguyên phải tìm là a và b . Ta có :

$$\begin{aligned} 3(a + b) &= a - b \\ \Leftrightarrow 3a + 3b &= a - b \\ \Leftrightarrow 3a - a &= -3b - b \\ \Leftrightarrow 2a &= -4b \\ \Leftrightarrow a &= -2b. \end{aligned}$$

Có vô số cặp số nguyên thỏa mãn đề bài là $(a ; b)$ với $b \in \mathbf{Z}$ và $a = -2b$, chẳng hạn với $b = 1$ thì $a = -2$.

Ví dụ 6.4. Tìm hai số nguyên a và b , biết tổng của chúng bằng ba lần hiệu $a - b$, còn thương $a : b$ và hiệu $a - b$ là hai số đối nhau.

Giải.

Ta có :

$$a + b = 3(a - b) \quad (1)$$

$$\text{và} \quad a - b = -a : b. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a + b = 3(a - b) &\Leftrightarrow a + b = 3a - 3b \\ &\Leftrightarrow 2a = 4b \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow a : b = 2. \end{aligned}$$

Thay $a : b = 2$ vào (2) được $a - b = -2$.

Thay $a - b = -2$ vào (1) được $a + b = -6$.

Suy ra $2a = -8$, tức là $a = -4$.

Do đó $b = -6 - a = -6 - (-4) = -2$.

Hai số phải tìm là $a = -4$ và $b = -2$.

Ví dụ 6.5. Tính giá trị của biểu thức

$$A = 1 - 2 - 3 - 4 + 5 - 6 - 7 - 8 + 9 - 10 - 11 - 12 + \dots + 97 - 98 - 99 - 100.$$

Giải.

Viết A thành tổng của 25 nhóm :

$$\begin{aligned}A &= (1 - 2 - 3 - 4) + (5 - 6 - 7 - 8) + (9 - 10 - 11 - 12) + \dots \\&\quad + (97 - 98 - 99 - 100). \\&= -8 - 16 - 24 - \dots - 200 \\&= -8(1 + 2 + 3 + \dots + 25) \\&= -8(1 + 25).25 : 2 = -2600.\end{aligned}$$

Ví dụ 6.6. Các số nguyên x và y thuộc tập hợp các số nguyên từ -35 đến 28.

$$A = \{-35 ; -34 ; \dots ; 27 ; 28\}.$$

Tìm :

- a) Giá trị lớn nhất của hiệu $x - y$;
- b) Giá trị nhỏ nhất của hiệu $x - y$;
- c) Giá trị lớn nhất của tích xy với $x \neq y$;
- d) Giá trị nhỏ nhất của tích xy .

Giải.

- a) Hiệu $x - y$ lớn nhất khi x lớn nhất và y nhỏ nhất.

Khi đó $x - y = 28 - (-35) = 63$.

- b) Hiệu $x - y$ nhỏ nhất khi x nhỏ nhất và y lớn nhất.

Khi đó $x - y = -35 - 28 = -63$.

- c) Tích xy lớn nhất khi x và y là hai số cùng dấu có GTTĐ lớn nhất ($x \neq y$).

Khi đó $xy = (-35)(-34) = 1190$.

- d) Tích xy nhỏ nhất khi x và y là hai số khác dấu có GTTĐ lớn nhất.

Khi đó $xy = -35.28 = -980$.

Ví dụ 6.7.

- a) Tìm các cặp số nguyên (a ; b) sao cho $|a| + |b| = 3$.
- b) Có bao nhiêu cặp số nguyên (a ; b) sao cho $|a| + |b| = n$ với $n \in \mathbb{N}^*$?

Giải.

a) Do $|a| \geq 0$, $|b| \geq 0$ nên từ $|a| + |b| = 3$ ta có

$ a $	0	1	2	3	Suy ra	a	0	1	-1	2	-2	3	-3
$ b $	3	2	1	0		b	± 3	± 2	± 2	± 1	± 1	0	0

Có 12 cặp số $(a; b)$.

b) * Xét $|a|$ bằng 1, 2, 3, ..., $n - 1$.

Với mỗi $|a|$ có hai giá trị của a là $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm (n - 1)$.

Với mỗi giá trị trên của a , có hai giá trị của b là $\pm (n - 1), \pm (n - 2), \pm (n - 3), \dots, \pm 1$.

Có $(n - 1) \cdot 2 \cdot 2 = 4n - 4$ cặp số $(a; b)$.

* Xét $|a| = 0$ và $|a| = n$, có bốn cặp số $(a; b)$ là $(0; n), (0; -n); (n; 0), (-n; 0)$.

* Vậy tất cả có $4n - 4 + 4 = 4n$ cặp số phải tìm.

BÀI TẬP

6.1. Tính tổng các số nguyên liên tiếp từ -15 đến 60.

6.2. Tìm số nguyên n , biết :

a) $15 + 14 + 13 + 12 + \dots + n = 0$;

b) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \dots + 35 = 0$.

6.3. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn cả ba điều kiện sau :

$$a + b = 5, b + c = 16, c + a = -19.$$

6.4. Không thực hiện phép tính, hãy tìm các cặp số bằng nhau trong các số sau :

$$a = 140 - (321 - 450) ;$$

$$b = 140 - 450 - 321 ;$$

$$c = 140 - 450 + 321 ;$$

$$d = 140 + 450 - 321.$$

6.5. Tính giá trị của biểu thức :

$$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots$$

$$+ 97 + 98 - 99 - 100.$$

6.6. Cho dãy số viết theo quy luật :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$$

a) Tính tổng 50 số đầu của dãy.

b) Tính tổng 35 số đầu của dãy.

6.7. Bổ sung thêm điều kiện để các khẳng định sau là đúng với mọi số nguyên a, b :

a) $|a| = |b| \Rightarrow a = b$; b) $a > b \Rightarrow |a| > |b|$; c) $|a + b| = |a| + |b|$.

6.8. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối trong các biểu thức sau :

a) $|a| + a$; b) $|a| - a$; c) $|a|.a$.

6.9. Tìm các số nguyên x và y sao cho $x = 6y$ và $|x| - |y| = 60$.

6.10. Tìm cặp số nguyên $(a ; b)$ sao cho $|a| + |b| < 2$.

6.11. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $5x^2 - 1$; b) $3(x + 1)^2 - 2$; c) $|x + 5| - 3$.

6.12. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức :

a) $7 - 3x^2$; b) $8 - (x + 2)^2$; c) $10 - |x + 2|$.

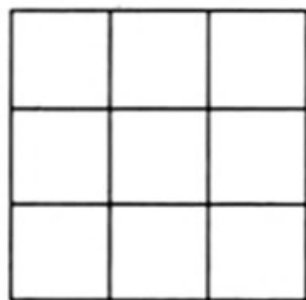
6.13. Tìm các số nguyên x và y sao cho

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - y)^2 = 2.$$

6.14. Tìm số nguyên x biết $(x^2 - 8)(x^2 - 15) < 0$.

6.15. Cho 100 số $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, mỗi số lấy giá trị 1 hoặc -1 . Chứng minh rằng trong 100 số đó, tồn tại một hoặc nhiều số mà tổng của chúng bằng tổng các số còn lại.

6.16. Cho một bảng vuông 3×3 gồm 9 ô vuông (h.9). Người ta điền vào mỗi ô vuông một trong các số $-1, 0, 1$. Xét tám tổng gồm ba tổng theo hàng ngang, ba tổng theo cột dọc, hai tổng theo đường chéo.



Hình 9

a) Viết tập hợp các giá trị mà mỗi tổng có thể nhận được.

b) Chứng minh rằng trong tám tổng trên, tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Chuyên đề 7. TÍNH CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa : Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$. Nếu có số nguyên k sao cho $a = bk$ thì ta nói a chia hết cho b . Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a .
2. Các tính chất chia hết cần nhớ :
 - Nếu $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$.
 - Nếu $a : b$ thì $am : b$ ($m \in \mathbf{Z}$).
 - Nếu $a : c$ và $b : c$ thì $a + b : c$.
 - Nếu $a : c$ và $b \nmid c$ thì $a + b \nmid c$.
 - Nếu $ab : c$ và $(b, c) = 1$ thì $a : c$.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 7.1. Cho dãy số 2, 4, 6, 8, ..., 1000. Sau khi thêm các dấu "+" hoặc "-" vào giữa các số trên một cách tùy ý rồi thực hiện phép tính, bạn Ánh tính được kết quả là 30, bạn Cường tính được kết quả là -18. Bạn nào đã tính sai ?

Giải.

Tổng $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 1000 = (2 + 1000).500 : 2 = 250\,500$, là số chia hết cho 4.

Khi thay a bởi $-a$ thì A giảm đi $2a$, mà a là số chẵn nên A giảm đi một bội của 4.

Do đó kết quả cuối cùng phải là một bội của 4. Các số 30 và -18 đều không là bội của 4. Vậy cả hai bạn đều tính sai.

Ví dụ 7.2. Tìm các số nguyên x và y sao cho $(x - 2)(5y + 1) = 12$.

Giải.

Các số $x - 2$ và $5y + 1$ là ước của 12. Số 12 có các ước là $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Chú ý rằng $5y + 1$ là số chia cho 5 dư 1. Do đó

$5y + 1$	1	6	-4
$5y$	0	5	-5
y	0	1	-1
$x - 2$	12	2	-3
x	14	4	-1

Đáp số: $(x ; y)$ bằng $(14 ; 0)$, $(4 ; 1)$; $(-1 ; -1)$.

Ví dụ 7.3. Tìm số nguyên n sao cho $n + 5$ chia hết cho $2n - 1$.

Giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có} \quad & n + 5 : 2n - 1 \\
 \Rightarrow & 2n + 10 : 2n - 1 \\
 \Rightarrow & 2n - 1 + 11 : 2n - 1 \\
 \Rightarrow & 11 : 2n - 1.
 \end{aligned}$$

Do đó

$2n - 1$	1	-1	11	-11
$2n$	2	0	12	-10
n	1	0	6	-5

Thử lại, ta chọn cả bốn giá trị trên.

Lưu ý. Sở dĩ phải thử lại vì từ $n + 5 : 2n - 1$ ta suy ra $2(n + 5) : 2n - 1$, chứ không có điều ngược lại.

Ví dụ 7.4. Tìm hai số nguyên sao cho tổng của chúng và tích của chúng là hai số đối nhau.

Giải.

Gọi hai số nguyên phải tìm là a và b . Ta có

$$ab = -(a + b) \Leftrightarrow ab + a = -b \Leftrightarrow a(b + 1) = -b.$$

Suy ra $b \vdots b + 1$. Do đó $b + 1 - 1 \vdots b + 1$ tức là $1 \vdots b + 1$. Ta có

$b + 1$	1	-1
b	0	-2

Với $b = 0$ thì $a = 0$.

Với $b = -2$ thì $a = -2$.

Đáp số: Hai số nguyên phải tìm là $(0 ; 0)$, $(-2 ; -2)$.

Ví dụ 7.5. Để kiểm tra một số A có chia hết cho 7 hay không, ta có thể lấy các chữ số của A (kể từ hàng đơn vị) nhân tương ứng với 1, 3, 2, -1, -3, -2, và cứ tiếp tục như vậy. Nếu tổng của các tích trên chia hết cho 7 thì A chia hết cho 7. Nếu tổng các tích trên không chia hết cho 7 thì A không chia hết cho 7.

Bằng cách trên, hãy kiểm tra xem các số sau có chia hết cho 7 hay không :

a) 289 275 ;

b) 619 220 ;

c) 5102.

Giải.

a) Số 289 275 có $1.5 + 3.7 + 2.2 - 1.9 - 3.8 - 2.2 = 30 - 37 = -7$, chia hết cho 7.

Vậy $289275 \vdots 7$.

b) Số 619 220 có $1.0 + 3.2 + 2.2 - 1.9 - 3.1 - 2.6 = 10 - 24 = -14$, chia hết cho 7.

Vậy $619220 \vdots 7$.

c) Số 5102 có $1.2 + 3.0 + 2.1 - 1.5 = 4 - 5 = -1$, không chia hết cho 7.

Vậy 5102 không chia hết cho 7.

Lưu ý. Ta có thể chứng minh dấu hiệu trên, chẳng hạn đối với số $\overline{abcdeg}$ như sau :

$$\begin{aligned}\overline{abcdeg} &= 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100d + 10e + g \\ &= 100\,002a - 2a + 10\,003b - 3b + 1001c - c + 98d + 2d + 7e + 3e + g \\ &= (100\,002a + 10\,003b + 1001c + 98d + 7e) - 2a - 3b - c + 2d + 3e + g.\end{aligned}$$

Biểu thức trong dấu ngoặc chia hết cho 7. Do đó

- Nếu $g + 3e + 2d - c - 3b - 2a \vdots 7$ thì $\overline{abcdeg} \vdots 7$.

- Nếu $g + 3e + 2d - c - 3b - 2a \not\vdots 7$ thì $\overline{abcdeg} \not\vdots 7$.

BÀI TẬP

7.1. Tìm các số nguyên x và y , biết rằng :

a) $(x - 2)(2y + 1) = 8$;

b) $(8 - x)(4y + 1) = 20$.

7.2. Cho biểu thức

$$A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots$$

$$+ 197 + 198 - 199 - 200.$$

A chia hết cho các số nào trong các số 2, 3, 4, 5, 9 ?

7.3. Cho biểu thức :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 17 + 19 + 21.$$

Thay một số dấu "+" bởi dấu "-". Hỏi giá trị của biểu thức mới :

a) Có thể bằng -31 được không ?

b) Có thể bằng -30 được không ?

7.4. Có tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn tất cả các điều kiện sau hay không?

$$abc + a = -625,$$

$$abc + b = -633,$$

$$abc + c = -597.$$

7.5. Tìm số nguyên n sao cho :

a) $n + 2$ chia hết cho $n - 1$;

b) $n - 7$ chia hết cho $2n + 3$;

c) $n^2 - 2$ chia hết cho $n + 3$.

7.6. Tìm cặp số nguyên $(x ; y)$ sao cho :

a) $xy = x + y$;

b) $xy = x - y$;

c) $x(y + 2) + y = 1$.

Chuyên đề 8. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN SỐ. RÚT GỌN PHÂN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số có dạng $\frac{a}{b}$ với a và b là những số nguyên, $b \neq 0$ gọi là phân số.
2. Hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ gọi là bằng nhau nếu $ad = bc$.
3. Nếu ta nhân cả tử và mẫu của một phân số với cùng một số nguyên khác 0 thì ta được một phân số bằng phân số đã cho

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \text{ với } m \in \mathbf{Z} \text{ và } m \neq 0.$$

4. Nếu ta chia cả tử và mẫu của một phân số cho cùng một ước chung của chúng thì ta được một phân số bằng phân số đã cho.
5. Mỗi phân số có vô số phân số bằng nó. Các phân số bằng nhau là các cách viết khác nhau của cùng một số mà người ta gọi là các số hữu tỉ.
6. Muốn rút gọn một phân số, ta chia cả tử và mẫu của phân số đó cho cùng một ước chung (khác 1 và -1) của chúng.
7. Phân số tối giản là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1 .

$$\frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản } \Leftrightarrow \text{ƯCLN}(|a|, |b|) = 1.$$

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 8.1. Quan sát dãy phân số sau để viết tiếp một phân số nữa theo quy luật của dãy :

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6},$$

Giải.

Viết dãy phân số như sau :

$$\frac{6}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}.$$

Phân số tiếp theo của dãy là $\frac{1}{12}$.

Ví dụ 8.2. Tìm số tự nhiên n để cả ba phân số sau đều là số nguyên :

$$\frac{15}{n}, \frac{12}{n+2}, \frac{6}{2n-5}.$$

Giải.

Để $\frac{6}{2n-5}$ là số nguyên thì $2n-5$ phải là ước lẻ của 6. Do đó

$2n-5$	1	-1	3	-3
$2n$	6	4	8	2
n	3	2	4	1

Để $\frac{15}{n}$ là số nguyên, ta loại $n=2$ và $n=4$.

Để $\frac{12}{n+2}$ là số nguyên, ta loại $n=3$.

Vậy $n=1$. Khi đó ba phân số bằng 15, 4, -2.

Ví dụ 8.3. Cho phân số $\frac{1+2+3+\dots+20}{6+7+8+\dots+36}$.

Hãy xóa một số hạng ở tử và một số hạng ở mẫu của phân số trên để giá trị của phân số đó không đổi.

Giải.

$$\frac{1+2+\dots+20}{6+7+\dots+36} = \frac{21 \cdot 20 : 2}{42 \cdot 31 : 2} = \frac{10}{31}.$$

Nếu xóa số 10 ở tử và xóa số 31 ở mẫu thì giá trị của phân số mới bằng

$$\frac{10k-10}{31k-31} = \frac{10(k-1)}{31(k-1)} = \frac{10}{31} \text{ (do } k-1 \neq 0 \text{)}.$$

Phân số mới vẫn bằng phân số đã cho.

Ví dụ 8.4. Tìm các số tự nhiên a và b , biết rằng $\frac{a}{b} = \frac{132}{143}$ và BCNN $(a, b) = 1092$.

Giải.

$$\frac{a}{b} = \frac{132}{143} = \frac{12}{13} \text{ nên } a = 12k \text{ và } b = 13k \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ta có BCNN } (a, b) = \text{BCNN } (12k, 13k) = 12.13k. \quad (1)$$

$$\text{Theo đề bài, BCNN } (a, b) = 1092. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $12.13k = 1092$ nên $k = 7$.

Khi đó $a = 12.7 = 84$, $b = 13.7 = 91$.

BÀI TẬP

8.1. Tìm số tự nhiên x , biết rằng :

$$\text{a) } \frac{7}{x} = \frac{x}{28};$$

$$\text{b) } \frac{10+x}{17+x} = \frac{3}{4};$$

$$\text{c) } \frac{40+x}{77-x} = \frac{6}{7}.$$

8.2. Tìm các số tự nhiên a, b , biết $a^3 + b^3 = 1216$ và phân số $\frac{a}{b}$ rút gọn được thành $\frac{3}{5}$.

8.3. Viết các phân số tối giản $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $ab = 100$.

8.4. Rút gọn các phân số :

$$\text{a) } \frac{10.11 + 50.55 + 70.77}{11.12 + 55.60 + 77.84};$$

$$\text{b) } \frac{1.3.5.7. \dots .49}{26.27.28.29. \dots .50}.$$

8.5. Tìm số nguyên n sao cho :

$$\text{a) } \frac{n+3}{n-2} \text{ là số nguyên âm ;}$$

$$\text{b) } \frac{n+7}{3n-1} \text{ là số nguyên ;}$$

$$\text{c) } \frac{3n+2}{4n-5} \text{ là số tự nhiên.}$$

8.6. Chứng minh rằng $\frac{n-5}{3n-14}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

8.7. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được.

8.8. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là các phân số tối giản :

$$\frac{n+7}{3}, \frac{n+8}{4}, \frac{n+9}{5}, \frac{n+10}{6}, \frac{n+11}{7}.$$

8.9. Tìm các số tự nhiên a và b , biết rằng $\frac{a}{b} = \frac{49}{56}$ và ƯCLN $(a, b) = 12$.

8.10. Tìm các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{14}, \frac{b}{c} = \frac{21}{28}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}.$$

Chuyên đề 9. SO SÁNH PHÂN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Muốn quy đồng mẫu nhiều phân số có mẫu dương, ta làm như sau :
 - Tìm một bội chung của các mẫu (thường là BCNN) để làm mẫu chung.
 - Tìm thừa số phụ của mỗi mẫu (bằng cách chia mẫu chung cho từng mẫu).
 - Nhân tử và mẫu của mỗi phân số với thừa số phụ tương ứng.
- Trong hai phân số có cùng một mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.
- Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu dương rồi so sánh các tử với nhau : phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

KIẾN THỨC NÂNG CAO

- Trong hai phân số có cùng một tử, tử và mẫu đều dương, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn.

2. Nếu cộng cả tử và mẫu của một phân số nhỏ hơn 1, tử và mẫu đều dương, với cùng một số nguyên dương thì giá trị của phân số đó tăng thêm.

Xem chứng minh ở Ví dụ 9.2.

3. Với kiến thức về trừ phân số, ta có khái niệm phần bù đến đơn vị của một phân số : Cho phân số $\frac{a}{b}$ nhỏ hơn 1, ta gọi *phần bù đến đơn vị* của phân số $\frac{a}{b}$ là hiệu $1 - \frac{a}{b}$, tức là $\frac{b-a}{b}$.

Trong hai phân số có phần bù đến đơn vị khác nhau, phân số nào có phần bù nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 9.1. a) Chứng minh rằng trong hai phân số có cùng một tử, tử và mẫu đều dương, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn.

b) Áp dụng tính chất trên để so sánh các phân số :

$$\frac{10}{11}, \frac{12}{13} \text{ và } \frac{15}{16}; \quad \frac{n+1}{n+5} \text{ và } \frac{n+2}{n+3} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Giải.

a) So sánh hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{a}{c}$ với $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ và $b < c$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad \frac{a}{c} = \frac{ab}{bc}.$$

Do $b < c$ và $a > 0$ nên $ab < ac$.

$$\text{Suy ra } \frac{ac}{bc} > \frac{ab}{bc}, \text{ tức là } \frac{a}{b} > \frac{a}{c}.$$

$$\text{b). Quy đồng tử: } \frac{10}{11} = \frac{60}{66}, \frac{12}{13} = \frac{60}{65}, \frac{15}{16} = \frac{60}{64}.$$

$$\text{Ta có } \frac{60}{66} < \frac{60}{65} < \frac{60}{64} \text{ nên } \frac{10}{11} < \frac{12}{13} < \frac{15}{16}.$$

* Để so sánh $\frac{n+1}{n+5}$ và $\frac{n+2}{n+3}$, ta dùng phân số trung gian $\frac{n+1}{n+3}$. Ta có

$$\frac{n+1}{n+5} < \frac{n+1}{n+3} \text{ (so sánh hai phân số cùng tử)}$$

$$\frac{n+1}{n+3} < \frac{n+2}{n+3} \text{ (so sánh hai phân số cùng mẫu).}$$

$$\text{Vậy } \frac{n+1}{n+5} < \frac{n+2}{n+3}.$$

Ví dụ 9.2. Chứng minh rằng nếu cộng cả tử và mẫu của một phân số nhỏ hơn 1, tử và mẫu đều dương, với cùng một số nguyên dương thì giá trị của phân số đó tăng thêm.

Giải.

Gọi phân số đã cho là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbf{N}^*$ và $a < b$.

Cộng số nguyên dương n vào tử và mẫu, ta được $\frac{a+n}{b+n}$.

Cần chứng minh $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$.

Quy đồng mẫu của hai phân số trên :

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+n)}{b(b+n)} = \frac{ab+an}{b(b+n)}. \quad (1)$$

$$\frac{a+n}{b+n} = \frac{(a+n)b}{(b+n)b} = \frac{ab+bn}{b(b+n)}. \quad (2)$$

$$\text{Do } a < b \text{ và } n > 0 \text{ nên } an < bn. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n}$.

Ví dụ 9.3. So sánh hai phân số $A = \frac{13579}{34567}$ và $B = \frac{13580}{34569}$.

Giải.

Đặt $13579 = a$ và $34567 = b$ thì $A = \frac{a}{b}$ và $B = \frac{a+1}{b+2}$.

$$A = \frac{a}{b} = \frac{a(b+2)}{b(b+2)} = \frac{ab+2a}{b(b+2)}. \quad (1)$$

$$B = \frac{a+1}{b+2} = \frac{b(a+1)}{b(b+2)} = \frac{ab+b}{b(b+2)}. \quad (2)$$

$$\text{Ta thấy } 13579.2 < 34567, \text{ tức là } 2a < b. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $A < B$.

Ví dụ 9.4. So sánh hai phân số $A = \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1}$ và $B = \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1}$.

Giải.

Cách 1. B là phân số nhỏ hơn 1. Nếu cộng cùng một số nguyên dương vào tử và mẫu của B thì giá trị của B tăng thêm. Do đó

$$B = \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1} < \frac{10^9 + 1 + 9}{10^{10} + 1 + 9} = \frac{10^9 + 10}{10^{10} + 10} = \frac{10(10^8 + 1)}{10(10^9 + 1)} = \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1} = A.$$

Vậy $B < A$.

Cách 2. (sau khi học phép nhân phân số)

$$10A = \frac{10(10^8 + 1)}{10^9 + 1} = \frac{10^9 + 10}{10^9 + 1} = 1 + \frac{9}{10^9 + 1}.$$

$$10B = \frac{10(10^9 + 1)}{10^{10} + 1} = \frac{10^{10} + 10}{10^{10} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{10} + 1}.$$

Ta thấy $\frac{9}{10^9 + 1} > \frac{9}{10^{10} + 1}$ (so sánh hai phân số cùng tử) nên $10A > 10B$. Do đó $A > B$.

BÀI TẬP

9.1. Xếp các phân số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $\frac{10}{19}, \frac{12}{23}, \frac{15}{17}, \frac{20}{29}, \frac{60}{71}$.

9.2. Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ hơn 1 có tích ab bằng 80.

9.3. Tìm số tự nhiên x sao cho :

a) $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4}$;

b) $\frac{5}{8} < \frac{4}{x} < \frac{5}{7}$.

9.4. So sánh các phân số sau mà không quy đồng mẫu hoặc tử :

a) $\frac{7}{15}$ và $\frac{20}{39}$;

b) $\frac{14}{41}$ và $\frac{17}{54}$.

9.5. So sánh các phân số sau (n là số tự nhiên) :

a) $\frac{n}{2n+3}$ và $\frac{n+2}{2n+1}$;

b) $\frac{n}{3n+1}$ và $\frac{2n}{6n+1}$.

9.6. So sánh các phân số :

a) $A = \frac{35420}{35423}$ và $B = \frac{25343}{25345}$;

b) $C = \frac{5^{12} + 1}{5^{13} + 1}$ và $D = \frac{5^{11} + 1}{5^{12} + 1}$.

9.7. Cho các số tự nhiên x và y thỏa mãn $1 \leq y < x \leq 30$.

a) Tìm giá trị lớn nhất của phân số $\frac{x+y}{x-y}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của phân số $\frac{xy}{x-y}$.

Chuyên đề 10. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Muốn cộng hai phân số cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu. Muốn cộng hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số có cùng một mẫu, rồi cộng các tử và giữ nguyên mẫu chung.
2. Hai phân số gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.
3. Muốn trừ một phân số cho một phân số, ta cộng số bị trừ với số đối của số trừ.
4. Muốn nhân hai phân số, ta nhân các tử với nhau và nhân các mẫu với nhau.
5. Hai số gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.
6. Muốn chia một phân số cho một phân số, ta nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia.

KIẾN THỨC NÂNG CAO

Xem dãy các phân số viết theo quy luật ở Chuyên đề 15.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 10.1. Tìm các số tự nhiên a và b sao cho

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{3} = \frac{13}{15}.$$

Giải.

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{3} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow \frac{3a + 5b}{15} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow 3a + 5b = 13.$$

Nếu $b = 0$ thì $3a = 13$, loại.

Nếu $b = 1$ thì $3a = 8$, loại.

Nếu $b = 2$ thì $3a = 3$ nên $a = 1$.

Nếu $b \geq 3$ thì $3a + 5b \geq 15$, loại.

Vậy $a = 1$ và $b = 2$.

Ví dụ 10.2. a) Cho trước phân số $\frac{a}{b}$ khác -1 . Tìm phân số $\frac{c}{d}$ sao cho

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

b) Tìm phân số $\frac{c}{d}$ có tính chất trên, nếu phân số $\frac{a}{b}$ bằng $\frac{1}{3}$, bằng $\frac{3}{5}$.

Giải.

$$a) \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad - bc}{bd} = \frac{ac}{bd} \Leftrightarrow ad - bc = ac$$

$$\Leftrightarrow ad = ac + bc \Leftrightarrow ad = c(a + b) \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{a + b}.$$

b)

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	Kiểm tra $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8}$

Ví dụ 10.3. Tính $A = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}$.

Giải.

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{12}\right) + \left(1 - \frac{1}{20}\right) + \left(1 - \frac{1}{30}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{42}\right) + \left(1 - \frac{1}{56}\right) + \left(1 - \frac{1}{72}\right) + \left(1 - \frac{1}{90}\right) \\ &= 9 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}\right) \\ &= 9 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}\right) \\ &= 9 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) \\ &= 9 - \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 9 - \frac{9}{10} = \frac{81}{10}. \end{aligned}$$

Ví dụ 10.4. Cho $A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \dots \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{45}{48}$, $B = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdot \dots \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{46}{49}$.

a) So sánh A và B.

b) Chứng minh rằng $A < \frac{1}{133}$.

Giải.

a) Khi cộng tử và mẫu của một phân số nhỏ hơn 1 (tử và mẫu đều dương) với 1 thì giá trị của phân số tăng thêm. Do đó

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{5}, \frac{3}{6} < \frac{4}{7}, \frac{5}{8} < \frac{6}{9}, \dots$$

Suy ra $A < B$.

$$\begin{aligned} \text{b) } A \cdot B &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 43 \cdot 45}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 46 \cdot 48} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 44 \cdot 46}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 47 \cdot 49} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot (5 \cdot \dots \cdot 43 \cdot 45)}{(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 46) \cdot 48} \cdot \frac{2(4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 44 \cdot 46)}{(5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 45) \cdot 47 \cdot 49} \end{aligned}$$

$$= \frac{1.3}{48} \cdot \frac{2}{47.49} = \frac{1}{8.47.49} < \frac{1}{361.49} = \left(\frac{1}{133}\right)^2.$$

Ta lại có $A < B$ (câu a) nên $A \cdot A < A \cdot B < \left(\frac{1}{133}\right)^2$. Vậy $A < \frac{1}{133}$.

Ví dụ 10.5. Tìm phân số $\frac{a}{b}$ lớn nhất sao cho khi chia mỗi phân số

$\frac{12}{35}, \frac{8}{21}, \frac{52}{91}$ cho $\frac{a}{b}$, ta đều được các số tự nhiên.

Giải.

Phân số $\frac{a}{b}$ phải là phân số dương, giả sử $a > 0, b > 0$ và $(a, b) = 1$.

Rút gọn $\frac{52}{91} = \frac{4}{7}$. Theo đề bài,

$$\frac{12}{35} : \frac{a}{b} = \frac{12b}{35a} \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$\frac{8}{21} : \frac{a}{b} = \frac{8b}{21a} \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

$$\frac{4}{7} : \frac{a}{b} = \frac{4b}{7a} \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Từ (1) suy ra $12b : 35$, mà $(12, 35) = 1$ nên $b : 35$.

Từ (2) suy ra $8b : 21$, mà $(8, 21) = 1$ nên $b : 21$.

Từ (3) suy ra $4b : 7$, mà $(4, 7) = 1$ nên $b : 7$.

Do đó $b \in BC(35, 21, 7)$.

Từ (1) suy ra $12b : a$, mà $(a, b) = 1$ nên $12 : a$.

Từ (2) suy ra $8b : a$, mà $(a, b) = 1$ nên $8 : a$.

Từ (3) suy ra $4b : a$, mà $(a, b) = 1$ nên $4 : a$.

Do đó $a \in \text{ƯC}(12, 8, 4)$.

Để $\frac{a}{b}$ lớn nhất, ta chọn $a = \text{ƯCLN}(12, 8, 4) = 4$ và $b = \text{BCNN}(35, 21, 7) = 105$.

Vậy $\frac{a}{b} = \frac{4}{105}$.

Ví dụ 10.6. Tìm số nguyên n để phân số $\frac{20n + 13}{4n + 3}$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải.

$$A = \frac{20n + 13}{4n + 3} = \frac{20n + 15 - 2}{4n + 3} = \frac{5(4n + 3)}{4n + 3} - \frac{2}{4n + 3} = 5 - \frac{2}{4n + 3}.$$

A nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{2}{4n + 3}$ lớn nhất $\Leftrightarrow 4n + 3$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

Nếu $4n + 3 = 1$ thì n không là số nguyên.

Nếu $4n + 3 = 2$ thì n không là số nguyên.

Nếu $4n + 3 = 3$ thì $n = 0$.

Vậy $\frac{20n + 13}{4n + 3}$ nhỏ nhất tại $n = 0$, khi đó phân số bằng $\frac{13}{3}$.

Ví dụ 10.7. Tìm các số nguyên dương x và y ($x < y$) sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

Giải.

Do $x < y$ nên $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Ta có $\frac{1}{8} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$ nên $x < 16$.

Ta lại có $\frac{1}{x} < \frac{1}{8}$ nên $x > 8$.

Vậy $x \in \{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

– Với $x = 9$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$ nên $y = 72$.

– Với $x = 10$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$ nên $y = 40$.

– Với $x = 11$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{11} = \frac{3}{88}$, loại.

– Với $x = 12$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$ nên $y = 24$.

– Với $x = 13$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{13} = \frac{5}{104}$, loại.

– Với $x = 14$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{14} = \frac{3}{56}$, loại.

– Với $x = 15$ thì $\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{15} = \frac{7}{120}$, loại.

Vậy

x	9	10	12
y	72	40	24

Ví dụ 10.8. Các phân số sau được viết theo một quy luật :

$$3, 4\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4}, 10\frac{1}{8}, 15\frac{3}{16}.$$

Hãy viết tiếp một phân số nữa theo quy luật đó.

Giải.

Ta viết các phân số trên như sau :

$$\frac{3}{1}, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}, \frac{243}{16}$$

tức là $\frac{3}{1}, \frac{3^2}{2}, \frac{3^3}{2^2}, \frac{3^4}{2^3}, \frac{3^5}{2^4}.$

Phân số tiếp theo là $\frac{3^6}{2^5}$ tức là $\frac{729}{32} = 22\frac{25}{32}.$

Ví dụ 10.9. Thay a và b bởi các chữ số thích hợp $\overline{0, ab} \cdot (a + b) = 0,36.$

Giải.

$$\overline{0, ab} \cdot (a + b) = 0,36 \text{ nên } \overline{ab} \cdot (a + b) = 36.$$

Suy ra $a + b$ là ước của 36. Ta lại có $0 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b \leq 9$ nên $a + b \leq 18$ (chú ý rằng a có thể bằng 0).

Ta có bảng sau :

a + b	1	2	3	4	6	9	12	18
$\overline{ab}$	36	18	12	9	6	4	3	2

Xét các số $\overline{ab}$ tìm được, tính tổng các chữ số (là $a + b$) xem có phù hợp với dòng trên hay không, ta thấy có hai đáp số :

$$\overline{ab} = 12 \text{ thì } a + b = 3 ;$$

$$\overline{ab} = 06 \text{ thì } a + b = 6.$$

$$\text{Vậy : } 0,12 (1 + 2) = 0,36 ;$$

$$0,06 (0 + 6) = 0,36.$$

BÀI TẬP

10.1. Tìm phân số $\frac{a}{b}$, biết rằng nó bằng trung bình cộng của ba phân số

$$\frac{7}{18}, \frac{11}{18} \text{ và } \frac{a}{b}.$$

10.2. Chứng minh rằng các phân số sau có thể viết được dưới dạng tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu khác nhau :

$$\text{a) } \frac{7}{10} ;$$

$$\text{b) } \frac{2}{3}.$$

10.3. Chứng minh rằng các phân số sau có thể viết được dưới dạng tổng của ba phân số có tử bằng 1, mẫu khác nhau :

$$\text{a) } \frac{17}{18} ;$$

$$\text{b) } \frac{5}{8}.$$

10.4. Tìm các số nguyên dương x và y sao cho :

$$\text{a) } \frac{x}{10} - \frac{1}{y} = \frac{3}{10} ;$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + \frac{y}{2} = \frac{5}{8}.$$

10.5. Cho phân số $\frac{a}{b}$ khác 1. Tìm phân số $\frac{c}{d}$ sao cho $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

$$\text{10.6. Tính : } \frac{3 - \frac{3}{20} + \frac{3}{13} - \frac{3}{2013}}{7 - \frac{7}{20} + \frac{7}{13} - \frac{7}{2013}}.$$

$$\text{10.7. Tính } \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \frac{1}{13.17} + \dots + \frac{1}{41.45}.$$

10.8. Cho $A = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{60}$.

Chứng minh rằng $A > \frac{7}{12}$.

10.9. Cho $A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$. Chứng minh rằng :

a) $A > \frac{1}{4}$;

b) $A < \frac{4}{9}$.

10.10. Tính : $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{63}{64}$

10.11. Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{79}{80}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{9}$.

10.12. Chứng minh rằng $1.3.5. \dots .19 = \frac{11}{2} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \dots \cdot \frac{20}{2}$.

10.13. Chứng minh rằng :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{20}.$$

10.14. Tính :

$$\frac{\frac{1}{19} + \frac{2}{18} + \frac{3}{17} + \dots + \frac{18}{2} + \frac{19}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}}.$$

10.15. Tính :

a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9}$;

b) $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \frac{1}{324} + \frac{1}{972}$.

10.16. Tìm hai số a và b, biết $a + b = 3(a - b) = 2 \cdot \frac{a}{b}$.

10.17. Cho $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$. Chứng minh rằng a chia hết cho 11.

- 10.18.** Chứng minh rằng tổng sau không là số tự nhiên : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50}$.
- 10.19.** Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất, biết rằng nhân nó với $\frac{8}{15}$ hoặc $\frac{21}{36}$ thì các kết quả đều là số tự nhiên.
- 10.20.** So sánh A và B , biết
- $$A = \frac{8^9 + 12}{8^9 + 7} \text{ và } B = \frac{8^{10} + 4}{8^{10} - 1}.$$
- 10.21.** Tìm số nguyên n để phân số sau có giá trị lớn nhất : $\frac{4n + 9}{2n + 3}$.
- 10.22.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số sao cho tỉ số của số đó và tổng các chữ số của nó có giá trị nhỏ nhất.
- 10.23.** Tìm tỉ số lớn nhất của số tự nhiên có ba chữ số và tổng các chữ số của nó.
- 10.24.** So sánh $A = \frac{7^{10}}{1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^9}$ và $B = \frac{5^{10}}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^9}$.
- 10.25.** Tìm ba số nguyên dương khác nhau sao cho tổng các nghịch đảo của chúng bằng 1.

Chuyên đề 11. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ VÀ TỈ SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Muốn tìm giá trị phân số $\frac{m}{n}$ của số b cho trước, ta tính $b \cdot \frac{m}{n}$.
- Muốn tìm một số biết $\frac{m}{n}$ của nó bằng a , ta tính $a : \frac{m}{n}$.
- Tỉ số của hai số a và b ($b \neq 0$) là thương trong phép chia số a cho số b .

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 11.1. Tâm đã có một số điểm kiểm tra Toán và còn một bài kiểm tra nữa (các bài kiểm tra đều tính hệ số 1 ngang nhau). Nếu bài kiểm tra này Tâm

được 10 điểm thì Tâm đạt điểm trung bình là 9. Nhưng vì trong bài kiểm tra cuối, Tâm chỉ được 7,5 điểm (điểm không làm tròn thành một số nguyên) nên điểm trung bình của Tâm chỉ là 8,5. Hỏi Tâm có tất cả bao nhiêu bài kiểm tra?

Giải.

Điểm của Tâm chênh lệch trong hai trường hợp là

$$10 - 7,5 = 2,5 \text{ (điểm).}$$

Điểm trung bình của Tâm chênh lệch trong hai trường hợp là

$$9 - 8,5 = 0,5 \text{ (điểm).}$$

Số bài kiểm tra của Tâm là

$$2,5 : 0,5 = 5 \text{ (bài).}$$

Ví dụ 11.2. Có 20 viên bi đỏ, 30 viên bi trắng và một số viên bi xanh, tất cả để trong hộp. Nếu lấy ra trong hộp một viên bi thì cơ hội có thể lấy được một viên bi xanh là $\frac{9}{11}$. Tính số bi xanh.

Giải.

Số bi xanh bằng $\frac{9}{11}$ tổng số bi.

Tổng số bi đỏ và trắng bằng

$$1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11} \text{ (tổng số bi).}$$

Số bi xanh chia cho tổng số bi đỏ và trắng bằng

$$\frac{9}{11} : \frac{2}{11} = 4,5.$$

Số bi xanh bằng

$$(20 + 30) \cdot 4,5 = 225 \text{ (viên).}$$

Ví dụ 11.3. Một lớp học mua một số vở về chia đều cho các học sinh. Nếu chỉ chia cho các bạn nữ thì mỗi bạn nhận 15 quyển. Nếu chỉ chia cho các bạn nam thì mỗi bạn nhận 10 quyển. Hỏi nếu chia đều cho tất cả các bạn trong lớp thì mỗi bạn nhận được bao nhiêu quyển vở?

Giải.

Lấy số học sinh nam làm đơn vị để so sánh.

Tỉ số giữa học sinh nữ và nam là $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Số học sinh cả lớp so với số học sinh nam bằng

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \text{ (số nam).}$$

Số vở so với số học sinh nam gấp 10 lần số nam.

Số vở mỗi học sinh được chia là

$$10 : \frac{5}{3} = 6 \text{ (quyển vở).}$$

Lưu ý. Để tính số vở mỗi học sinh được chia, ta lấy *tổng số vở* chia cho *tổng số học sinh*. Ta không biết cả hai số liệu trên, nhưng nếu lấy số học sinh nam làm đơn vị thì ta biết :

- Tổng số vở gấp 10 lần số nam.
- Tổng số học sinh gấp $\frac{5}{3}$ lần số nam.

Phép chia $10 : \frac{5}{3}$ cho ta số vở mỗi học sinh được chia.

Ví dụ 11.4. Bốn bạn An, Bách, Cảnh, Dũng đi chơi, nhưng Dũng không mang tiền. An cho Dũng $\frac{1}{5}$ số tiền của mình. Bách cho Dũng $\frac{1}{4}$ số tiền của mình. Cảnh cho Dũng $\frac{1}{3}$ số tiền của mình. Kết quả số tiền Dũng nhận được từ ba bạn đều bằng nhau. Hỏi cuối cùng Dũng có số tiền bằng mấy phần tổng số tiền của cả nhóm?

Giải.

Số tiền mà bạn An, Bách, Cảnh có lúc đầu quan hệ với nhau như sau :

$$\frac{1}{5} \text{ số tiền của An} = \frac{1}{4} \text{ số tiền của Bách} = \frac{1}{3} \text{ số tiền của Cảnh.}$$

Ta lấy số tiền của Bách làm đơn vị để so sánh.

Số tiền Dũng nhận từ ba bạn gấp ba lần số tiền Bách cho Dũng nên bằng

$$\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4} \text{ (số tiền của Bách).} \tag{1}$$

Số tiền của An bằng

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4} \text{ (số tiền của Bách).}$$

Số tiền của Cảnh bằng

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \text{ (số tiền của Bách).}$$

Số tiền của An, Bách, Cảnh (lúc đầu) bằng

$$\frac{5}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 3 \text{ (số tiền của Bách).} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra số tiền Dũng nhận so với số tiền của cả ba bạn An, Bách, Cảnh có lúc đầu bằng $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$.

Vậy Dũng có số tiền bằng $\frac{1}{4}$ tổng số tiền của cả nhóm.

Lưu ý. Ta không tính được số tiền cụ thể mà Dũng nhận và số tiền của cả nhóm, nhưng nếu lấy số tiền của Bách (lúc đầu) làm đơn vị thì ta biết :

– Số tiền Dũng nhận bằng $\frac{3}{4}$ số tiền của Bách.

– Số tiền của cả nhóm bằng 3 số tiền của Bách.

Nhờ đó ta tính được tỉ số của hai số tiền trên.

BÀI TẬP

11.1. Tổng của ba số bằng 148. Nếu nhân số thứ nhất với 4, nhân số thứ hai với 5, nhân số thứ ba với 6 thì được ba tích bằng nhau. Tính mỗi số.

11.2. Tổng của ba số bằng 147. Biết $\frac{2}{3}$ số thứ nhất bằng $\frac{3}{4}$ số thứ hai và bằng $\frac{4}{5}$ số thứ ba. Tính mỗi số.

11.3. Trong một buổi đi tham quan, số nữ đăng kí tham gia bằng $\frac{1}{4}$ số nam. Nhưng sau đó một bạn nữ xin nghỉ, một bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam. Tính số học sinh nữ và nam đã đi tham quan.

11.4. Bạn Tú có hai ngăn sách. Số sách ở ngăn I bằng $\frac{2}{5}$ tổng số sách ở hai ngăn.

Tú cho bạn mượn 4 quyển sách ở ngăn I nên số sách ở ngăn I bằng $\frac{1}{3}$ tổng số sách ở hai ngăn. Tính tổng số sách ở hai ngăn lúc đầu.

11.5. Hiện nay, tuổi mẹ gấp ba tuổi con. Cách đây 4 năm, tuổi mẹ gấp 4 tuổi con. Tính tuổi của mỗi người hiện nay.

11.6. Hai máy cày làm việc trên một cánh đồng. Nếu cả hai máy cùng cày thì 10 giờ xong công việc. Nhưng thực tế hai máy chỉ cùng làm việc 7 giờ đầu, sau đó máy thứ nhất đi cày nơi khác, máy thứ hai làm tiếp 9 giờ nữa thì xong. Hỏi nếu máy thứ hai làm việc một mình thì trong bao lâu cày xong cánh đồng?

11.7. Ba vòi nước I, II, III nếu chảy một mình vào một bể cạn thì chảy đầy bể theo thứ tự 4 giờ, 6 giờ, 9 giờ. Lúc đầu người ta mở hai vòi I và II trong 1 giờ 30 phút, sau đó đóng vòi I rồi mở tiếp vòi III cùng chảy với vòi II cho đến khi đầy bể. Hỏi vòi III chảy trong bao lâu?

11.8. Có ba vòi nước chảy vào một bể cạn. Nếu hai vòi I và II cùng chảy thì bể đầy sau 45 phút. Nếu hai vòi II và III cùng chảy thì bể đầy sau 1 giờ. Nếu hai vòi III và I cùng chảy thì bể đầy sau 36 phút.

a) Nếu cả ba vòi cùng chảy thì bể đầy trong bao lâu?

b) Riêng mỗi vòi chảy một mình thì bể đầy trong bao lâu?

11.9. Ba người đến cửa hàng mua một số táo.

Người I mua $\frac{1}{2}$ số táo rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả.

Người II mua $\frac{2}{3}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{2}{3}$ quả.

Người III mua $\frac{3}{4}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{3}{4}$ quả thì vừa hết số táo của cửa hàng. Tính số táo của cửa hàng có lúc đầu.

11.10. Một số học sinh được thưởng một số vở.

Bạn I được thưởng 2 quyển vở và $\frac{1}{5}$ số còn lại.

Bạn II được thưởng 4 quyển vở và $\frac{1}{5}$ số còn lại.

Bạn III được thưởng 6 quyển vở và $\frac{1}{5}$ số còn lại.

...

Cứ như vậy thì số vở được chia đều cho các bạn và không còn thừa quyển nào. Tính số học sinh được thưởng và số vở.

Chuyên đề 12. PHẦN TRĂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phân số thập phân là phân số mà mẫu là lũy thừa của 10.
2. Các phân số thập phân có mẫu là 100 còn được viết dưới dạng phần trăm với kí hiệu %.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 12.1. Một cửa hàng có hai loại quạt, giá tiền như nhau. Quạt màu vàng được giảm giá hai lần, mỗi lần giảm giá 10%. Quạt màu xanh được giảm giá một lần 20%. Hỏi sau khi giảm giá như trên thì loại quạt nào rẻ hơn?

Giải.

Sau lần giảm giá thứ nhất, giá quạt màu vàng bằng

$$100\% - 10\% = 90\% = 0,9 \text{ (giá ban đầu).}$$

Sau lần giảm giá thứ hai, giá quạt màu vàng bằng 0,9 giá đã giảm, tức là bằng

$$0,9 \cdot 0,9 = 0,81 \text{ (giá ban đầu).}$$

Sau lần giảm giá 20%, giá quạt màu xanh bằng

$$100\% - 20\% = 80\% = 0,8 \text{ (giá ban đầu).}$$

Sau khi giảm giá thì quạt màu xanh rẻ hơn.

Ví dụ 12.2.

a) Chiều dài một hình chữ nhật tăng 25%. Chiều rộng hình chữ nhật phải giảm bao nhiêu phần trăm để chu vi hình chữ nhật không đổi, biết rằng chiều dài gấp đôi chiều rộng?

b) Chiều dài một hình chữ nhật tăng 25%. Chiều rộng hình chữ nhật phải giảm bao nhiêu phần trăm để diện tích hình chữ nhật không đổi?

Giải.

a) Chu vi hình chữ nhật không đổi nếu tổng của chiều dài và chiều rộng không đổi.

Vì chiều dài gấp đôi chiều rộng nên tăng chiều dài 25% tức là tăng chiều rộng $2 \cdot 25\% = 50\%$.

Vậy chiều rộng phải giảm 50% để chu vi hình chữ nhật không đổi.

b) Chiều dài mới bằng

$$100\% + 25\% = 125\% = 1,25 \text{ (chiều dài cũ).}$$

Diện tích mới bằng diện tích cũ.

Chiều rộng mới bằng

$$1 : 1,25 = 0,8 \text{ (chiều rộng cũ).}$$

Chiều rộng mới phải giảm đi

$$1 - 0,8 = 0,2 = 20\% \text{ (chiều rộng cũ).}$$

Ví dụ 12.3. Cho bài toán :

Một quả dưa hấu có khối lượng 1000g chứa 93% nước. Một tuần sau, lượng nước chỉ còn 90%. Hỏi khi đó, khối lượng quả dưa hấu còn bao nhiêu gam?

Tìm chỗ sai trong cách giải sau và hãy nêu cách giải đúng.

Sau một tuần, tỉ số phần trăm nước giảm đi

$$93\% - 90\% = 3\%.$$

Khối lượng quả dưa hấu giảm đi

$$1000 \cdot \frac{3}{100} = 30 \text{ (g).}$$

Khối lượng quả dưa hấu lúc sau

$$1000 - 30 = 970 \text{ (g).}$$

Giải.

Cách giải trên sai ở chỗ đã làm phép trừ $93\% - 90\% = 3\%$ trong khi số bị trừ và số trừ không cùng đơn vị : 93% khối lượng quả dưa hấu lúc đầu không thể trừ đi 90% khối lượng quả dưa hấu lúc sau.

Cách giải đúng như sau :

Lượng nước trong quả dưa hấu lúc đầu là

$$1000 \cdot \frac{93}{100} = 930 \text{ (g).}$$

Lượng chất khô trong quả dưa hấu lúc đầu là

$$1000 - 930 = 70 \text{ (g).}$$

Lượng chất khô trong quả dưa hấu lúc sau vẫn là 70g, chiếm

$$100\% - 90\% = 10\% \text{ (khối lượng quả dưa hấu lúc sau).}$$

Khối lượng quả dưa hấu lúc sau là $70 : \frac{10}{100} = 700 \text{ (g).}$

Ví dụ 12.4. Một cửa hàng trong ngày khai trương hạ giá hàng 12% so với giá bán trong ngày thường. Tuy vậy, cửa hàng vẫn lãi 10% so với giá gốc. Hỏi nếu không hạ giá thì cửa hàng lãi bao nhiêu phần trăm so với giá gốc?

Giải.

Giá bán trong ngày khai trương so với ngày thường bằng

$$100\% - 12\% = 88\% = 0,88.$$

Giá bán trong ngày khai trương so với giá gốc bằng

$$100\% + 10\% = 110\% = 1,1.$$

Như vậy 0,88 giá ngày thường bằng 1,1 giá gốc.

Giá ngày thường so với giá gốc bằng

$$1,1 : 0,88 = 1,25 = 125\%.$$

Nếu không hạ giá 12% thì cửa hàng lãi so với giá gốc là

$$125\% - 100\% = 25\%.$$

BÀI TẬP

- 12.1.** Phân số $\frac{1}{2}$ tăng thành $\frac{7}{8}$ thì giá trị của phân số đó tăng thêm bao nhiêu phần trăm?
- 12.2.** Một xí nghiệp có khối lượng công việc tăng thêm 40%, còn năng suất lao động của công nhân tăng thêm 25%. Hỏi số công nhân cần tăng thêm bao nhiêu phần trăm?
- 12.3.** Giá lúa tăng 25%. Hỏi giá lúa phải giảm bao nhiêu phần trăm để trở lại giá cũ?
- 12.4.** Giá rau tháng 4 cao hơn so với tháng 3 là 10%.
Giá rau tháng 5 thấp hơn so với tháng 4 là 10%.
Hỏi giá rau tháng 5 so với tháng 3 bằng bao nhiêu phần trăm?
- 12.5.** Một cửa hàng nhập một loại đồ chơi, rồi định giá bán là 50 000đ một chiếc. Trong ngày Tết thiếu nhi 1 – 6, cửa hàng hạ giá 12%, tính ra so với giá nhập vào vẫn lãi 10%.
- a) Tính giá nhập của đồ chơi ấy.
- b) So với giá nhập, thì giá bán trong ngày thường lãi bao nhiêu phần trăm?

- 12.6.** Một cửa hàng bán quần áo thanh lí hàng nên đã giảm 10% so với giá bình thường, nhưng không bán được nên giảm tiếp 10% nữa (so với giá đã giảm) và đã bán hết hàng. Tính ra cửa hàng vẫn lãi 5,3% so với giá gốc. Hỏi giá bình thường bằng bao nhiêu phần trăm giá gốc?
- 12.7.** Một hãng điện thoại có ba phương án trả tiền cước điện thoại :
- Phương án I : Trả 99 xu cho 20 phút đầu, sau đó từ phút thứ 21 thì mỗi phút trả thêm 5 xu.
 - Phương án II : Kể từ lúc đầu tiên, mỗi phút trả 10 xu.
 - Phương án III : Trả 25 xu, sau đó kể từ phút đầu tiên mỗi phút trả 8 xu.
- Một khách hàng trong tháng có 10% cuộc gọi 1 phút, 10% cuộc gọi 5 phút, 30% cuộc gọi 10 phút, 30% cuộc gọi 20 phút, 20% cuộc gọi 30 phút.
- Người đó nên chọn phương án nào để tiền cước ít nhất?
- 12.8.** Một cửa hàng sách hạ giá 10% trong ngày lễ, tuy vậy cửa hàng vẫn còn lãi 8%. Hỏi trong ngày thường cửa hàng lãi bao nhiêu phần trăm?
- 12.9.** Nước biển chứa 5% muối. Cần thêm bao nhiêu kilôgam nước lã vào 20 kg nước biển để tỉ lệ muối trong dung dịch là 2%?
- 12.10.** Ông Ngọc có 500 kg hạt cà phê tươi, đem phơi khô để tỉ lệ nước trong hạt cà phê còn 5%. Biết tỉ lệ nước trong hạt cà phê tươi là 24%. Tính lượng nước cần bay hơi.
- 12.11.** Người ta phơi 450 kg hạt tươi thì được hạt khô. Biết tỉ lệ nước trong hạt tươi là 20%, tỉ lệ nước trong hạt khô là 10%. Tính khối lượng hạt khô.
- 12.12.** Chị Mai ngâm 15 kg hạt giống có tỉ lệ nước là 4% vào một thùng nước. Chị muốn tỉ lệ nước trong hạt giống sau khi ngâm là 10% để cho khả năng nảy mầm cao hơn. Tính khối lượng hạt giống sau khi ngâm.
- 12.13.** Người ta phơi 60 kg cỏ tươi, sau một tuần thì còn 30 kg cỏ khô. Biết tỉ lệ nước trong cỏ tươi là 70%. Hỏi tỉ lệ nước trong cỏ khô là bao nhiêu phần trăm?

Chuyên đề 13. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Quãng đường = Vận tốc x Thời gian.
Vận tốc = Quãng đường : Thời gian.
Thời gian = Quãng đường : Vận tốc.
2. Cùng đi một quãng đường thì thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc đi.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. CHUYỂN ĐỘNG CÙNG CHIỀU

Trong chuyển động cùng chiều :

$$\text{Thời gian đuổi kịp} = \frac{\text{Khoảng cách}}{\text{Hiệu vận tốc}}.$$

Trên đường kẻ chậm với người mau

Chuyển động cùng chiều đuổi kịp nhau

Vận tốc đôi bên tìm hiệu số

Đường dài chia với, khó chi đâu!

Ví dụ 13.1. Lúc 8 giờ, người thứ nhất đi từ A và đến B lúc 12 giờ. Lúc 8 giờ 30 phút, người thứ hai đi từ A và đến B lúc 11 giờ 30 phút. Hỏi người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất lúc mấy giờ?

Giải.

Lấy quãng đường AB làm đơn vị.

Người thứ nhất đi AB trong

$$12 - 8 = 4 \text{ (giờ)}.$$

Trong một giờ, người thứ nhất đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường.

Người thứ hai đi AB trong 11 giờ 30 phút – 8 giờ 30 phút = 3 giờ.

Trong một giờ, người thứ hai đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường.

Lúc người thứ hai khởi hành, người thứ nhất đã đi được

$$8 \text{ giờ } 30 \text{ phút} - 8 \text{ giờ} = 30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ giờ}.$$

Người thứ nhất đi trước người thứ hai

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ (quãng đường)}.$$

Trong một giờ, người thứ hai đi nhiều hơn người thứ nhất là

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ (quãng đường)}.$$

Thời gian để người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất là

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{12} = \frac{3}{2} \text{ (giờ)}.$$

Lúc đó là

$$8 \text{ giờ } 30 \text{ phút} + \frac{3}{2} \text{ giờ} = 10 \text{ giờ}.$$

Lưu ý. Trong bài toán trên, ta không biết cụ thể vận tốc của hai người, nhưng nếu lấy quãng đường AB làm đơn vị thì vận tốc của hai người là $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{3}$, còn khoảng cách giữa hai người (lúc người thứ hai khởi hành) là $\frac{1}{8}$.

Phép chia $\frac{1}{8} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$ cho ta thời gian để người thứ hai đuổi kịp người thứ nhất.

Dạng 2. CHUYỂN ĐỘNG NGƯỢC CHIỀU

Trong chuyển động ngược chiều :

$$\text{Thời gian gặp nhau} = \frac{\text{Khoảng cách}}{\text{Tổng vận tốc}}.$$

Trên đường kẻ chậm người mau

Chuyển động ngược chiều muốn gặp nhau

Vận tốc đôi bên tìm tổng số

Đường dài chia với, khó chi đâu !

Ví dụ 13.2. Trên quãng đường AB, hai xe cùng khởi hành một lúc, xe tải đi từ A đến B hết 6 giờ, xe con đi từ B đến A hết 4 giờ. Hai xe gặp nhau sau bao lâu?

Giải.

Lấy quãng đường AB làm đơn vị.

Trong một giờ, xe tải đi được $\frac{1}{6}$ quãng đường.

Trong một giờ, xe con đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường.

Trong một giờ, hai xe gần nhau hơn được

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ (quãng đường).}$$

Thời gian để hai xe gặp nhau là

$$1 : \frac{5}{12} = \frac{12}{5} \text{ (giờ)} = 2 \text{ giờ } 24 \text{ phút.}$$

Dạng 3. CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC THAY ĐỔI

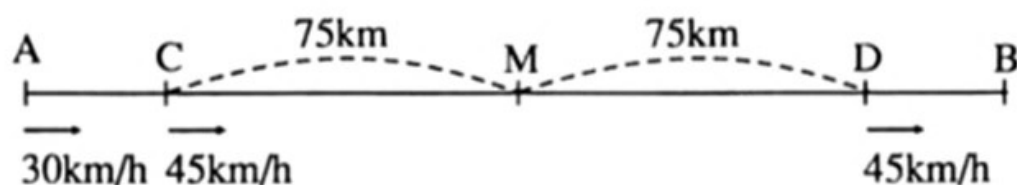
Trong bài toán chuyển động có vận tốc thay đổi, thường dùng đến kiến thức sau.

Cho $s_1 = v_1 t_1$, $s_2 = v_2 t_2$. Nếu $s_1 = s_2$ thì $v_1 t_1 = v_2 t_2$ nên $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$, tức là : Trên hai quãng đường bằng nhau thì thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc đi.

Ví dụ 13.3. Một người phải đi từ A đến B trong 5 giờ. Lúc đầu, người đó đi với vận tốc 30 km/h. Khi còn 75 km nữa thì được nửa đường, người đó đi với vận tốc 45 km/h để kịp B đúng dự định. Tính quãng đường AB.

Giải.

Gọi C là địa điểm người đó thay đổi vận tốc, gọi M là điểm chính giữa của AB, gọi D là điểm trên MB cách M là 75 km (h.10).



Hình 10

Thời gian đi đoạn CD bằng

$$\frac{75.2}{45} = \frac{10}{3} \text{ (giờ)}.$$

Thời gian đi đoạn AC và DB là

$$5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3} \text{ (giờ)}.$$

Trên quãng đường AC và DB bằng nhau, thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc nên

$$\frac{t_{AC}}{t_{DB}} = \frac{v_{DB}}{v_{AC}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}.$$

Thời gian đi AC bằng $\frac{3}{5}$ thời gian đi AC và DB hay $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$ (giờ).

Quãng đường AC dài $30.1 = 30$ (km).

Quãng đường AB dài $(30 + 75).2 = 210$ (km).

Dạng 4. CHUYỂN ĐỘNG CÓ DÒNG NƯỚC

Trong bài toán chuyển động có dòng nước, cần chú ý đến :

Vận tốc xuôi = Vận tốc của vật + Vận tốc dòng nước,

Vận tốc ngược = Vận tốc của vật – Vận tốc dòng nước.

$$\text{Do đó Vận tốc dòng nước} = \frac{\text{Vận tốc xuôi} - \text{Vận tốc ngược}}{2}.$$

Ví dụ 13.4. Anh Hòa bơi xuôi dòng nước từ A đến B hết 6 phút, còn bơi ngược từ B về A hết 10 phút. Hỏi một cụm bè trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu?

Giải.

Trong một phút, anh Hoà bơi xuôi dòng được $\frac{1}{6}$ quãng sông.

Trong một phút, anh Hoà bơi ngược dòng được $\frac{1}{10}$ quãng sông.

Do vận tốc xuôi trừ vận tốc ngược bằng hai lần vận tốc dòng nước nên trong một phút, dòng nước trôi được

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) : 2 = \frac{1}{30} \text{ (quãng sông).}$$

Thời gian để cụm bè trôi từ A đến B là

$$1 : \frac{1}{30} = 30 \text{ (phút).}$$

Dạng 5. CHUYỂN ĐỘNG CỦA XE LỬA CÓ CHIỀU DÀI ĐÁNG KỂ

Nếu một xe lửa có chiều dài a đi hết một vật có chiều dài b (chẳng hạn một đường hầm, một chiếc cầu...) thì xe lửa phải đi một quãng đường bằng $a + b$.

Ví dụ 13.5. Một xe lửa chạy với vận tốc 45 km/h. Xe lửa chui vào một đường hầm có chiều dài gấp 9 lần chiều dài của xe lửa và cần 2 phút để xe lửa vào và ra khỏi đường hầm. Tính chiều dài của xe lửa.

Giải.

Trong 2 phút, xe lửa đi được

$$\frac{45 \cdot 2}{60} = 1,5 \text{ (km)} = 1500 \text{ (m).}$$

Trong 2 phút, xe lửa đi đoạn đường dài bằng chiều dài đường hầm cộng với chiều dài xe lửa, tức là bằng

$$9 + 1 = 10 \text{ lần chiều dài xe lửa.}$$

Chiều dài của xe lửa bằng

$$1500 : 10 = 150 \text{ (m).}$$

Dạng 6. VẬN TỐC TRUNG BÌNH

Nếu một vật đi quãng đường s_1 với vận tốc v_1 và thời gian t_1 , rồi đi tiếp quãng đường s_2 với vận tốc v_2 và thời gian t_2 thì vận tốc trung bình (v_{tb}) trên cả quãng

$$\text{đường } s_1 + s_2 \text{ là } v_{tb} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}.$$

Trong trường hợp $v_1 = v_2$ thì $v_{tb} = \frac{v_1 + v_2}{2}$, còn nói chung thì

$$v_{tb} \neq \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Ví dụ 13.6. Một ô tô đi nửa đầu của quãng đường AB với vận tốc 30 km/h và đi nửa sau với vận tốc 60 km/h. Tính vận tốc trung bình của ô tô trên cả quãng đường AB.

Giải.

Cứ đi 2 km thì có 1 km ô tô đi với vận tốc 30 km/h và 1 km ô tô đi với vận tốc 60 km/h.

Đi 1 km với vận tốc 30 km/h hết $\frac{1}{30}$ giờ.

Đi 1 km với vận tốc 60 km/h hết $\frac{1}{60}$ giờ.

Cứ đi 2 km thì hết $\frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{20}$ (giờ).

Vận tốc trung bình của ô tô là $2 : \frac{1}{20} = 40$ (km/h).

BÀI TẬP

13.1. Một chiếc tàu chạy trên sông, khi còn 90 km nữa mới cập bến thì tàu bị thùng, cứ 5 phút có 2 tấn nước tràn vào tàu. Nếu có 105 tấn nước tràn vào tàu thì tàu sẽ bị chìm. Trên tàu có một máy bơm, mỗi giờ bơm ra được 10 tấn nước. Tàu phải chạy ít nhất với vận tốc nào để khi cập bến, tàu vẫn chưa bị chìm?

13.2. Hiện nay là 4 giờ. Sau ít nhất bao lâu thì kim phút chập với kim giờ?

13.3. Trên quãng đường AB, hai ô tô khởi hành cùng một lúc, xe thứ nhất đi từ A đến B hết 2 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A hết 3 giờ. Đến chỗ gặp nhau, quãng đường xe thứ nhất đã đi nhiều hơn quãng đường xe thứ hai đã đi là 30 km. Tính quãng đường AB.

- 13.4.** Trên quãng đường AB dài 300 km, người thứ nhất đi từ A đến B, người thứ hai đi từ B đến A. Họ khởi hành cùng một lúc thì sẽ gặp nhau sau 5 giờ. Nhưng người thứ hai có việc bận, đã khởi hành sau người thứ nhất 40 phút, do đó sau 4 giờ 42 phút mới gặp người thứ nhất. Tính vận tốc mỗi người.
- 13.5.** Hai xe khởi hành từ A và từ B cùng một lúc, đi ngược chiều và sẽ gặp nhau sau 6 giờ. Vận tốc của xe con bằng $\frac{4}{3}$ vận tốc của xe tải. Muốn gặp nhau ở chính giữa quãng đường AB thì xe con phải đi sau xe tải bao lâu?
- 13.6.** Một người đi từ A đến B. Người đó tính rằng nếu đi với vận tốc 40 km/h thì đến B sau giờ hẹn là 20 phút, còn nếu đi với vận tốc 60 km/h thì đến B trước giờ hẹn là 10 phút. Tính quãng đường AB.
- 13.7.** Ba người cùng khởi hành một lúc từ A để đến B, vận tốc người I là 40 km/h, vận tốc người II là 60 km/h. Người III đến B trước người I là 18 phút và sau người II là 12 phút. Tính quãng đường AB và vận tốc người III.
- 13.8.** Hai người cùng đi từ A về một phía, người I khởi hành lúc 7 giờ, người II khởi hành lúc 7 giờ 30 phút. Hai người gặp nhau lúc mấy giờ, biết rằng quãng đường người I đi trong 30 phút bằng quãng đường người II đi trong 20 phút?
- 13.9.** Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Trên đường về từ B về A, sau khi đi $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc cũ, ô tô dừng lại chữa trong 30 phút. Muốn thời gian từ B về A vẫn bằng thời gian từ A đến B, ô tô phải đi tiếp với vận tốc 60 km/h. Tính quãng đường AB.
- 13.10.** Anh Thành đi xe đạp từ A đến B. Sau khi đi 10 km trong 40 phút, anh tính rằng nếu tiếp tục đi với vận tốc như vậy thì đến B trước giờ hẹn 24 phút. Anh đã giảm vận tốc đi 3 km/h mà vẫn đến B trước giờ hẹn 10 phút. Tính quãng đường AB.
- 13.11.** Một người đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h, rồi đi tiếp từ B đến D với vận tốc 60 km/h. Quãng đường BD dài hơn AB là 10 km. Thời gian đi BD ít hơn đi AB là 20 phút. Tính các quãng đường AB và BD.

- 13.12.** Một ca nô xuôi khúc sông từ A đến B hết 3 giờ và ngược khúc sông đó hết 4,5 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc xuôi, vận tốc ngược và chiều dài khúc sông AB.
- 13.13.** Anh Thắng đi xe máy với vận tốc 36 km/h. Anh gặp một xe lửa dài 75 m đi cùng chiều chạy song song bên cạnh mình trong 15 giây. Tính vận tốc của xe lửa với đơn vị m/giây.
- 13.14.** Một người đi từ A đến B. Người đó đi $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc 20 km/h rồi đi phần còn lại với vận tốc 10 km/h. Hỏi trung bình trên cả quãng đường AB, người đó đi với vận tốc bao nhiêu?
- 13.15.** Lúc 6 giờ, một xe tải và một xe máy cùng xuất phát từ A để đến B. Vận tốc xe tải là 50 km/h, vận tốc xe máy là 30 km/h. Sau đó 2 giờ, một xe con cũng đi từ A để đến B, vận tốc 60 km/h. Đến mấy giờ thì xe con ở chính giữa xe máy và xe tải?
- 13.16.** Hai xe buýt cùng khởi hành một lúc với vận tốc không đổi, xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ hai đi từ B đến A. Xe thứ nhất đến B thì quay lại ngay, xe thứ hai đến A thì quay lại ngay. Hai xe gặp nhau lần thứ nhất tại C cách A là 5 km và gặp nhau lần thứ hai tại D cách B là 4 km. Tính quãng đường AB.

CÁC CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO

Chuyên đề 14. HỆ GHI SỐ VỚI CƠ SỐ BẤT KÌ

I. HỆ GHI SỐ THẬP PHÂN

Chúng ta đã quen thuộc với hệ thập phân, đó là hệ ghi số mà cứ *mười* đơn vị ở một hàng thì làm thành *một* đơn vị ở hàng liền trước nó.

Trong hệ thập phân :

– Số $\overline{a_3a_2a_1a_0}$ có giá trị bằng $a_3.10^3 + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$.

– Số $\overline{a_na_{n-1} \dots a_2a_1a_0}$ có giá trị bằng

$$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \dots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0.$$

Trong hệ thập phân, ta dùng mười chữ số là 0, 1, 2, ..., 9 để ghi số.

II. HỆ GHI SỐ CƠ SỐ k

1. Thế nào là hệ ghi số cơ số k ?

Trong hệ ghi số cơ số k, ta dùng k kí hiệu là 0, 1, 2, ..., k – 1 để ghi số, cứ k đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

Trong hệ cơ số k :

– Số $\overline{a_3a_2a_1a_0}_{(k)}$ có giá trị bằng $a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + a_0$.

– Số $\overline{a_na_{n-1} \dots a_2a_1a_0}_{(k)}$ có giá trị bằng

$$a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_2k^2 + a_1k + a_0.$$

2. Đổi một số từ hệ cơ số k sang hệ thập phân

Ví dụ 14.1. Đổi số $1304_{(5)}$ thành số viết trong hệ thập phân.

Giải.

$$1304_{(5)} = 1.5^3 + 3.5^2 + 0.5 + 4 = 125 + 75 + 4 = 204.$$

3. Đổi một số từ hệ thập phân sang hệ cơ số k

Ví dụ 14.2. Đổi số 204 trong hệ thập phân thành số viết trong hệ cơ số 5.

Giải.

Trong hệ cơ số 5, cứ năm đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

Do đó, ta chia 204 cho 5, được 40 dư 4. Lại chia 40 cho 5, được 8 dư 0. Tiếp tục chia 8 cho 5, được 1 dư 3. Số 1 nhỏ hơn 5 nên ta dừng lại.

Thương cuối cùng (số 1) và các số dư, kể từ số dư cuối cùng trở lên (là 3, 0, 4), là các chữ số từ trái sang phải của số viết trong hệ cơ số 5.

$$204 = 1304_{(5)}.$$

Trong thực hành, ta đặt các phép chia liên tiếp cho 5 như sau :

$$\begin{array}{r} 204 \quad | \quad 5 \\ \hline 40 \quad | \quad 5 \\ \hline 8 \quad | \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

Remainders: 4, 0, 3. Quotient: 1.

Lưu ý. Muốn đổi một số từ hệ thập phân sang hệ cơ số k, ta làm như sau :

- Chia số đó cho k.
- Lấy thương chia cho k.
- Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi thương nhỏ hơn k thì dừng lại.
- Thương cuối cùng và các số dư, kể từ số dư cuối cùng trở lên, là các chữ số từ trái sang phải của số viết trong hệ cơ số k.

Ví dụ 14.3. Một đội quân được tổ chức theo nguyên tắc "tam tam chế", tức là cứ 3 lính thì lập thành 1 tổ, cứ 3 tổ thì lập thành 1 tiểu đội, cứ 3 tiểu đội thì lập thành 1 trung đội... Các cấp từ nhỏ đến lớn là tổ, tiểu đội, trung đội, đại đội, tiểu đoàn... Có 422 lính thì lập được thành các cấp nào?

Giải.

Đổi số 422 thành số viết trong hệ cơ số 3.

$$\begin{array}{r} 422 \quad | \quad 3 \\ \hline 140 \quad | \quad 3 \\ \hline 46 \quad | \quad 3 \\ \hline 15 \quad | \quad 3 \\ \hline 5 \quad | \quad 3 \\ \hline \end{array}$$

Remainders: 2, 2, 1, 0, 2, 1. Quotient: 1.

$$422 = 120122_{(3)}.$$

422 lính được lập thành :

1 tiểu đoàn + 2 đại đội + (0 trung đội) + 1 tiểu đội + 2 tổ + 2 lính.

4. Các phép tính trong hệ cơ số k

Trong hệ cơ số k, các phép tính cũng được thực hiện tương tự như trong hệ thập phân, chỉ cần lưu ý rằng :

- Trong phép cộng, nếu kết quả được k thì viết 0 nhớ 1.
- Trong phép trừ, một đơn vị hàng cao đổi thành k đơn vị hàng thấp tiếp theo.

Ví dụ 14.4. Thực hiện các phép tính sau trong hệ cơ số 4 :

- a) $321 + 103$; b) $123 - 31$;

Giải.

Trong lời giải dưới đây, các số đều viết trong hệ cơ số 4.

a)
$$\begin{array}{r} 321 \\ + 103 \\ \hline 1030 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 123 \\ - 31 \\ \hline 32 \end{array}$$

III. HỆ GHI SỐ CƠ SỐ 2 (hệ nhị phân)

1. Thế nào là hệ nhị phân?

Trong hệ nhị phân, ta dùng hai kí hiệu (là 0 và 1) để ghi số, cứ *hai* đơn vị ở một hàng thì làm thành *một* đơn vị ở hàng liền trước nó.

2. Đổi một số từ hệ nhị phân sang hệ thập phân

Ví dụ 14.5. Đổi số $1101_{(2)}$ thành số viết trong hệ thập phân.

Giải.

$$1101_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13.$$

3. Đổi một số từ hệ thập phân sang hệ nhị phân

Ví dụ 14.6. Đổi số 43 thành số viết trong hệ nhị phân.

Giải.

Cách 1. Lần lượt chia 43 cho 2, rồi chia thương cho 2 và cứ tiếp tục như vậy.

$$\begin{array}{r} 43 \quad | \quad 2 \\ \hline 21 \quad | \quad 2 \\ \hline 10 \quad | \quad 2 \\ \hline 5 \quad | \quad 2 \\ \hline 2 \quad | \quad 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Remainders (from top to bottom): ①, ②, ①, ②, ①, ②, ①. Reading from bottom to top: 101011.

$$43 = 101011_{(2)}.$$

Cách 2. Viết các lũy thừa của 2 chưa vượt quá 43, đó là 1, 2, 4, 8, 16, 32.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } 43 &= 32 + 8 + 2 + 1 \\ &= 2^5 + 2^3 + 2 + 1 \\ &= 101011_{(2)}.\end{aligned}$$

Lưu ý. Ở cách 1, có thể viết các thương (ở bên trái) và các số dư (ở bên phải) như sau :

$$\begin{array}{r|l} 43 & 1 \\ 21 & 1 \\ 10 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \quad 43 = 101011_{(2)}$$

Ví dụ 14.7. Bạn Mai có 31 chiếc tem đựng trong năm phong bì. Muốn lấy ra một số tem bất kì từ 1 đến 30, Mai chỉ cần lấy ra một số phong bì là có đúng số tem định lấy. Hỏi mỗi phong bì đó chứa bao nhiêu chiếc tem?

Giải.

Năm hàng từ thấp lên cao trong hệ nhị phân là hàng 1, hàng 2, hàng 4, hàng 8, hàng 16.

Mọi số từ 1 đến 31 khi viết trong hệ nhị phân đều không quá năm chữ số, ví dụ

$$\begin{aligned}31 &= 11111_{(2)} \\ 29 &= 11101_{(2)} \\ 16 &= 10000_{(2)} \\ 15 &= 1111_{(2)}.\end{aligned}$$

Như vậy, năm phong bì của Mai đựng 1, 2, 4, 8, 16 chiếc tem. Chẳng hạn muốn lấy 29 chiếc tem thì Mai chọn các phong bì chứa 16, 8, 4, 1 chiếc tem, muốn lấy 15 chiếc tem thì Mai chọn các phong bì chứa 8, 4, 2, 1 chiếc tem.

4. Các phép tính trong hệ nhị phân

Các quy tắc cộng và nhân trong hệ nhị phân rất đơn giản :

$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 10$
$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$

Ví dụ 14.8. Thực hiện các phép tính sau trong hệ nhị phân :

$$\text{a) } 1101 + 110; \quad \text{b) } 1101 - 110; \quad \text{c) } 1101 \cdot 11.$$

Giải.

Trong lời giải dưới đây, các số đều viết trong hệ nhị phân.

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad 1101 \\ + \quad 110 \\ \hline 10011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad 1101 \\ - \quad 110 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad 1101 \\ \times \quad 11 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 100111 \end{array}$$

5. Hệ nhị phân và máy tính điện tử

Đối với chúng ta, thực hiện phép tính trong hệ nhị phân có thể mất nhiều thời gian, nhưng quy tắc tính toán lại rất đơn giản. Hơn nữa, hệ nhị phân chỉ dùng hai kí hiệu (là 0 và 1) có thể cho tương ứng với hai trạng thái khác nhau của dòng điện (là "không" và "có"). Do đó hệ nhị phân được sử dụng trong máy tính điện tử.

Trong hệ nhị phân, một số bất kì được viết dưới dạng một dãy các kí hiệu 1 và 0, còn trong máy tính điện tử, số đó được thể hiện bởi một tổ hợp các tín hiệu điện theo hai loại khác nhau.

Ở máy tính điện tử, trong phép cộng ta đặt thêm các dòng nhớ, trong phép nhân ta chỉ cần dịch các hàng của số bị nhân thì được các tích riêng, các công việc đó đối với máy tính điện tử là hoàn toàn tự động.

BÀI TẬP

14.1. Có bao nhiêu đơn vị trong số lớn nhất có một chữ số được viết trong :

- a) Hệ thập phân ? b) Hệ cơ số 7 ?

14.2. Có bao nhiêu đơn vị trong số nhỏ nhất có hai chữ số được viết trong :

- a) Hệ thập phân ? b) Hệ cơ số 6 ?

14.3. Nếu viết thêm vào bên phải các số sau một chữ số 0 thì các số đó tăng gấp bao nhiêu lần?

- a) 41 ; b) $35_{(8)}$.

14.4. Thực hiện các phép tính sau trong hệ cơ số 6 :

- a) $132 + 241$; b) $553 - 315$.

14.5. Thực hiện các phép tính sau trong hệ nhị phân :

- a) $1001 + 11$; b) $10010 - 1011$; c) $101 \cdot 101$.

14.6. Trong hệ cơ số nào, ta có

a) $3 + 4 = 10$?

b) $3 + 2 = 11$?

c) $2 \cdot 3 = 10$?

14.7. Tìm x , biết :

a) $43_{(x)} = 31$;

b) $23_{(4)} = x_{(3)}$;

c) $145_{(x)} = 145.2$.

14.8. Để cân các vật có khối lượng là một số tự nhiên từ 1 kg đến 29 kg, có thể dùng một cân đĩa có hai đĩa cân với năm quả cân, các quả cân chỉ để ở một đĩa cân. Năm quả cân đó có khối lượng bao nhiêu?

14.9. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$.

Viết $A + 1$ dưới dạng một lũy thừa.

14.10. Theo truyền thuyết, người phát minh ra bàn cờ 64 ô được nhà vua Ấn Độ thưởng cho một phần thưởng tùy ý. Ông đã xin vua thưởng cho mình :

1 hạt thóc cho ô thứ nhất,

2 hạt thóc cho ô thứ hai,

4 hạt thóc cho ô thứ ba,

8 hạt thóc cho ô thứ tư,

và cứ tiếp tục như vậy, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô trước cho đến ô cuối cùng.

Yêu cầu tưởng như đơn giản, nhưng cả kho thóc của nhà vua cũng không đủ để thưởng. Tính số hạt thóc mà người phát minh ra bàn cờ yêu cầu.

14.11. Chứng minh rằng trong mọi hệ cơ số, ta có

a) Số 100 là số chính phương ;

b) Số 110 là hợp số.

14.12. Chứng minh rằng trong hệ cơ số 4, ta có $\overline{abc}_{(4)} : 3 \Leftrightarrow a + b + c : 3$.

14.13. Tìm số $\overline{abc}$ viết trong hệ thập phân bằng số $\overline{cba}$ viết trong hệ cơ số 9.

Chuyên đề 15. Dãy số VIẾT THEO QUY LUẬT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa, khái niệm

Dãy số : Các số được tập hợp, sắp xếp theo một thứ tự, một quy tắc, một quy luật nào đó tạo thành dãy số : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (Một cách khái quát : Dãy số là một tập hợp các số được viết theo một thứ tự nào đó) .

2. Một số dãy số đặc biệt

a) Dãy số cách đều (còn gọi là dãy số cộng hay cấp số cộng) : là dãy số trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d ($a_{n+1} = a_n + d$; $n \in \mathbb{N}$; d là công sai, với học sinh THCS thường gọi là khoảng cách).

+ Số số hạng của dãy số cách đều hữu hạn $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$:

$$n = (a_n - a_1) : d + 1.$$

+ Số hạng thứ n của dãy số cách đều : $a_n = a_1 + (n - 1).d$.

+ Quy tắc tính tổng các số hạng của dãy số cách đều hữu hạn :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

b) Dãy số nhân (còn gọi là cấp số nhân) : là dãy số trong đó số hạng đầu khác không và kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi (q được gọi là công bội) :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (n \in \mathbb{N}^*) .$$

+ Số hạng tổng quát của cấp số nhân : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

+ Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân :

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

A. DÃY SỐ NGUYÊN

Mở đầu : Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), nhà Toán học thiên tài người Đức, khi 10 tuổi học Tiểu học được thầy giáo yêu cầu cộng 100 số tự nhiên khác 0 đầu tiên. Sau vài giây Gauss đã cho biết kết quả trước sự ngạc nhiên và khâm phục của thầy giáo và các bạn. Gauss đã giải như sau : $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) = 50.101 = 5050$. Đây chính là bài toán tính tổng các số hạng của dãy số cách đều mà khoảng cách là 1 (công sai là 1).

Sau đây là các ví dụ về dãy số nguyên :

Ví dụ 15.1. Viết thêm ba số hạng của các dãy số sau

a) $1 ; 4 ; 7 ; 10 ; \dots$

b) $1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; \dots$

c) $2 ; 12 ; 30 ; 56 ; 90 ; \dots$

d) $-1 ; -2 ; -6 ; -24 ; -120 ; \dots$

e) $1 ; 6 ; 15 ; 28 ; 45 ; \dots$

f) $4 ; 18 ; 40 ; 70 ; 108 ; \dots$

Giải. a) Nhận xét : Từ số hạng thứ hai, mỗi số đều bằng số đứng trước nó cộng 3.

Ta có dãy : $1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; \dots$

b) Nhận xét : Từ số hạng thứ ba, mỗi số hạng bằng tổng hai số hạng đứng trước nó. Ta có dãy : $1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; \dots$

c) Nhận xét : $2 = 1.2 ; 12 = 3.4 ; 30 = 5.6 ; 56 = 7.8 ; 90 = 9.10 .$

Vậy ba số tiếp theo là $11.12 = 132 ; 13.14 = 182 ; 15.16 = 240$.

d) Nhận xét : Các số từ số thứ hai đều bằng thứ tự của nó nhân với số đứng liền trước nó. Ta có ba số tiếp theo là :

$$-120.6 = -720 ; \quad -720.7 = -5040 ; \quad -5040.8 = -40320.$$

e) Nhận xét : $1 = 1.1 ; 6 = 2.3 ; 15 = 3.5 ; 28 = 4.7 ; 45 = 5.9 ; \dots$

Vậy ba số tiếp theo là $6.11 = 66 ; 7.13 = 91 ; 8.15 = 120$.

f) Nhận xét : $4 = 1.4 ; 18 = 3.6 ; 40 = 5.8 ; 70 = 7.10 ; 108 = 9.12 ; \dots$

Vậy ba số tiếp theo là $11.14 = 154 ; 13.16 = 208 ; 15.18 = 270$.

Ví dụ 15.2. Tính tổng : $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2010 + 2011 + 2012$.

Giải. $A = (2012 + 1) \cdot 2012 : 2 = 2025078$.

Ví dụ 15.3. a) Tính tổng sau bằng nhiều cách : $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98$.

b) Tính $T = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2011 - 2012 + 2013$.

c) Tính n ($n \in \mathbb{N}^*$) biết : $3 + 4 + 5 + \dots + n = 525$.

d) Tìm n ($n \in \mathbb{N}^*$) và chữ số a biết $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$.

Giải. a) *Cách 1* : Ta có $S : 2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49$

$$= (1 + 48) + (2 + 47) + \dots + (24 + 25) + 49$$

$$= 49 \cdot 24 + 49 = 49 \cdot 25 = 1225. \text{ Vậy } S = 2450.$$

Cách 2 : Ta có $S : 2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49$

$$= (1 + 49) + (2 + 48) + \dots + (24 + 26) + 25$$

$$= 50 \cdot 24 + 25 = 1200 + 25 = 1225. \text{ Vậy } S = 2450.$$

Cách 3 : $S = (2 + 96) + (4 + 94) + \dots + (48 + 50) + 98 = 24 \cdot 98 + 98 = 2450$.

Cách 4 : $S = (2 + 98) + (4 + 96) + \dots + (48 + 52) + 50 = 100 \cdot 24 + 50 = 2450$.

$$\begin{array}{l} \text{Cách 5 : } + \left\{ \begin{array}{l} S = 2 + 4 + 6 + \dots + 94 + 96 + 98 \\ S = 98 + 96 + 94 + \dots + 6 + 4 + 2 \end{array} \right. \\ \hline 2S = 100 + 100 + 100 + \dots + 100 + 100 + 100 \\ 2S = 100 \cdot 49 = 4900. \text{ Vậy } S = 4900 : 2 = 2450. \end{array}$$

Cách 6 : Áp dụng quy tắc tính tổng các số hạng của dãy số cách đều với $d = 2$;

$a_1 = 2$; có số số hạng là $n = (98 - 2) : 2 + 1 = 49$ và $a_{49} = 98$.

$$\text{Vậy } S = (98 + 2) \cdot 49 : 2 = 2450.$$

b) *Cách 1* : $T = (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (2011 - 2012) + 2013$

$$= \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{1006 \text{ số } -1} + 2013 = 1007.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2 : } T &= 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \dots + (-2010 + 2011) + (-2012 + 2013) \\ &= 1007. \end{aligned}$$

Cách 3 : Đặt $T_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2011 + 2013$ có số số hạng là

$$(2013 - 1) : 2 + 1 = 1007.$$

$T_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2012$ có số số hạng là 1006.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= T_1 - T_2 = \frac{(1+2013).1007}{2} - \frac{(2+2012).1006}{2} \\ &= 1007.1007 - 1007.1006 = 1007. \end{aligned}$$

$$\text{c) } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2} = 528 \Rightarrow n(n+1) = 1056 = 32.33. \text{ Vậy } n = 32.$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có } n(n+1) : 2 &= a.111 \Rightarrow n(n+1) = a.2.3.37 \\ &\Rightarrow n(n+1) = a.6.37 \Rightarrow a = 6 ; n = 36. \end{aligned}$$

Ví dụ 15.4. Cho dãy số 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; ...

a) Hãy nhận xét dãy số trên và tìm số thứ 10 ; số thứ n là bao nhiêu.

b) Các số 12345 ; 2011 có mặt trong dãy số đó không? là số thứ bao nhiêu của dãy ?

c) Tìm tổng 100 số đầu tiên của dãy số đó.

Giải. a) Nhận xét : các số hạng trong dãy từ số thứ hai trở đi đều bằng số đứng liền trước cộng thêm 4 . Số thứ nhất 5 ; Số thứ hai $9 = 5 + 4$; Số thứ ba $13 = 9 + 4 = 5 + 4.2$. Số thứ tư $17 = 13 + 4 = 5 + 4.3$... Số thứ mười $5 + 4.9 = 41$.

Số thứ n bằng $5 + 4(n - 1) = 4n + 1$.

b) Số $12345 = 3086.4 + 1$ thuộc dãy số trên và là số thứ 3086.

Số $2011 = 502.4 + 3$ không thuộc dãy số trên.

c) Số hạng thứ 100 của dãy là $a_{100} = 5 + 4.(100 - 1) = 401$.

Theo quy tắc tính tổng các số hạng của dãy số cách đều hữu hạn :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2},$$

$$\text{ta có } S_{100} = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \dots + 401 = \frac{(401+5).100}{2} = 20300.$$

Ví dụ 15.5. Cho dãy số tự nhiên chẵn liên tiếp 2 ; 4 ; 6 ; ... ; 2010 ; 2012.

a) Nếu viết liên tiếp các số của dãy thành số $A = 2468101214...20102012$ thì A có bao nhiêu chữ số ?

b) Chữ số thứ 2012 của A là chữ số nào ?

Giải. a) Xét số $A = 2468101214...20102012$.

Từ 2 đến 8 có 4 số có một chữ số ;

Từ 10 đến 98 có $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ số có hai chữ số ;

Từ 100 đến 998 có $(998 - 100) : 2 + 1 = 450$ số có ba chữ số ;

Từ 1000 đến 2012 có $(2012 - 1000) : 2 + 1 = 507$ số có bốn chữ số ;

Số chữ số của A là : $1.4 + 2.45 + 3.450 + 4.507 = 3472$ chữ số .

b) Từ 2 đến 998 có 499 số với $1.4 + 2.45 + 3.450 = 1444$ chữ số.

Mà $2012 - 1444 = 568$.

Như vậy chữ số thứ 2012 nằm trong số các số có bốn chữ số. Ta có $568 : 4 = 142$.

Vậy chữ số thứ 2012 là chữ số hàng đơn vị của số chẵn có bốn chữ số thứ 142.

Đó là chữ số 2 hàng đơn vị của số $1000 + (142 - 1).2 = 1282$.

Ví dụ 15.6. a) Rút gọn tổng $A = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50}$;

b) Rút gọn tổng $B = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{99} + 5^{100}$;

c) Rút gọn tổng $C = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + ... + 3^{2007} - 3^{2008} + 3^{2009} - 3^{2010}$;

d) Chứng minh $S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + ... + a_1.q^{n-1} = a_1.(q^n - 1) : (q - 1)$;

Áp dụng rút gọn tổng $S_{100} = 5 + 5.9 + 5.9^2 + 5.9^3 + ... + 5.9^{99}$.

Giải. a) *Cách 1* : $2A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50} + 2^{51}$.

nên $2A - A = 2^{51} - 2^0 \Rightarrow A = 2^{51} - 1$.

Cách 2 : $A = (2 - 1)(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50})$

$$= (2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50} + 2^{51}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50})$$

$$= 2^{51} - 1.$$

$$b) 5B = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{99} + 5^{100} + 5^{101}; 5B - B = 5^{101} - 5 \Rightarrow B = (5^{101} - 5) : 4.$$

$$c) \text{Ta có: } 3C = 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + \dots + 3^{2010} - 3^{2011}$$

$$\Rightarrow 3C + C = 3 - 3^{2011} \Rightarrow C = (3 - 3^{2011}) : 4.$$

$$d) S_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}). \text{ Xét } Q_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}.$$

$$\text{Ta có } q.Q_n - Q_n = (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) - (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1})$$

$$\text{hay } Q_n(q - 1) = q^n - 1. \text{ Vậy } Q_n = (q^n - 1) : (q - 1)$$

$$\Rightarrow S_n = a_1.(q^n - 1) : (q - 1).$$

(Đây chính là công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng thứ nhất là a_1 ; công bội q).

$$S_{100} = 5 + 5.9 + 5.9^2 + 5.9^3 + \dots + 5.9^{99} = 5.(9^{100} - 1) : 8.$$

Ví dụ 15.7. Tìm x nếu

$$(x + 2) + (4x + 4) + (7x + 6) + \dots + (25x + 18) + (28x + 20) = 1560.$$

$$\textbf{Giải.} \text{ Biến đổi về trái } (1 + 4 + 7 + \dots + 25 + 28).x + (2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 20) = 1560.$$

$$\text{hay } [(1 + 28).10 : 2].x + (20 + 2).10 : 2 = 1560 \Rightarrow 145x + 110 = 1560$$

$$\Rightarrow x = 10.$$

Ví dụ 15.8. a) Tính tổng $D = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$.

$$b) \text{ Chứng minh } D_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}; n \in \mathbb{N}^*.$$

$$c) \text{ Sử dụng kết quả câu a) tính nhanh } E = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2 + 99^2.$$

$$d) \text{ Tính nhanh } F = 1.100 + 2.99 + 3.98 + \dots + 98.3 + 99.2 + 100.1.$$

$$\textbf{Giải.} a) 3D = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 99.100.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98)$$

$$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 99.100.101 - 98.99.100$$

$$= 99.100.101.$$

$$\text{Vậy } D = 99.100.101 : 3 = 333300.$$

b) Chứng minh tương tự câu a).

$$c) E = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2 + 99^2$$

$$= 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 98(99-1) + 99(100-1)$$

$$= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100 - (1 + 2 + 3 + \dots + 99)$$

$$= 333300 - 4950 = 328350.$$

$$d) F = 1.100 + 2(100-1) + 3(100-2) + \dots + 99(100-98) + 100(100-99)$$

$$= 100(1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100)$$

$$= 100.5050 - 333300 = 171700.$$

Ví dụ 15.9. Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10} + 4^{11}$.

Chứng minh rằng

$$a) A : 21 ; \quad b) A : 105 ; \quad c) A : 4097.$$

$$\text{Giải. a) } A = (1 + 4 + 4^2) + (4^3 + 4^4 + 4^5) + (4^6 + 4^7 + 4^8) + (4^9 + 4^{10} + 4^{11})$$

$$= (1 + 4 + 4^2) + 4^3(1 + 4 + 4^2) + 4^6(1 + 4 + 4^2) + 4^9(1 + 4 + 4^2)$$

$$= 21(1 + 4^3 + 4^6 + 4^9) : 21.$$

$$b) A = (1 + 4) + (4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5) + (4^6 + 4^7) + (4^8 + 4^9) + (4^{10} + 4^{11})$$

$$= 5(1 + 4^2 + 4^4 + 4^6 + 4^8 + 4^{10}) : 5.$$

Vậy $A : 5$ và $A : 21$

mà $(5 ; 21) = 1$ nên $A : 5.21$ hay $A : 105$.

$$c) A = (1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5) + 4^6(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5)$$

$$= (1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5)(4^6 + 1)$$

$$= (1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5). 4097 : 4097.$$

Ví dụ 15.10. Cho $a_n = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ số } 1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Hãy xét xem dãy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2012}, a_{2013}$ (1) có bao nhiêu số chia hết cho 13 ?

Giải. Ta thấy số $a_3 = 111111 = 13.8547 : 13$. Dễ dàng suy ra số gồm $2n$ chữ số 1 chia hết cho 13 khi và chỉ khi $n : 3$. Như vậy trong dãy (1), các số $a_3, a_6, a_9,$

..., a_{2010} , a_{2013} (2) chia hết cho 13. Số số hạng của dãy (2) là số số hạng của dãy $3 ; 6 ; 9 ; \dots ; 2010 ; 2013$, chính là $(2013 - 3) : 3 + 1 = 671$ số. Vậy có 671 số trong dãy đã cho chia hết cho 13.

Ví dụ 15.11. Biết $n! = 1.2.3.\dots.n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Tính tổng

$$1 + 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + 100.100!$$

Giải. $1! = 1$ nên $1 + 1.1! = 2 = 1.2 = 2!$;

$$2! + 2.2! = 2!.(1 + 2) = 2!.3 = 3! ;$$

$$3! + 3.3! = 3!.4 = 4! ; \dots$$

Cứ làm như vậy ta có

$$100! + 100.100! = 100!.101 = 101!.$$

B. DÃY PHÂN SỐ VÀ SỐ THẬP PHẦN

Ví dụ 15.12. a) Tính tổng : $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} + \frac{1}{50.51}$.

b) Chứng minh : $A_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Giải. a) Ta thấy $1 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = \dots = 50 - 49 = 51 - 50$.

Do đó ta có thể biến đổi tổng trên như sau :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \frac{4-3}{3.4} + \dots + \frac{50-49}{49.50} + \frac{51-50}{50.51} \\ &= \frac{2}{1.2} - \frac{1}{1.2} + \frac{3}{2.3} - \frac{2}{2.3} + \dots + \frac{50}{49.50} - \frac{49}{49.50} + \frac{51}{50.51} - \frac{50}{50.51} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} + \frac{1}{50} - \frac{1}{51} = \frac{1}{1} - \frac{1}{51} = \frac{51-1}{51} = \frac{50}{51}. \end{aligned}$$

Phương pháp trên biến đổi mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau, người ta gọi là phương pháp khử liên tiếp.

b) Bằng phương pháp khử liên tiếp, ta có $1 = (k+1) - k$

và $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Do đó :

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

Ví dụ 15.13. Tính tổng 50 số hạng đầu tiên của dãy $\frac{1}{2.4}; \frac{1}{4.6}; \frac{1}{6.8}; \dots$

Giải. Cách 1 : Số hạng thứ n của dãy có dạng $\frac{1}{2n(2n+2)}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy

bài toán trở thành tính tổng : $B = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{98.100} + \frac{1}{100.102}$.

Áp dụng ví dụ 15.12b) ta có :

$$B = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} + \frac{1}{50.51} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{50}{51} = \frac{25}{102}.$$

Cách 2 : Nhận xét : $4 - 2 = 6 - 4 = \dots = 102 - 100 = 2$.

$$\begin{aligned} 2B &= \frac{4-2}{2.4} + \frac{6-4}{4.6} + \frac{8-6}{6.8} + \dots + \frac{100-98}{98.100} + \frac{102-100}{100.102} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{102} = \frac{1}{2} - \frac{1}{102} = \frac{50}{102} = \frac{25}{51}. \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{25}{102}$.

Ví dụ 15.14. Tính tổng sau : $C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{48.49.50}$.

Giải. $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}$; $\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}$, ..., $\frac{1}{48.49} - \frac{1}{49.50} = \frac{2}{48.49.50}$.

Ta có $2C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{48.49} - \frac{1}{49.50} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{49.50} = \frac{612}{1225}$.

$\Rightarrow C = \frac{306}{1225}$.

Ví dụ 15.15. a) Cho $D = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{200!}$. Chứng minh rằng $D < 1$.

b) Chứng minh $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Giải. a) Do $\frac{1}{2!} = \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3!} = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4!} = \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{3.4}$; ...;

$$\frac{1}{200!} = \frac{1}{1.2.3 \dots 200} < \frac{1}{199.200}$$

nên $D = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{200!} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{199.200}$.

Mà $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{199.200} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = 1 - \frac{1}{200} < 1$.

Vậy $D < 1$.

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{100} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} \right)$$

$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}.$$

Ví dụ 15.16. Cho $M = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!}$. Chứng minh $3! - M > 4$.

Giải. a) $\frac{1}{2!} = \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3!} = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4!} = \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{3.4}$; ...; $\frac{1}{100!} < \frac{1}{99.100}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } M &< 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 2 - \frac{1}{100} < 2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3! - M = 6 - M > 4.$$

Ví dụ 15.17. a) Tính $R = 1 + 2,25 + 3,5 + 4,75 + \dots + 26$.

b) Tính tổng $S = 1,2 + 2,3 + 3,4 + \dots + 8,9 + 9,10 + 10,11 + 11,12 + \dots + 18,19$.

Giải. a) R là tổng các số hạng của dãy số cách đều với $d = 1,25$.

Số số hạng là $(26 - 1) : 1,25 + 1 = 21$. Vậy $R = (26 + 1).21 : 2 = 283,5$.

b) Ta có $S = S_1 + S_2$ với

$S_1 = 1,2 + 2,3 + 3,4 + \dots + 8,9 = (1,2 + 8,9). 8 : 2 = 40,4$ (dãy số cách đều có $d = 1,1$);

$S_2 = 9,10 + 10,11 + 11,12 + \dots + 18,19 = (9,10 + 18,19).10 : 2 = 136,45$ (dãy số cách đều có $d = 1,01$).

Vậy $S = S_1 + S_2 = 176,85$.

Ví dụ 15.18. Tính nhanh :

$$N = \frac{18.275 + 3.666 + 9.614.2}{1 + 4 + 7 + \dots + 58 + 61 + 62 + 62.2 + 62.3 + 62.4 - 271}.$$

Giải. $18.275 + 3.666 + 9.614.2 = 18.275 + 18.111 + 18.614$

$$= 18.(275 + 111 + 614) = 18000.$$

Mặt khác $1 + 4 + 7 + \dots + 58 + 61 = (1 + 61).21 : 2 = 651$;

$$62 + 62.2 + 62.3 + 62.4 - 271 = 62(1 + 2 + 3 + 4) - 271 = 620 - 271 = 349;$$

$$1 + 4 + 7 + \dots + 58 + 61 + 62 + 62.2 + 62.3 + 62.4 - 271 = 1000.$$

Do đó $N = 18$.

Ví dụ 15.19. Rút gọn : $B = \frac{1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100}}{1 + 15^2 + 15^4 + \dots + 15^{98} + 15^{100} + 15^{102}}.$

Giải. $B = \frac{1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100}}{(1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100}) + (15^2 + 15^6 + \dots + 15^{98} + 15^{102})}$

$$= \frac{1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100}}{(1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100}) + 15^2.(1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100})}$$

$$\frac{(1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100})}{(1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100})(1 + 15^2)} = \frac{1}{1 + 15^2} = \frac{1}{226}.$$

Ví dụ 15.20. Tính nhanh :

a) $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2012}\right);$

b) $B = \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \dots \frac{99^2}{99.100};$

$$c) C = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{6} - 1\right) \left(\frac{1}{10} - 1\right) \left(\frac{1}{15} - 1\right) \left(\frac{1}{21} - 1\right) \left(\frac{1}{28} - 1\right) \left(\frac{1}{36} - 1\right);$$

$$d) D = \left(\frac{6}{8} + 1\right) \left(\frac{6}{18} + 1\right) \left(\frac{6}{30} + 1\right) \dots \left(\frac{6}{10700} + 1\right).$$

Giải. a) $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2010}{2011} \cdot \frac{2011}{2012} = \frac{1}{2012}.$

$$b) B = \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \dots \frac{99^2}{99.100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100}.$$

$$\begin{aligned} c) C &= \left(\frac{2}{2.3} - 1\right) \left(\frac{2}{3.4} - 1\right) \left(\frac{2}{4.5} - 1\right) \left(\frac{2}{5.6} - 1\right) \left(\frac{2}{6.7} - 1\right) \left(\frac{2}{7.8} - 1\right) \left(\frac{2}{8.9} - 1\right) \\ &= -\frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \cdot \frac{18}{4.5} \cdot \frac{28}{5.6} \cdot \frac{40}{6.7} \cdot \frac{54}{7.8} \cdot \frac{70}{8.9} \\ &= -\frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{5.8}{6.7} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{7.10}{8.9} = -\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

$$d) D = \frac{2.7}{1.8} \cdot \frac{3.8}{2.9} \cdot \frac{4.9}{3.10} \dots \frac{101.106}{100.107} = \frac{2.3.4 \dots 101}{1.2.3 \dots 100} \cdot \frac{7.8.9 \dots 106}{8.9.10 \dots 107} = \frac{707}{107}.$$

Ví dụ 15.21.

$$\text{Cho } E = \frac{100^2 + 1^2}{100.1} + \frac{99^2 + 2^2}{99.2} + \frac{98^2 + 3^2}{98.3} + \dots + \frac{52^2 + 49^2}{52.49} + \frac{51^2 + 50^2}{51.50};$$

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} + \frac{1}{101}; \quad G = \frac{1}{100.1} + \frac{1}{99.2} + \frac{1}{98.3} + \dots + \frac{1}{52.49} + \frac{1}{51.50}.$$

a) Tính $\frac{E}{F}.$

b) Tính $F - 101G.$

Giải. a) Ta có: $\frac{m^2 + n^2}{m.n} = \frac{m^2}{m.n} + \frac{n^2}{m.n} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ với $m; n \in \mathbf{N}^*$. Nên ta có:

$$E = \frac{100}{1} + \frac{1}{100} + \frac{99}{2} + \frac{2}{99} + \dots + \frac{51}{50} + \frac{50}{51} = \frac{100}{1} + \frac{99}{2} + \frac{98}{3} + \dots + \frac{3}{98} + \frac{2}{99} + \frac{1}{100}$$

$$= \left(\frac{99}{2} + 1\right) + \left(\frac{98}{3} + 1\right) + \dots + \left(\frac{2}{99} + 1\right) + \left(\frac{1}{100} + 1\right) + 1$$

$$= \frac{101}{2} + \frac{101}{3} + \dots + \frac{101}{100} + \frac{101}{101}.$$

$$E = 101 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} + \frac{1}{101}\right). \text{ Vậy } \frac{E}{F} = 101.$$

$$101G = \frac{100+1}{100 \cdot 1} + \frac{99+2}{99 \cdot 2} + \dots + \frac{52+49}{52 \cdot 49} + \frac{51+50}{51 \cdot 50}$$

$$= 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{52} + \frac{1}{50} + \frac{1}{51}$$

$$F - 101G = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} + \frac{1}{101} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{101} - 1 = \frac{-100}{101}.$$

BÀI TẬP

A. Dãy số nguyên

15.1. Viết thêm hai số hạng tiếp theo của dãy số và tìm số hạng tổng quát của dãy :

- a) 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; ...
- b) 4 ; 10 ; 18 ; 28 ; 40 ; ...
- c) 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27 ; ...

15.2. Cho dãy số 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; ... ; 37 ; ...

- a) Số 37 là số hạng thứ mấy của dãy ?
- b) Số hạng thứ 100 là số nào ? Số hạng tổng quát của dãy ?
- c) Số 2000 ; số 2013 có thuộc dãy trên không ?

15.3. Cho dãy số 2 ; 11 ; 29 ; 56 ; 92 ; ...

- a) Tìm số hạng thứ 100 của dãy.
- b) Số 407 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy ?

15.4. a) Tính tổng $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2011 + 2013$.

- b) Tính tổng của 100 số tự nhiên chẵn liên tiếp bắt đầu từ số 100.

15.5. Tính các tổng sau đây bằng các cách hợp lí :

a) $C = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots - 2009 + 2011 - 2013$;

b) $D = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 2006 - 2008 + 2010 - 2012$;

c) $G = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 111 - 112 + 113 + 114 + 115$.

15.6. Cho dãy số 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; ...

a) Tìm số thứ n.

b) Tìm tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

15.7. a) Cho A là tổng các số tự nhiên chẵn không vượt quá 200. B là tổng các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 200. Tính $A - B$.

b) Tìm n biết $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 1225$.

15.8. Tìm x nếu :

a) $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 5750$;

b) $(2x - 1) + (4x - 2) + \dots + (400x - 200) = 5 + 10 + \dots + 1000$.

15.9. Viết liên tiếp các số tự nhiên thành dãy 123456789101112....

a) Tìm tổng các chữ số của số $A = 12345\dots9899100$.

b) Chữ số 2 ở hàng nghìn của số 2012 là chữ số thứ bao nhiêu của dãy?

15.10. Viết liên tiếp các số tự nhiên lẻ thành dãy 13579111315...

a) Chữ số thứ 100 của dãy là chữ số nào ?

b) Chữ số 1 của số 2013 là chữ số thứ bao nhiêu của dãy?

15.11. Cho $P = 46.47.48\dots89.90$.

a) Có bao nhiêu thừa số 2 khi phân tích P ra thừa số nguyên tố ?

b) P có tận cùng là bao nhiêu chữ số 0 sau khi thực hiện phép nhân ?

15.12. a) Cho $T = 2013^0 + 2013^1 + 2013^2 + \dots + 2013^{2009} + 2013^{2010}$.

Tính $2012T + 1$;

b) Cho $a, n \in \mathbb{N}^*$; $a \neq 1$; $a \neq 0$. Rút gọn tổng $S = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n$.

15.13. a) Cho $T = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99}$.

Tìm số tự nhiên n biết rằng $2T + 3 = 3^{2n}$.

b) Chứng minh $4A + 25$ là một lũy thừa của 5 với $A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2012}$.

c) Cho $C = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}$ và $B = 4^{101}$. Chứng minh rằng $C < \frac{B}{3}$.

15.14. Tính tổng $A = 10.11 + 11.12 + 12.13 + \dots + 28.29 + 29.30$.

15.15. a) Tính tổng $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$;

b) Tính tổng $C = 101^2 + 102^2 + \dots + 199^2 + 200^2$;

c) Tính tổng $S = 1.3 + 2.4 + 3.5 + 4.6 + \dots + 99.101 + 100.102$;

d) Tính tổng $T = 1.100 + 2.99 + 3.98 + \dots + 99.2 + 100.1$;

e) Tính tổng $E = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 98.99.100$.

15.16. Cho $S_1 = 3$; $S_2 = 9$; $S_3 = 18$; $S_4 = 30$; $S_5 = 45 \dots$. Tìm S_{100} .

15.17. a) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số $100!$ chứa thừa số nguyên tố 3 với số mũ bằng bao nhiêu ?

b) Tích $30.31.32 \dots 89.90$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố ?

15.18. Trong dãy số tự nhiên $1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n$, người ta thành lập các tổng sau :

$$T_1 = 1 ; T_2 = 2 + 3 ; T_3 = 4 + 5 + 6 ; T_4 = 7 + 8 + 9 + 10 ;$$

$$T_5 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 ; \dots$$

Tính $T_{101} - T_{100}$.

15.19. Tính giá trị của biểu thức $U = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{100 \text{ số } 3}$.

15.20. Tính tổng S các số hạng đứng trước số 1 cuối cùng trong tổng sau :

$$1 + 5 + 1 + 5 + 5 + 1 + 5 + 5 + 5 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 + \dots$$
$$+ 1 + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{2012 \text{ số } 5} + 1.$$

15.21. Gọi S_n là tổng các chữ số trong số tự nhiên n (ví dụ $S_5 = 5$; $S_{27} = 2 + 7 = 9$).

Tính tổng $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2012} + S_{2013}$.

B. DÃY PHÂN SỐ VÀ SỐ THẬP PHÂN

15.22. Tính : a) $A = \frac{1}{15.16} + \frac{1}{16.17} + \frac{1}{17.18} + \dots + \frac{1}{2011.2012} + \frac{1}{2012.2013}$.

$$b) T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{512}\right) + \left(1 - \frac{1}{1024}\right).$$

$$c) V = 4.5^{100} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}}\right) + 1.$$

15.23. Tính tổng $B = 50 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} + \frac{20}{4} + \frac{10}{3} + \frac{100}{6.7} + \dots + \frac{100}{98.99} + \frac{1}{99}$.

15.24. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của các dãy sau :

a) $\frac{1}{3}; \frac{1}{15}; \frac{1}{35}; \dots$

b) $\frac{1}{5}; \frac{1}{45}; \frac{1}{117}; \frac{1}{221}; \dots$

15.25. a) Tính :

$$E = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{99.100} - \frac{1}{99.100.101} ;$$

b) Tính : $F = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \dots + \frac{1}{47.48.49.50}$.

15.26. Tìm x biết : a) $\frac{1}{2013}x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2012.2013} = 2$;

b) $2x + \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{30} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} = 10$;

15.27. Tìm y biết :

a) $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{98.99.100} \right) y = \frac{49}{200}$;

b) $\frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{y(y+3)} = \frac{98}{1545}$.

15.28. Cho các số 36 ; 60 ; 90 ; 126 ; 168 ; 216 ; 270 ; 330 ; 396. Tính tỉ số giữa tổng nghịch đảo của các số trên và tổng các số trên .

15.29. Rút gọn :

a) $P = \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+99+100)}{(1.100 + 2.99 + \dots + 99.2 + 100.1).2013}$;

b) $Q = \left(\frac{5^3}{6} + \frac{5^3}{12} + \frac{5^3}{20} + \frac{5^3}{30} + \frac{5^3}{42} + \frac{5^3}{56} + \frac{5^3}{72} + \frac{5^3}{90} \right) : \frac{1124.2247 - 1123}{1124 + 1123.2247}$.

15.30. Tính giá trị biểu thức : $Q = \frac{4 + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{95} + \frac{3}{97} + \frac{3}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{95.5} + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}}$.

15.31. a) Cho $E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng minh rằng $E < 1$.

b) Cho $F = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}$. Chứng minh rằng: $F < 1\frac{3}{4}$.

c) Cho $G = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Chứng minh $G < \frac{1}{2}$.

d) Cho $H = 2 + \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng minh rằng $H > 50$.

15.32. a) Cho $K = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}$. Chứng minh $\frac{1}{5} < K < \frac{1}{3}$;

b) Cho $L = \frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2} + \dots + \frac{1}{198^2} + \frac{1}{199^2}$. Chứng minh $\frac{1}{200} < L < \frac{1}{99}$.

15.33. a) Cho $S = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2012!}$. Chứng minh rằng $S < 2$.

b) Chứng minh rằng $\frac{9}{10!} + \frac{10}{11!} + \frac{11}{12!} + \dots + \frac{99}{100!} < \frac{1}{9!}$.

15.34. a) Cho $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$;

$Q = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}$. Tính $P : Q$.

b) Cho $M = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{8} + \dots + \frac{197}{198} - \frac{199}{200}$ và $N = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$.

Tính $N : M$.

15.35. Tính $Q : P$ biết $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}$;

$Q = \frac{1}{2011} + \frac{2}{2010} + \frac{3}{2009} + \dots + \frac{2009}{3} + \frac{2010}{2} + \frac{2011}{1}$.

15.36. Tính tổng :

a) $R = 1,1 + 2,6 + 4,1 + 5,6 + \dots + 148,1 + 149,6$;

b) $S = 1,2 + 2,3 + \dots + 8,9 + 9,10 + 10,11 + \dots + 98,99 + 99,100 + 100,101 + \dots + 998,999$;

$$c) T = 1,2 + 2,4 + 3,6 + 4,8 + 5,10 + 6,12 + \dots + 45,90 ;$$

$$d) U = 1,2 + 2,4 + 3,6 + 4,8 + 6 + 7,2 + \dots + 120 .$$

15.37. Tính nhanh :

$$a) B = \left(\frac{1}{10} - 1\right) \left(\frac{1}{11} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100} - 1\right) ;$$

$$b) E = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) ;$$

$$c) H = \left(\frac{7}{9} + 1\right) \left(\frac{7}{20} + 1\right) \left(\frac{7}{33} + 1\right) \dots \left(\frac{7}{10800} + 1\right) ;$$

$$d) I = \left(1 - \frac{28}{10}\right) \left(1 - \frac{52}{22}\right) \left(1 - \frac{80}{36}\right) \dots \left(1 - \frac{21808}{10900}\right).$$

15.38. Rút gọn biểu thức :

$$a) A = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}}{\frac{2013}{1} + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012} - 2012} ;$$

$$b) B = \frac{\left(1 + \frac{2012}{1}\right) \left(1 + \frac{2012}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{2012}{1000}\right)}{\left(1 + \frac{1000}{1}\right) \left(1 + \frac{1000}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1000}{2012}\right)} .$$

15.39. Tìm x nếu :

$$a) \frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \dots \frac{110}{10^2} \cdot x = -20 ;$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right) \cdot x + 2013 = \frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \dots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013} ;$$

$$c) \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}\right) \cdot x = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \dots + \frac{2012}{99} + \frac{2012}{100} ;$$

$$d) \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{19.21}\right) \cdot 420 - [0,4 \cdot (7,5 - 2,5x)] : 0,25 = 212 .$$

15.40. Cho $C = \frac{333}{444} \cdot \frac{888}{999} \cdot \frac{1515}{1616} \cdot \frac{2424}{2525} \cdot \frac{3535}{3636} \cdot \frac{4848}{4949} \cdot \frac{6363}{6464} \cdot \frac{8080}{8181}$;

$$D = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \left(1 - \frac{1}{21}\right) \left(1 - \frac{1}{28}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right)$$

a) Tính $C : D$.

b) Tính tổng các nghịch đảo của C và D .

c) Tìm $x ; y \in \mathbf{Z}$ sao cho $D < \frac{x}{36} < C$ và $-D \geq \frac{-10}{y} \geq -C$.

15.41. a) Chứng minh $E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20}$ không phải là số nguyên.

b) Cho $\frac{a}{b} = F = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99.100}$.

Chứng minh $a : 151$.

15.42. Tính tổng : $1,1 + 1,11 + 1,111 + \dots + \underbrace{1,11\dots1}_{9 \text{ số } 1} + \underbrace{1,11\dots1}_{10 \text{ số } 1}$.

15.43. Số thứ 100 trong dãy sau là số nào ?

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{5}{1}; \frac{4}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{5}; \dots$$

15.44. Cho $P = \left(1 + \frac{2}{1}\right) \left(1 + \frac{2}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{2}{98}\right) \left(1 + \frac{2}{99}\right)$

$$Q = (-1 - 2 - 3 - \dots - 99 - 100) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right). \text{ Tính } \frac{P}{Q}.$$

15.45. Tính nhanh tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{14850}$.

15.46. Cho $A = 1,01 + 1,02 + 1,03 + \dots + 9,98 + 9,99 + 10$.

$$B = 2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}.$$

Tính $2A + \frac{455}{3}B$.

HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Chuyên đề 1. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ TỰ NHIÊN

- 1.1. a) $215.62 + 42 - 52.215 = 215.(62 - 52) + 42 = 2150 + 42 = 2192$.
b) Chú ý rằng $199199.198 - 198198.199 = 1001.199.198 - 1001.198.199 = 0$.
Đáp số: 1400.
- 1.2. a) Phải viết tất cả 432 chữ số.
b) Từ 1 đến 9 có 9 số, phải viết 9 chữ số.
Từ 10 đến 99 có 90 số, phải viết $2.90 = 180$ (chữ số).
Còn lại $327 - (9 + 180) = 138$ chữ số, dùng để viết các số có ba chữ số kể từ 100.
Quyển sách có $99 + 138 : 3 = 145$ (trang).
- 1.3. Gọi hiệu của hai số phải tìm là a thì tổng của chúng bằng $3a$, tích của chúng bằng $6a$.
Số nhỏ bằng $(3a - a) : 2 = a$.
Số lớn bằng $(3a + a) : 2 = 2a$.
Số nhỏ bằng $6a : 2a = 3$.
Số lớn bằng $6a : a = 6$.
- 1.4. Gọi số phải tìm là a , khi chia a cho 69 được thương và số dư đều là k . Ta có
$$a = 69k + k \text{ nên } a = 70k.$$

Do $a \leq 999$ nên $70k \leq 999$, suy ra $k \leq 14$.
Để a lớn nhất, ta chọn $k = 14$. Khi đó $a = 70.14 = 980$.
- 1.5. Ta thấy $111\ 111 : 1001 = 111$.

$$a = \underbrace{11\dots1}_{100 \text{ chữ số}} = \underbrace{11\dots1}_{96 \text{ chữ số}} 1111.$$

Vì $\underbrace{11\dots1}_{96 \text{ chữ số } 1}$ chia hết cho 1001, còn 1111 chia cho 1001 dư 110 nên a chia cho 1001 dư 110.

$$\begin{array}{r} 1.6. \quad 8 \text{ a b a} \\ + \quad c \text{ 2 5 d} \\ \hline d \text{ 5 2 c} \end{array}$$

Xét cột hàng nghìn ta được $c = 1$, $d = 9$ nên số hạng thứ nhất bằng $9521 - 1259 = 8262$.

$$1.7. \quad \text{Ta có } n = \overline{abc} + \overline{bca} = 101a + 110b + 11c.$$

Để n lớn nhất, ta chọn $b = 3$, $a = 2$, $c = 1$.

$$\text{Ta được } n = 231 + 312 = 543.$$

$$1.8. \quad \text{Ta có } \overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{bac}$$

$$\text{nên } 11(a + b + c) = 100b + 10a + c.$$

$$\text{Suy ra } 10c + a = 89b, \text{ tức là } \overline{ca} = 89b.$$

$$\text{Vậy } b = 1, \overline{ca} = 89. \text{ Ta có } 99 + 11 + 88 = 198.$$

$$1.9. \quad \text{a) } \begin{array}{r|l} * * * 1 & a \text{ b} \\ * * * & \hline * * * & b \text{ a} \\ * * * & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ta thấy $a.b$ tận cùng bằng 1 và $a \neq b$ nên chỉ có thể $a = 7$ và $b = 3$ hoặc $a = 3$, $b = 7$.

$$\text{Số bị chia bằng } 73.37 = 2701.$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|l} * * * * & 4 * \\ * * 8 & \hline * * * & * * \\ 4 \text{ 3 2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Gọi thương là } \overline{ab}. \text{ Ta có } 432 : b = \overline{4*}$$

$$\text{mà } 432 : 8 = 54 \text{ nên } b > 8. \text{ Vậy } b = 9.$$

$$\text{Số chia bằng } 432 : 9 = 48.$$

$$\text{Xét tích riêng thứ nhất, ta có } 48.a = \overline{**8} \text{ nên } a = 6.$$

$$\text{Số bị chia bằng } 69.48 = 3312.$$

1.10. Cần đếm lượng các số $\overline{ab}$ mà $a < b$.

Nếu $a = 1$ thì $b \in \{2; 3; \dots; 9\}$, b nhận 8 giá trị.

Nếu $a = 2$ thì $b \in \{3; 4; \dots; 9\}$, b nhận 7 giá trị.

Nếu $a = 3$ thì $b \in \{4; 5; \dots; 9\}$, b nhận 6 giá trị.

...

Nếu $a = 7$ thì $b \in \{8; 9\}$, b nhận 2 giá trị.

Nếu $a = 8$ thì $b = 9$, nhận 1 giá trị.

Có $8 + 7 + 6 + \dots + 2 + 1 = 36$ (số) mà chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị.

1.11. Số lượng các số tự nhiên có ba chữ số là $999 - 100 + 1 = 900$ (số).

Số lượng các số tự nhiên có dạng $\overline{abc}$ mà a, b, c khác nhau là $9.9.8 = 648$ (số).

Có $900 - 648 = 252$ số thỏa mãn đề bài.

1.12. *Cách 1.* Có 1 chữ số 5 ở hàng trăm (của số 500).

Các chữ số 5 có ở hàng chục của các số có tận cùng 50, 51, ..., 59 nên có $10.5 = 50$ (số).

Các chữ số 5 có ở hàng đơn vị (mà không có ở hàng chục) của các số có tận cùng 05, 15, 25, 35, 45, 65, 75, 85, 95 nên có $9.5 = 45$ (số).

Tất cả có $1 + 50 + 45 = 96$ số phải tìm.

Cách 2. Xét các số từ 000 đến 499, các số không chứa chữ số 5 có dạng $\overline{abc}$, trong đó a có 5 cách chọn (từ 0 đến 4), b và c có 9 cách chọn (từ 0 đến 9, khác 5) nên có $5.9.9 = 405$ số.

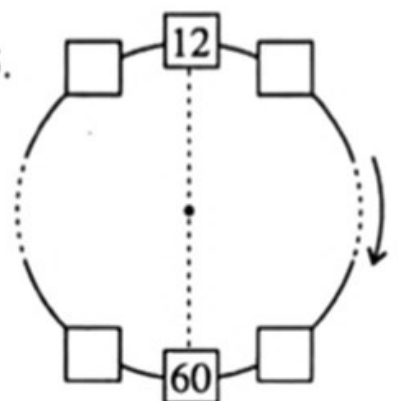
Từ 0 đến 499 có $500 - 405 = 95$ số có chứa chữ số 5.

Từ 1 đến 499 cũng có 95 số có chứa chữ số 5.

Từ 1 đến 500 có 96 số có chứa chữ số 5.

1.13. (h.11). Xét đường thẳng chứa các ô ghi số 12 và số 60.

Ở một phía của đường thẳng, có các số từ 13 đến 59, gồm $59 - 13 + 1 = 47$ (số).



Hình 11

Ở phía kia của đường thẳng cũng có 47 số.

Kể cả hai số 12 và 60, có tất cả $47 + 47 + 2 = 96$ (số).

Vậy $n = 96$.

- 1.14.** Có n số tự nhiên từ $n + 1$ đến $2n$. Do đó để tính n , ta tính số lượng các số tự nhiên từ $n + 1$ đến $2n$.

Trong các số lẻ nằm giữa n và $2n$, gọi số nhỏ nhất là a , số lớn nhất là b . Từ a đến b có 100 số lẻ, giữa chúng có 99 số chẵn, còn $2n$ là số liền sau của b , do đó từ a đến $2n$ có $100 + 99 + 1 = 200$ (số tự nhiên).

Xét hai trường hợp:

– Nếu n là số chẵn thì $n + 1$ trùng với a , do đó từ $n + 1$ đến $2n$ có 200 số tự nhiên, suy ra $n = 200$.

– Nếu n là số lẻ thì $n + 1$ là số liền trước của a , do đó từ $n + 1$ đến $2n$ có 201 số tự nhiên, suy ra $n = 201$.

- 1.15.** Hai chữ số 3 cách nhau ba chữ số nên số phải tìm có một trong hai dạng $3 * * * 3 *$ hoặc $* 3 * * * 3$.

– Với dạng $3 * * * 3 *$, do hai chữ số 2 cách nhau hai chữ số nên chỉ có thể là $3 * 2 * 3 2$. Hai chữ số 1 cách nhau một chữ số nên số phải tìm là 312 132.

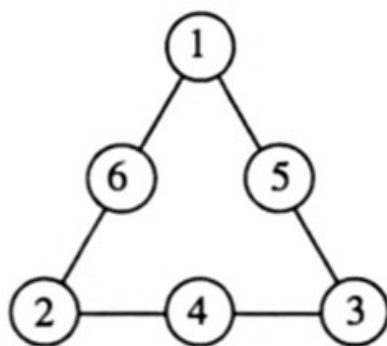
– Với dạng $* 3 * * * 3$, bạn đọc tự giải để tìm được số 231 213.

- 1.16.** Tổng các số từ 1 đến 6 bằng

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Tổng trên ít hơn ba lần tổng các số trên mỗi cạnh là $9 \cdot 3 - 21 = 6$.

Do đó tổng ba số ở đỉnh của tam giác là 6, đó là các số 1, 2, 3. Từ đó ta xếp được các số như trên hình 12.



Hình 12

- 1.17.** (h.13). Đặt $4 + 9 + b + 7 = m$ thì $m = b + 20$.

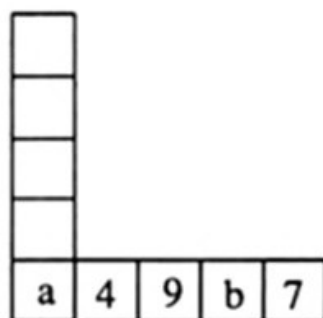
Tổng các số tự nhiên từ 1 đến 9 bằng 45 và tổng các số theo hàng bằng tổng các số theo cột nên $2m = 45 - a$.

Do $a \geq 1$ nên $m \leq 22$, tức là $b + 20 \leq 22$.

Vậy $b \in \{1; 2\}$.

Nếu $b = 1$ thì $m = 21$, $a = 3$.

Nếu $b = 2$ thì $m = 22$, $a = 1$.



Hình 13

1.18. Số a chia cho 72 dư 69 nên

$$\begin{aligned}a &= 72k + 69 \quad (k \in \mathbb{N}) \\&= 18.4k + 18.3 + 15 \\&= 18(4k + 3) + 15.\end{aligned}$$

Suy ra a chia cho 18 dư 15.

Do a chia cho 18 được thương bằng số dư nên $4k + 3 = 15$.

Từ đó $k = 3$ và $a = 285$.

1.19. a) $[32 : 4] = 8$; $[61 : 4] = 15$.

$$\text{b) } [800 : 5] + [800 : 5^2] + [800 : 5^3] + [800 : 5^4] = 160 + 32 + 6 + 1 = 199.$$

Lưu ý. $[800 : 5^2]$ cũng bằng $[160 : 5]$, $[800 : 5^3]$ cũng bằng $[32 : 5]$, $[800 : 5^4]$ cũng bằng $[6 : 5]$.

1.20. Số bị chia nhỏ nhất là 8400, lớn nhất là 8499.

Ta thấy 8400 chia 47 được 178 dư 34,

8499 chia 47 được 180 dư 39

nên $178 < \overline{*8*} \leq 180$. Vậy $\overline{*8*} = 180$.

Ta được $8460 : 47 = 180$.

1.21. a) 25 ; b) 12.

$$\text{1.22. } 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 18^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + 9^3) = 8.2025 = 16200.$$

$$\text{1.23. Ta có } a = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10} \quad (1)$$

$$\text{nên } 2a = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} + 2^{11}. \quad (2)$$

Lấy (2) trừ đi (1) được $2a - a = 2^{11} - 2$ tức là $a + 2 = 2^{11}$.

Lưu ý. Nét độc đáo trong lời giải trên là để tính a , ta xét biểu thức $2a$ (số 2 là cơ sở của lũy thừa) rồi trừ đi a .

1.24. Ta có $(2x + 1)^2 = 25^2$ nên $2x + 1 = 25$. Từ đó $x = 12$.

$$\begin{aligned}\text{1.25. Đặt } a = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ chữ số}} \text{ thì } A &= \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ chữ số } 1} - \underbrace{22\dots2}_{n \text{ chữ số } 2} = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{11\dots1}_n - 2 \cdot \underbrace{11\dots1}_n \\&= a \cdot 10^n + a - 2a = a \cdot 10^n - a.\end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } 9a + 1 = \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số } 9} + 1 = 10^n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A = a(9a + 1) - a = 9a^2 = (3a)^2$.

Vậy A là số chính phương.

1.26. a) Ta có $7^{35} = \underbrace{7^4 \cdot 7^4 \dots 7^4}_{8 \text{ lần } 7^4} \cdot 7^3 = (\dots 1)^8 \cdot (\dots 3)$ tận cùng 3.

$$4^{31} = \underbrace{4^2 \cdot 4^2 \dots 4^2}_{15 \text{ lần } 4^2} \cdot 4 = 16^{15} \cdot 4 = (\dots 6) \cdot 4 \text{ tận cùng } 4.$$

Vậy $7^{35} - 4^{31}$ tận cùng bằng 9.

b) 2^{1930} tận cùng bằng 4, còn 9^{1945} tận cùng bằng 9. Tích tận cùng bằng 6.

1.27. a) Số tận cùng 51 nâng lên lũy thừa hai thì tận cùng bằng 01. Số tận cùng bằng 01 nâng lên lũy thừa n cũng tận cùng 01.

$$351^{2011} = \underbrace{351^2 \dots 351^2}_{1005 \text{ lần } 351^2} \cdot 351 = (\dots 01)^{1005} \cdot 351 = (\dots 01) \cdot 351 = \dots 51.$$

b) Số tận cùng 18 nâng lên lũy thừa bốn thì tận cùng bằng 76.

Số tận cùng bằng 76 nâng lên lũy thừa n (khác 0) cũng tận cùng 76.

Đáp số: 218^{218} tận cùng bằng 24.

Chuyên đề 2. BÀI TOÁN THỰC TẾ

2.1. $(20 \cdot 30 + 1300) - (1500 + 80 + 120) = 200$.

Lợi nhuận 200 triệu đồng.

2.2. Có 9 phần xích tiếp giáp nhau, mỗi phần làm chiều dài của dây xích giảm đi

$$3 + 3 = 6 \text{ (mm)}.$$

Chiều dài lớn nhất của dây xích là

$$40 \cdot 10 - 9 \cdot 6 = 346 \text{ (mm)}.$$

2.3. Đánh số ngày nghỉ của An là ngày 1, của Bích là ngày 2 thì An nghỉ vào các ngày 1, 11, 21, 31, 41, 51... và Bích nghỉ vào các ngày 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51,...

Vậy sau ít nhất 50 ngày nữa thì cả hai người sẽ có cùng ngày nghỉ.

2.4. Tổng số tuổi của 10 người là

$$(82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 90 + 91 + 92) : 9 = 97.$$

Tuổi của người trẻ nhất là $97 - 92 = 5$ (tuổi).

Tuổi của người già nhất là $97 - 82 = 15$ (tuổi).

2.5. Sau số 15951, để được số đối xứng nhỏ nhất thì chữ số hàng đơn vị phải giữ nguyên (để chữ số đầu tiên bên trái giữ nguyên). Cho chữ số hàng *chục tăng* ít nhất (thành số 6), ta có số đối xứng $16*61$. Số nhỏ nhất có dạng 16061.

2.6. Giả sử mỗi con mèo đều dẫu đi 2 chân.

Khi đó chỉ có $2.34 = 68$ (chân).

Số chân bị dẫu đi là $80 - 68 = 12$ chân.

Số mèo là $12 : 2 = 6$ (con).

2.7. Có 8 con tàu có 5 cột buồm.

2.8. Gọi số người của đội tuyển là a . Ta thấy $160 : 10 = 16$, $160 : 8 = 20$ nên $16 < a < 20$. Do a chia hết cho 6 nên $a = 18$.

Sau đó giải bằng phương pháp giả thiết tạm, ta tìm được số học sinh đạt điểm 10 là 8 học sinh.

2.9. a) Vòng 1 có $64 : 2 = 32$ (trận).

b) Vòng 5 có $64 : 2^5 = 2$ (trận).

2.10. Tâm có 6 cách chọn tờ tiền mệnh giá 2000 đồng (chọn 0, 1, 2, 3, 4, 5 tờ), có 5 cách chọn tờ tiền mệnh giá 5000 đồng nên có $6.5 = 30$ cách chọn.

Loại đi cách chọn 0 tờ tiền 2000 đồng và 0 tờ tiền 5000 đồng nên có tất cả $30 - 1 = 29$ cách chọn.

2.11. Số bạn lớp 6A xếp cùng hàng đôi với bạn lớp 6B là $40 - 2a$.

Số bạn lớp 6B xếp cùng hàng đôi với bạn lớp 6A là $30 - 2b$.

Ta có $40 - 2a = 30 - 2b$ nên $2a - 2b = 40 - 30$.

Do đó $a - b = 5$.

2.12. a) Chín số của bảng 3×3 được kí hiệu như sau:

a	$a + 1$	$a + 2$
$a + 7$	$a + 8$	$a + 9$
$a + 14$	$a + 15$	$a + 16$

Tổng số của bảng bằng $9a + 72$ nên $9a + 72 = 162$.

Suy ra $a = 10$. Số ở chính giữa của bảng là số 18.

b) Bảng đó là

10	11	12
17	18	19
24	25	26

Chuyên đề 3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT. DẤU HIỆU CHIA HẾT

- 3.1. a) Các số nhận được đều chia hết cho 7, đó là các số 91, 182, 273, 364, 455.
b) Thay số 6 bởi số 10, ta được số 9010 không chia hết cho 7.
- 3.2. Ta có $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd})$.
Vì $99\overline{ab} : 11$ nên nếu $\overline{ab} + \overline{cd} : 11$ thì $\overline{abcd} : 11$.
- 3.3. a) Ta có $\overline{abcabc} = 1001.\overline{abc} = 7.143.\overline{abc}$ chia hết cho 7.
b) $n = \overline{31a31a31a} = \overline{31a31a000} + \overline{31a}$.
Theo câu a, số $\overline{31a31a}$ chia hết cho 7 nên nếu $\overline{31a} : 7$ thì $n : 7$.
Ta có $\overline{31a} : 7$ thì $2 + a : 7$, tức là $a = 5$.
- 3.4. Chữ số tận cùng của số phải viết bằng 0. Chọn hai chữ số còn lại có tổng chia hết cho 9 là 6 và 3.
Các số phải viết là 630 và 360.
- 3.5. a) Ta có $\overline{abcd0} - \overline{1110n} = \overline{abcd}$.
Số bị trừ gấp 10 hiệu nên số trừ gấp 9 hiệu.
Số $\overline{1110n} : 9$ nên $n = 6$.
Số trừ là 11106. Hiệu là $\overline{11106} : 9 = 1234$.
Ta được $\overline{12340} - \overline{11106} = 1234$.
b) $\overline{3a4b5} : 9$ nên $(3 + 4 + 5) + (a + b) : 9$, tức là $12 + a + b : 9$.
Vậy $a + b = 6$ hoặc $a + b = 15$.

Trường hợp $a + b = 6$ và $a - b = 2$ cho $a = 4, b = 2$.

Trường hợp $a + b = 15$ và $a - b = 2$ loại.

$$3.6. A = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ chữ số } 1} - 10n = (\underbrace{11\dots1}_{n \text{ chữ số } 1} - n) - 9n.$$

Số $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ chữ số } 1}$ có tổng các chữ số bằng n và số n có cùng số dư khi chia cho 9 nên hiệu của chúng chia hết cho 9.

Vậy A chia hết cho 9.

3.7. Số a và số $6a$ có tổng các chữ số như nhau nên hiệu của chúng (là $5a$) chia hết cho 9.

Tích $5a$ chia hết cho 9 mà 5 và 9 không chia hết cho cùng một số tự nhiên nào khác 1 nên $a \vdots 9$.

3.8. Ta có $n = 161718192021 \dots 89$.

Trước hết xét dãy 20, 21, 22, ..., 29, 30, 31, ..., 89.

Tổng các chữ số hàng chục của dãy là

$$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot 10 = 35 \cdot 10 = 350.$$

Tổng các chữ số hàng đơn vị của dãy là

$$(0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot 7 = 45 \cdot 7 = 315.$$

Tổng các chữ số của n bằng $1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 350 + 315 = 699$.

Số 699 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

Do đó n chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

Vậy số tự nhiên k lớn nhất để $n \vdots 3^k$ là $k = 1$.

3.9. a) Vận dụng các dấu hiệu chia hết cho 8 và 9.

Đáp số: 53784.

b) Vận dụng dấu hiệu chia hết cho 3 và 8.

Đáp số: 242688 và 248688.

3.10. Ta có $\overline{abc} \vdots 4$ nên $\overline{bc} \vdots 4$ tức là $10b + c \vdots 4$.

Do b chẵn, đặt $b = 2b'$ ($b' \in \mathbb{N}$), ta được $20b' + c \vdots 4$.

Suy ra $c \vdots 4$. (1)

Xét $\overline{ac} = 10a + c$. Đặt $a = 2a'$ ($a' \in \mathbb{N}$) được $\overline{ac} = 20a' + c$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{ac} \vdots 4$. Vậy $\overline{bac} \vdots 4$.

3.11. Gọi hai số tự nhiên liên tiếp phải tìm là n và $n + 1$.

Ta có $n : 8$ và $n + 1 : 125$.

Số $n + 1$ là số lẻ có ba chữ số và chia hết cho 125 nên

$$n + 1 \in \{125; 375; 625; 875\}.$$

Khi đó $n \in \{124; 374; 624; 874\}$. Trong các số trên, chỉ có $624 : 8$.

Hai số phải tìm là 624 và 625.

3.12. a) Ta viết số nhỏ nhất có sáu chữ số khác nhau là 102345. Còn lại bốn chữ số 6, 7, 8, 9, có hai cách lập thành số có hai chữ số và chia hết cho 4 là 96 và 68, ta chọn 96.

Số phải viết là 1023457896.

b) *Đáp số:* 1023457896.

c) Để chia hết cho 25, số phải viết cần tận cùng 25, 50, 75. Ta không chọn 50 (để dùng chữ số 0 viết ở những vị trí đầu). Trong hai số 25 và 75, ta chọn 75. Số phải viết là 1023468975.

d) Để chia hết cho 125, số phải viết cần tận cùng 125, 250, 375, 625, 750, 875.

Ta chọn số 875. Số phải viết là : 1023469875.

3.13. a) Ta phải có $(7 + 8 + *) - (2 + 4 + 3) : 11$ tức là $6 + * : 11$. Vậy $* = 5$.

Ta được $354827 : 11$.

b) Dùng dấu hiệu chia hết cho 8, ta tìm được chữ số hàng đơn vị là 6.

Dùng dấu hiệu chia hết cho 11, ta tìm được chữ số đầu tiên là 6.

Ta được $620136 : 88$.

c) $3576 - \overline{abc} = \overline{abcd}$.

Viết thêm chữ số d vào cuối của số bị trừ và số trừ, ta được

$$\overline{3576d} - \overline{abcd} = \overline{abcd0} \text{ nên } \overline{3576d} = 11 \cdot \overline{abcd}.$$

Dùng dấu hiệu chia hết cho 11 hoặc đặt phép chia $\overline{3576d}$ cho 11, ta tìm được $d = 1$.

$$\overline{abcd} = 35761 : 11 = 3251. \text{ Ta được } 3576 - 325 = 3251.$$

3.14. Ta có $n = \overline{Abcd} = 1000.A + \overline{bcd} = 999A + (A + \overline{bcd})$.

Do $999 : 37$ và $A + \overline{bcd} : 37$ nên $n : 37$.

3.15. Giải tương tự Ví dụ 3.6. *Đáp số:* 12.

3.16. a) Có $4.3.2.1. = 24$ (số).

b) Giả sử trong 24 số trên, có hai số a và b mà $a = bk$ ($k \in \mathbf{N}$). Ta thấy $a \leq 4321$ và $b \geq 1234$ nên $a : b < 4$. Do $a \neq b$ nên $k \in \{2; 3\}$.

Nếu $k = 3$ thì $a \div 3$. Loại trường hợp này vì tổng các chữ số của a bằng $1 + 2 + 3 + 4$, không chia hết cho 3.

Xét $k = 2$. Ta thấy số lập bởi bốn chữ số 1, 2, 3, 4 nhân với 2 là một phép nhân không nhớ, và tích là số lập bởi bốn chữ số 2, 4, 6, 8. Suy ra số a có bốn chữ số là 2, 4, 6, 8, trái với đề bài là a không chứa chữ số 6 (cũng không chứa chữ số 8).

Vậy trong 24 số lập được ở câu a, không có hai số nào mà một số chia hết cho số còn lại.

3.17. a) Xét $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Trường hợp nào cũng có một thừa số của tích $n(n + 2)(n + 7)$ chia hết cho 3.

b) Với $n = 0$ thì $5^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, chia hết cho 4.

Với $n = 1$ thì $5 - 1 = 4$, chia hết cho 4.

Với $n \geq 2$ thì 5^n tận cùng 25 nên $5^n - 1$ tận cùng 24, do đó $5^n - 1$ chia hết cho 4.

c) $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$.

Ta thấy $n(n + 1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên tận cùng bằng 0, 2, 6. Suy ra $n(n + 1) + 2$ tận cùng bằng 2, 4, 8, không chia hết cho 5.

3.18. Ta có $n^2 - n = n(n - 1)$.

$n^2 - n \div 5$ nếu $n \div 5$ hoặc $n - 1 \div 5$, tức là n tận cùng bằng 0, 5, 1, 6.

Để n lớn nhất có ba chữ số, ta chọn $n = 996$.

3.19. Gọi số phải tìm là $\overline{abcdeg hik}$.

Ta có $\overline{ab} \div 2$, để nhỏ nhất ta chọn $\overline{ab} = 12$.

Ta có $\overline{12c} \div 3$, để nhỏ nhất ta chọn $c = 0$.

Ta có $\overline{120d} \div 4$, để nhỏ nhất ta chọn $d = 0$.

Ta có $\overline{1200e} \div 5$, để nhỏ nhất ta chọn $e = 0$.

Ta có $\overline{12000g} \div 6$, để nhỏ nhất ta chọn $g = 0$.

Ta có $\overline{120000h} \div 7$, làm phép chia ta được $h = 3$.

Ta có $\overline{1200003i} \div 8$, ta tìm được $i = 2$.

Ta có $\overline{12000032k} : 9$, ta tìm được $k = 1$.

Số phải tìm là 120 000 321.

- 3.20.** Muốn thắng cuộc, An phải để lại cho đối phương 12 viên bi, muốn vậy phải để lại 24 viên bi, ... tức là số bi để lại phải chia hết cho 12. Số lớn nhất chia hết cho 12 chưa vượt quá 100 là 96.

Do đó, để thắng cuộc thì đầu tiên An lấy 4 viên bi, để lại 96 viên bi. Khi Bảo lấy k viên bi ($4 \leq k \leq 8$) thì An lấy $12 - k$ viên bi. Số bi An để lại lần lượt là 84, 72, ..., 24, 12. Lúc đó Bảo phải lấy số bi từ 4 đến 8 và An lấy nốt số còn lại.

Lưu ý. Nếu luật chơi quy định mỗi người phải lấy từ a đến b viên bi thì người thắng cuộc là người để lại cho đối phương số bi là một số chia hết cho $a + b$.

- 3.21.** Gọi mười số tự nhiên liên tiếp được viết là

$$a, a + 1, a + 2, \dots, a + 9 \text{ có tổng bằng } 10a + 45.$$

Gọi số bị xóa là $a + b$ với $b \in \mathbb{N}, 0 \leq b \leq 9$.

Tổng của chín số còn lại bằng 490 nên

$$(10a + 45) - (a + b) = 490 \text{ tức là } 9a = b + 445.$$

Ta thấy $b + 445 : 9$ nên $(b + 4) + 441 : 9$,

suy ra $b + 4 : 9$. Do $0 \leq b \leq 9$ nên $b = 5$.

Khi đó $a = (b + 445) : 9 = (5 + 445) : 9 = 50$.

Số bị xóa là $a + b = 50 + 5 = 55$.

- 3.22. a)** Trong ba số liên tiếp bất kì của dãy, có một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2, do đó tổng của ba số đó chia hết cho 3.

b) Giả sử trong dãy mới $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ ta có tổng của bốn số liên tiếp bất kì chia hết cho 3.

Chia 100 số trên thành 25 nhóm, mỗi nhóm bốn số:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_5, a_6, a_7, a_8), \dots, (a_{97}, a_{98}, a_{99}, a_{100}).$$

Mỗi nhóm có tổng chia hết cho 3 nên $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} : 3$. (1)

Mặt khác $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$,

không chia hết cho 3, mâu thuẫn với (1).

Vậy không thể đổi chỗ các số trong dãy đã cho để được một dãy mới có tổng của bốn số liên tiếp bất kì chia hết cho 3.

3.23. Gọi số hộp bút bạn Hòa mua là a , số quyển vở bạn Hòa mua là b . Ta có:

$$13a + 5b = 100. \quad (1)$$

Suy ra $13a \div 5$. Do 13 và 5 không chia hết cho cùng một số tự nhiên nào khác 1 nên $a \div 5$. Đặt $a = 5k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Thay $a = 5k$ vào (1) và rút gọn được: $13k + b = 20$.

Suy ra $k = 1$, do đó $a = 5$ và $b = 7$.

Bạn Hoà mua 5 hộp bút và 7 quyển vở.

3.24. Gọi số tờ tiền mệnh giá 1 nghìn đồng, 5 nghìn đồng, 10 nghìn đồng phải chọn theo thứ tự là a, b, c . ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$). Ta có:

$$a + b + c = 18 \quad (1)$$

$$\text{và} \quad a + 5b + 10c = 100. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $a \div 5$. Ta lại có $a \in \mathbb{N}^*$ nên để a nhỏ nhất ta chọn $a = 5$. Thay $a = 5$ vào (1) và (2) rồi rút gọn được

$$b + c = 13$$

$$\text{và} \quad b + 2c = 19.$$

Suy ra $c = 19 - 13 = 6$. Do đó $b = 7$.

Long phải chọn 5 tờ 1 nghìn, 7 tờ 5 nghìn, 6 tờ 10 nghìn.

3.25. Tổng số bát và đĩa là:

$$19 + 22 + 32 + 35 + 37 = 145 \text{ (chiếc)}.$$

Sau khi bán hết một hộp đĩa, số bát đĩa còn lại gấp năm số đĩa còn lại nên số bát đĩa còn lại chia hết cho 5.

Tổng số bát và đĩa là 145, chia hết cho 5; số bát đĩa còn lại chia hết cho 5 nên số đĩa đã bán chia hết cho 5. Trong năm số 19, 22, 32, 35, 37, chỉ có $35 \div 5$. Vậy số đĩa đã bán là 35 chiếc.

Số bát đĩa còn lại là $145 - 35 = 110$ (chiếc).

Số đĩa còn lại là $110 : 5 = 22$ (chiếc).

Số đĩa tổng cộng là $35 + 22 = 57$ (chiếc).

3.26. Giả sử $1 < x \leq y$. Đặt $x + 1 = ky$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $ky = x + 1 \leq y + 1 < y + y = 2y$.

Do $ky < 2y$ nên $k < 2$. Ta lại có $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k = 1$.

Thay $k = 1$ vào $x + 1 = ky$ được $x + 1 = y$.

Theo đề bài $y + 1 \vdots x$ nên $x + 1 + 1 \vdots x$ tức là $x + 2 \vdots x$. Suy ra $2 \vdots x$.

Vậy $x \in \{1; 2\}$.

Với $x = 1$ thì $y = 2$. Với $x = 2$ thì $y = 3$.

Thử lại đúng.

Có hai đáp số: 1 và 2; 2 và 3.

Chuyên đề 4. SỐ NGUYÊN TỐ. HỢP SỐ

- 4.1. Nếu ngày chủ nhật đầu tiên là ngày 2 thì các ngày chủ nhật trong tháng là các ngày 2, 9, 16, 23, 30, chỉ có hai số nguyên tố là 2 và 23, loại.

Vậy nếu ba ngày chủ nhật của tháng là ba số nguyên tố thì ba số đó phải lẻ và số sau hơn số trước 14 đơn vị. Đó là các ngày 3, 17, 31.

Ngày 15 của tháng đó là ngày thứ sáu.

- 4.2. Ta có $A = 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ 97\ 98\ 99$.

Xét 99 số 1, 2, 3, ..., 98, 99. Mỗi chữ số từ 1 đến 9 có mặt 10 lần ở hàng chục và 10 lần ở hàng đơn vị nên tổng các chữ số của A bằng $(1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot 20 = 900$, chia hết cho 9.

Suy ra A chia hết cho 9 và là hợp số.

- 4.3. a) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

b) $10^{15} + 8$ có tận cùng bằng 8 nên không là số chính phương.

- 4.4. a) Loại $p = 2$ vì khi đó $p + 14$ không là số nguyên tố.

Xét $p = 3$ thì $p + 14 = 17$ là số nguyên tố, $p + 7 = 10$ là hợp số.

Xét $p > 3$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

– Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 14 = 3k + 15$ không là số nguyên tố, loại.

– Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 7 = 3k + 9$, là hợp số.

- 4.5. Loại $p = 2$ vì khi đó $p + 20$ không là số nguyên tố.

Xét $p = 3$ thì $p + 20 = 23$, $p + 40 = 43$, $p + 80 = 83$ đều là các số nguyên tố.

Xét $p > 3$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

– Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 20 = 3k + 21$ không là số nguyên tố, loại.

– Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 40 = 3k + 42$ không là số nguyên tố, loại.

4.6. Loại $p = 2$.

Loại $p = 3$.

Xét $p = 5$ thì $p + 6 = 11$, $p + 12 = 17$, $p + 18 = 23$, $p + 24 = 29$ đều là các số nguyên tố.

Xét $p > 5$ thì p có một trong các dạng $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$ với $k \in \mathbb{N}$. Loại tất cả các trường hợp này.

4.7. Gọi p là số nguyên tố phải tìm. Ta có $p = 60k + r = 2^2 \cdot 3 \cdot 5k + r$ với $k, r \in \mathbb{N}$, $0 < r < 60$ và r là hợp số.

Do p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 5.

Chọn các hợp số nhỏ hơn 60, loại đi các số chia hết cho 2, ta có $r \in \{9; 15; 21; 25; 27; 33; 35; 39; 45; 49; 51; 55; 57\}$.

Loại đi các số chia hết cho 3, ta có $r \in \{25; 35; 49; 55\}$.

Loại đi các số chia hết cho 5, ta được $r = 49$.

Suy ra $p = 60k + 49$. Do $p < 200$ nên $p = 109$ hoặc $p = 169$. Loại $p = 169 = 13^2$.

Vậy $p = 109$.

4.8. Ta có $\underbrace{11\dots1}_{10 \text{ chữ số } 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{11\dots1}_{10 \text{ chữ số } 1} = \underbrace{11\dots1}_{11 \text{ chữ số } 1} \cdot \underbrace{00\dots0}_{10 \text{ chữ số } 0} + \underbrace{11\dots1}_{11 \text{ chữ số } 1}$ chia hết cho $\underbrace{11\dots1}_{11 \text{ chữ số } 1}$ nên là hợp số.

4.9. Phân tích ra thừa số nguyên tố, ta được $13800 = (2^3 \cdot 3) \cdot 5^2 \cdot 23$.

Ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 23, 24, 25.

4.10. a) $2n + 1 = 2n - 6 + 7 = 2(n - 3) + 7$.

$$2n + 1 : n - 3 \text{ nếu } 7 : n - 3$$

Đáp số: $n \in \{4; 10\}$.

$$\text{b) } n^2 + 3 = n(n + 1) - (n + 1) + 4.$$

$$n^2 + 3 : n + 1 \text{ nếu } 4 : n + 1$$

Đáp số: $n \in \{0; 1; 3\}$.

4.11. a) Đáp số: $n = 21$.

b) Ta có $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ là tổng của n số lẻ nên tổng đó bằng $[1 + (2n - 1)] \cdot n : 2 = n^2$.

Đáp số: $n = 13$.

4.12. Gọi hai số phải tìm là a và b , giả sử $a \leq b$.

Ta có $ab = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$.

Do a, b không chia hết cho 10 và $a \leq b$ nên $a = 2^4 = 16$ và $b = 5^4 = 625$.

4.13. Xét $1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k + 1) : 2$ với $k < 50$.

Vì $k(k + 1) : 2$ chia hết cho 29 nên $k(k + 1) : 29$.

Tích $k(k + 1)$ chia hết cho số nguyên tố 29 nên $k : 29$ hoặc $k + 1 : 29$.

Do $0 < k < 50$ nên $k = 29$ hoặc $k + 1 = 29$, tức là $k \in \{29; 28\}$.

Vậy $m = 28$ và $n = 29$.

4.14. Xét 99 số tự nhiên liên tiếp $100! + 2, 100! + 3, 100! + 4, \dots, 100! + 100$.

Tất cả các số đó đều là hợp số.

4.15. a) Số nguyên tố là số có ít ước số nhất. Số nguyên tố lớn nhất có hai chữ số là 97, đó là số phải tìm.

b) Lần lượt xét các số từ 99 trở xuống, ta thấy:

$$99 = 3^2 \cdot 11 \text{ có 6 ước,}$$

$$98 = 2 \cdot 7^2 \text{ có 6 ước,}$$

$$97 \text{ có 2 ước,}$$

$$96 = 2^5 \cdot 3 \text{ có 12 ước, đó là số phải tìm.}$$

4.16. a) Số nhỏ nhất có 7 ước số là $2^6 = 64$.

b) Số nhỏ nhất có 15 ước số là 144.

- 4.17. Gọi số phải tìm là n , phân tích ra thừa số nguyên tố được $n = 2^x \cdot 5^y$ (x và y khác 0).

$n : 2 = 2^{x-1} \cdot 5^y$ là số chính phương nên $x - 1$ và y đều chẵn.

Để n nhỏ nhất, ta chọn $x = 1$ và $y = 2$. Khi đó $n = 2 \cdot 5^2 = 50$.

- 4.18. Gọi số phải tìm là n . Ta thấy n chia hết cho 2 và 3, nên để n nhỏ nhất, ta chọn $n = 2^x \cdot 3^y$ (x và y khác 0).

$n : 2 = 2^{x-1} \cdot 3^y = a^2$ nên $x - 1$ và y đều chẵn.

$n : 3 = 2^x \cdot 3^{y-1} = b^3$ nên x và $y - 1$ đều chia hết cho 3.

Từ $x - 1 : 2$ và $x : 3$, để nhỏ nhất ta chọn $x = 3$.

Từ $y : 2$ và $y - 1 : 3$, để nhỏ nhất ta chọn $y = 4$.

Vậy $n = 2^3 \cdot 3^4 = 648$.

- 4.19. Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của n là $n = a^x \cdot b^y$ (x và y khác 0).

Ta có $n^2 = a^{2x} \cdot b^{2y}$ có $(2x + 1)(2y + 1)$ ước số nên $(2x + 1)(2y + 1) = 21$.

Giả sử $x \leq y$, ta được $x = 1$ và $y = 3$.

$n^3 = a^{3x} \cdot b^{3y}$ có $(3x + 1)(3y + 1)$ ước, tức là có $4 \cdot 10 = 40$ (ước).

Chuyên đề 5. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT. BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

- 5.1. ƯCLN (1820, 3080, 4900) = 140.

Đáp số: 70.

- 5.2. Ta có $a = 121212 = 12 \cdot 10101 = 2 \cdot (6 \cdot 10101)$,

$b = 181818 = 18 \cdot 10101 = 3 \cdot (6 \cdot 10101)$.

Vậy ƯCLN (a, b) = $6 \cdot 10101 = 60606$.

- 5.3. a) 1 ; b) 38.

- 5.4. Số 296 chia cho a dư 16 nên $296 - 16 = 280$ chia hết cho a và $a > 16$.

Số 230 chia cho a dư 10 nên $230 - 10 = 220$ chia hết cho a .

Do đó a là ước chung của 280, 220 và $a > 16$.

Bạn đọc tự giải tiếp.

Đáp số: $a = 20$.

- 5.5. a) Gọi d là ước chung của $2n + 1$ và $6n + 5$ thì $2n + 1 \div d$ và $6n + 5 \div d$.

Do đó $(6n + 5) - 3(2n + 1) \div d$ nên $2 \div d$.

Vì d là ước của số lẻ $2n + 1$ nên $d \neq 2$. Vậy $d = 1$, tức là $(2n + 1, 6n + 5) = 1$.

b) Xét biểu thức $5(3n + 2) - 3(5n + 3)$.

- 5.6. Ta có $3n + 1 \div 7$ nếu $3n + 1 - 7 \div 7$ tức là $3(n - 2) \div 7$.

Do $(3, 7) = 1$ nên $n - 2 \div 7$.

Vậy $n = 7k + 2$ với k là số tự nhiên tùy ý.

- 5.7. Gọi d là ước chung của $2n + 1$ và $7n + 2$.

Ta có $7(2n + 1) - 2(7n + 2) \div d$ nên $3 \div d$, suy ra $d \in \{1; 3\}$.

Để $(2n + 1, 7n + 2) = 1$ thì $d \neq 3$.

Trước hết ta tìm n để $2n + 1 \div 3$, ta được $2n + 1 + 3 \div 3$ tức là $2(n + 2) \div 3$. Do $(2, 3) = 1$ nên $n + 2 \div 3$, tức là $n = 3k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$.

Vậy nếu $n \neq 3k + 1$ thì $(2n + 1, 7n + 2) = 1$.

- 5.8. a) ƯCLN $(a, b) = 12$ nên $a = 12m$, $b = 12n$ và $(m, n) = 1$.

Ta có $a + b = 96$ nên $12m + 12n = 96$, suy ra $m + n = 8$.

Do $a < b$ nên $m < n$. Ta có

m	1	3
n	7	5

Suy ra

a	12	36
b	84	60

b) Đáp số:

a	8	16	32
b	64	56	40

5.9. a) ƯCLN $(a, b) = 16$ nên $a = 16m$, $b = 16n$ và $(m, n) = 1$.

Ta có $a - b = 96$ nên $16m - 16n = 96$, suy ra $m - n = 6$.

Do $a = 16m < 200$ nên $m \leq 12$. Chú ý rằng $(m, n) = 1$, ta có

m	11	7
n	5	1

Suy ra

a	176	112
b	80	16

b) Đáp số:

a	195	165	105
b	105	75	15

5.10. a) ƯCLN $(a, b) = 4$ nên $a = 4m$, $b = 4n$ và $(m, n) = 1$.

Ta có $ab = 448$ nên $4m \cdot 4n = 448$, suy ra $mn = 28$.

Ta lại có $m < n$ và $(m, n) = 1$ nên

m	1	4
n	28	7

Suy ra

a	4	16
b	112	28

b) Đáp số:

a	7	14
b	42	21

5.11. Giải tương tự Ví dụ 5.6.

Đáp số : $(10 ; 120)$, $(30 ; 40)$.

5.12. Theo đề bài, $16n : 6$ nên $8n : 3$, mà $(8, 3) = 1$ nên $n : 3$.

Theo đề bài, $6n : 16$ nên $3n : 8$, mà $(3, 8) = 1$ nên $n : 8$.

Do $(3, 8) = 1$ nên $n : 24$, tức là $n = 24k$ với $k \in \mathbb{N}$.

Theo đề bài, $16 \cdot 6 : n$ nên $16 \cdot 6 : 24k$, suy ra $4 : k$. Ta có

k	1	2	4
n	24	48	96

5.13. Thời gian để hai anh lại cùng trực vào một ngày chủ nhật lần tiếp theo là BCNN $(10, 15, 7) = 420$ (ngày).

Do đó trong năm 2012, hai anh chỉ cùng trực một lần vào ngày chủ nhật (đó là ngày 1 – 1 – 2012).

- 5.14.** Đồng hồ thứ nhất lại chỉ giờ chính xác khi nó chạy nhanh được 12 giờ (tức là 720 phút), do đó nó lại chỉ đúng giờ sau $720 : 10 = 72$ (ngày).

Đồng hồ thứ hai lại chỉ giờ chính xác khi nó chạy chậm được 12 giờ (tức là 720 phút), do đó nó lại chỉ đúng giờ sau $720 : 6 = 120$ (ngày).

Số ngày ít nhất để cả hai đồng hồ cùng chỉ giờ chính xác là

$$\text{BCNN}(72, 120) = 360.$$

Đáp số: 360 ngày.

- 5.15.** Gọi số phải tìm là a . Ta có $a + 7$ chia hết cho 10, 12, 15 nên là bội chung của 10, 12, 15.

$$\text{BCNN}(10, 12, 15) = 60.$$

Do a có ba chữ số nên $a + 7 \in \{960; 900; \dots\}$.

Suy ra $a \in \{953; 893; \dots\}$.

Số 953 không chia hết cho 19, còn $893 = 19 \cdot 47$.

Vậy $a = 893$.

- 5.16.** Đặt $16a = 25b = 30c = m$.

Để a, b, c nhỏ nhất khác 0 thì m là $\text{BCNN}(16, 25, 30)$.

Ta có $\text{BCNN}(16, 25, 30) = 1200$.

$$\text{Do đó } a = 1200 : 16 = 75,$$

$$b = 1200 : 25 = 48,$$

$$c = 1200 : 30 = 40.$$

- 5.17.** Gọi a là số tự nhiên phải tìm.

Số a chia cho 5, 8, 12 có số dư là 2, 6, 8 nên số $2a$ chia cho 5, 8, 12 có số dư là 4, 4, 4.

Số $2a - 4$ chia hết cho 5, 8, 12, mà $\text{BCNN}(5, 8, 12) = 120$ nên để a nhỏ nhất thì $2a - 4 = 120$.

Vậy $a = 62$.

5.18. Giải tương tự Ví dụ 5.5.

Đáp số: 45600 và 45660.

5.19. Trong bốn số tự nhiên liên tiếp, có ít nhất một bội của 3 nên tích của chúng chia hết cho 3. (1)

Trong bốn số tự nhiên liên tiếp, có hai số chia hết cho 2, trong đó có một số chia hết cho 4 nên tích của chúng chia hết cho 8. (2)

Ta lại có $(3, 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra tích của bốn số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 24.

5.20. a) Đặt $\text{ƯCLN}(a, b) = d$ thì $a = dm$, $b = dn$ và $(m, n) = 1$.

$\text{BCNN}(a, b) = ab : d = dm \cdot dn : d = dmn$.

Theo đề bài, $dmn + d = 19$ nên $d(mn + 1) = 19$.

Do $mn + 1 > 1$ nên $mn + 1 = 19$ và $d = 1$. Ta có

d	$mn + 1$	mn	m	n	a	b
1	19	18	1	18	1	18
			2	9	2	9

b) Giải tương tự câu a, ta được

d	$mn - 1$	mn	m	n	a	b
1	3	4	1	4	1	4
3	1	2	1	2	3	6

Chuyên đề 6. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ NGUYÊN

6.1. Có 76 số nguyên từ -15 đến 60 . Tổng của chúng bằng

$$(-15 + 60).76 : 2 = 1710.$$

6.2. a) Gọi số số hạng ở vế trái là k . Ta có $(15 + n).k : 2 = 0$.

Do $k \neq 0$ nên $15 + n = 0$. Do đó $n = -15$.

b) $n = -35$.

6.3. Đáp số: $a = -15$, $b = 20$, $c = -4$.

6.4. Theo quy tắc dấu ngoặc, ta có: $140 - (321 - 450) = 140 - 321 + 450$.

Vậy $a = d$.

6.5. $A = (1 + 2 - 3 - 4) + (5 + 6 - 7 - 8) + \dots + (97 + 98 - 99 - 100)$
 $= -4.25 = -100$.

6.6. a) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 49 - 50 = -1.25 = -25$.

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 33 - 34 + 35 = -1.17 + 35 = 18$.

6.7. a) Bổ sung: $ab \geq 0$.

b) Bổ sung: $b \geq 0$.

c) Bổ sung: $ab \geq 0$.

6.8. a) Nếu $a \geq 0$ thì $|a| + a = a + a = 2a$.

Nếu $a < 0$ thì $|a| + a = -a + a = 0$.

b) Nếu $a \geq 0$ thì $|a| - a = a - a = 0$.

Nếu $a < 0$ thì $|a| - a = -a - a = -2a$.

c) Nếu $a \geq 0$ thì $|a|.a = a.a = a^2$.

Nếu $a < 0$ thì $|a|.a = -a.a = -a^2$.

6.9. Đặt $a = |x|$, $b = |y|$. Ta có $a = 6b$ và $a - b = 60$.

Tìm được $a = 72$, $b = 12$.

Do đó $x = 72$, $y = 12$ hoặc $x = -72$, $y = -12$.

6.10. Ta có $|a| + |b| < 2$ nên $|a| + |b| = 0$ hoặc $|a| + |b| = 1$.

Đáp số: $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

6.11. a) Giá trị nhỏ nhất của $5x^2 - 1$ bằng -1 tại $x = 0$.

b) Giá trị nhỏ nhất của $3(x + 1)^2 - 2$ bằng -2 tại $x = -1$.

c) Giá trị nhỏ nhất của $|x + 5| - 3$ bằng -3 tại $x = -5$.

6.12. a) Giá trị lớn nhất của $7 - 3x^2$ bằng 7 tại $x = 0$.

b) Giá trị lớn nhất của $8 - (x + 2)^2$ bằng 8 tại $x = -2$.

c) Giá trị lớn nhất của $10 - |x + 2|$ bằng 10 tại $x = -2$.

6.13. Ba số chính phương có tổng bằng 2 chỉ trong trường hợp có một số bằng 0 và hai số kia bằng 1. Xét ba trường hợp:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \\ (y + 1)^2 = 1 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{cho } (x; y) \text{ bằng } (-1; 0) \text{ và } (-1; -2).$$

$$\begin{cases} (y + 1)^2 = 0 \\ (x + 1)^2 = 1 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{cho } (x; y) \text{ bằng } (0; -1) \text{ và } (-2; -1).$$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ (x + 1)^2 = 1 \\ (y + 1)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{cho } (x; y) \text{ bằng } (0; 0) \text{ và } (-2; -2).$$

Có 6 đáp số như trên.

6.14. Các số $x^2 - 8$ và $x^2 - 15$ có tích là số âm nên là hai số khác dấu, suy ra

$$x^2 - 15 < 0 \text{ và } x^2 - 8 > 0.$$

Do đó $8 < x^2 < 15$ nên $x^2 = 9$.

Vậy $x = \pm 3$.

6.15. Giả sử trong 100 số có a số nhận giá trị 1 và b số nhận giá trị -1 .

Ta có $a + b = 100$ nên a, b cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Xét hai trường hợp:

a) Trường hợp a và b cùng chẵn. Đặt $a = 2m$ và $b = 2n$ với $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

Ta chọn m số bằng 1 và n số bằng -1 thì còn lại m số bằng 1 và n số bằng -1 .

Khi đó tổng các số được chọn bằng $m - n$, tổng các số còn lại cũng bằng $m - n$.

b) Trường hợp a và b cùng lẻ. Đặt $a = 2m + 1$ và $b = 2n + 1$ với $m \in \mathbb{N}$, và $n \in \mathbb{N}$.

Ta chọn m số bằng 1 và n số bằng -1 thì còn lại $m + 1$ số bằng 1 và $n + 1$ số bằng -1 .

Khi đó tổng các số được chọn bằng $m - n$, tổng các số còn lại cũng bằng $(m + 1) - (n + 1) = m - n$.

6.16. a) Mỗi tổng có thể nhận các giá trị từ -3 đến 3 . Tập hợp các giá trị mà mỗi tổng có thể nhận là $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

b) Có 8 tổng nhận 7 giá trị nên tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Chuyên đề 7. TÍNH CHIA HẾT **TRONG TẬP HỢP SỐ NGUYÊN**

7.1. a) Chú ý rằng $2y + 1$ là ước lẻ của 8.

Đáp số: $(x; y)$ bằng $(10; 0), (-6; -1)$.

b) Đáp số: $(x; y)$ bằng $(-12; 0), (4; 1)$.

7.2. $A = -4.50 = -200$.

A chia hết cho 2, cho 4, cho 5; không chia hết cho 3, cho 9.

7.3. a) $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 21$

Tổng mới có thể bằng -31 nếu thay như sau:

$$A' = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17 - 19 - 21 = -31.$$

b) $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 21 = (1 + 21) \cdot 11 : 2 = 121$, là số lẻ.

Khi thay đổi số hạng a bởi số hạng $-a$ thì A giảm đi $2a$, do đó tổng mới phải là số lẻ, không thể bằng -30 .

7.4. Giả sử tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn

$$abc + a = -625, abc + b = -633, abc + c = -597.$$

Ta có $a(bc + 1) = -625$

$$b(ac + 1) = -633$$

$$c(ab + 1) = -597.$$

Suy ra a, b, c đều lẻ. Khi đó $abc + a$ là số chẵn, không thể bằng -625 .

Vậy không tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

7.5. a) $n + 2 : n - 1 \Leftrightarrow n - 1 + 3 : n - 1$. Do đó

$n - 1$	1	-1	3	-3
n	2	0	4	-2

b) $n - 7 : 2n + 3 \Rightarrow 2n - 14 : 2n + 3$

$$\Rightarrow 2n + 3 - 17 : 2n + 3 \Rightarrow 17 : 2n + 3.$$

Đáp số: $n \in \{-1; -2; 7; -10\}$ (Chú ý bước thử lại).

c) $n^2 - 2 = n(n + 3) - 3(n + 3) + 7$ nên $n^2 - 2 : n + 3 \Leftrightarrow 7 : n + 3$.

Đáp số: $n \in \{-2; -4; 4; -10\}$.

7.6. a) $xy = x + y \Leftrightarrow x(y - 1) = y$.

Do đó $y : y - 1 \Leftrightarrow y - 1 + 1 : y - 1 \Leftrightarrow 1 : y - 1$.

Đáp số: $(x; y)$ bằng $(0; 0), (2; 2)$.

$$b) xy = x - y \Leftrightarrow y(x + 1) = x.$$

$$\text{Do đó } x \vdots x + 1 \Leftrightarrow x + 1 - 1 \vdots x + 1 \Leftrightarrow 1 \vdots x + 1.$$

Đáp số: $(x; y)$ bằng $(0; 0), (-2; 2)$.

$$c) x(y + 2) + y = 1 \Leftrightarrow x(y + 2) + (y + 2) = 3.$$

$$\text{Do đó } 3 \vdots y + 2.$$

Đáp số: $(x; y)$ bằng $(2; -1), (-4; -3), (0; 1), (-2; -5)$.

Chuyên đề 8. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN SỐ. RÚT GỌN PHÂN SỐ

$$8.1. a) \frac{7}{x} = \frac{x}{28} \Leftrightarrow x^2 = 7.28 \Leftrightarrow x^2 = 14^2 \Leftrightarrow x = 14 \text{ (do } x \in \mathbf{N}).$$

$$b) \frac{10 + x}{17 + x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(10 + x) = 3(17 + x) \Leftrightarrow 40 + 4x = 51 + 3x \Leftrightarrow x = 11.$$

c) Đáp số: $x = 14$.

$$8.2. \text{ Ta có } \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \text{ (tối giản) nên } a = 3k \text{ và } b = 5k \text{ với } k \in \mathbf{Z}.$$

Từ $a^3 + b^3 = 1216$, ta có $(3k)^3 + (5k)^3 = 1216$. Tìm được $k = 2$. Suy ra $a = 6$, $b = 10$.

$$8.3. ab = 100 = 2^2.5^2. \text{ Suy ra}$$

$$\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{1}{100}; \frac{100}{1}; \frac{4}{25}; \frac{25}{4} \right\}.$$

$$8.4. a) \frac{10.11 + 50.55 + 70.77}{11.12 + 55.60 + 77.84} = \frac{10.11(1 + 5.5 + 7.7)}{11.12(1 + 5.5 + 7.7)} = \frac{5}{6}.$$

$$\begin{aligned} b) \frac{1.3.5 \dots 49}{26.27.28 \dots 50} &= \frac{1.3.5 \dots 49}{26.27.28 \dots 50} \cdot \frac{2.4.6 \dots 50}{2.4.6 \dots 50} \\ &= \frac{1.2.3 \dots 49.50}{26.27.28 \dots 50.(1.2.3 \dots 25).2^{25}} = \frac{1}{2^{25}}. \end{aligned}$$

8.5. a) $\frac{n+3}{n-2}$ là số nguyên $\Leftrightarrow n+3 \vdots n-2 \Leftrightarrow n-2+5 \vdots n-2 \Leftrightarrow 5 \vdots n-2$.

Ta có

$n-2$	1	-1	5	-5
n	3	1	7	-3
$\frac{n+3}{n-2}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{4}{-1}$	$\frac{10}{5}$	0

Để $\frac{n+3}{n-2}$ là số nguyên âm thì $n = 1$.

b) Đáp số: $n \in \{0; 1; 4; -7\}$.

c) $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên $\Rightarrow 3n+2 \vdots 4n-5$

$$\Rightarrow 4(3n+2) \vdots 4n-5 \Rightarrow 12n+8 \vdots 4n-5$$

$$\Rightarrow 3(4n-5) + 23 \vdots 4n-5 \Rightarrow 23 \vdots 4n-5.$$

Ta tìm được $n \in \{1; 7\}$.

Với $n = 1$ thì $\frac{3n+2}{4n-5} = -5$, không là số tự nhiên.

Với $n = 7$ thì $\frac{3n+2}{4n-5} = 1$, là số tự nhiên. Vậy $n = 7$.

8.6. Gọi d là ước chung của $n-5$ và $3n-14$. Ta có $3(n-5) - (3n-14) \vdots d$ nên $-1 \vdots d$.

Vậy $\frac{n-5}{3n-14}$ là phân số tối giản với mọi n .

8.7. Gọi d là ước chung của $2n-1$ và $3n+2$. Ta có $3(2n-1) - 2(3n+2) \vdots d$ nên $-7 \vdots d$.

Để phân số $\frac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được, ta phải có $2n-1 \vdots 7$.

$$\Leftrightarrow 2n-1+7 \vdots 7 \Leftrightarrow 2(n+3) \vdots 7 \Leftrightarrow n+3 \vdots 7.$$

Vậy với $n = 7k-3$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì phân số $\frac{2n-1}{3n+2}$ rút gọn được.

8.8. Viết các phân số đã cho dưới dạng

$$\frac{(n+4)+3}{3}, \frac{(n+4)+4}{4}, \frac{(n+4)+5}{5}, \frac{(n+4)+6}{6}, \frac{(n+4)+7}{7}.$$

Để các phân số trên là phân số tối giản thì $n+4$ phải nguyên tố cùng nhau với 3, 4, 5, 6, 7. Muốn vậy thì $n+4$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất lớn hơn 7, tức là $n+4=11$, vậy $n=7$.

Khi đó các phân số đã cho là

$$\frac{14}{3}, \frac{15}{4}, \frac{16}{5}, \frac{17}{6}, \frac{18}{7}.$$

8.9. Ta có $\frac{a}{b} = \frac{49}{56} = \frac{7}{8}$.

ƯCLN $(a, b) = 12$ chứng tỏ ta đã chia a và b cho 12 để phân số $\frac{a}{b}$ rút gọn được thành $\frac{7}{8}$.

Vậy $a = 7.12 = 84$, $b = 8.12 = 96$.

8.10. Viết các phân số $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ thành các phân số tối giản, ta được

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{14}, \frac{b}{c} = \frac{3}{4}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}.$$

Suy ra $a = 5k$, $b = 14k$ với $k \in \mathbb{N}^*$,

$b = 3m$, $c = 4m$ với $m \in \mathbb{N}^*$,

$c = 6n$, $d = 11n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ $14k = 3m$ suy ra $3m : 14$ nên $m : 14$.

Từ $4m = 6n$ suy ra $2m : 3$ nên $m : 3$.

Để m nhỏ nhất thì $m = \text{BCNN}(14, 3) = 42$.

Khi đó $b = 3m = 3.42 = 126$, $c = 4m = 4.42 = 168$;

$k = b : 14 = 126 : 14 = 9$; $a = 5k = 5.9 = 45$.

$n = c : 6 = 168 : 6 = 28$; $d = 11.28 = 308$.

Chuyên đề 9. SO SÁNH PHÂN SỐ

9.1. Quy đồng tử, ta được $\frac{60}{114}, \frac{60}{115}, \frac{60}{68}, \frac{60}{87}, \frac{60}{71}$.

Ta thấy $\frac{60}{115} < \frac{60}{114} < \frac{60}{87} < \frac{60}{71} < \frac{60}{68}$ nên $\frac{12}{23} < \frac{10}{19} < \frac{20}{29} < \frac{60}{71} < \frac{15}{17}$.

9.2. Đáp số: $\frac{1}{80}$ và $\frac{5}{16}$.

9.3. a) $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4}$ nên $\frac{12}{60} < \frac{2x}{60} < \frac{15}{60}$.

Suy ra $12 < 2x < 15$, do đó $2x = 14$. Vậy $x = 7$.

b) $\frac{5}{8} < \frac{4}{x} < \frac{5}{7}$ nên $\frac{20}{32} < \frac{20}{5x} < \frac{20}{28}$.

Suy ra $28 < 5x < 32$.

Đáp số: $x = 6$.

9.4. a) $\frac{7}{15} = \frac{14}{30} < \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \frac{20}{40} < \frac{20}{39}$.

b) $\frac{14}{41} > \frac{14}{42} = \frac{1}{3} = \frac{18}{54} > \frac{17}{54}$.

9.5. a) $\frac{n}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+1}$.

b) $\frac{n}{3n+1} = \frac{2n}{6n+2} < \frac{2n}{6n+1}$.

9.6. a) Đặt $35420 = a$ và $25343 = b$ thì $A = \frac{a}{a+3}$ và $B = \frac{b}{b+2}$.

$$A = \frac{a}{a+3} = \frac{a(b+2)}{(a+3)(b+2)} = \frac{ab+2a}{(a+3)(b+2)}.$$

$$B = \frac{b}{b+2} = \frac{b(a+3)}{(a+3)(b+2)} = \frac{ab+3b}{(a+3)(b+2)}.$$

Hãy so sánh $2a$ và $3b$.

Đáp số: $A < B$.

b) Giải tương tự Ví dụ 9.4.

Đáp số: $C < D$.

9.7. a) Phân số $\frac{x+y}{x-y}$ lớn nhất khi tử lớn nhất (bằng $30+29=59$) và mẫu nhỏ

nhất (bằng 1). Chọn $x=30, y=29$, khi đó $\frac{x+y}{x-y} = \frac{59}{1} = 59$.

b) Phân số $\frac{xy}{x-y}$ lớn nhất khi tử lớn nhất (bằng $30 \cdot 29 = 870$) và mẫu nhỏ

nhất (bằng 1). Chọn $x = 30, y = 29$, khi đó $\frac{xy}{x-y} = \frac{870}{1} = 870$.

Chuyên đề 10. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN SỐ

10.1. Đặt $\frac{a}{b} = x$. Ta có $x = \left(\frac{7}{18} + \frac{11}{18} + x \right) : 3 \Leftrightarrow x = (1+x) : 3$

$$\Leftrightarrow 1+x = 3x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

10.2. a) $\frac{7}{10} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}.$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

10.3. a) $\frac{17}{18} = \frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}.$

b) $\frac{5}{8} = \frac{15}{24} = \frac{8}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}.$

10.4. a) $\frac{1}{y} = \frac{x}{10} - \frac{3}{10} = \frac{x-3}{10}$ nên $y(x-3) = 10$. Ta có :

y	1	2	5	10
x-3	10	5	2	1
x	13	8	5	4

b) $\frac{1}{x} = \frac{5}{8} - \frac{y}{2} = \frac{5-4y}{8}$ nên $x(5-4y) = 8$.

$5-4y$ là ước lẻ của 8 và $5-4y$ nguyên dương (để x nguyên dương) nên $5-4y = 1$.

Ta được $y = 1$ và $x = 8$.

10.5. Giải tương tự Ví dụ 10.2.

Đáp số: $\frac{c}{d} = \frac{a}{a-b}$.

10.6. Ta có
$$\frac{3 - \frac{3}{20} + \frac{3}{13} - \frac{3}{2013}}{7 - \frac{7}{20} + \frac{7}{13} - \frac{7}{2013}} = \frac{3 \left(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{13} - \frac{1}{2013} \right)}{7 \left(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{13} - \frac{1}{2013} \right)} = \frac{3}{7}.$$

10.7. Ta có
$$\begin{aligned} \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{41.45} &= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{1.5} + \frac{4}{5.9} + \dots + \frac{4}{41.45} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{41} - \frac{1}{45} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{45} \right) = \frac{11}{45}. \end{aligned}$$

10.8. $A = \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{45} \right) + \left(\frac{1}{46} + \frac{1}{47} + \dots + \frac{1}{60} \right).$

Thay các phân số trong mỗi nhóm bởi phân số nhỏ nhất, ta có

$$A > \frac{1}{45} \cdot 15 + \frac{1}{60} \cdot 15 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

10.9. a) $A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}.$

$$\begin{aligned} A &> \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{51} > \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b) $A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}.$

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{50} = \frac{4}{9} - \frac{1}{50} < \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

10.10. Ta có
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{63}{64} &= \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{7.9}{8.8} \\ &= \frac{1.2.3.4.5.6.7}{2.3.4.5.6.7.8} \cdot \frac{3.4.5.6.7.8.9}{2.3.4.5.6.7.8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

10.11. Khi cộng tử và mẫu của phân số nhỏ hơn 1 (tử và mẫu đều dương) với 1 thì giá trị của phân số tăng thêm.

$$\text{Do đó } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{79}{80} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{80}{81}.$$

$$\text{Suy ra } A^2 < \frac{1.3.5 \cdots 79}{2.4.6 \cdots 80} \cdot \frac{2.4.6 \cdots 80}{3.5.7 \cdots 81} = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{9}\right)^2.$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{9}.$$

10.12. Biến đổi vế trái thành vế phải:

$$\begin{aligned} 1.3.5 \cdots 19 &= 1.3.5 \cdots 19 \cdot \frac{2.4.6 \cdots 20}{2.4.6 \cdots 20} = \frac{1.2.3 \cdots 19.20}{(1.2.3 \cdots 10) \cdot \underbrace{(2.2.2 \cdots 2)}_{10 \text{ số}}} \\ &= \frac{11}{2} \cdot \frac{12}{2} \cdots \frac{20}{2}. \end{aligned}$$

10.13. Biến đổi vế trái thành vế phải:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{20}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{20}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

10.14. Gọi số bị chia $\left(\frac{1}{19} + \frac{2}{18} + \cdots + \frac{19}{1}\right)$ là A.

Gọi số chia $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{20}\right)$ là B.

A có 19 phân số. Cộng 1 vào 18 phân số đầu, trừ phân số cuối $\left(\text{là } \frac{19}{1}\right)$ đi 18 ta được

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{19} + 1\right) + \left(\frac{2}{18} + 1\right) + \left(\frac{3}{17} + 1\right) + \dots + \left(\frac{18}{2} + 1\right) + \left(\frac{19}{1} - 18\right) \\
 &= \frac{20}{19} + \frac{20}{18} + \frac{20}{17} + \dots + \frac{20}{2} + 1 = 20\left(\frac{1}{19} + \frac{1}{18} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{20}\right) = 20B.
 \end{aligned}$$

Vậy $\frac{A}{B} = 20$.

10.15. a) Ta có

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} \text{ nên}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}.$$

Suy ra $2A - A = 1 - \frac{1}{2^9}$ tức là $A = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512}$.

b) Tính $3B$ rồi trừ đi B .

Đáp số: $B = \frac{91}{243}$.

10.16. Theo đề bài $a + b = 3(a - b) = 2 \cdot \frac{a}{b}$.

Từ $a + b = 3(a - b)$, ta có $2a = 4b$ nên $\frac{a}{b} = 2$.

Kết hợp với $a + b = 2 \cdot \frac{a}{b}$ ta được $a + b = 2 \cdot 2 = 4$.

Do đó $a - b = \frac{a + b}{3} = \frac{4}{3}$.

Biết tổng $a + b = 4$ và hiệu $a - b = \frac{4}{3}$, ta tìm được

$$a = \left(4 + \frac{4}{3}\right) : 2 = \frac{8}{3}, \quad b = \left(4 - \frac{4}{3}\right) : 2 = \frac{4}{3}.$$

10.17. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{11}{18} + \frac{11}{24} + \frac{11}{28} + \frac{11}{30}.\end{aligned}$$

Chọn mẫu chung là 18.24.28.30. Gọi thừa số phụ của các phân số trên là k_1, k_2, k_3, k_4 . Ta được

$$\frac{a}{b} = \frac{11(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}{18 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 30}.$$

Mẫu chung không chứa thừa số nguyên tố 11 nên khi rút gọn phân số đến tối giản thì tử vẫn chứa thừa số 11. Vậy $a : 11$.

10.18. Xét tổng $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50}$.

Chọn mẫu chung là $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 49$.

Thừa số phụ của phân số $\frac{1}{32}$ là số lẻ ($3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 49$), còn lại các thừa số phụ khác đều chẵn. Do đó sau khi quy đồng mẫu và cộng các tử lại thì tử là số lẻ, còn mẫu chung là số chẵn, do đó phân số kết quả không là số tự nhiên.

10.19. Rút gọn $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

Ta có $a \cdot \frac{8}{15}$ là số tự nhiên nên $8a : 15$, mà $(8, 15) = 1$ nên $a : 15$. (1)

Ta có $a \cdot \frac{7}{12}$ là số tự nhiên nên $7a : 12$ mà $(7, 12) = 1$ nên $a : 12$. (2)

Từ (1) và (2), để a nhỏ nhất khác 0 thì $a = \text{BCNN}(15, 12) = 60$.

10.20.

$$A = \frac{8^9 + 12}{8^9 + 7} = \frac{8^9 + 7 + 5}{8^9 + 7} = 1 + \frac{5}{8^9 + 7},$$

$$B = \frac{8^{10} + 4}{8^{10} - 1} = \frac{8^{10} - 1 + 5}{8^{10} - 1} = 1 + \frac{5}{8^{10} - 1}.$$

Ta thấy $\frac{5}{8^9 + 7} > \frac{5}{8^{10} - 1}$ (so sánh hai phân số cùng tử) nên $A > B$.

10.21. Ta có

$$A = \frac{4n + 9}{2n + 3} = \frac{4n + 6 + 3}{2n + 3} = 2 + \frac{3}{2n + 3}.$$

A lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{3}{2n + 3}$ lớn nhất $\Leftrightarrow 2n + 3$ là số nguyên dương nhỏ nhất.

Với $2n + 3 = 1$ thì $n = -1$. Khi đó $A = 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{4n + 9}{2n + 3}$ bằng 5 tại $n = -1$.

10.22. Đặt $k = \frac{\overline{ab}}{a + b} = \frac{10a + b}{a + b} = 1 + \frac{9a}{a + b} = 1 + \frac{9}{1 + \frac{b}{a}}.$

Ta có k nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{9}{1 + \frac{b}{a}}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{b}{a}$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \text{ lớn nhất} \\ a \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

Số phải tìm là 19 và tỉ số k bằng $\frac{19}{1 + 9} = \frac{19}{10}.$

10.23. Đặt $k = \frac{\overline{abc}}{a + b + c}.$

Nếu $b = c = 0$ thì $k = \frac{\overline{a00}}{a} = 100.$

Nếu b hoặc c khác 0 thì

$$k = \frac{100a + 10b + c}{a + b + c} < \frac{100a + 100b + 100c}{a + b + c} = 100.$$

Vậy giá trị lớn nhất của k bằng 100 nếu $b = c = 0$. Có chín số $\overline{abc}$ mà

$\frac{\overline{abc}}{a + b + c}$ lớn nhất là 100, 200, 300, ..., 900.

$$10.24. A = \frac{7^{10}}{1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^9} \text{ nên } \frac{1}{A} = \frac{1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^9}{7^{10}} \\ = \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{7^9} + \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7}.$$

$$B = \frac{5^{10}}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^9} \text{ nên } \frac{1}{B} = \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^9}{5^{10}} \\ = \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{5^9} + \frac{1}{5^8} + \dots + \frac{1}{5}.$$

Ta thấy $\frac{1}{7^{10}} < \frac{1}{5^{10}}, \frac{1}{7^9} < \frac{1}{5^9}, \dots, \frac{1}{7} < \frac{1}{5}$ nên $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$. Do đó $A > B$.

10.25. Gọi ba số phải tìm là a, b, c . Giả sử $a < b < c$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1. \quad (1)$$

$$\text{Vì } 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}, \text{ tức là } 1 < \frac{3}{a} \text{ nên } a < 3.$$

$$\text{Từ (1) suy ra } \frac{1}{a} < 1 \text{ nên } a > 1. \text{ Vậy } a = 2.$$

$$\text{Thay } a = 2 \text{ vào (1) được } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}, \text{ tức là } \frac{1}{2} < \frac{2}{b} \text{ nên } b < 4.$$

$$\text{Ta lại có } b > a = 2 \text{ nên } b = 3.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \text{ do đó } c = 6.$$

Ba số phải tìm là 2, 3, 6.

Chuyên đề 11. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ VÀ TỈ SỐ

11.1. Số thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$ số thứ hai.

Số thứ ba bằng $\frac{5}{6}$ số thứ hai.

Tổng của ba số bằng

$$\frac{5}{4} + 1 + \frac{5}{6} = \frac{37}{12} \text{ (số thứ hai) hay } 148.$$

Số thứ hai bằng

$$148 : \frac{37}{12} = 48.$$

Số thứ nhất bằng

$$48 \cdot \frac{5}{4} = 60.$$

Số thứ ba bằng

$$48 \cdot \frac{5}{6} = 40.$$

11.2. Số thứ nhất bằng $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$ (số thứ hai).

Số thứ ba bằng $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{15}{16}$ (số thứ hai).

Bạn đọc tự giải tiếp.

Đáp số: Ba số lần lượt bằng 54, 48, 45.

11.3. Tổng số học sinh nam và nữ dự định đi tham quan và đã đi tham quan là như nhau, ta lấy làm đơn vị.

Số nữ dự định đi tham quan bằng $\frac{1}{4}$ số nam nên bằng $\frac{1}{5}$ tổng số.

Số nữ đã đi tham quan bằng $\frac{1}{5}$ số nam đã đi tham quan nên bằng $\frac{1}{6}$ tổng số.

Số nữ dự định đi nhiều hơn số nữ đã đi là

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \text{ (tổng số) hay } 1 \text{ học sinh.}$$

Tổng số học sinh là

$$1 : \frac{1}{30} = 30 \text{ (học sinh).}$$

Số học sinh nữ đã đi tham quan là

$$30 \cdot \frac{1}{6} = 5 \text{ (học sinh).}$$

Số học sinh nam đã đi tham quan là

$$30 - 5 = 25 \text{ (học sinh).}$$

11.4. Số sách ở ngăn II không thay đổi, ta lấy làm đơn vị.

Số sách ở ngăn I lúc đầu bằng $\frac{2}{5}$ tổng số nên bằng $\frac{2}{3}$ số sách ngăn II.

Số sách ở ngăn I lúc sau bằng $\frac{1}{3}$ tổng số nên bằng $\frac{1}{2}$ số sách ngăn II.

Số sách ở ngăn I lúc đầu hơn lúc sau

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ (số sách ngăn II) hay 4 quyển.}$$

Số sách ở ngăn II là

$$4 : \frac{1}{6} = 24 \text{ (quyển).}$$

Số sách ở ngăn I lúc đầu là $24 \cdot \frac{2}{3} = 16 \text{ (quyển).}$

Tổng số sách ở hai ngăn lúc đầu là $24 + 16 = 40 \text{ (quyển).}$

11.5. Trước đây, tuổi mẹ hơn tuổi con

$$4 - 1 = 3 \text{ lần tuổi con trước đây.}$$

Hiện nay, tuổi mẹ hơn tuổi con

$$3 - 1 = 2 \text{ lần tuổi con hiện nay.}$$

Vì hiệu của tuổi mẹ và tuổi con không thay đổi nên 3 lần tuổi con trước đây = 2 lần tuổi con hiện nay, tức là tuổi con trước đây bằng $\frac{2}{3}$ tuổi con hiện nay.

4 năm biểu thị $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (tuổi con hiện nay).

Tuổi con hiện nay là

$$4 : \frac{1}{3} = 12 \text{ (tuổi).}$$

Tuổi mẹ hiện nay là

$$12.3 = 36 \text{ (tuổi).}$$

11.6. Trong một giờ, hai máy làm được $\frac{1}{10}$ công việc.

Trong 7 giờ, hai máy làm được

$$\frac{1}{10} \cdot 7 = \frac{7}{10} \text{ (công việc).}$$

Còn lại

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} \text{ (công việc), do máy II làm trong 9 giờ.}$$

Thời gian để máy II làm một mình xong công việc

$$9 : \frac{3}{10} = 30 \text{ (giờ).}$$

11.7. Trong một giờ, các vòi I, II, III theo thứ tự chảy được $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ bể.

Trong $1\frac{1}{2}$ giờ, hai vòi I và II chảy được

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{8} \text{ (bể).}$$

Còn lại

$$1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \text{ (bể).}$$

Trong một giờ, hai vòi II và III chảy được

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} \text{ (bể).}$$

Thời gian để hai vòi II và III chảy đầy bể

$$\frac{3}{8} : \frac{5}{18} = \frac{27}{20} \text{ (giờ)} = 1 \text{ giờ } 21 \text{ phút.}$$

Vậy vòi III chảy trong 1 giờ 21 phút.

11.8. a) Trong một phút, hai vòi I và II chảy được $\frac{1}{45}$ bể.

Trong một phút, hai vòi II và III chảy được $\frac{1}{60}$ bể.

Trong một phút, hai vòi III và I chảy được $\frac{1}{36}$ bể.

Trong một phút, cả ba vòi chảy được

$$\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{60} + \frac{1}{36} \right) : 2 = \frac{1}{30} \text{ (bể).}$$

Nếu cả ba vòi cùng chảy thì bể đầy sau

$$1 : \frac{1}{30} = 30 \text{ (phút).}$$

b) Bạn đọc tự giải.

Vòi I chảy một mình đầy bể trong 60 phút.

Vòi II chảy một mình đầy bể trong 180 phút.

Vòi III chảy một mình đầy bể trong 90 phút.

11.9. Giải bằng cách tính ngược từ cuối.

Người III mua $\frac{3}{4}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{3}{4}$ quả thì hết nên $\frac{3}{4}$ quả là

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ (số còn lại sau khi người II mua).}$$

Số táo còn lại sau khi người II mua là

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 \text{ (quả).}$$

$$3 + \frac{2}{3} \text{ quả là } 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (số còn lại sau khi người I mua).}$$

Số táo còn lại sau khi người I mua là

$$3\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 11 \text{ (quả).}$$

$$11 + \frac{1}{2} \text{ quả là } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (số táo lúc đầu của cửa hàng).}$$

Số táo lúc đầu của cửa hàng là

$$11\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 23 \text{ (quả).}$$

11.10. Giải bằng cách tính ngược từ cuối.

Xét số vở của bạn cuối cùng được nhận và bạn áp chót được nhận.

Bạn áp chót được nhận A quyển vở + $\frac{1}{5}$ số còn lại. Kí hiệu số còn lại đó là

B thì bạn áp chót nhận $A + \frac{1}{5}B$.

Bạn cuối cùng nhận nốt $\frac{4}{5}B$, hay theo quy luật của bài toán thì bạn cuối cùng nhận $A + 2$ quyển (vì không còn số còn lại nữa).

Do số vở của mỗi người bằng nhau nên $A + \frac{1}{5}B = A + 2$, do đó $\frac{1}{5}B = 2$.

Bạn cuối cùng được nhận $\frac{4}{5}B$, tức là $2.4 = 8$ (quyển vở).

Theo quy luật của đề bài thì bạn cuối cùng là bạn thứ $8 : 2 = 4$.

Vậy có 4 học sinh được nhận phần thưởng.

Tổng số vở là $8.4 = 32$ (quyển).

Chuyên đề 12. PHẦN TRĂM

12.1. Tăng $\frac{1}{2}$ thành $\frac{7}{8}$ thì giá trị phân số đó tăng thêm

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

tức là tăng

$$\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

12.2. Khối lượng công việc mới bằng

$$100\% + 40\% = 140\% = 1,4 \text{ (khối lượng công việc cũ).}$$

Năng suất lao động mới bằng

$$100\% + 25\% = 125\% = 1,25 \text{ (năng suất lao động cũ).}$$

Số công nhân mới bằng

$$1,4 : 1,25 = 1,12 = 112\% \text{ (số công nhân cũ).}$$

Số công nhân phải tăng thêm

$$112\% - 100\% = 12\%.$$

12.3. Giá mới hơn giá cũ $25\% = 0,25$, tức là bằng $1,25$ giá cũ.

Để trở lại giá cũ, giá lúa phải giảm đi $0,25 : 1,25 = 0,2 = 20\%$.

12.4. *Đáp số:* Giá rau tháng 5 bằng 99% giá rau tháng 3.

12.5. a) Giá đồ chơi trong ngày 1 – 6 là

$$50\,000 \cdot (100\% - 12\%) = 44\,000\text{d.}$$

Giá đó bằng

$$100\% + 10\% = 110\% = 1,1 \text{ (giá nhập).}$$

Giá nhập của đồ chơi là

$$44\,000 : 1,1 = 40\,000 \text{ (đồng).}$$

b) Giá bán ngày thường lãi so với giá nhập

$$(50\,000 - 40\,000) : 40\,000 = 25\%.$$

12.6. Sau lần giảm thứ nhất, giá quần áo bằng

$$100\% - 10\% = 90\% = 0,9 \text{ (giá bình thường).}$$

Sau lần giảm thứ hai, giá quần áo bằng 0,9 giá đã giảm tức là bằng $0,9.0,9 = 0,81$ (giá bình thường).

Giá đã giảm hai lần bằng

$$100\% + 5,3\% = 1,053 \text{ (giá gốc).}$$

Vậy 0,81 giá bình thường bằng 1,053 giá gốc.

Do đó giá bình thường so với giá gốc bằng $1,053 : 0,81 = 1,3 = 130\%$.

12.7. Giả sử người đó có 100 cuộc gọi trong một tháng.

Theo phương án I, người đó phải trả

$$99.100 + (30 - 20).20.5 = 10\,900 \text{ (xu).}$$

Theo phương án II, người đó phải trả

$$(1.10 + 5.10 + 10.30 + 20.30 + 30.20).10 = 15\,600 \text{ (xu).}$$

Theo phương án III, người đó phải trả

$$25.100 + (1.10 + 5.10 + 10.30 + 20.30 + 30.20).8 = 14\,980 \text{ (xu).}$$

Như vậy phương án I cho tiền cước rẻ nhất.

12.8. Giải tương tự Ví dụ 12.4.

Đáp số: Trong ngày thường, cửa hàng lãi 20%.

12.9. Lượng muối trong 20 kg nước biển là

$$20 \cdot \frac{5}{100} = 1 \text{ (kg).}$$

Lượng muối trong dung dịch vẫn là 1 kg, chiếm 2% dung dịch.

Lượng dung dịch là

$$1 : \frac{2}{100} = 50 \text{ (kg).}$$

Lượng nước lã cần thêm là

$$50 - 20 = 30 \text{ (kg).}$$

12.10. Lượng nước trong 500 kg cà phê tươi bằng

$$500 \cdot \frac{24}{100} = 120 \text{ (kg).}$$

Lượng chất khô trong cà phê tươi bằng $500 - 120 = 380$ (kg).

Lượng chất khô trong cà phê khô vẫn bằng 380 kg, chiếm $100\% - 5\% = 95\%$ lượng cà phê khô.

Lượng cà phê khô là $380 : \frac{95}{100} = 400$ (kg).

Lượng nước trong cà phê khô là $5\% \times 400 = 20$ (kg).

Lượng nước cần bay hơi là $120 - 20 = 100$ (kg).

12.11. Đáp số: Khối lượng hạt khô là 400 kg.

12.12. Đáp số: Khối lượng hạt giống sau khi ngâm là 16 kg.

12.13. Lượng nước trong 60 kg củ tươi bằng $60 \cdot \frac{70}{100} = 42$ (kg).

Lượng chất khô trong củ tươi bằng $60 - 42 = 18$ (kg).

Lượng chất khô trong củ khô vẫn bằng 18 kg.

Lượng nước trong củ khô là $30 - 18 = 12$ (kg).

Tỉ lệ nước trong củ khô bằng $12 : 30 = 40\%$.

Chuyên đề 13. TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

13.1. Lượng nước tràn vào tàu trong một giờ khi đã có máy bơm nước ra là

$$\frac{2 \cdot 60}{5} - 10 = 14 \text{ (tấn)}.$$

Thời gian để tàu bị chìm là

$$105 : 14 = 7,5 \text{ (giờ)}.$$

Để khi cập bến mà tàu vẫn chưa bị chìm thì vận tốc ít nhất của tàu phải là

$$90 : 7,5 = 12 \text{ (km/h)}.$$

13.2. Hiện nay kim phút cách kim giờ $\frac{1}{3}$ vòng.

Mỗi giờ kim phút quay được 1 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng, kim phút quay nhanh hơn kim giờ

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \text{ (vòng)}.$$

Thời gian để kim phút đuổi kịp kim giờ

$$\frac{1}{3} : \frac{11}{12} = \frac{4}{11} \text{ (giờ)}.$$

13.3. Trong một giờ, xe thứ nhất đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường AB, xe thứ hai đi được

$\frac{1}{3}$ quãng đường AB.

Thời gian để hai xe gặp nhau là $1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{6}{5}$ (giờ).

Đến chỗ gặp nhau, quãng đường xe thứ nhất đã đi nhiều hơn xe thứ hai là

$$\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{5} \text{ (quãng đường AB) hay 30 km.}$$

Quãng đường AB dài $30 : \frac{1}{5} = 150$ (km).

13.4. Tổng vận tốc của hai người là

$$300 : 5 = 60 \text{ (km/h).}$$

Thời gian cả hai người cùng đi là 4 giờ 42 phút = 4,7 giờ.

Trong thời gian đó, hai người cùng đi được

$$60 \cdot 4,7 = 282 \text{ (km).}$$

Quãng đường người thứ nhất đi trong 40 phút $\left(\text{hay } \frac{2}{3} \text{ giờ} \right)$ là

$$300 - 282 = 18 \text{ (km).}$$

Vận tốc của người thứ nhất là

$$18 : \frac{2}{3} = 27 \text{ (km/h).}$$

Vận tốc của người thứ hai là

$$60 - 27 = 33 \text{ (km/h).}$$

13.5. Vận tốc xe con bằng $\frac{4}{3}$ vận tốc xe tải nên trong 6 giờ cùng đi, xe con đi

được $\frac{4}{7}$ quãng đường AB, xe tải đi được $\frac{3}{7}$ quãng đường AB.

Xe con đi quãng đường AB trong $6 : \frac{4}{7} = \frac{21}{2}$ (giờ).

Xe con đi nửa quãng đường AB trong $\frac{21}{2} : 2 = \frac{21}{4}$ (giờ).

Xe tải đi quãng đường AB trong $6 : \frac{3}{7} = 14$ (giờ).

Xe tải đi nửa quãng đường AB trong $14 : 2 = 7$ (giờ).

Để gặp nhau ở chính giữa đường thì xe con phải khởi hành sau xe tải

$$7 - \frac{21}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ (giờ)} = 1 \text{ giờ } 45 \text{ phút.}$$

13.6. Cùng đi quãng đường AB thì thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc đi nên thời gian đi với vận tốc nhỏ bằng $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ thời gian đi với vận tốc lớn.

Hiệu của hai thời gian trên bằng $20 + 10 = 30$ (phút) = 0,5 (giờ).

Từ đó tìm được thời gian đi với vận tốc lớn là 1 giờ, quãng đường AB dài 60 km.

13.7. Đáp số: Quãng đường AB dài 60 km, vận tốc người III là 50 km/h.

13.8. Gọi B là địa điểm hai người gặp nhau, t_1 và t_2 là thời gian người I và người II đi AB.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$t_1 - t_2 = 0,5 \text{ (giờ).}$$

Từ đó tính được $t_2 = 1$ (giờ), hai người gặp nhau lúc 8 giờ 30 phút.

13.9. Gọi C là địa điểm thay đổi vận tốc trên đường về (h.14). Trên quãng đường AC, vận tốc lúc đi là 40 km/h, vận tốc lúc về là 60 km/h, hiệu thời gian đi và về là 30 phút.



Hình 14

Từ đó tính được thời gian về CA là 1 giờ, quãng đường CA dài 60 km, quãng đường AB dài 90 km.

13.10. Gọi C là địa điểm anh Thành bắt đầu giảm vận tốc (h.15).

Vận tốc trên AC là

$$10 : \frac{2}{3} = 15 \text{ (km/h).}$$

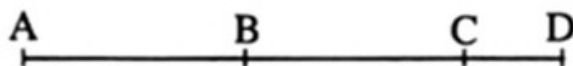


Hình 15

Trên quãng đường CB, biết vận tốc dự định là 15 km/h, vận tốc đã đi là 12 km/h, hiệu thời gian là 14 phút, ta tính được thời gian đã đi CB là 70 phút, quãng đường CB dài 14 km.

Quãng đường AB dài 24 km.

- 13.11. Gọi C là địa điểm trên quãng đường BD sao cho $AB = BC$ (h.16) thì $CD = 10$ km.



Hình 16

Thời gian đi CD là

$$\frac{10}{60} = \frac{1}{6} \text{ (giờ)} = 10 \text{ (phút)}.$$

Thời gian đi AB nhiều hơn thời gian đi BC là

$$20 + 10 = 30 \text{ (phút)} = 0,5 \text{ (giờ)}.$$

Ta tính được thời gian đi BC là 1 giờ, quãng đường BC dài 60 km, quãng đường AB dài 60 km, quãng đường BD dài 70 km.

- 13.12. Ta tính được tỉ số của vận tốc xuôi và vận tốc ngược là $\frac{3}{2}$, hiệu của hai vận tốc đó là 6 km/h.

Từ đó, vận tốc xuôi là 18 km/h, vận tốc ngược là 12 km/h, khúc sông AB dài 54 km.

- 13.13. Trong 15 giây, xe máy đi được $\frac{36.15}{3600} = 0,15 \text{ (km)} = 150 \text{ (m)}.$

Trong 15 giây, xe lửa đi được $75 + 150 = 225 \text{ (m)}.$

Vận tốc của xe lửa là $225 : 15 = 15 \text{ (m/giây)}.$

- 13.14. Cứ 3 km thì có 1 km đi với vận tốc 20 km/h hết $\frac{1}{20}$ giờ và 2 km đi với vận tốc 10 km/h hết $\frac{2}{10}$ giờ.

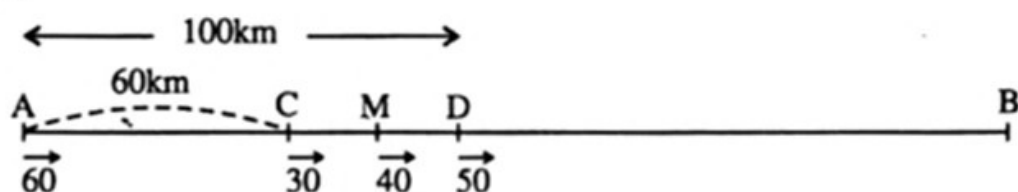
Cứ 3 km thì đi hết

$$\frac{1}{20} + \frac{2}{10} = \frac{1}{4} \text{ (giờ)}.$$

Vận tốc trung bình là

$$3 : \frac{1}{4} = 12 \text{ (km/h)}.$$

- 13.15. Lúc 8 giờ, xe máy ở vị trí C, xe tải ở vị trí D (h.17). Gọi M là trung điểm của CD.



Hình 17

Quãng đường AC dài $30 \cdot 2 = 60$ (km).

Quãng đường AD dài $50 \cdot 2 = 100$ (km).

Quãng đường AM dài $60 + (100 - 60) : 2 = 80$ (km).

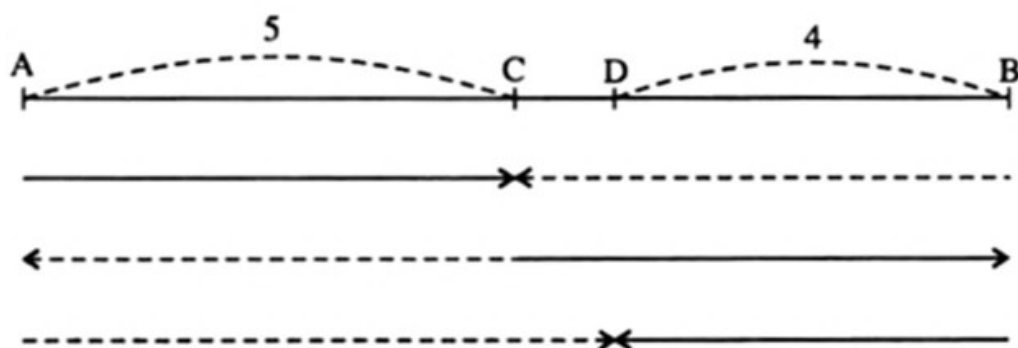
Giả sử có một xe thứ tư khởi hành từ M lúc 8 giờ, đi về phía B với vận tốc $\frac{30 + 50}{2} = 40$ (km/h) thì xe thứ tư luôn ở chính giữa xe máy và xe tải.

Thời gian để xe con đuổi kịp xe thứ tư là $\frac{80}{60 - 40} = 4$ (giờ).

Xe con gặp xe thứ tư lúc $8 + 4 = 12$ (giờ).

Vậy lúc 12 giờ thì xe con ở chính giữa xe máy và xe tải.

- 13.16. Trên hình 18, quãng đường xe I đi biểu thị bởi nét liền, quãng đường xe II đi biểu thị bởi nét đứt.



Hình 18

Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ nhất ở C, hai xe đi $AC + BC = AB$, khi đó xe I đi 5 km.

Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau lần thứ hai ở D, hai xe đi $(AB + BD) + (BA + AD) = 3AB$, khi đó xe I đi $5 \cdot 3 = 15$ (km).

Do $AB + BD = 15$ km, mà $BD = 4$ km nên $AB = 15 - 4 = 11$ (km).

Chuyên đề 14. HỆ GHI SỐ VỚI CƠ SỐ BẤT KÌ

14.1. a) Trong hệ số thập phân, số lớn nhất có một chữ số gồm 9 đơn vị.

b) Trong hệ cơ số 7, số lớn nhất có một chữ số gồm 6 đơn vị.

14.2. a) Trong hệ thập phân, số nhỏ nhất có hai chữ số gồm 10 đơn vị.

b) Trong hệ cơ số 6, số nhỏ nhất có hai chữ số gồm 6 đơn vị.

14.3. a) Viết thêm một chữ số 0 vào bên phải của số 41 thì số đó tăng gấp 10 lần.

b) Viết thêm một chữ số 0 vào bên phải của số $35_{(8)}$ thì số đó tăng gấp 8 lần.

14.4. a) $132_{(6)} + 241_{(6)} = 413_{(6)}$.

b) $553_{(6)} - 315_{(6)} = 234_{(6)}$.

14.5. a) $1100_{(2)}$.

b) $111_{(2)}$.

c) $11\ 001_{(2)}$.

14.6. a) Hệ cơ số 7.

b) Hệ cơ số 4.

c) Hệ cơ số 6.

14.7. a) $43_{(x)} = 31 \Leftrightarrow 4x + 3 = 31 \Leftrightarrow x = 7$.

b) Đổi $23_{(4)}$ sang hệ thập phân được 11.

Đổi 11 sang hệ cơ số 3 được $102_{(3)}$.

Vậy $x = 102$.

c) $145_{(x)} = 290 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 290 \Leftrightarrow x(x + 4) = 285$.

Phân tích ra thừa số nguyên tố : $285 = 3.5.19 = 15.19$.

Vậy $x = 15$.

14.8. Năm quả cân đó có khối lượng 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg.

14.9. Cách 1. $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{19} + 2^{20}$

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20} + 2^{21}$$

$$\text{Suy ra } 2A - A = 2^{21} - 1.$$

$$\text{Vậy } A + 1 = 2^{21}.$$

Cách 2. Dùng hệ nhị phân.

$$\text{nên } A + 1 = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{21 \text{ chữ số } 0^{(2)}} = 2^{21}.$$

$$A = \underbrace{111 \dots 1}_{21 \text{ chữ số } 1} \quad (2)$$

14.10. Gọi số hạt thóc phải tìm là A. Ta có $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$.

$$\text{Ta tính được } A = 2^{64} - 1.$$

Số thóc này rất lớn, nếu rải đều trên bề mặt Trái Đất thì được một lớp thóc dày 9 mm.

14.11. a) $100_{(k)} = k^2$ là số chính phương.

$$\text{b) } 110_{(k)} = k^2 + k = k(k + 1) \text{ là hợp số.}$$

14.12. Ta có $\overline{abc}_{(4)} : 3 \Leftrightarrow 16a + 4b + c : 3$

$$\Leftrightarrow (15a + 3b) + (a + b + c) : 3 \Leftrightarrow a + b + c : 3.$$

14.13. Ta có $\overline{abc} = \overline{cba}_{(9)} \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 81c + 9b + a \Leftrightarrow 99a + b = 80c. \quad (1)$

$$\text{Suy ra } 99a + b : 10 \Leftrightarrow 100a + b - a : 10 \Leftrightarrow b - a : 10.$$

$$\text{Do } 1 \leq a \leq 8 \text{ và } 0 \leq b \leq 8 \text{ nên } b = a.$$

$$\text{Thay } b = a \text{ vào (1) ta được } 100a = 80c \Leftrightarrow 5a = 4c.$$

$$\text{Suy ra } a : 4, c : 5.$$

$$\text{Do } 1 \leq a \leq 8 \text{ và } 1 \leq c \leq 8 \text{ nên chỉ có thể } a = 4 \text{ và } c = 5.$$

$$\text{Thử lại: } 445 = 544_{(9)}.$$

Chuyên đề 15. Dãy số viết theo quy luật

15.1. a) 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ; 42 ; ... ; $n(n + 1)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

b) 4 ; 10 ; 18 ; 28 ; 40 ; 54 ; 70 ; ... ; $n(n + 3)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

c) 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27 ; 38 ; 51 ; ... ; $(2 + n^2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

15.2. a) Khoảng cách $d = 4$. Số 37 là số hạng thứ : $(37 - 1) : 4 + 1 = 10$.

b) Số hạng thứ 100 là số $1 + (100 - 1) \cdot 4 = 397$.

Số hạng tổng quát : $1 + (n - 1) \cdot 4$; $n \in \mathbb{N}^*$.

c) 2000 không thuộc dãy ; 2013 thuộc dãy.

15.3. a) Số hạng thứ 100 của dãy là : $2 + 9(1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99) = 44552$.

b) Gọi thứ tự của số 407 là n , ta có

$$407 = 2 + 9 \cdot [1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)], (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : 2 = (407 - 2) : 9 \Rightarrow n(n - 1) = 90 \Rightarrow n = 10.$$

15.4. a) Số số hạng của tổng là 1007 ; $A = (2013 + 1) \cdot 1007 : 2 = 1007^2$.

b) Đặt $B = 100 + 102 + \dots + 296 + 298 = (100 + 298) \cdot 100 : 2 = 19900$.

15.5. a) $C = -1007$; b) $D = -1006$;

c) $G = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (110 - 111 - 112 + 113) + 114 + 115 = 230$.

15.6. a) Số thứ n là $3n + 4$.

b) Tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy :

$$7 + 10 + 13 + \dots + 300 + 304 = \frac{(304 + 7) \cdot 100}{2} = 15550.$$

15.7. a) $A - B = 100$.

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2 = 5^2 \cdot 7^2 = 35^2$. Vậy $n = 35$.

15.8. a) $x = 7$; b) $x = 3$.

15.9. a) Ta tính tổng các chữ số của số $A = 1234\dots9899100$ như sau :

Từ 1 đến 98 có 98 số ghép thành 49 cặp $(1 ; 98) ; (2 ; 97) ; (3 ; 96) ; \dots ; (49 ; 50)$ đều có tổng các chữ số là 18. Tổng các chữ số của A là

$$49 \cdot 18 + 9 + 9 + 1 + 0 + 0 = 901.$$

b) Từ số 1 đến số 2012 có 9 số có 1 chữ số, 90 số có hai chữ số, 900 số có ba chữ số, $2012 - 999 = 1013$ số có 4 chữ số. Số chữ số phải dùng để viết các số từ 1 đến 2012 là : $1.9 + 2.90 + 3.900 + 4.1013 = 6941$. Vậy chữ số 2 ở hàng nghìn của số 2012 là chữ số thứ $6941 - 3 = 6938$ của dãy.

15.10. a) Để viết các số lẻ từ số 1 đến số 99 phải dùng $1.5 + 2.45 = 95$ chữ số. Vì $95 < 100$ nên chữ số thứ 100 nằm trong số các số lẻ có ba chữ số tiếp theo là 101103. Vậy chữ số thứ 100 phải tìm nằm ở số 103 và là chữ số 0.

b) Xét số 135791113 ... 99910011003 ... 20112013, ta thấy số các số lẻ có 4 chữ số từ 1001 đến 2013 là $(2013 - 1001) : 2 + 1 = 507$. Do đó ta phải dùng $507.4 = 2028$ chữ số để viết. Để viết các số lẻ từ số 1 đến số 999 phải dùng $1.5 + 2.45 + 3.450 = 1445$ chữ số. Tổng số các chữ số cần dùng để viết đến số 2013 là $1445 + 2028 = 3473$. Vậy chữ số 1 của số 2013 là chữ số thứ 3472 của dãy.

$$\begin{aligned} \text{15.11. a) } P &= 46.47.48.....89.90 = \frac{1.2.3.....89.90}{1.2.3.....44.45} = 1.3.5.....87.89. \frac{2.4.6.....88.90}{1.2.3.....44.45} \\ &= 1.3.5.....87.89. \underbrace{2.2.....2}_{45 \text{ số } 2}. \text{ Như vậy } P \text{ chứa 45 thừa số } 2. \end{aligned}$$

b) Đáp số : 11 .

$$\text{15.12. a) Ta xét : } 2012 T = 2013 T - T = 2013^{2011} - 1 \Rightarrow 2012 T + 1 = 2013^{2011}.$$

$$\text{b) Xét } a.S_n = a + a^2 + \dots + a^n + a^{n+1} \Rightarrow aS_n - S_n = a^{n+1} - a^0$$

$$\Rightarrow S_n = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (n \in \mathbb{N}^* ; a \neq 1 ; a \neq 0).$$

$$\text{15.13. a) } T = \frac{3^{100} - 3}{2} \Rightarrow 2T + 3 = 3^{100} - 3 + 3 = 3^{100} \Rightarrow 3^{100} = 3^{2n} \Rightarrow n = 50.$$

$$\text{b) } 4A + 25 = 5^{2013}.$$

$$\text{c) Ta có } 3C = 4^{101} - 1 < 4^{101} = B. \text{ Vậy } C < \frac{B}{3}.$$

$$\text{15.14. Ta xét : } A_1 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 9.10 + 10.11 + \dots + 28.29 + 29.30$$

$$A_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 8.9 + 9.10. \text{ Khi đó : } A = A_1 - A_2.$$

Áp dụng công thức (ví dụ 15.8)

$$1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} ; n \in \mathbf{N}^* .$$

Với $n = 29$, $A_1 = \frac{29.30.31}{3} = 8990$. Với $n = 9$, ta có : $A_2 = \frac{9.10.11}{3} = 330$.

Vậy $A = A_1 - A_2 = 8990 - 330 = 8660$.

15.15. a) $B = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 99(100-1) + 100(101-1) ;$
 $= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100 + 100.101) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100)$
 $= 343400 - 5050 = 338350$.

b) Tính $C_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2 + \dots + 199^2 + 200^2 = 2686700$

$C_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = 338350$. Khi đó : $C = C_1 - C_2 = 2348350$.

c) $S = 1(2+1) + 2(3+1) + 3(4+1) + \dots + 99(100+1) + 100(101+1)$
 $= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100 + 100.101) + (1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100)$
 $= 343400 + 5050 = 348450$.

d) Ta biến đổi

$T = 1.100 + 2.(100-1) + 3.(100-2) + \dots + 99.(100-98) + 100.(100-99)$
 $= 100.(1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100) - (1.2 + 2.3 + \dots + 98.99 + 99.100)$
 $= (100.5050) - (99.100.101) : 3 = 171700$.

e) $4E = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + 98.99.100.4$

$4E = 1.2.3.(4-0) + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + 98.99.100.(101-97)$
 $= 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \dots$
 $+ 98.99.100.101 - 97.98.99.100$.

Vậy $E = 98.99.100.101 : 4 = 98.99.25.101 = 24497550$.

15.16. $S_1 = 3 = 1 + 2 ; S_2 = 9 = 2 + 3 + 4 ; S_3 = 18 = 3 + 4 + 5 + 6 ;$

$S_4 = 30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 ; S_5 = 45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.

Vậy $S_{100} = 100 + 101 + 102 + \dots + 199 + 200 = (200 + 100).101 : 2 = 15150$.

15.17. a) $100! = 1.2.3.\dots.99.100$. Xét dãy : 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 99 ; 100. Các bội của 3 là 3 ; 6 ; 9 ; ... ; 99 gồm có $(99-3) : 3 + 1 = 33$ số. Các bội của 3^2 là 9 ; 18 ; ... ; 99 gồm có $(99-9) : 9 + 1 = 11$ số. Các bội của 3^3 là 27 ; 54 ; 81 gồm 3 số. Bội của 3^4 có 1 số 81. Không có bội của 3^5 . Vậy khi phân tích

ra thừa số nguyên tố, số $100!$ chứa thừa số nguyên tố 3 với số mũ bằng $33 + 11 + 3 + 1 = 48$.

$$\begin{aligned} \text{b) } P &= \frac{90!}{29!} = (1.4.7.....88)(2.5.8.....89) \cdot \frac{3.6.9.....87}{1.2.3.....29} \cdot 3.3.10 \\ &= (1.4.7.....88.10)(2.5.8.....89) \cdot 3^{31}. \end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc thứ nhất là tích các số chia 3 dư 1. Biểu thức trong ngoặc thứ hai là tích các số chia 3 dư 2. Vậy P chứa 31 thừa số 3.

15.18. T_1 có 1 số hạng ; T_2 có 2 số hạng ; T_3 có 3 số hạng ; T_4 có 4 số hạng ; ... nên tổng số các số hạng từ T_1 đến T_{99} là $1 + 2 + 3 + ... + 99 = 4950$ số hạng.

$$\text{Vậy } T_{100} = 4951 + 4952 + ... + 5050 = (4951 + 5050) \cdot 100 : 2 = 500050.$$

$$T_{101} = 5051 + 5052 + ... + 5151 = (5051 + 5151) \cdot 101 : 2 = 515201.$$

$$T_{101} - T_{100} = 15151.$$

$$\text{15.19. } 3U = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...9}_{100 \text{ số } 9} = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^{100} - 1$$

$$= 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{100} - 100$$

$$= \underbrace{11...1}_{100 \text{ số } 1} 0 - 100 = \underbrace{11...1}_{98 \text{ số } 1} 010.$$

$$\text{Vậy } U = \underbrace{11...1}_{98 \text{ số } 1} 010 : 3 = \underbrace{370370...370}_{32 \text{ bộ số } 370} 3670.$$

15.20. Số số hạng đứng trước số 1 cuối cùng là

$$1 + 2 + 3 + ... + 2013 - 1 = 2027090.$$

Tổng S có 2012 số hạng là 1 các số hạng còn lại là 5.

$$\text{Vậy } S = 2012 \cdot 1 + (2027090 - 2012) \cdot 5 = 10127402.$$

15.21. Xét tổng $U = S_{000} + S_{001} + S_{002} + ... + S_{998} + S_{999}$ có 1000 số hạng . Mỗi số hạng là tổng của 3 chữ số nên U là tổng của 3000 chữ số. Số lần xuất hiện của mỗi chữ số 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 là như nhau nên mỗi chữ số xuất hiện 300 lần.

$$\text{Vậy } U = 300 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 13500.$$

$$\text{Ta có } S_{1000} + S_{1001} + S_{1002} + ... + S_{1998} + S_{1999}$$

$$\begin{aligned} &= (S_1 + S_{000}) + (S_1 + S_{001}) + (S_1 + S_{002}) + ... + (S_1 + S_{998}) + (S_1 + S_{999}) \\ &= 1000 + 13500 = 14500. \end{aligned}$$

$$\text{Và } (S_{2000} + S_{2001} + S_{2002} + ... + S_{2008} + S_{2009}) + S_{2010} + S_{2011} + S_{2012} + S_{2013}$$

$$= (2 + 3 + 4 + ... + 10 + 11) + 3 + 4 + 5 + 6 = 83.$$

$$\text{Vậy } T = 13500 + 14500 + 83 = 28083.$$

15.22. a) Đáp số: $A = \frac{222}{3355}$.

b) Đặt $U = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} \Rightarrow 2U - U = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$
 $\Rightarrow T = 10 - U = \frac{9217}{1024}$.

c) Đặt $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \Rightarrow 4M = 5M - M = 1 - \frac{1}{5^{100}} = \frac{5^{100} - 1}{5^{100}}$
 $\Rightarrow M = \frac{5^{100} - 1}{4 \cdot 5^{100}} \Rightarrow V = 5^{100}$.

(Có thể áp dụng công thức: $S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$ với $a_1 = \frac{1}{5}$; $q = \frac{1}{5}$; $n = 100$).

15.23. $B = 100 \cdot \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right)$
 $= 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{100} \right) = 99$.

15.24. a) Ta có $3 = 1.3$; $15 = 3.5$; $35 = 5.7$; ... và mẫu số của số hạng thứ n có dạng $(2n - 1)(2n + 1)$. Ta cần tính tổng: $C = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{199.201}$
 $\Rightarrow 2C = \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{199.201} \right)$
 $= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{201} = \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{201 - 1}{201} = \frac{200}{201}$
 $\Rightarrow C = \frac{100}{201}$.

b) Ta có $5 = 1.5$; $45 = 5.9$; $117 = 9.13$; $221 = 13.17$; ...

Mẫu số của số hạng thứ n có dạng $(4n - 3)(4n + 1)$. Ta cần tính tổng

$D = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \frac{1}{13.17} + \dots + \frac{1}{397.401}$
 $4D = \frac{5-1}{1.5} + \frac{9-5}{5.9} + \frac{13-9}{9.13} + \frac{17-13}{13.17} + \dots + \frac{401-397}{397.401}$
 $= \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{397} - \frac{1}{401} = \frac{1}{1} - \frac{1}{401} = \frac{400}{401}$. Vậy $D = \frac{100}{401}$.

$$\begin{aligned}
 15.25. \text{ a) } E &= \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{99.100.101} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{100} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{100.101} \right) = \frac{99}{100} - \frac{5049}{20200} = \frac{14949}{20200}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} &= \frac{3}{1.2.3.4}; \quad \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} = \frac{3}{2.3.4.5}; \dots; \\
 \frac{1}{47.48.49} - \frac{1}{48.49.50} &= \frac{3}{47.48.49.50}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } 3F = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{48.49.50} = \frac{19599}{48.49.50} = \frac{6533}{39200} \Rightarrow F = \frac{6533}{117600}.$$

$$15.26. \text{ a) } x = 1. \quad \text{b) } \text{Lưu ý: } \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}; \quad \frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12}; \dots \text{ Đáp số: } x = \frac{4}{5}.$$

$$15.27. \text{ a) } y = \frac{99}{101}. \quad \text{b) } y = 100.$$

$$\begin{aligned}
 15.28. \text{ Đặt } N &= \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{330} + \frac{1}{396} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Đặt } M &= 36 + 60 + 90 + 126 + 168 + 216 + 270 + 330 + 396 = 1692 \\
 \Rightarrow \frac{N}{M} &= \frac{1}{20304}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15.29. \text{ a) Xét tử số: } &1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+99+100) \\
 &= (\underbrace{1+1+\dots+1}_{100 \text{ số } 1}) + (\underbrace{2+2+\dots+2}_{99 \text{ số } 2}) + (\underbrace{3+3+\dots+3}_{98 \text{ số } 3}) + \dots + (99+99) + 100 \\
 &= 1.100 + 2.99 + \dots + 99.2 + 100.1. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2013}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \text{Lưu ý: } &1124.2247 - 1123 = (1123+1).2247 - 1123 = 1123.2247 + 1124. \\
 \text{Đáp số: } &Q = 50.
 \end{aligned}$$

15.30. Gọi biểu thức tử là M, biểu thức mẫu là N. Ta có :

$$M = 3 + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{95} + \frac{3}{97} + \frac{3}{99} = 3 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{99} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 3. \left[\left(1 + \frac{1}{99} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{97} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{95} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{51} \right) \right] \\
&= 300. \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{49.51} \right); \\
N &= \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{99.1} \right) + \left(\frac{1}{3.97} + \frac{1}{97.3} \right) + \left(\frac{1}{5.95} + \frac{1}{95.5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49.51} + \frac{1}{51.49} \right) \\
&= 2. \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{49.51} \right).
\end{aligned}$$

Vậy $Q = 150$.

15.31. a) Ta có : $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} ; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} ; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} ; \dots ; \frac{1}{100^2} < \frac{1}{99.100}$.

hay : $E < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ nên $E < 1 - \frac{1}{100} < 1$.

b) Giữ nguyên $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$, các phân số sau thay bằng các phân số lớn hơn,

ta có : $F < \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right) = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \right) + F'$

Ta có $F' = \frac{1}{2} - \frac{1}{100}$. Do đó : $F < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < 1\frac{3}{4}$

c) $G = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$
 $< \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{49.50} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50} \right) < \frac{1}{2}$.

d) $H = 2 + \left(1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{16} + \dots + 1 - \frac{1}{2500} \right)$
 $= 51 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$.

Do $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 1 - \frac{1}{50} < 1$ nên $H > 51 - 1$ hay $H > 50$.

15.32. a) Ta có : $K < \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{3} - \frac{1}{100} = \frac{1}{3}$;

$K > \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{4} - \frac{1}{101} = \frac{97}{404} > \frac{97}{485} = \frac{1}{5}$. Vậy $\frac{1}{5} < K < \frac{1}{3}$.

b) Ta có : $L < \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} + \dots + \frac{1}{198.199} = \frac{1}{99} - \frac{1}{199} < \frac{1}{99}$.

$L > \frac{1}{100.101} + \frac{1}{101.102} + \dots + \frac{1}{199.200} = \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = \frac{1}{200}$.

Vậy : $\frac{1}{200} < L < \frac{1}{99}$.

15.33. a) $\frac{1}{2!} = \frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4}$; ... ; $\frac{1}{2012!} < \frac{1}{2011.2012}$.

Vậy $S < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2011.2012} = 1 + 1 - \frac{1}{2012} = 2 - \frac{1}{2012} < 2$.

b) Ta thấy :

$$\begin{aligned} \frac{9}{10!} + \frac{10}{11!} + \frac{11}{12!} + \dots + \frac{99}{100!} &= \frac{10-1}{10!} + \frac{11-1}{11!} + \frac{12-1}{12!} + \dots + \frac{100-1}{100!} \\ &= \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \dots + \frac{1}{99!} - \left(\frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \dots + \frac{1}{100!} \right) = \frac{1}{9!} - \frac{1}{100!} < \frac{1}{9!}. \end{aligned}$$

15.34. a) $P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} \right)$$

$$= \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} \Rightarrow P : Q = 1.$$

b) $M = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) - \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{198}\right) - \left(1 - \frac{1}{200}\right)$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{198} + \frac{1}{200} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \right). \text{ Vậy } N : M = -2.$$

$$\begin{aligned}
 15.35. Q &= \left(\frac{1}{2011} + 1\right) + \left(\frac{2}{2010} + 1\right) + \left(\frac{3}{2009} + 1\right) + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{2009}{3} + 1\right) + \left(\frac{2010}{2} + 1\right) + \frac{2012}{2012} \\
 &= 2012 \cdot \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \frac{1}{2009} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 2012 P \\
 &\Rightarrow Q : P = 2012.
 \end{aligned}$$

15.36. a) $R = 1,1 + 2,6 + 4,1 + 5,6 + \dots + 148,1 + 149,6$ là dãy số cách đều có $d = 1,5$.

Số số hạng là $(149,6 - 1,1) : 1,5 + 1 = 100$.

Vậy $R = (149,6 + 1,1) \cdot 100 : 2 = 7535$.

b) Ta có $S = S_1 + S_2 + S_3$ và $S_1 ; S_2 ; S_3$ là các dãy số cách đều với d lần lượt là $1,1 ; 1,01 ; 1,001$; số số hạng lần lượt là $8 ; 90 ; 900$ nên ta có :

$$S_1 = 1,2 + 2,3 + 3,4 + \dots + 8,9 = (1,2 + 8,9) \cdot 8 : 2 = 40,4$$

$$S_2 = 9,10 + 10,11 + 11,12 + \dots + 98,99 = (9,10 + 98,99) \cdot 90 : 2 = 4864,05$$

$$\begin{aligned}
 S_3 &= 99,100 + 100,101 + \dots + 998,999 \\
 &= (99,100 + 998,999) \cdot 900 : 2 = 494144,55
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = S_1 + S_2 + S_3 = 40,4 + 4864,05 + 494144,55 = 499049.$$

c) Đặt $T_1 = 1,2 + 2,4 + 3,6 + 4,8 = 12$; $T_2 = 5,10 + 6,12 + \dots + 45,90$ là dãy số cách đều có $d = 1,02$, có số số hạng là $(45,9 - 5,1) : 1,02 + 1 = 41$.

$$\text{Vậy } T_2 = (45,9 + 5,1) \cdot 41 : 2 = 1045,5. \text{ Vậy } T = T_1 + T_2 = 1057,5.$$

$$d) U = 1,2 + 2,4 + 3,6 + 4,8 + 6 + 7,2 + \dots + 120.$$

$$\text{Cách 1 : } U = 1,2(1 + 2 + \dots + 100) = 1,2 \cdot 5050 = 6060.$$

Cách 2 : U là dãy số cách đều với $d = 1,2$; số số hạng $(120 - 1,2) : 1,2 + 1 = 100$.

$$\text{Vậy } U = (1,2 + 120) \cdot 100 : 2 = 6060.$$

$$15.37. a) B = \left(-\frac{9}{10}\right)\left(-\frac{10}{11}\right)\left(-\frac{11}{12}\right) \dots \left(-\frac{98}{99}\right)\left(-\frac{99}{100}\right) = -\frac{9}{100} \text{ (do có 91 thừa số âm).}$$

$$\begin{aligned}
 b) E &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \dots \frac{80}{81} \cdot \frac{99}{100} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{9.11}{10.10} \\
 &= \frac{1.2 \dots 8.9}{2.3 \dots 9.10} \cdot \frac{3.4 \dots 10.11}{2.3 \dots 9.10} = \frac{11}{20}.
 \end{aligned}$$

$$c) H = \frac{2.8}{1.9} \cdot \frac{3.9}{2.10} \cdot \frac{4.10}{3.11} \cdots \frac{101.107}{100.108} = \frac{202}{27}.$$

$$d) I = \left(-\frac{18}{10}\right) \left(-\frac{30}{22}\right) \left(-\frac{44}{36}\right) \cdots \left(-\frac{10908}{10900}\right) \\ = \left(-\frac{2.9}{1.10}\right) \cdot \left(-\frac{3.10}{2.11}\right) \cdot \left(-\frac{4.11}{3.12}\right) \cdots \left(-\frac{101.108}{100.109}\right) = \frac{909}{109}.$$

15.38. a) Biến đổi mẫu :

$$\left(\frac{2013}{1} - 1\right) + \left(\frac{2014}{2} - 1\right) + \left(\frac{2015}{3} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{4023}{2011} - 1\right) + \left(\frac{4024}{2012} - 1\right) \\ = \frac{2012}{1} + \frac{2012}{2} + \cdots + \frac{2012}{2011} + \frac{2012}{2012} \\ = 2012 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}\right). \text{ Vậy } A = \frac{1}{2012}.$$

$$b) B = \frac{\frac{2013}{1} \cdot \frac{2014}{2} \cdots \frac{3012}{1000}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{3012}{2012}} = \frac{2013 \cdot 2014 \cdots 3012}{1 \cdot 2 \cdots 1000} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots 2012}{1001 \cdot 1002 \cdots 3012} = 1.$$

15.39. a) $\frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \cdots \frac{110}{10^2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{11}{10} = 11.$

Vậy $11x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{11}.$

b) Ta có $\frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \cdots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013} - 2013$ \\ $= \left(\frac{2014}{1} - 1\right) + \left(\frac{2015}{2} - 1\right) + \left(\frac{2016}{3} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{4025}{2012} - 1\right) + \left(\frac{4026}{2013} - 1\right)$ \\ $= 2013 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013}\right). \text{ Vậy } x = 2013.$

c) Xét $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ \\ $= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \Rightarrow x = 2012.$

$$\begin{aligned} \text{d) Tính } & \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{19.21} \right) \cdot 420 = \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{19.21} \right) \cdot 210 \\ & = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \cdot 210 = \left(1 - \frac{1}{21} \right) \cdot 210 = \frac{20}{21} \cdot 210 = 200. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có } 200 - [0,4 \cdot (7,5 - 2,5x)] : 0,25 = 212$$

$$\text{Suy ra } 200 - (3 - x) \cdot 4 = 212 \Rightarrow (3 - x) \cdot 4 = -12 \Rightarrow x = 6.$$

$$\begin{aligned} \text{15.40. a) } C &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{80}{81} \\ &= \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{8.10}{9.9} \\ &= \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2.3.4.5.6.7.8.9} \cdot \frac{3.4.5.6.7.8.9.10}{2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \left(1 - \frac{2}{2.3} \right) \left(1 - \frac{2}{3.4} \right) \left(1 - \frac{2}{4.5} \right) \left(1 - \frac{2}{5.6} \right) \left(1 - \frac{2}{6.7} \right) \left(1 - \frac{2}{7.8} \right) \left(1 - \frac{2}{8.9} \right) \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{40}{42} \cdot \frac{54}{56} \cdot \frac{70}{72} = \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{5.8}{6.7} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{7.10}{8.9} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

$$C : D = \frac{5}{9} : \frac{5}{12} = 1 \frac{1}{3}.$$

$$\text{b) } \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{21}{5}.$$

$$\text{c) } * \frac{5}{12} < \frac{x}{36} < \frac{5}{9} \text{ hay } \frac{15}{36} < \frac{x}{36} < \frac{20}{36} \Rightarrow 15 < x < 20 \Rightarrow x \in \{16; 17; 18; 19\}.$$

$$\begin{aligned} * \frac{-5}{12} \geq \frac{-10}{y} \geq \frac{-5}{9} \text{ hay } \frac{-10}{24} \geq \frac{-10}{y} \geq \frac{-10}{18} \Rightarrow 24 \geq y \geq 18 \\ \Rightarrow y \in \{18; 19; 20; 21; 22; 23; 24\}. \end{aligned}$$

15.41. a) Từ 1 đến 20 có $16 = 2^4$ là lũy thừa với số mũ cao nhất của 2. Ta chọn mẫu chung (MC) là $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 19$; Do đó:

$$E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20} = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_{20}}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 19}.$$

Trong tất cả các thừa số phụ $k_1; k_2; \dots; k_{20}$ chỉ có $k_{16} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 19$ là số lẻ, còn lại tất cả đều là số chẵn vì chứa ít nhất một thừa số 2. Vì thế $k_1 + k_2 + \dots +$

k_{20} là số lẻ ; E là phân số có mẫu chia hết cho 2 ; tử không chia hết cho 2 nên E không thể là số tự nhiên.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } F &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{99} \right) + \dots + \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{76} \right) \\ &= \frac{151}{51 \cdot 100} + \frac{151}{52 \cdot 99} + \dots + \frac{151}{75 \cdot 76} = \frac{151(k_1 + k_2 + \dots + k_{25})}{51 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100} = \frac{a}{b} \text{ với } k_1; k_2; \dots; k_n \end{aligned}$$

là các thừa số phụ của các phân số khi quy đồng với MC là $51 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$.

Tử chia hết cho số nguyên tố 151, mẫu không chứa 151 nên khi rút gọn đến phân số tối giản, a vẫn chia hết cho 151.

$$\text{15.42. } 1,1 + 1,11 + 1,111 + \dots + \underbrace{1,11\dots1}_{9 \text{ số } 1} + \underbrace{1,11\dots1}_{10 \text{ số } 1}.$$

$$= (1 + 1,1 + 1,11 + 1,111 + \dots + \underbrace{1,11\dots1}_{9 \text{ số } 1}) + \underbrace{0,11\dots1}_{10 \text{ số } 1}$$

$$= 10,987654321 + \underbrace{0,11\dots1}_{10 \text{ số } 1}.$$

$$= 11,0987654321.$$

15.43. Ta chia các số thành các bộ sau

$$\frac{1}{1}; \left(\frac{2}{1}; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3} \right); \left(\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4} \right); \left(\frac{5}{1}; \frac{4}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{5} \right); \dots$$

Ta có $1 + 2 + 3 + \dots + 14 = 105$ nên số thứ 100 ở bộ thứ 14. Bộ thứ 14 có 14

số: $\frac{14}{1}; \frac{13}{2}; \frac{12}{3}; \dots; \frac{6}{9}; \frac{5}{10}; \frac{4}{11}; \frac{3}{12}; \frac{2}{13}; \frac{1}{14}$ và số thứ 100 là số $\frac{6}{9}$.

$$\begin{aligned} \text{15.44. } P &= \left(1 + \frac{2}{1} \right) \left(1 + \frac{2}{2} \right) \left(1 + \frac{2}{3} \right) \dots \left(1 + \frac{2}{98} \right) \left(1 + \frac{2}{99} \right) = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \dots \cdot \frac{100}{98} \cdot \frac{101}{99} \\ &= \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050. \text{ Ta lại có } (-1 - 2 - 3 - \dots - 99 - 100) = -5050. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \text{ thì}$$

$$M = 2M - M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}.$$

Vậy $\frac{P}{Q} = -\frac{1024}{1023}.$

15.45. $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{14850}.$

$$\frac{3}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{9900}$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Vậy $S = \frac{33}{50}.$

15.46. * Tính $A = 1,01 + 1,02 + 1,03 + \dots + 9,98 + 9,99 + 10.$

Số số hạng : $(10 - 1,01) : 0,01 + 1 = 900$

$$A = \frac{(10 + 1,01).900}{2} = 4954,5.$$

* Tính $B = 2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}.$ Ta có

$$\frac{1}{2}B = 1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$$

$$= 1 - \frac{2+3}{2.3} + \frac{3+4}{3.4} - \frac{4+5}{4.5} + \dots - \frac{8+9}{8.9} + \frac{9+10}{9.10}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \dots - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ta có $2A + \frac{455}{3}B = 9909 + 91 = 10000.$

MỤC LỤC

		Trang
	HDG - ĐS	
Lời nói đầu	3	
Chương I. ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN		
Chuyên đề 1. Các phép tính về số tự nhiên	5	108
Chuyên đề 2. Bài toán thực tế	14	113
Chuyên đề 3. Tính chất chia hết. Dấu hiệu chia hết	19	115
Chuyên đề 4. Số nguyên tố. Hợp số	28	121
Chuyên đề 5. Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất	33	124
Chương II. SỐ NGUYÊN		
Chuyên đề 6. Các phép tính về số nguyên	40	129
Chuyên đề 7. Tính chia hết trong tập hợp số nguyên	47	131
Chương III. PHÂN SỐ		
Chuyên đề 8. Tính chất cơ bản của phân số. Rút gọn phân số	51	133
Chuyên đề 9. So sánh phân số	54	136
Chuyên đề 10. Các phép tính về phân số	58	137
Chuyên đề 11. Các bài toán về phân số và tỉ số	66	144
Chuyên đề 12. Phần trăm	71	149
Chuyên đề 13. Toán chuyển động	75	151
CHUYÊN ĐỀ NÂNG CAO		
Chuyên đề 14. Hệ ghi số với cơ số bất kì	82	156
Chuyên đề 15. Dãy số viết theo quy luật	89	158

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo

và chịu trách nhiệm nội dung : Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**
Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập lần đầu và tái bản : **PHAN THỊ MINH NGUYỆT**

Sửa bản in : **PHẠM THỊ THANH NAM**

Trình bày bìa : **LƯƠNG QUỐC HIỆP**

Thiết kế sách : **NGUYỄN THANH THUYẾT - ĐINH XUÂN DUNG**

Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
HÀ NỘI**

Công ty CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

TÀI LIỆU CHUYÊN SỐ TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ LỚP 6

TẬP MỘT - SỐ HỌC

Mã số: T6T85h3 - SBE

Số ĐKKH xuất bản: 124-2013/CXB/181-116/GD.

In 6.000 bản (QĐ: 62), khổ 17 x 24 cm.

In tại Công ty Cổ phần In & Bao bì Đồng Tháp: 212 Lê Lợi -
Phường 3 - Thị xã Sạ Đéc - Tỉnh Đồng Tháp.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2013.